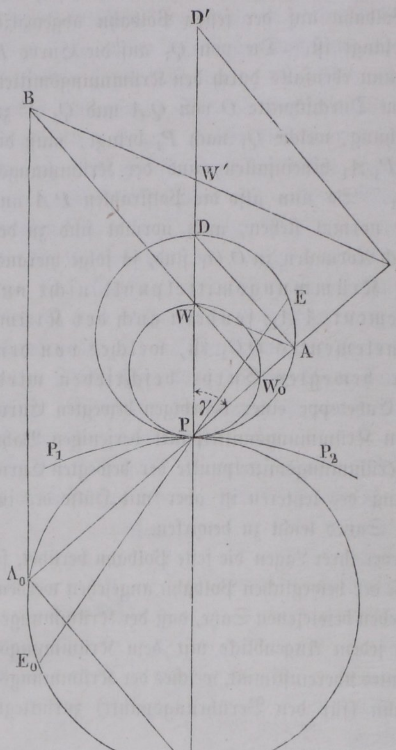
dem nunmehrigen Berührungspunkte A_1 der Curve K_1 mit der Enveloppe gezogen wird. Hieraus folgt daher, daß der Schnittpunkt M dieser beiden Polstrahlen der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe E für das Element $A A_1$ ist. Bei der gedachten kleinen Bewegung des Systems hat sich das Element $Q Q_1$ der beweglichen Polbahn auf der festen Polbahn abgewälzt, so daß der Punkt Q_1 nach P_1 gelangt ist. Die von Q_1 auf die Curve K durch A' gezogene Normale geht nun ebenfalls durch den Krümmungsmittelpunkt der letzteren, welcher in dem Durchschnitte O von QA und $Q_1 A'$ zu suchen ist. Nach geschehener Drehung, welche Q_1 nach P_1 bringt, muß die Normale $Q_1 A'$ in die Normale $P_1 A_1$ hineinfallen, und der Krümmungsmittelpunkt O rückt dabei nach O_1. Da nun also die Polstrahlen PA und $P_1 A_1$, welche auf der Enveloppe normal stehen, auch normal sind zu der Bahn jedes ihrer Punkte, also auch Normalen zu $O O_1$ sind, so folgt hieraus, daß ihr Durchschnitt M der Krümmungsmittelpunkt nicht nur der Enveloppe E für das Element $A A_1$, sondern auch der Krümmungsmittelpunkt des Bahnelementes $O O_1$ ist, welches von dem Krümmungsmittelpunkt der bewegten Curve beschrieben wird. Der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe einer beliebigen bewegten Curve ist daher bekannt, sobald man den Krümmungsmittelpunkt derjenigen Bahn bestimmen kann, welche von dem Krümmungsmittelpunkte der bewegten Curve beschrieben wird. Die Bestimmung des letzteren ist aber mit Hülfe des im vorhergehenden §. 17 entwickelten Satzes leicht zu bewirken.

Da die bewegliche Polbahn in jeder ihrer Lagen die feste Polbahn berührt, so kann letztere auch als die Enveloppe der beweglichen Polbahn angesehen werden, und es ergiebt sich daher aus dem soeben bewiesenen Satze, daß der Krümmungsmittelpunkt der festen Polbahn in jedem Augenblicke mit dem Krümmungsmittelpunkte desjenigen Bahnelementes übereinstimmt, welches der Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Polbahn (für den Berührungspunkt) zurücklegt.

Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes. Wenn in einem bewegten ebenen System für einen gewissen Augenblick das Momentancentrum und der Wendepol bekannt sind, so ist es jederzeit leicht, nach dem Vorigen den Krümmungsmittelpunkt der Bahn eines beliebigen Punktes für diesen Augenblick zu ermitteln. §. 19.

