einem Punkte schneiden, möglich gemacht, und man kann entsprechend den früher angeführten Sätzen vom Parallelogramm der (geradlinigen) Bewegungen, der Geschwindigkeiten 2c. von einem Polygon und einem Parallelepipedum der Drehungen sprechen, je nachdem die in einem Punkte sich schneidenden Axen von mehreren unendlich kleinen Drehungen in derselben oder in verschiedenen Ebenen liegen.

Ebenso gestattet der vorstehende Satz jederzeit die Zerlegung einer unendlich kleinen Drehung in zwei oder mehrere andere um Axen vor sich gehende, welche mit der Axe der Hauptdrehung in demselben Punkte sich schneiden. Für die Zerlegung gelten ähnliche Regeln, wie diejenigen sind, welche bei den analogen Sätzen des Parallelogramms der Bewegungen, Geschwindigkeiten 2c. früher an verschiedenen Stellen angeführt worden sind.

§. 23. **Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt.** Es ist bereits im vorigen Paragraphen bemerkt worden, daß bei der Ausführung der beiden Drehungen, welchen der Körper um zwei sich schneidende Axen unterworfen wird, der Schnittpunkt O der letzteren seine Lage im Raume nicht ändern kann. Dasselbe ist natürlich auch dann noch der Fall, wenn die Anzahl der Drehungen eine beliebig größere ist, vorausgesetzt nur, daß sämmtliche Drehaxen durch denselben Punkt O hindurchgehen. Wenn daher der in der Praxis häufigere Fall vorliegt, daß ein Körper mit einem seiner Punkte im absoluten Raume festgehalten wird, so kann man umgekehrt behaupten, daß sämmtliche Bewegungen, deren der Körper noch fähig ist, sich auf Drehungen um Axen beschränken müssen, welche letzteren durch den festen Punkt hindurchgehen. Denn es ist ebensowohl jede Translation als auch jede Drehung um eine andere nicht durch den festen Punkt O gehende Axe als unverträglich mit der unveränderlichen Lage des festen Punktes O ausgeschlossen. Bei dieser Bewegungsart wird irgend ein Punkt A des bewegten Körpers, welcher von dem festen Punkte O den Abstand $OA = r$ hat, offenbar stets auf einer zu O concentrischen Kugelfläche vom Halbmesser r verbleiben müssen, d. h. die Bahnen sämmtlicher Punkte des Körpers sind sphärische. Nach dem vorigen Paragraphen kann man nun stets zwei beliebig große, um zwei sich schneidende Axen erfolgende Drehungen ersetzen durch eine Drehung um eine gewisse, durch denselben Schnittpunkt mit jenen hindurchgehende Axe. Da diese Drehung sich weiter mit jeder dritten und vierten Drehung um Axen, die durch denselben Punkt hindurchgehen, vereinigen läßt, so geht daraus hervor, daß man jede Bewegung eines um einen Punkt rotirenden Körpers, aus wie viel verschiedenen Drehungen sie auch bestehen möge, immer ersetzen kann durch eine einzige Drehung um eine gewisse Axe, welche durch den festen Mittelpunkt hindurchgeht. Es sei nun ein Körper vorausgesetzt, von welchem ein Punkt O festgehalten werde, und denke man sich um diesen Punkt als Mittelpunkt eine feste Kugelfläche etwa vom Halbmesser gleich der Einheit gelegt. Die Lage des Körpers ist dann immer vollkommen bestimmt, wenn der Ort von zwei Punkten A und B des Körpers auf dieser Kugeloberfläche gegeben ist, da durch drei Punkte O, A und B die Lage eines Körpers ganz allgemein bestimmt ist. Man denke sich nun, daß nach Verlauf einer bestimmten Zeit der Körper aus seiner ursprünglichen Lage, die durch A und B bestimmt wird, in eine andere Lage gelangt sei, für welche jene Punkte nach A_1 beziehungsweise B_1 gekommen sind, welche Lage also etwa kurz durch $A_1 B_1$ bezeichnet sein möge. Dann ist nach dem Vorigen klar, daß der Körper aus seiner anfänglichen Lage AB in seine neue Lage $A_1 B_1$ durch eine Drehung um eine gewisse Axe übergeführt werden kann, welche Axe in der im Vorstehenden angegebenen Weise zu bestimmen ist. Es möge mit P_1 derjenige Punkt auf der gedachten Kugelfläche bezeichnet sein, in welcher die letztere von dieser Axe getroffen wird. Denkt man sich hierauf den Körper nach einer gewissen Zeit in eine dritte Lage $A_2 B_2$ gekommen, so läßt sich wiederum eine Axe OP_2 von solcher Beschaffenheit angeben, daß eine Drehung des Körpers um sie den ersteren aus der Lage $A_1 B_1$ in diejenige $A_2 B_2$ überführt. Setzt man die hier angedeutete Construction für eine beliebige Anzahl von aufeinanderfolgenden Lagen des Körpers fort, so erhält man eine gleiche Anzahl von Axen OP_1, OP_2, OP_3 . . ., die sämmtlich durch den festen Punkt O hindurchgehen und die Kugeloberfläche in den Punkten P_1, P_2, P_3 . . . schneiden. Alle diese Axen bilden die Kanten einer gewissen Pyramide, welche die Kugelfläche in dem sphärischen Polygon $P_1 P_2 P_3$ . . . treffen, und jede von ihnen, OP_n, ist als eine Drehaxe aufzufassen, um welche zu der betreffenden Zeit der Körper gedreht werden muß, um aus einer Lage $A_{n-1} B_{n-1}$ in die darauf folgende $A_n B_n$ übergeführt zu werden. Nimmt man nun die aufeinander folgenden Lagen des Körpers näher und näher aneinander liegend, bis ihre Abstände unendlich klein werden, so macht die sprungweise Lagenveränderung des Körpers einer stetigen Aufeinanderfolge Platz, wie sie bei der effectiven Bewegung wirklich stattfindet. Die besagte Pyramide geht hierbei in eine Kegelfläche über, deren Spitze in dem festen Punkte liegt, und welche die um diesen Punkt concentrische Kugelfläche in einer gewissen Curve $P_1 P_2 P_3$ . . . schneidet, in welche das vorgedachte sphärische Polygon in der Grenze übergegangen ist. Die einzelnen Seiten OP oder Erzeugungslinien sind als die Drehaxen aufzufassen, um welche nach und nach dem Körper unendlich kleine Drehungen ertheilt werden müssen, wenn die wirkliche Bewegung des Körpers hervorgebracht werden soll.

