man z. B. den Pol P dadurch gefunden, daß man die Normalen in A und B auf den bekannten Geschwindigkeitsrichtungen zeichnet, so erhält man in $\frac{p_a}{GA} \cdot GP$ die Beschleunigung des Pols. Dieser hat aber nach §. 14 eine Beschleunigung $u\omega$ in der Richtung der Polbahnnormale. Setzt man daher

$$\frac{p_a}{GA} \cdot GP = u\omega,$$

so erhält man den Werth für die Wechselgeschwindigkeit u, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω bekannt ist. Bildet endlich die Beschleunigung p_a mit dem Strahl GA den Winkel α, so hat man die senkrecht auf dem Strahle GA stehende Componente der Beschleunigung von A gleich $p_a \sin\alpha$, und da dieselbe den Werth $GA \cdot \frac{\partial\omega}{\partial t}$ haben muß, so findet man:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{p_a}{GA} \sin\alpha$$

u. s. f.

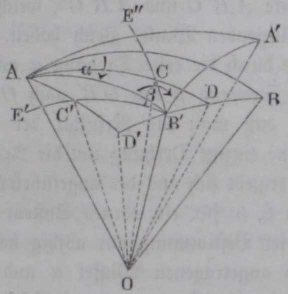
§. 22. **Parallelogramm der Drehungen.** Bei den bisherigen Ermittelungen wurde immer vorausgesetzt, daß das bewegte System ein solches sei, bei welchem die Bahnen sämmtlicher Punkte in einer Schaar paralleler Ebenen gelegen sind, und daß also jeder einzelne Punkt fortwährend in der ihm zugehörigen Ebene verbleibe, weshalb auch schlechtweg von der Bewegung eines ebenen Systems gesprochen wurde. Bei dieser Bewegung, bei welcher die vorkommenden Drehaxen unter sich parallel, nämlich senkrecht zu den parallelen Ebenen sind, genügte die Untersuchung der Bewegung in einer einzigen dieser Parallelebenen zur Bestimmung der Bewegung des ganzen Systems. Wenn nun auch die weitaus überwiegende Mehrzahl der Maschinengetriebe, denen man in der Praxis begegnet, auf diesen einfachen Fall der Bewegung in einer Ebene zurückgeführt werden kann, so kommen doch auch zuweilen Mechanismen vor, bei welchen die Bewegungen der einzelnen Punkte einen allgemeineren und weniger einfachen Charakter haben. Insbesondere sind die Axen, um welche Rotationen des Körpers eintreten, nicht immer parallel.

Der allgemeinste Fall der Bewegung ist derjenige, in welchem das System irgend welchen Translationen und Rotationen unterliegt, die nach beliebig im Raume zerstreuten Richtungen, resp. um beliebig sich kreuzende Axen stattfinden. Bevor dieser allgemeinste Fall besprochen wird, sei der specielle näher untersucht, daß das System zweien Rotationen um zwei sich schneidende Axen unterworfen ist.

Es seien OA und OB, Fig. 21, zwei in O sich schneidende Geraden in einem bewegten Körper, welcher nach einander um diese Axen zwei Drehungen empfangen soll, und zwar in dem Winkelbetrage α um OA und β um OB.

In analoger Art wie in §. 5 für ein ebenes System geschehen, ist auch hier leicht nachzuweisen, daß derselbe Erfolg durch eine einzige Drehung um eine gewisse Axe OC erreicht werden kann.

Fig. 21.



Zu dem Zwecke denke man sich um O als Mittelpunkt fest im absoluten Raume eine Kugelfläche von dem Halbmesser gleich der Einheit gelegt, welche von den Axen OA und OB in A resp. B getroffen werde. Empfängt nun der Körper eine Drehung um die Axe OA im Betrage $\alpha = B(OA)B'$, so gelangt dadurch die Gerade OB des Körpers, welche als nachherige Drehaxe fungiren soll, in die Lage OB', welche als ihre Endlage anzusehen ist, da sie bei der folgenden Drehung des Körpers um sie selbst ihre Lage OB' unverändert beibehält. Findet nun diese Drehung um OB' in dem Winkelbetrage $A(OB')A' = \beta$ statt, so wird dadurch die Axe OA in ihre Endlage OA' übergeführt. Zunächst ist ersichtlich, daß der Schnittpunkt O der beiden Axen, vermöge eben seiner Eigenschaft als solcher, seinen Ort im Raume nicht geändert hat, und da außer ihm die neuen Lagen der Punkte A und B in A' und B' durch die Winkel α und β gegeben sind, so ist durch die drei nicht in gerader Linie liegenden Punkte O, A' und B' auch überhaupt die Lage des ganzen Systems bestimmt.

