kann man nun jede Drehung um eine Axe ersetzen durch eine ebenso große Drehung um eine parallele Axe und eine entsprechende auf der Axenebene senkrechte Verschiebung von gewisser Größe. Demgemäß kann man die Drehung um den Pol P_1 im Betrage des Winkels $(\omega + \partial \omega) \partial t$ ersetzen durch eine ebenso große Drehung $(\omega + \partial \omega) \partial t$ um den Pol P vermehrt um eine zu PP_1 normale Verschiebung im Betrage von

$$PP_1 (\omega + \partial \omega) = \omega \partial s,$$

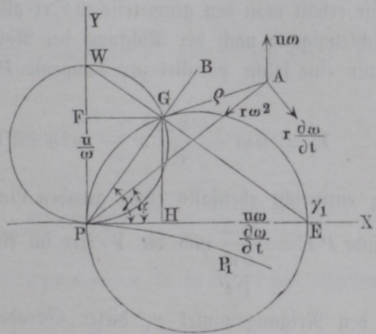
indem die unendlich kleine Größe $\partial \omega$ neben ω verschwindet. Setzt man für ∂s seinen Werth $u \partial t$, so erhält man für die Verschiebung den Betrag $u \omega \partial t$. Es ist somit gefunden, daß der Weg des Punktes A während des ersten Zeittheilchens ∂t den Werth $r \omega \partial t$ hatte, wogegen der Weg während des zweiten Zeittheilchens durch $r(\omega + \partial \omega)\partial t + u \omega \partial t$ sich darstellt. Dividiren wir diese Beträge durch ∂t, so erhalten wir die Geschwindigkeiten des Punktes A im ersten Zeitelemente zu $r \omega$, im zweiten Zeitelemente gleich der Resultante von $r(\omega + \partial \omega)$ senkrecht zu PA und $u \omega$ normal zu PP_1. Die gesammte, dem Punkte A während eines Zeitelementes mitgetheilte Beschleunigung besteht also aus zwei Theilen, und zwar erstens aus derjenigen Beschleunigung p, welche erforderlich ist, um dem mit der Winkelgeschwindigkeit ω um P rotirenden Punkte A eine Rotationsgeschwindigkeit $\omega + \partial \omega$ um denselben Pol P zu ertheilen, und zweitens aus der von der Wechselgeschwindigkeit u herrührenden Beschleunigung $u \omega$. Die erste Beschleunigung p, welche auf den Punkt A allein wirken würde, wenn der Pol nicht wechselte, läßt sich nach dem Früheren in eine Tangentialbeschleunigung $p_t = r \dfrac{\partial \omega}{\partial t}$ und eine Normalbeschleunigung $p_n = r \omega^2$ zerlegen. Diese beiden Beschleunigungscomponenten p_t und p_n sind daher für jeden Punkt des bewegten Körpers dem jedesmaligen Polabstande proportional, während der aus der Wechselgeschwindigkeit herrührende Theil der Beschleunigung $u \omega$ für alle bewegten Punkte von gleicher Größe ist.

§. 15. **Beschleunigungscentrum.** Nachdem im vorhergehenden Paragraphen die Beschleunigung eines beliebigen Punktes eines bewegten ebenen Systems gefunden ist, lassen sich mehrere interessante Beziehungen zwischen den Beschleunigungen der einzelnen Punkte eines solchen Systems entwickeln.

Zu dem Zwecke wählen wir den Pol P, Fig. 14, eines ebenen Systems in einem bestimmten Augenblicke als Coordinatenursprung rechtwinkeliger Axen PX und PY, von denen PX mit der Tangente und PY mit der Normale der festen Polbahn PP_1 im Punkte P zusammenfällt. Auf irgend einen Punkt A im Polabstande $PA = r$ wirken nach dem Vorigen die drei Beschleunigungscomponenten $r \omega^2$ in der Richtung nach dem Pole hin, $r\frac{\partial\omega}{\partial t}$ senkrecht zum Drehungshalbmesser PA und $u\omega$ parallel der Normalen PY zur Polbahn.

Zerlegen wir jede dieser Beschleunigungen in ihre Componenten parallel den Coordinatenaxen und bezeichnen die Summen dieser Componenten resp.

