Nach dem Vorstehenden kann daher jede beliebige Bewegung eines um einen festen Punkt rotirenden Körpers erzeugt werden durch Abrollen eines mit dem Körper verbundenen Kegelmantels, dessen Spitze in den festen Punkt fällt, auf einem festen Kegelmantel mit derselben Spitze, und ist die Berührungslinie dieser beiden Kegelflächen die jedesmalige augenblickliche Drehaxe des Körpers. Es ist also die Bewegung des Körpers für jeden Augenblick gegeben, sobald man die beiden Kegelflächen oder, was auf dasselbe hinausläuft, sobald man die beiden sphärischen Curven $P_1 P_2 P_3 \ldots$ und $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$ kennt. Es lassen sich hinsichtlich der Bewegungen der einzelnen Punkte des Körpers ähnliche Folgerungen ziehen, wie in §. 9 für das ebene System aus dem analogen Charakter der Polbahnen geschehen ist.

Beispiel. Der in §. 22 gefundene Satz vom Parallelogramm der §. 24.
Rotationen, welcher für unendlich kleine Drehungen gilt, hat auch für die Rotationsgeschwindigkeiten seine Geltung, da man diese Geschwindigkeiten als die unendlich kleinen Winkel betrachten muß, um welche in dem Zeitelemente ∂t der Körper um die betreffenden Axen gedreht wird. Bezeichnet man daher mit ω_1, ω_2, ω_3 die Winkelgeschwindigkeiten des bewegten Körpers in einem bestimmten Augenblicke um die entsprechenden Axen $OA, OB, OC \ldots$, so läßt sich die Axe der resultirenden Drehung, d. h. also die augenblickliche Drehaxe sowie die resultirende Drehungsgeschwindigkeit ω um diese Axe ganz ebenso nach dem Parallelepipedum der Rotationsgeschwindigkeiten bestimmen, wie man geradlinige Bewegungen oder Geschwindigkeiten zur Resultante zusammensetzt. Man hat dazu nur auf den Axen vom festen Punkte O aus Stücke abzutragen, welche den Drehungsgeschwindigkeiten ω_1, ω_2, $\omega_3 \ldots$ nach einem gewissen Maßstabe proportional sind, dann liefert die Diagonale des betreffenden Parallelepipedums in ihrer Richtung die Lage der Momentanaxe und in ihrer Länge nach dem zu Grunde gelegten Maßstabe die Größe der resultirenden Winkelgeschwindigkeit ω. Ferner ist die Geschwindigkeit v irgend eines Punktes A des Körpers, welcher von der Momentanaxe den senkrechten Abstand r hat, wie früher durch $v = r\omega$ gegeben. Daher ist auch hier die resultirende Winkelgeschwindigkeit des Körpers $\omega = \frac{v}{r}$ für jeden Augenblick bekannt, für welchen man die Geschwindigkeit v eines Punktes A und den Abstand r desselben von der jedesmaligen Momentanaxe kennt. Die Bestimmung der letzteren geschieht aber aus den bekannten sphärischen Bahnen zweier Punkte in analoger Weise, wie beim ebenen System, indem zwei durch den festen Punkt O und je einen der Punkte $A, B, C \ldots$ gelegte, zu den Bahnen dieser Punkte senkrechte Ebenen in ihrem Durchschnitte offenbar die Momentanaxe liefern müssen. Insbesondere läßt sich auch durch ähnliche Betrachtungen wie sie in §. 12 für das ebene System angestellt

wurden, für die Wechselgeschwindigkeit u der Momentanaxe wie dort die Beziehung finden:

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}.$$

Hierin hat man unter ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungshalbmesser derjenigen Schnittcurven in ihrem Berührungspunkte zu verstehen, die man erhält, wenn man die beiden mehrgedachten Kegelflächen durch eine Ebene schneidet, welche auf der Berührungslinie dieser Kegel oder der Momentanaxe im Abstande Eins vom festen Punkte senkrecht steht.