Wenn man sich nun durch OA eine Ebene OAD gelegt denkt, welche den Drehungswinkel $B(OA)B' = \alpha$ halbirt, so daß also $D(OA)B' = \frac{\alpha}{2}$ ist, so wird diese Ebene OAD durch die erste Drehung um OA in die Lage OAD' gelangen, vorausgesetzt, daß $B'(OA)D' = \frac{\alpha}{2}$, also $D(OA)D' = \alpha$ ist. Ebenso denke man sich nach Vollführung der zweiten Drehung um OB' eine Ebene $OB'E''$ mit dem System verbunden, welche durch die zweite Drehaxe in ihrer definitiven Lage OB' so gelegt ist, daß sie den Winkel $A(OB')A' = \beta$ halbirt, so daß also $A(OB')E'' = \frac{\beta}{2}$ ist. Man erkennt dann leicht, daß diese Ebene vor Ausführung der zweiten Drehung die Lage $OB'E'$ haben mußte, vorausgesetzt nämlich, daß der Winkel $E'(OB')A$ ebenfalls gleich $\frac{\beta}{2}$ gemacht ist. Diese Ebene $OB'E'$ schneidet sich mit der Ebene OAD' in dem Kugelradius OC', und es er=

giebt sich ohne Weiteres aus der Construction, daß diese Schnittlinie $O\,C'$ durch die zweite Drehung um $O\,B'$ in die Lage $O\,C$ übergeführt wird, so daß sie mit der Durchschnittslinie zusammenfällt, in welcher die beiden winkelhalbirenden Ebenen $O\,A\,D$ und $O\,B'\,E''$ sich treffen. Dies folgt aus der Symmetrie der beiden sphärischen Dreiecke $A\,B'\,C$ und $A\,B'\,C'$, welche eine Seite $A\,B'$ gemeinschaftlich und die anliegenden Winkel gleich haben. Die Gerade $O\,C$ ist daher eine solche, welche durch die erste Drehung α um OA nach OC' gelangt und durch die zweite Drehung β um $O\,B'$ nach $O\,C$ zurückgeführt worden ist. Daraus folgt, daß man das Resultat der beiden Drehungen auch erreichen muß durch eine einzige Drehung um die Axe OC.

Die Lage der resultirenden Axe $O\,C$ ergiebt sich aus der angeführten Construction ganz von selbst analog der in §. 5 für ein ebenes System angegebenen Regel, wonach man behufs dieser Bestimmung nur nöthig hat, die beiden an $O\,A$ und $O\,B'$ entsprechend angetragenen Winkel α und β zu halbiren. Auch der Betrag γ der resultirenden Drehung um $O\,C$ folgt aus der Figur mit Rücksicht darauf, daß durch diese Drehung die Axe $O\,A$ nach $O\,A'$ und $O\,B$ nach $O\,B'$ übergeführt werden muß. Es ist daher offenbar der Außenwinkel $D(O\,C)B' = E''(O\,C)A$ des sphärischen Dreiecks $AB'C$ gleich dem halben Drehungswinkel um die resultirende Axe $O\,C$.

Dieser halbe Drehungswinkel $\frac{\gamma}{2}$ bestimmt sich durch die bekannte trigonometrische Beziehung sphärischer Dreiecke:

$$\cos\,.\,A(OC)\,B' = \cos\left(180^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$
$$+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos A\,O\,B'$$

oder

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos A\,O\,B'.$$

Ebenso gilt für die Lage der resultirenden Axe die Beziehung:

$$\frac{\sin A\,O\,C}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin B'\,O\,C}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin A\,O\,B'}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Daß bei verschiedenen Drehungsrichtungen die Winkel α und β in entsprechendem Sinne angetragen werden müssen, ist an sich deutlich. Es ist auch hier, gerade wie beim ebenen System und zwar aus ganz analogen Gründen wie in §. 5 und 6 angegeben worden, eine Veränderung in der Aufeinanderfolge der Drehungen nur dann zulässig, wenn die Drehungswinkel α und β und daher auch γ unendlich kleine Größen sind. Wenn dies der

Fall ist, so liegt die Axe OC der resultirenden Drehung in der Ebene AOB' der beiden Axen, und man hat, da

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2};\ \sin\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} \text{ und } \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

gesetzt werden muß,

$$\frac{\sin AOC}{\beta} = \frac{\sin B'OC}{\alpha} = \frac{\sin AOB'}{\gamma}.$$

Dieser Gleichung wird offenbar Genüge geleistet durch die Seiten eines Dreiecks und deren gegenüberliegende Winkel, und es ergiebt sich daher in diesem Falle zur Bestimmung der resultirenden Drehung γ die folgende Construction: Man trägt auf den Richtungen der Axen OA und OB',

Fig. 22.