Fig. 14.



mit X und Y, so hat man, wie leicht ersichtlich, wenn $XPA = \alpha$ gesetzt wird:

$$X = r\frac{\partial\omega}{\partial t}\sin\alpha - r\omega^2\cos\alpha$$

und

$$Y = u\omega - r\frac{\partial\omega}{\partial t}\cos\alpha - r\omega^2\sin\alpha$$

oder, da $r\sin\alpha = y$ und $r\cos\alpha = x$ ist,

$$X = \frac{\partial\omega}{\partial t}y - \omega^2 x$$

und

$$Y = u\omega - \frac{\partial\omega}{\partial t}x - \omega^2 y.$$

Setzt man nun $X = 0$, so erhält man in $\frac{\partial\omega}{\partial t}y - \omega^2 x = 0$ die Bedingung, welcher die Coordinaten derjenigen Punkte entsprechen müssen, die in der Richtung der Polbahntangente eine Beschleunigung nicht haben, deren Beschleunigung also nach der Normalen PY der Polbahn im Pol gerichtet ist. Obige Gleichung

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}y - \omega^2 x = 0$$

entspricht aber offenbar einer durch den Coordinatenursprung P unter dem Winkel γ gegen die X-Axe gerichteten geraden Linie PB, deren Neigung γ bestimmt ist durch

$$tang\ \gamma = \frac{\omega^2}{\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t}}.$$

In gleicher Weise erhält man den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte, welche keine Beschleunigung nach der Richtung der Normale PY zur Polbahn, sondern nur eine solche parallel zur Tangente PX haben, durch die Gleichung:

$$Y = u\,\omega - \frac{\partial\,\omega}{\partial\,t}\,x - \omega^2 y = 0.$$

Diese Gleichung entspricht ebenfalls einer geraden Linie WE, welche die X-Axe im Abstande $PE = \frac{u\,\omega}{\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t}}$ und die Y-Axe im Abstande $PW = \frac{u}{\omega}$ schneidet. Für den Neigungswinkel γ_1 dieser Geraden gegen die X-Axe hat man

$$tang\,\gamma_1 = -\frac{\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t}}{\omega^2} = -\ cotg\,\gamma,$$

woraus folgt, daß die beiden Geraden PB und WE auf einander normal stehen.

Der Durchschnittspunkt G dieser beiden Linien hat offenbar gar keine Beschleunigung, denn als Punkt der Geraden PB ist seine Beschleunigung parallel der X-Axe gleich Null, und als Punkt der Geraden WE besitzt er keine Beschleunigung parallel der Y-Axe. Dieser Punkt ist, wie die weitere Entwickelung zeigen wird, von besonderer Bedeutung für die Bewegung des Systems, man nennt ihn das Beschleunigungscentrum aus später zu entwickelnden Gründen. Daß es übrigens in jedem Augenblicke der Bewegung nur einen einzigen Punkt geben kann, dessen Beschleunigung Null ist, geht daraus hervor, daß die beiden Geraden PB und WE, welche übrigens während der Bewegung fortwährend ihre Lage ändern, nur einen Durchschnittspunkt haben können.

Es möge ferner die Beschleunigung des Punktes A noch in einer anderen Weise in Componenten zerlegt werden, und zwar nach den Richtungen der Tangente und Normale der Bahn des Punktes A selbst. Die Normale dieser Bahn in A fällt nach dem Früheren mit dem Polstrahl AP zusammen, und die durch diese Zerlegung sich ergebenden Componenten der Beschleunigung stimmen mit der sogenannten Tangential- resp. Normalbeschleunigung

p_t und p_n der krummlinigen Bewegung überein. Durch diese Zerlegung erhält man offenbar:

$$p_t = r\,\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t} - u\,\omega\,\cos\alpha$$

und

$$p_n = u\,\omega\,\sin\alpha - r\,\omega^2.$$

Setzt man wieder

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},\ \sin\alpha = \frac{y}{r} \text{ und } r^2 = x^2 + y^2,$$

so folgt:

$$p_t = \frac{x^2 + y^2}{r}\,\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t} - u\,\omega\,\frac{x}{r}$$

und

$$p_n = u\,\omega\,\frac{y}{r} - \frac{x^2 + y^2}{r}\,\omega^2.$$

Setzt man auch hier wieder $p_t = 0$, so liefert die Gleichung

$$0 = (x^2 + y^2)\,\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t} - u\,\omega\,.\,x$$

