so erhält man:

$$\cos c \, \frac{\partial \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\partial \beta}{\cos^2 \beta},$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \, \frac{1}{\cos c} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Da nun

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + tang^2 \alpha},$$

so kann man für diesen Ausdruck auch schreiben:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 + tang^2 \alpha}{1 + tang^2 \beta} \cos c = \frac{1 + tang^2 \alpha}{1 + tang^2 \alpha \, . \, \cos^2 c} \cos c$$

$$= \frac{1 + tang^2 \alpha}{1 + tang^2 \alpha \, (1 - \sin^2 c)} \cos c = \frac{\cos c}{1 - \sin^2 \alpha \, . \, \sin^2 c},$$

welcher Ausdruck sich findet, wenn man im Nenner einmal

$$tang^2 \alpha = \sin^2 \alpha \, (1 + tang^2 \alpha)$$

setzt.

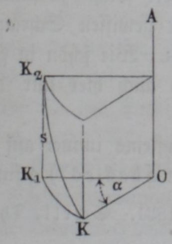
§. 25. **Allgemeine Bewegung eines Körpers.** Nachdem in dem Vorangehenden die Bewegung eines Körpers für specielle Fälle untersucht worden, sei nunmehr die Bewegung ganz beliebig vorausgesetzt und in ihrer allgemeinsten Form ins Auge gefaßt. Diese allgemeinste Bewegungsform ist offenbar dadurch gekennzeichnet, daß keiner der Punkte des Körpers festgehalten oder durch einen äußeren Zwang veranlaßt ist, in einer bestimmten Linie oder Fläche zu verbleiben, daß vielmehr der Körper vollkommen frei beweglich und einer beliebigen Anzahl ganz willkürlicher Drehungen und Verschiebungen unterworfen ist. Wie nun auch diese letzteren Bewegungen beschaffen sein mögen, so ist doch unter allen Umständen eine Vereinigung derselben zu einer resultirenden Verschiebung möglich, wie sich aus folgender Betrachtung leicht ergiebt.

Seien die Verschiebungen, welchen der Körper während einer gewissen Zeit ausgesetzt ist, durch die Strecken s_1, s_2, s_3 . . . ihrer Richtung und Größe nach dargestellt, so kann man zunächst vermöge des Parallelepipedums der Bewegungen alle diese Verschiebungen zu einer resultirenden Translation vereinigen, welche mit s bezeichnet sein mag.

Um auch die einzelnen Drehungen um die Axen A_1, A_2, A_3 . . ., welche beliebig im Raume zerstreut anzunehmen sind, mit einander zu vereinigen, kann man nach §. 4 die Axen sämmtlich parallel ihren Richtungen nach einem beliebigen Punkte O verlegen, wenn man nur bei jeder Verlegung einer Axe dem Körper noch eine Verschiebung σ ertheilt, deren Größe durch

$\sigma = 2 d \sin \frac{\alpha}{2}$ ausgedrückt ist, unter d die Größe der Axenverlegung und unter α den zugehörigen Drehungswinkel verstanden. Vermöge dieser Construction hat man die Drehungen des Körpers um eine Anzahl im Raume sich kreuzender Axen ersetzt durch eine gleiche Anzahl von gleich großen Drehungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ um Axen, die jenen parallel sind und sämmtlich durch einen Punkt O hindurchgehen, und eine ebenso große Anzahl von Verschiebungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$ Nun können alle diese Drehungen nach §. 22 zu einer einzigen vereinigt werden, deren Axe OA ebenfalls durch den Punkt O geht, und ebenso lassen sich die Verschiebungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$ nach dem Parallelepiped der Bewegungen zu einer Verschiebung σ zusammensetzen, welche wieder mit der früher gedachten Resultante s vereinigt werden kann zu einer Gesammtresultante S. Hierdurch ist die Summe aller Bewegungen zurückgeführt auf eine Drehung im Betrage α um die Axe OA und auf eine Verschiebung, welche durch S der Richtung und Größe nach angegeben ist. Die Richtung von S und diejenige der Axe OA werden im Allgemeinen sich kreuzen, und es möge γ den Winkel bezeichnen, welchen dieselben mit einander bilden. Man kann alsdann die resultirende Verschiebung S in zwei Componenten $S \cos \gamma$ und $S \sin \gamma$ zerlegen, von welchen die erstere $S \cos \gamma$ parallel zur Axe OA der resultirenden Drehung gerichtet ist, während die andere $S \sin \gamma$ auf dieser Axe senkrecht steht. Diese letztere Verschiebung $S \sin \gamma$ zusammen mit der Drehung α um die Axe OA läßt sich nun aber nach §. 4 ersetzen durch eine einzige Drehung von demselben Betrage α um eine zu OA in dem Abstande $d = \dfrac{S \sin \gamma}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ mit ihr parallele Axe, und es bleibt daher neben dieser Drehung nur noch die der Drehaxe parallele Verschiebung $S \cos \gamma$ übrig. Aus vorstehenden Betrachtungen folgt, daß es immer möglich ist, die Ortsveränderung, welche ein ganz frei beweglicher Körper in Folge beliebiger Drehungen und Verschiebungen erleidet, durch eine einzige Drehung um eine Axe OA, Fig. 25, im Winkelbetrage $K O K_1 = \alpha$, verbunden mit einer Verschiebung $K_1 K_2 = s$ parallel zu jener Axe zu ersetzen.

