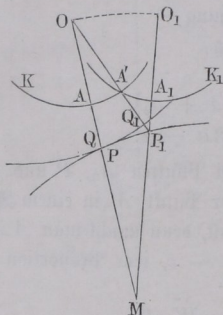


§. 18. **Krümmung der Enveloppen.** Bevor aus dem oben entwickelten Lehrsatz weitere Folgerungen abgeleitet werden, möge der Fall näher ins Auge gefaßt werden, daß mit dem bewegten System eine beliebige Curve verbunden ist, welche an der Bewegung Theil nimmt. Die Lage dieser Curve in irgend welchem Augenblicke ist natürlich bekannt, wenn man nur die jedesmalige Lage zweier beliebigen Systempunkte, deren Stellung zu der Curve im System gegeben ist, kennt, weil hierdurch ja nach dem Früheren die Bewegung des ganzen Systems unzweifelhaft bestimmt ist. Denkt man sich alle möglichen Lagen, welche diese Curve nach und nach einnimmt, so kann man sich eine gewisse Linie vorstellen, welche von allen diesen Lagen der Curve berührt wird, oder mit anderen Worten, eine Linie, welche von der bewegten Curve im Laufe der Bewegung umhüllt wird. Man nennt diese Linie die Enveloppe der bewegten Curve, und kann sich von dieser Enveloppe eine Anschauung dadurch verschaffen, daß man die bewegte Curve materiell, etwa in Form eines Drahtes ausgeführt denkt, der mit dem System verbunden ist und bei der Bewegung seine Spur auf einer mit Sand bestreuten Fläche hinterläßt, die der Ebene parallel ist, in der das System sich bewegt. Es ist für die Praxis oft von Interesse, die Natur dieser Enveloppe näher kennen zu lernen.

Es sei P , Fig. 18, zu einer gewissen Zeit t der Pol eines ebenen Systems, mit welchem letzteren eine gewisse Curve K verbunden ist. In dem Zeitelemente dt rücke der Pol auf der Polbahn nach P_1 und es komme dabei die Curve K in die Lage K_1 . Da-

Fig. 18.



bei berührt diese Curve K stets eine gewisse Linie E , welche oben als Enveloppe bezeichnet wurde. Verbindet man den Pol P mit dem Berührungspunkte A dieser Enveloppe und der Curve K , so muß dieser Polstrahl normal auf der gemeinschaftlichen Tangente von K und E stehen. Dies geht daraus hervor, daß der Polstrahl auf den Bahnen aller seiner Punkte senkrecht steht, also auch auf der-

jenigen des Berührungspunktes A , und daß der Berührungspunkt der Curve K mit E offenbar eine Bewegung hat, deren Richtung mit der Tangente der Enveloppe zusammenfällt. Der Strahl PA fällt daher in die gemeinschaftliche Normale der Curve K und der Enveloppe und geht daher auch durch die Krümmungsmittelpunkte der beiden. Dasselbe gilt nun auch von dem Polstrahl P_1A_1 , welcher von der unendlich nahen Lage des Pols P_1 nach

dem nunmehrigen Berührungspunkte A_1 der Curve K_1 mit der Enveloppe gezogen wird. Hieraus folgt daher, daß der Schnittpunkt M dieser beiden Polstrahlen der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe E für das Element AA_1 ist. Bei der gedachten kleinen Bewegung des Systems hat sich das Element QQ_1 der beweglichen Polbahn auf der festen Polbahn abgewälzt, so daß der Punkt Q_1 nach P_1 gelangt ist. Die von Q_1 auf die Curve K durch A' gezogene Normale geht nun ebenfalls durch den Krümmungsmittelpunkt der letzteren, welcher in dem Durchschnitte O von QA und Q_1A' zu suchen ist. Nach geschעהener Drehung, welche Q_1 nach P_1 bringt, muß die Normale Q_1A' in die Normale P_1A_1 hineinfallen, und der Krümmungsmittelpunkt O rückt dabei nach O_1 . Da nun also die Polstrahlen PA und P_1A_1 , welche auf der Enveloppe normal stehen, auch normal sind zu der Bahn jedes ihrer Punkte, also auch Normalen zu OO_1 sind, so folgt hieraus, daß ihr Durchschnitt M der Krümmungsmittelpunkt nicht nur der Enveloppe E für das Element AA_1 , sondern auch der Krümmungsmittelpunkt des Bahnelementes OO_1 ist, welches von dem Krümmungsmittelpunkt der bewegten Curve beschrieben wird. Der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe einer beliebigen bewegten Curve ist daher bekannt, sobald man den Krümmungsmittelpunkt derjenigen Bahn bestimmen kann, welche von dem Krümmungsmittelpunkte der bewegten Curve beschrieben wird. Die Bestimmung des letzteren ist aber mit Hilfe des im vorhergehenden §. 17 entwickelten Satzes leicht zu bewirken.

Da die bewegliche Polbahn in jeder ihrer Lagen die feste Polbahn berührt, so kann letztere auch als die Enveloppe der beweglichen Polbahn angesehen werden, und es ergibt sich daher aus dem soeben bewiesenen Satze, daß der Krümmungsmittelpunkt der festen Polbahn in jedem Augenblicke mit dem Krümmungsmittelpunkte desjenigen Bahnelementes übereinstimmt, welches der Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Polbahn (für den Berührungspunkt) zurücklegt.

Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes. Wenn in einem §. 19. bewegten ebenen System für einen gewissen Augenblick das Momentancentrum und der Wendepol bekannt sind, so ist es jederzeit leicht, nach dem Vorigen den Krümmungsmittelpunkt der Bahn eines beliebigen Punktes für diesen Augenblick zu ermitteln.

Es sei P , Fig. 19 (a. f. S.), der Pol, und W der Wendepol eines ebenen Systems in einem gewissen Augenblicke. Ferner sei A irgend ein Punkt des bewegten Körpers, für dessen Bahnelement der Krümmungsmittelpunkt bestimmt werden soll. Zieht man den Polstrahl PA und macht $AA' = PA$, so ist der gesuchte Krümmungsmittelpunkt gefunden, wenn man zum Pol P , dem Punkte A' und der Projection W_0 des Wendepols den vierten, W_0 zugeordneten harmonischen Punkt A_0 sucht. Diese Construction ist