den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte, welche nur Normalbeschleunigung, aber keine Tangentialbeschleunigung haben. Diese Gleichung stellt einen Kreis dar, welcher durch den Coordinatenanfang P und durch den Punkt E auf der X-Axe im Abstande $PE = \frac{u\,\omega}{\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t}}$ geht, denn für $y = 0$ liefert jene Gleichung $x = 0$ und $x = \frac{u\,\omega}{\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t}}$. Setzt man in gleicher Art $p_n = 0$, so liefert die Gleichung

$$0 = u\,\omega\,.\,y - \omega^2\,(x^2 + y^2)$$

den geometrischen Ort aller Punkte ohne Normalbeschleunigung als einen Kreis, welcher ebenfalls durch den Coordinatenanfang P geht, und welcher die Y-Axe oder die Normale der Polbahn im Pol in einem Polabstande $PW = \frac{u}{\omega}$ schneidet, denn für $x = 0$ liefert jene Gleichung $y = 0$ und $y = \frac{u}{\omega}$. Diese beiden Kreise oder die geometrischen Oerter der Punkte ohne Tangential- und ohne Normalbeschleunigung schneiden daher die Axen in denselben Punkten W, P und E, durch welche die beiden Geraden hindurchgehen, welche oben bestimmt wurden als die geometrischen Oerter der Punkte, die in der Richtung der Polbahntangente und Normale keine Beschleunigung haben. Der Durchschnittspunkt G jener Geraden, welcher weder Beschleunigung nach der X-Axe noch nach der Y-Axe hat, also überhaupt ohne Beschleunigung ist, besitzt also auch weder Tangential- noch Normalbeschleunigung, und muß daher ebenfalls auf den beiden ermittelten Kreisen liegen. Die letzteren müssen sich sonach in demselben Punkte G schneiden, in welchem die Geraden PB und WE sich treffen, und welchem die Bezeichnung Beschleunigungscentrum gegeben wurde. Es geht dies übrigens auch schon daraus hervor, daß die Gerade PB senkrecht auf WE steht, und daher der Scheitel der Rechtwinkel G sowohl auf dem über PE wie über PW beschriebenen Halbkreise liegen muß.

Die Coordinaten x_0 und y_0 des Beschleunigungscentrums G folgen aus der Figur ohne Weiteres zu:

$$GF = x_0 = P\,W\,.\,\sin\gamma\,\cos\gamma = \frac{u}{\omega}\sin\gamma\,\cos\gamma,$$

$$PF = y_0 = PW\,.\,\sin\gamma^2 = \frac{u}{\omega}\sin\gamma^2.$$

Um die Beschleunigung des beliebigen Punktes A mit Hülfe des Abstandes $GA = \varrho$ desselben von dem Beschleunigungscentrum G auszudrücken, subtrahire man von den Beschleunigungen X und Y des Punktes A parallel den Coordinaten die Ausdrücke für dieselben Beschleunigungen X_0 und Y_0 gleich Null in Bezug auf den Punkt G. Es ist nämlich

$$X = \frac{\partial\omega}{\partial t}\,y - \omega^2 x$$

und

$$0 = \frac{\partial\omega}{\partial t}\,y_0 - \omega^2 x_0,$$

daher durch Subtraction

$$X = \frac{\partial\omega}{\partial t}\,(y - y_0) - \omega^2(x - x_0);$$

und ebenso:

$$Y = u\omega - \frac{\partial\omega}{\partial t}\,x - \omega^2 y$$

und

$$0 = u\omega - \frac{\partial\omega}{\partial t}\,x_0 - \omega^2 y_0,$$

daher:

$$Y = -\frac{\partial\omega}{\partial t}\,(x - x_0) - \omega^2(y - y_0).$$

Nun sind aber $x - x_0 = \xi$ und $y - y_0 = \eta$ die entsprechenden Coordinaten des Punktes A in einem Coordinatensystem, dessen Ursprung im Beschleunigungscentrum G gelegen ist und dessen Axen den ursprünglichen PX und PY parallel sind. Man hat daher in Bezug auf dieses System für A die Beschleunigungen parallel den Axen:

$$X = \frac{\partial \omega}{\partial t} \eta - \omega^2 \xi$$

und

$$Y = - \frac{\partial \omega}{\partial t} \xi - \omega^2 \eta.$$

Vereinigt man diese Beschleunigungscomponenten paarweise mit einander nach dem Parallelogramm der Beschleunigungen, so erhält man erstens eine Beschleunigung

$$p_n = - \omega^2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = - \omega^2 \varrho,$$

welche nach dem Anfangspunkte G hin gerichtet ist, und zweitens eine Beschleunigung