Diejenige Erzeugungslinie dieser Kegelfläche, um welche in einem bestimmten Augenblicke der Körper zu drehen ist, heißt die augenblickliche Drehaxe oder die Momentanaxe für das betreffende Zeitelement, und entspricht dieselbe offenbar dem Pol oder Momentancentrum des ebenen Systems, unter welchem ja auch streng genommen eine Axe zu verstehen ist, welche im Pol zu dem System der parallelen Ebenen senkrecht steht. Die gedachte feste Kegelfläche, deren Mittelpunkt in O liegt, entspricht in derselben Art der festen Polbahn beim ebenen System, welche gleichfalls streng genommen nicht als eine Curve, sondern als eine feste Cylinderfläche anzusehen ist, deren Erzeugungslinie die Momentanaxe ist. Ebenso wie die Momentanaxe beim ebenen System auf dieser Cylinderfläche oder Polbahn entlang wandert, so wird in dem vorliegendem Falle die Momentanaxe auf der Kegelfläche $O P_1 P_2 P_3 \ldots$ herumgeführt. Es erhellt hieraus, daß die Bewegung des ebenen Systems nur ein specieller Fall des um einen festen Punkt rotirenden Systems ist, zu welchem man gelangt, wenn man den festen Punkt O ins Unendliche fortrücken läßt.

Wie man nun bei dem ebenen System neben der festen noch eine zweite, mit dem bewegten Körper verbundene, daher selbst bewegliche Polbahn angeben kann, welche auf der festen abgerollt wird, ebenso giebt es auch in dem vorliegenden Falle eine zweite Kegelfläche, welche mit dem bewegten Körper verbunden ist und an dessen Bewegung Theil nimmt. Der Mittelpunkt derselben fällt in den festen Punkt O oder den Mittelpunkt der festen Kegelfläche hinein, auf welcher letzteren bei der Systembewegung ein Abwälzen der beweglichen Kegelfläche stattfindet. Denkt man sich nämlich auch mit dem bewegten Körper eine um O concentrische Kugelfläche vom Halbmesser Eins verbunden, welche also mit der schon betrachteten festen Kugelfläche zusammenfällt, so wird diese Kugelfläche in einem gewissen Augenblicke, wo $O P_1$ Momentanaxe ist, in einem Punkte Q_1 getroffen, welcher mit dem Punkte P_1 auf der festen Kugelfläche zusammenfällt. Im nächsten Augenblicke wird die Momentanaxe durch die unendliche nahe gelegene Erzeugungslinie $O P_2$ der festen Kegelfläche gegeben sein. Der bewegte Körper tritt nun aber nicht mehr mit der Geraden $O Q_1$ in die neue Momentanaxe $O P_2$, sondern mit einer anderen Geraden $O Q_2$, welche die bewegte Kugelfläche in Q_2 trifft. Ebenso wird der Körper mit den aufeinanderfolgenden Momentanaxen $O P_3$, $O P_4 \ldots$ der festen Kegelfläche nach und nach mit ebenso vielen auf einander folgenden Geraden $O Q_3$, $O Q_4$ in Berührung kommen. Alle diese durch O gehenden Geraden bilden nun wieder eine mit dem bewegten Körper verbundene Kegelfläche, welche, der beweglichen Polbahn des ebenen Systems analog, auf der festen Kegelfläche $O P_1 P_2 P_3 \ldots$ sich abwälzt. Diese Kegelfläche trifft die bewegliche Kugel in einer sphärischen Curve $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$, welche die andere Curve $P_1 P_2 P_3 \ldots$ in einem Punkte (P_1) berührt und auf dieser bei dem Abwälzen des Kegels $O Q$ auf dem Kegel $O P$ entlang rollt. Die Analogie mit der beweglichen Polbahn des ebenen Systems ist auch hier unverkennbar.