Als ein Beispiel für die Rotation eines Körpers um einen festen Punkt sei die in §. 8 und 13 betrachtete Bewegungsform, in entsprechender Weise verallgemeinert, hier näher geprüft. Dort wurden zwei Punkte A und B, Fig. 23, einer Geraden auf zwei führenden Geraden CD und CE zu verbleiben gezwungen, oder eigentlich waren es zwei in A und B auf dem System der parallelen Bewegungsebenen senkrechte Geraden, welche in zwei Ebenen verbleiben mußten, die in CD und CE ebenfalls senkrecht zu dem System der Bewegungsebenen zu denken sind. Man kann sich vorstellen, die drei Ebenen, die führenden CD und CE und die geführte AB schnitten sich beständig in einem Punkte in der Unendlichkeit, und bei dieser Vorstellung ergiebt sich sogleich, daß diese Bewegungsart nur einen speciellen Fall einer anderen vorstellt, wo der Durchschnitt der drei Ebenen ein fester Punkt O in endlicher Entfernung ist. In Folge der letzteren Annahme schneiden die in §. 8 parallel angenommenen Geraden durch A und B sich nunmehr in O und sei angenommen, der Schnitt geschehe unter rechten Winkeln, um

Fig. 23.

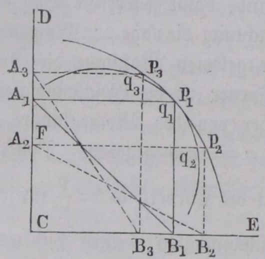
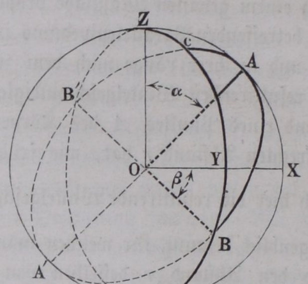


Fig. 24.



in dem Beispiele an den Mechanismus des sogenannten Universalgelenkes (s. unten) anzuschließen. Die zu betrachtende Bewegungsart läßt sich daher folgendermaßen kennzeichnen: Ein Körper wird einer solchen Bewegung ausgesetzt, daß zwei in ihm vorhandene sich rechtwinklig schneidende Geraden OA und OB, Fig. 24, gezwungen sind, in zwei sich schneidenden festen Ebenen

OXZ beziehungsweise OYZ zu verbleiben, und der Durchschnitt O der Geraden stets in denselben Punkt der Durchschnittslinie OZ der beiden Ebenen hineinfällt. (Wie aus dem Späteren folgen wird, ist bei dem Universalgelenke die Ebene der beiden rechtwinkeligen Geraden durch das sogenannte Kreuz repräsentirt, während die beiden Führungsebenen die auf den kuppelnden Wellen senkrechten durch die Gabelzinken gelegten Ebenen sind.)

Denkt man sich durch den festen Punkt O eine Kugel vom Halbmesser $OA = OB =$ Eins gelegt, so wird dieselbe von den beiden Führungsebenen OXZ und OYZ in den größten Kreisen ZAX und ZYB geschnitten, während der Durchschnitt der bewegten Ebene AOB mit der Kugelfläche durch den größten Kreis $ABA'B'$ dargestellt ist. Wenn die Gerade OA bei der vorausgesetzten Bewegung in den Durchschnitt OZ der beiden Führungsebenen hineinfällt, so muß wegen des rechten Winkels AOB die Gerade OB mit dem zu OZ senkrechten Durchmesser OY zusammenfallen. Nimmt man diese zugehörigen Lagen OZ und OY als Anfangslagen von OA und OB an, von denen die Drehungswinkel $ZOA = \alpha$ und $YOB = \beta$ gezählt werden, um welche die geführten Geraden in ihren Ebenen gedreht sind, so hat man für das sphärische Dreieck $OABZ$, wenn der Winkel $A(OZ)B$ zwischen den festen Ebenen mit c bezeichnet wird:

$$\cos AOB = \cos AOZ \,.\, \cos BOZ + \sin AOZ \,.\, \sin BOZ \,.\, \cos A(OZ)B$$

oder

$$\cos 90^0 = 0 = \cos\alpha \, \cos(90^0 + \beta) + \sin\alpha \, \sin(90^0 + \beta) \cos c.$$