$$p_t = \frac{\partial \omega}{\partial t} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\partial \omega}{\partial t} \varrho,$$

welche auf der ersteren p_n normal steht. Man ersieht daher aus diesen Formeln, daß die Beschleunigung des Punktes A übereinstimmt mit derjenigen, welche er annehmen würde, wenn das ganze System eine Drehung um den Punkt G vollführte, dieser Punkt G aber keine Wechselgeschwindigkeit hätte, sondern für zwei auf einander folgende Zeittheilchen die Drehaxe bildete. Für diesen Fall hätte man nämlich die Normal- und Tangentialbeschleunigung irgend eines Punktes A im Abstande ϱ von G nach dem Früheren bezw. gleich $p_n = \varrho \omega^2$ und $p_t = \varrho \dfrac{\partial \omega}{\partial t}$, also ebenso groß wie die hier berechneten Werthe.

Die totale Beschleunigung irgend eines Punktes im Abstande ϱ vom Beschleunigungscentrum ist $p = \varrho \sqrt{\omega^4 + \left(\dfrac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2}$, also proportional dem Abstande ϱ. Der Winkel α, unter welchem die Beschleunigung p gegen die Verbindungslinie des Punktes mit dem Beschleunigungscentrum gerichtet ist, bestimmt sich durch die Gleichung:

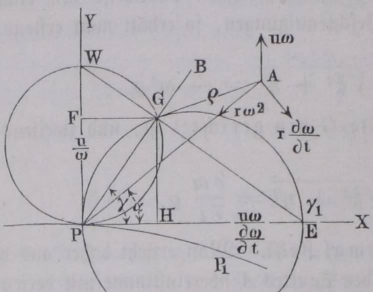
$$tang\, \alpha = \frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial t}}{\omega^2},$$

also ist dieser Winkel für alle Systempunkte constant. Es folgt hieraus ferner sofort, daß alle Punkte, deren Abstand vom Beschleunigungscentrum G denselben Werth ϱ hat, auch gleiche Beschleunigung haben müssen,

d. h. alle Punkte eines zum Beschleunigungscentrum concentrischen Kreises oder alle Punkte eines Cylindermantels, dessen Axe im Beschleunigungscentrum normal zur Bewegungsebene des Systems steht, haben gleiche Beschleunigung. Aus dieser Beziehung rechtfertigt sich die Bezeichnung Beschleunigungscentrum für den Durchschnitt G der beiden gefundenen Kreise.

§. 16. **Wendekreis.** Die Punkte des Kreises PGE, Fig. 15, für welche die Tangentialbeschleunigung gleich Null ist, haben in dem betrachteten Augenblicke ein Maximum oder Minimum ihrer Geschwindigkeit, weil ihre Tangentialbeschleunigung oder die Derivirte der Geschwindigkeit in diesem Augenblicke durch Null geht und das Zeichen wechselt.

Fig. 15.



Die Punkte des anderen Kreises PGW, für welche die Normalbeschleunigung gleich Null ist, beschreiben in dem betreffenden Augenblicke Wendepunkte ihrer Bahnen, deren Krümmungshalbmesser ϱ also unendlich groß sind, denn nur für $\varrho = \infty$ kann der Ausdruck $\frac{v^2}{\varrho}$ der Normalbeschleunigung zu Null werden, da v einen bestimmten endlichen Werth hat. Man nennt daher den gedachten Kreis PGW auch den Wendekreis und den Durchschnitt W desselben mit der Normale zur Polbahn in P den Wendepol.

Daß übrigens alle Punkte des Systems, welche gleichzeitig in den Wendepunkten ihrer Bahnen sich befinden, in einem Kreise gelegen sind, welcher die feste Polbahn in dem augenblicklichen Pol P berührt, erkennt man auch direct aus folgender Betrachtung.

Sei PP_1, Fig. 16, die feste Polbahn eines ebenen Systems und P in einem bestimmten Augenblicke der Pol, um welchen der bewegte Körper während des Zeitelementes ∂t mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich dreht. Irgend eine durch P gezogene Gerade EPB kommt durch diese Drehung in die Lage E_1PB_1, wobei die Punkte A, B, D und E die resp. Bahnen AA_1, BB_1, DD_1 und EE_1 beschreiben. Wenn in derselben Zeit ∂t der Pol P mit der Wechselgeschwindigkeit u sich auf der festen Polbahn bewegt, so ge-