Es sei P, Fig. 19 (a. f. S.), der Pol, und W der Wendepol eines ebenen Systems in einem gewissen Augenblicke. Ferner sei A irgend ein Punkt des bewegten Körpers, für dessen Bahnelement der Krümmungsmittelpunkt bestimmt werden soll. Zieht man den Polstrahl PA und macht $AA' = PA$, so ist der gesuchte Krümmungsmittelpunkt gefunden, wenn man zum Pol P, dem Punkte A' und der Projection W_0 des Wendepols den vierten, W_0 zugeordneten harmonischen Punkt A_0 sucht. Diese Construction ist immer leicht in bekannter Weise auszuführen. Man kann sie hier noch besonders vereinfachen, wenn man den Punkt A auch mit dem Wendepol W verbindet, dann $A'W'$ parallel zu AW zieht und bis zum Durchschnitt B mit dem Projectionsstrahle $W_0 W$ verlängert. Die drei Punkte P, W und W', von denen W in der Mitte zwischen P und W' liegt, bilden mit dem in der Unendlichkeit liegenden Krümmungsmittelpunkte der Bahn von W vier harmonische Punkte. Daher fällt der den drei Strahlen BW', BP und BW zugeordnete vierte harmonische Strahl BA_0 parallel der Normalen WP zur Polbahn aus. Dieselben vier Strahlen theilen nun aber auch die Gerade AP in den Punkten A', P, W_0 und A_0 harmonisch, folglich ist A_0 der Krümmungsmittelpunkt des von A in dem Augenblicke beschriebenen Bahnelementes, in welchem der Pol in P liegt. Die Constructionsregel zur Auffindung von A_0 aus P, W und A erhellt hieraus von selbst.

Fig. 19.



Denkt man in den Punkten A_0, A und A' die Lothe $A_0 D_0$, AD und $A'D'$ errichtet, so ergiebt sich ohne Weiteres, daß auch die vier Punkte D_0, W, P und D' harmonische sind, da sämmtliche Abschnitte auf $D_0 D'$ in dem Verhältnisse $\frac{1}{\cos\gamma}$ größer sind, als die entsprechenden Abschnitte auf $A_0 A'$. Es ist folglich, da D in der Mitte zwischen P und D' liegt, D_0 der Krümmungsmittelpunkt des von D beschriebenen Bahnelementes. Legt man nun durch PAD einen Kreis und einen anderen durch $PA_0 D_0$, welche beiden

Kreise ihre Mittelpunkte wegen der rechten Winkel bei A und A_0 auf der Polbahnnormale $D_0 D'$ haben müssen, so erkennt man leicht, daß die oben in Hinsicht auf A angestellte Betrachtung für jeden Punkt des Kreises PAD gilt. Ist also E ein beliebiger Punkt dieses Kreises, so liefert der Polstrahl EPE_0 auf dem durch $PA_0 D_0$ gelegten Kreise in E_0 den Krümmungsmittelpunkt des von E beschriebenen Bahnelementes.

Daraus folgt die Beziehung, daß die Punkte eines die Polbahn im Pol berührenden Kreises Bahnelemente beschreiben, deren Krümmungsmittelpunkte auf einem zweiten, die Polbahn ebenfalls im Pol berührenden Kreise liegen.

Um die gegenseitige Lage und das Größenverhältniß dieser Kreise zu ermitteln, nehme man zunächst an, der Kreis durch A nähere sich mehr und mehr dem Wendekreise, bis er mit ihm zusammenfällt. Damit ist der zugehörige Kreis für den Krümmungsmittelpunkt A_0 größer und größer und in dem Augenblicke unendlich groß geworden, in welchem A in den Wendekreis tritt. Dies folgt daraus, daß jetzt die Projection W_0 des Wendepols in die Mitte zwischen P und A' fällt, daher der vierte harmonische Punkt in der Unendlichkeit liegt. Dies entspricht auch der schon früher entwickelten Eigenschaft des Wendekreises, wonach alle Punkte desselben Bahnelemente von unendlich großem Halbmesser beschreiben.

Denkt man sich umgekehrt den Punkt A weiter und weiter vom Pol P sich entfernend, so wird der Kreis für die Krümmungsmittelpunkte A_0 kleiner und kleiner, und erreicht in der Grenze, wenn A unendlich weit fortrückt, eine Größe gleich dem Wendekreise, welchem er dann auf der anderen Seite der Polbahntangente symmetrisch gegenüberliegt. Dies geht daraus hervor, daß der Punkt A und also A' in der Unendlichkeit liegt, wonach der dem Punkte A' harmonisch zugeordnete Pol P die Entfernung $A_0\, W_0$ halbiren muß.