Nach dem Vorstehenden kann daher jede beliebige Bewegung eines um einen festen Punkt rotirenden Körpers erzeugt werden durch Abrollen eines mit dem Körper verbundenen Kegelmantels, dessen Spitze in den festen Punkt fällt, auf einem festen Kegelmantel mit derselben Spitze, und ist die Berührungslinie dieser beiden Kegelflächen die jedesmalige augenblickliche Drehaxe des Körpers. Es ist also die Bewegung des Körpers für jeden Augenblick gegeben, sobald man die beiden Kegelflächen oder, was auf dasselbe hinausläuft, sobald man die beiden sphärischen Curven $P_1 P_2 P_3 \ldots$ und $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$ kennt. Es lassen sich hinsichtlich der Bewegungen der einzelnen Punkte des Körpers ähnliche Folgerungen ziehen, wie in §. 9 für das ebene System aus dem analogen Charakter der Polbahnen geschehen ist.

Beispiel. Der in §. 22 gefundene Satz vom Parallelogramm der Rotationen, welcher für unendlich kleine Drehungen gilt, hat auch für die Rotationsgeschwindigkeiten seine Geltung, da man diese Geschwindigkeiten als die unendlich kleinen Winkel betrachten muß, um welche in dem Zeitelemente ∂t der Körper um die betreffenden Axen gedreht wird. Bezeichnet man daher mit ω_1, ω_2, ω_3 die Winkelgeschwindigkeiten des bewegten Körpers in einem bestimmten Augenblicke um die entsprechenden Axen $OA, OB, OC \ldots$, so läßt sich die Axe der resultirenden Drehung, d. h. also die augenblickliche Drehaxe sowie die resultirende Drehungsgeschwindigkeit ω um diese Axe ganz ebenso nach dem Parallelepipedum der Rotationsgeschwindigkeiten bestimmen, wie man geradlinige Bewegungen oder Geschwindigkeiten zur Resultante zusammensetzt. Man hat dazu nur auf den Axen vom festen Punkte O aus Stücke abzutragen, welche den Drehungsgeschwindigkeiten ω_1, ω_2, $\omega_3 \ldots$ nach einem gewissen Maßstabe proportional sind, dann liefert die Diagonale des betreffenden Parallelepipedums in ihrer Richtung die Lage der Momentanaxe und in ihrer Länge nach dem zu Grunde gelegten Maßstabe die Größe der resultirenden Winkelgeschwindigkeit ω. Ferner ist die Geschwindigkeit v irgend eines Punktes A des Körpers, welcher von der Momentanaxe den senkrechten Abstand r hat, wie früher durch $v = r\omega$ gegeben. Daher ist auch hier die resultirende Winkelgeschwindigkeit des Körpers $\omega = \frac{v}{r}$ für jeden Augenblick bekannt, für welchen man die Geschwindigkeit v eines Punktes A und den Abstand r desselben von der jedesmaligen Momentanaxe kennt. Die Bestimmung der letzteren geschieht aber aus den bekannten sphärischen Bahnen zweier Punkte in analoger Weise, wie beim ebenen System, indem zwei durch den festen Punkt O und je einen der Punkte $A, B, C \ldots$ gelegte, zu den Bahnen dieser Punkte senkrechte Ebenen in ihrem Durchschnitte offenbar die Momentanaxe liefern müssen. Insbesondere läßt sich auch durch ähnliche Betrachtungen wie sie in §. 12 für das ebene System angestellt §. 24.