Fig. 25.



Die Bewegung eines Punktes, vermöge welcher derselbe um eine gewisse Axe in einem bestimmten Gerade gedreht und gleichfalls parallel dieser Axe um ein gewisses Stück verschoben wird, nennt man eine schraubenförmige, und mit Rücksicht hierauf kann man den obigen Satz auch dahin aussprechen, daß jede Ortsveränderung, die ein frei beweglicher Körper erleidet, auch her=

vorgebracht werden kann durch eine bestimmte Schraubenbewegung um eine gewisse Axe. Faßt man bei einem bewegten Körper die unmittelbar aufeinander folgenden Lagen desselben ins Auge, nimmt also eine Aufeinanderfolge von unendlich kleinen Ortsveränderungen an, so werden natürlich auch die diesen entsprechenden Schraubenbewegungen unendlich klein, und es folgt weiter, daß man die ganze Bewegung eines freien Körpers im Laufe einer gewissen Zeit ersetzen kann durch eine continuirliche Aufeinanderfolge von Schraubenbewegungen.

In dem Vorhergehenden ergab sich aus einer geeigneten Vereinigung der beliebigen Verschiebungen und Drehungen die Schraubenbewegung, es ist daher ohne Weiteres klar, daß der umgekehrte Weg zu einer Zerlegung der Schraubenbewegung in beliebige Verschiebungen und Drehungen führen muß. Es kann hier insbesondere noch bemerkt werden, daß jede Schraubenbewegung sich stets in unendlich mannichfacher Weise durch zwei Drehungen um zwei sich kreuzende Axen ersetzen läßt und umgekehrt.

Denkt man sich nämlich einen Körper, welcher zweien Drehungen um zwei zu einander windschiefe Axen A und B ausgesetzt ist, so läßt sich die eine Drehaxe A parallel mit sich selbst unter Zuhülfenahme einer entsprechenden Translation (s. §. 4) so weit verschieben, bis sie die andere Axe B in einem Punkte trifft, worauf die beiden Drehungen sich nach §. 22 zu einer einzigen um eine resultirende Axe C zusammensetzen lassen. Gegen diese Axe C muß die aus der Verlegung von A herrührende Verschiebung schräg geneigt sein, weil dieselbe senkrecht zu A steht, C aber als resultirende Axe von A und B eine andere Richtung hat als A. Wenn man daher diese Verschiebung in zwei Componenten parallel mit C und senkrecht zu C zerlegt, so läßt sich die senkrechte Componente zusammen mit der Drehung um C ersetzen durch eine Drehung um eine zu C parallele Axe C_1, welche als die Axe einer Schraubenbewegung angesehen werden kann, deren Translationsbewegung durch die zweite zu C parallele Componente der erwähnten Verschiebung gegeben ist. Natürlich kann man auch umgekehrt jede Schraubenbewegung in zwei Drehungen um zwei sich kreuzende Axen zerlegen, wovon die eine beliebig angenommen werden kann. Je zwei solche zu einander windschiefe Axen, deren Drehungen zusammen einer gewissen Schraubenbewegung gleichwerthig sind, heißen conjugirte Axen. Wie schon in §. 22 ausgeführt, ist die Aufeinanderfolge der Rotationen auch hier nur dann gleichgültig, wenn die Drehungen unendlich klein sind.