Wenn der beschreibende Punkt A von dem Wendekreise aus nach dem Pole P hin rückt, so liegt der Krümmungsmittelpunkt nach §. 16 mit dem Wendekreise auf derselben Seite der Polbahntangente und zwar nähert sich der Kreis, auf welchem er liegt, mehr und mehr dem Wendekreise, je mehr A sich dem Pole nähert. Gelangt dabei der Punkt A in einen die Polbahn in P berührenden Kreis, welcher halb so großen Durchmesser hat wie der Wendekreis, so liegt der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf dem Wendekreise, denn da von den betreffenden vier harmonischen Punkten P, A', W_0 und A_0 die beiden A' und W_0 auf dem Wendekreise in einen zusammenfallen, so fällt auch A_0 in diesen Doppelpunkt. Nähert sich A noch mehr dem Pole, so ist dies auch mit A_0 der Fall, bis schließlich A und A_0 gleichzeitig den Pol P erreichen.

Nimmt man an, daß der bewegte Punkt A durch den Pol hindurch auf die dem Wendekreise abgewendete Seite der Polbahntangente tritt, so liegt der Krümmungsmittelpunkt der Punktbahn auf einem Kreise, welcher die Polbahn auf derselben Seite berührt, auf welcher A liegt, und welcher Kreis kleiner ist, als der durch den Punkt A und den Pol gelegte Berührungskreis der Polbahn. Je mehr sich der Kreis, auf welchem A liegt, erweitert, desto größer wird auch derjenige Kreis, auf welchem der Krümmungsmittelpunkt A_0 liegt, und erreicht dieser letztere Kreis eine Größe gleich dem Wendekreise (auf der dem letzteren entgegengesetzten Seite der Polbahn), sobald der beschreibende Punkt in die Unendlichkeit rückt, wie schon oben bemerkt worden.

§. 20. **Bestimmung des Wendepols.** Die obigen Untersuchungen setzen die Kenntniß des Wendepols eines bewegten ebenen Systems voraus. Dieser Punkt ergiebt sich im Allgemeinen aus den Bedingungen, durch welche die betreffende Bewegung charakterisirt ist. Sind z. B. die beiden Polbahnen gegeben, also auch deren Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 für irgend welchen Punkt bekannt, so erhält man den Wendepol W, wenn man auf der gemeinschaftlichen Normale der Polbahnen vom Pol aus ein Stück gleich dem Durchmesser $\frac{\omega}{u}$ des Wendekreises abträgt, und zwar ergiebt sich diese Größe nach §. 12 durch die Gleichung

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}.$$

Ist die Bewegung des Körpers durch die Bahnen zweier Punkte A und B gegeben, so kann man nach dem Früheren (§. 7) jederzeit den Pol P als den Durchschnitt der Normalen dieser Curven in A resp. B bestimmen. Trägt man nun auf diesen Polstrahlen PA und PB, auf welchen auch die Krümmungsmittelpunkte A_0 und B_0 der bekannten Bahnen von A und B liegen, die Polabstände PA und PB bezw. gleich AA' und BB' an, so erhält man in der vierten harmonischen den Krümmungsmittelpunkten zugeordneten Punkten zu P, A', A_0 und P, B', B_0 die beiden Projectionen W_0 des Wendepols auf die beiden Polstrahlen PA und PB. Man findet daher den Wendepol selbst in dem Durchschnittspunkte W der beiden Normalen, welche man in den beiden Punkten W_0 auf PA und PB errichtet.

In gewissen in der Praxis häufigen Fällen kann man für die Lage des Wendepols ohne Weiteres bestimmte Regeln angeben, von denen hier nur die hauptsächlichsten angeführt werden mögen. Wenn ein Punkt A des bewegten Körpers eine geradlinige Bahn beschreibt, so liegt deren Krümmungsmittelpunkt A_0 in der Unendlichkeit und daher muß dessen harmonischer Gegenpunkt, d. h. die Projection W_0 des Wendepols W in der Mitte zwischen dem Pol P und dem Punkte A' liegen, d. h. mit dem gleichfalls