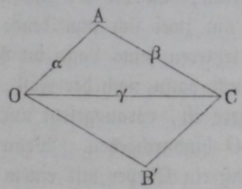


Fig. 22 von O aus die Stücke OA proportional α und OB' proportional β auf, die Diagonale OC des aus OA und OB' construirten Parallelogramms giebt dann die Richtung der Axe der resultirenden Drehung an, und die Länge OC ist dem Drehungswinkel γ der resultirenden Drehung nach demselben Verhältnisse proportional, nach welchem OA und OB' mit α und beziehungsweise β verhältnißgleich angenommen sind. Die Richtigkeit der Construction folgt ohne Weiteres daraus, daß in dem Parallelogramme die Gleichung erfüllt ist:

$$\frac{\sin AOC}{\beta} = \frac{\sin B'OC}{\alpha} = \frac{\sin AOB'}{\gamma},$$

welche für die resultirende Drehung gilt.

Das hierin enthaltene Gesetz, welches man als das vom Parallelogramm der Rotationen bezeichnet, läßt sich demnach dahin aussprechen. Die Resultante zweier unendlich kleinen Drehungen um zwei sich schneidende Axen ist eine Drehung um eine durch den Schnittpunkt der ersten beiden Axen gehende und in deren Ebene liegende dritte Axe, und zwar bestimmt die Diagonale desjenigen Parallelogramms, dessen Seiten den Axen parallel und den zugehörigen Drehungswinkeln proportional sind, durch ihre Richtung die Lage der resultirenden Axe und durch ihre Länge die Größe der resultirenden Drehung.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes ist die Zusammensetzung beliebig vieler unendlich kleinen Drehungen um Axen, die sich sämmtlich in einem Punkte schneiden, möglich gemacht, und man kann entsprechend den früher angeführten Sätzen vom Parallelogramm der (geradlinigen) Bewegungen, der Geschwindigkeiten ꝛc. von einem Polygon und einem Parallelepipedum der Drehungen sprechen, je nachdem die in einem Punkte sich schneidenden Axen von mehreren unendlich kleinen Drehungen in derselben oder in verschiedenen Ebenen liegen.

Ebenso gestattet der vorstehende Satz jederzeit die Zerlegung einer unendlich kleinen Drehung in zwei oder mehrere andere um Axen vor sich gehende, welche mit der Axe der Hauptdrehung in demselben Punkte sich schneiden. Für die Zerlegung gelten ähnliche Regeln, wie diejenigen sind, welche bei den analogen Sätzen des Parallelogramms der Bewegungen, Geschwindigkeiten ꝛc. früher an verschiedenen Stellen angeführt worden sind.

§. 23. **Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt.** Es ist bereits im vorigen Paragraphen bemerkt worden, daß bei der Ausführung der beiden Drehungen, welchen der Körper um zwei sich schneidende Axen unterworfen wird, der Schnittpunkt O der letzteren seine Lage im Raume nicht ändern kann. Dasselbe ist natürlich auch dann noch der Fall, wenn die Anzahl der Drehungen eine beliebig größere ist, vorausgesetzt nur, daß sämmtliche Drehaxen durch denselben Punkt O hindurchgehen. Wenn daher der in der Praxis häufigere Fall vorliegt, daß ein Körper mit einem seiner Punkte im absoluten Raume festgehalten wird, so kann man umgekehrt behaupten, daß sämmtliche Bewegungen, deren der Körper noch fähig ist, sich auf Drehungen um Axen beschränken müssen, welche letzteren durch den festen Punkt hindurchgehen. Denn es ist ebensowohl jede Translation als auch jede Drehung um eine andere nicht durch den festen Punkt O gehende Axe als unverträglich mit der unveränderlichen Lage des festen Punktes O ausgeschlossen. Bei dieser Bewegungsart wird irgend ein Punkt A des bewegten Körpers, welcher von dem festen Punkte O den Abstand $OA = r$ hat, offenbar stets auf einer zu O concentrischen Kugelfläche vom Halbmesser r verbleiben müssen, d. h. die Bahnen sämmtlicher Punkte des Körpers sind sphärische. Nach dem vorigen Paragraphen kann man nun stets zwei beliebig große, um zwei sich schneidende Axen erfolgende Drehungen ersetzen durch eine Drehung um eine gewisse, durch denselben Schnittpunkt mit jenen hindurchgehende Axe. Da diese Drehung sich weiter mit jeder dritten und vierten Drehung um Axen, die durch denselben Punkt hindurchgehen, vereinigen läßt, so geht daraus hervor, daß man jede Bewegung eines um einen Punkt rotirenden Körpers, aus wie viel verschiedenen Drehungen sie auch bestehen möge, immer ersetzen kann durch eine einzige Drehung um eine gewisse Axe, welche durch den festen Mittelpunkt hindurchgeht. Es sei nun ein Körper vorausgesetzt, von welchem ein Punkt O festgehalten werde,