Hierfür kann man schreiben:

$$0 = -\cos\alpha \, \sin\beta + \sin\alpha \, \cos\beta \, \cos c$$

oder nach Division mit $\cos\alpha \, \cos\beta$

$$\cos c = \frac{\tang\beta}{\tang\alpha}.$$

Die Drehungswinkel der beiden Geraden von den angenommenen Anfangslagen an gerechnet, sind also so beschaffen, daß ihre Tangenten in dem constanten Verhältniß $\cos c$ zu einander stehen.

Um auch das Verhältniß der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 der Geraden OA und ω_2 der Geraden OB zu finden, setze man:

$$\omega_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \text{ und } \omega_2 = \frac{\partial \beta}{\partial t}$$

folglich ist:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\partial \alpha}{\partial \beta}.$$

Diesen Ausdruck zu bestimmen differentiire man

$$\cos c \, \tang\alpha = \tang\beta,$$

so erhält man:

$$\cos c \frac{\partial \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\partial \beta}{\cos^2 \beta},$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \frac{1}{\cos c} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Da nun

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + tang^2 \alpha},$$

so kann man für diesen Ausdruck auch schreiben:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 + tang^2 \alpha}{1 + tang^2 \beta} \cos c = \frac{1 + tang^2 \alpha}{1 + tang^2 \alpha \,.\, \cos^2 c} \cos c$$

$$= \frac{1 + tang^2 \alpha}{1 + tang^2 \alpha\,(1 - \sin^2 c)} \cos c = \frac{\cos c}{1 - \sin^2 \alpha \,.\, \sin^2 c},$$

welcher Ausdruck sich findet, wenn man im Nenner einmal

$$tang^2 \alpha = \sin^2 \alpha\,(1 + tang^2 \alpha)$$

setzt.

§. 25. **Allgemeine Bewegung eines Körpers.** Nachdem in dem Vorangehenden die Bewegung eines Körpers für specielle Fälle untersucht worden, sei nunmehr die Bewegung ganz beliebig vorausgesetzt und in ihrer allgemeinsten Form ins Auge gefaßt. Diese allgemeinste Bewegungsform ist offenbar dadurch gekennzeichnet, daß keiner der Punkte des Körpers festgehalten oder durch einen äußeren Zwang veranlaßt ist, in einer bestimmten Linie oder Fläche zu verbleiben, daß vielmehr der Körper vollkommen frei beweglich und einer beliebigen Anzahl ganz willkürlicher Drehungen und Verschiebungen unterworfen ist. Wie nun auch diese letzteren Bewegungen beschaffen sein mögen, so ist doch unter allen Umständen eine Vereinigung derselben zu einer resultirenden Verschiebung möglich, wie sich aus folgender Betrachtung leicht ergiebt.

Seien die Verschiebungen, welchen der Körper während einer gewissen Zeit ausgesetzt ist, durch die Strecken $s_1, s_2, s_3 \ldots$ ihrer Richtung und Größe nach dargestellt, so kann man zunächst vermöge des Parallelepipedums der Bewegungen alle diese Verschiebungen zu einer resultirenden Translation vereinigen, welche mit s bezeichnet sein mag.

Um auch die einzelnen Drehungen um die Axen $A_1, A_2, A_3 \ldots$, welche beliebig im Raume zerstreut anzunehmen sind, mit einander zu vereinigen, kann man nach §. 4 die Axen sämmtlich parallel ihren Richtungen nach einem beliebigen Punkte O verlegen, wenn man nur bei jeder Verlegung einer Axe dem Körper noch eine Verschiebung σ ertheilt, deren Größe durch