Der Satz, wonach die beliebige Bewegung eines Systems immer auf eine Schraubenbewegung zurückgeführt werden kann, ist von Chasles*) gefunden

*) Bulletin des sciences mathém. von Ferusac. 1831. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte 1870. Thl. II, Cap. V.

worden, und wird die Axe der Schraubenbewegung wohl auch die Central-axe der Bewegung genannt.

Axoide. Wenn ein frei beweglicher Körper K nach einander in verschiedene Lagen K_1, K_2, K_3 ... gelangt, so kann man nach dem Vorstehenden immer gewisse schraubenförmige Bewegungen $\alpha_1 s_1$, $\alpha_2 s_2$, $\alpha_3 s_3$ ... um bestimmte Axen A_1, A_2, A_3 ... angeben, welche dasselbe Resultat der Ueberführung des Körpers K in die Lagen K_1, K_2, K_3 ... herbeiführen. Der Körper nimmt also in Folge dieser Schraubenbewegungen dieselben Endstellungen K_1, K_2, K_3 ... ein, wie vermöge seiner wirklichen Bewegung, ohne daß indessen die Bewegungen auch in den Zwischenstellungen zwischen K_1 und K_2, K_2 und K_3 ... übereinstimmten, so lange es sich um Bewegungen von endlicher Größe handelt. Nur wenn die Ortsveränderungen zwischen den verschiedenen Lagen K_1, K_2, K_3 ... unendlich klein sind, wird die continuirliche Folge der entsprechenden unendlich kleinen Schraubenbewegungen für jeden Augenblick mit der wirklichen Bewegung des Körpers identisch sein. Die in unendlich kleinen Zeitintervallen auf einander folgenden Schraubenbewegungen geschehen im Allgemeinen um verschiedene feste Axen im Raume, und es ist leicht zu erkennen, daß diese Axen, deren gegenseitige Abstände ebenfalls unendlich klein sein müssen, in ihrer Gesammtheit eine gewisse feste Fläche im Raume bestimmen. §. 26.

Sind A_1, A_2, A_3 ... diese Axen oder die auf einanderfolgenden Erzeugungslinien dieser festen Fläche A, so giebt es, ähnlich wie in den früheren Fällen bei dem ebenen und dem um einen Punkt rotirenden Systeme, auch hier eine mit dem Körper verbundene zweite Fläche, welche mit jener ersten während der Bewegung stets in Berührung bleibt. Sei z. B. zu der gewissen Zeit t die augenblickliche Schraubenaxe in A_1 gegeben, so fällt eine gewisse Gerade B_1 des bewegten Körpers mit A_1 zusammen, um welche die Drehung α_1 stattfindet, während gleichzeitig zufolge der Schraubenbewegung der Körper mit der Geraden B_1 auf der festen Axe A_1 sich um die Größe s_1 verschiebt. Nach Vollführung dieser unendlich kleinen Schraubung um die Axe A_1 folgt eine zweite um die benachbarte Erzeugungslinie A_2 der festen Fläche, mit welcher nun auch eine andere Gerade B_2 des Körpers zusammenfällt. Der Körper dreht sich jetzt nicht nur um diese zweite Axe A_2 im Betrage α_2, sondern er verschiebt sich mit der Geraden B_2 auf der festen Axe A_2 um die Größe s_2, worauf eine dritte Gerade B_3 des Körpers in die darauf folgende Schraubenaxe A_3 hineinfällt u. s. w. Alle die gedachten Geraden B_1, B_2, B_3 ..., welche in unendlich kleinen Abständen auf einander folgen, bilden daher eine gewisse, mit dem Körper verbundene geradlinige Fläche B. Man kann daher die beliebige Bewegung eines Körpers stets so auffassen, als wenn eine gewisse