$$v = \frac{u}{2a} \sqrt{a^2 + a^2 - 2aa \,.\, cos\, 2\alpha}$$

$$= \frac{u}{2a} \sqrt{2a^2 (1 - cos.\, 2\alpha)} = \frac{u}{2a} \sqrt{2a^2 .\, 2 sin\, \alpha^2} = u \sin \alpha.$$

Die Geschwindigkeiten sind also hier dieselben, wie die dem einfachen Schwingungsgesetze entsprechenden; für $\alpha = 0$ ist $v = 0$ und für $\alpha = 90^0$ ist $v = u$, d. h. gleich der Wechselgeschwindigkeit des Pols.

Setzt man endlich $e = 0$, so erhält man für die Geschwindigkeit, mit welcher der Mittelpunkt D der beweglichen Polbahn den Kreis DD_1 durchläuft, den constanten Werth

$$v = \frac{u}{2a} \sqrt{a^2 + 0} = \frac{u}{2},$$

wie bereits früher gefunden. Wenn $e > a$ ist, so liegt der betreffende Punkt in E' außerhalb des beweglichen Kreises und beschreibt beim Abwälzen des letzteren in dem Kreisquadranten FG_1J den elliptischen Quadranten $E'E_1'H'$, dessen Halbaxen ebenfalls $CE' = a + e$ und $CH' = a - e = -(e - a)$ sind. Man erkennt leicht, daß auch hier die von dem Kreisquadranten FG_1J auf die Bahn $E'E_1'H'$ gezogenen Normalen wie FE', G_1E_1' und JH' die Geschwindigkeiten des bewegten Punktes E' repräsentiren.

§. 14. **Beschleunigung eines Systempunktes.** Wenn ein Körper eine einfache Translationsbewegung hat, so sind die Wege aller Punkte in irgend einem Zeitelemente gleich groß und gleich gerichtet, und daraus folgt zunächst die Gleichheit der Geschwindigkeiten aller Punkte für denselben Augenblick. Aendern sich daher im Verlaufe der Zeit diese Geschwindigkeiten der Größe oder Richtung nach, so muß auch die Aenderung für alle Punkte gleich sein, so daß daraus einfach folgt, daß auch die Beschleunigung p in jedem Augenblicke für alle Punkte des bewegten Körpers von gleichem Betrage sein muß. Dies gilt sowohl hinsichtlich der Tangentialbeschleunigung p_t, durch welche die Größe der Geschwindigkeit abgeändert wird, wie auch in Bezug auf die Normalbeschleunigung p_n, welche eine Richtungsveränderung bewirkt. Die Beschleunigungen aller Systempunkte sind daher bekannt, sobald man diejenige eines einzigen Punktes kennt.

Wenn der Körper andererseits einer einfachen Rotation um dieselbe unveränderliche Axe während einer endlichen Zeit unterworfen ist, so sind die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte ihren normalen Abständen von der Drehaxe proportional, also durch $v = r\omega$ ausgedrückt, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Zerlegt man die Beschleunigung p jedes Punktes hier ebenfalls in die Tangentialbeschleunigung p_t und in die Normalbeschleunigung p_n, so hat man nach dem Früheren, Theil I §. 46, ganz allgemein für jeden Punkt

$$p_t = \frac{\partial v}{\partial t} = r \frac{\partial \omega}{\partial t},$$

$$p_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

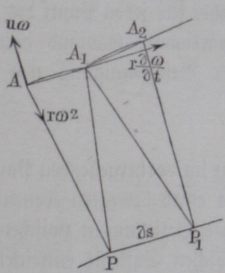
und daher

$$p = \sqrt{p_t^2 + p_n^2} = r\sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + \omega^4}.$$

Es ist daher bei einer einfachen Rotationsbewegung die totale Beschleunigung sowohl wie deren tangentiale und normale Componente für jeden Punkt dem normalen Abstande desselben von der Drehaxe proportional. Wie schon angegeben, reducirt sich in dem Falle, wo die Drehung mit constanter Geschwindigkeit erfolgt, die ganze Beschleunigung auf die Normalcomponente $r\omega^2$.

Die allgemeine Bewegung eines ebenen Systems kann nun in jedem Augenblicke als eine Drehung um den Pol angesehen werden. Da aber außer dieser Drehung um den jedesmaligen Pol der letztere selbst mit einer gewissen Wechselgeschwindigkeit u seine Lage auf der festen Polbahn verändert, so ergiebt sich hieraus für jeden Punkt des bewegten Körpers außer der der Drehung um den Pol entsprechenden Beschleunigung noch eine andere Beschleunigung, welche aus der Wechselbewegung des Pols folgt. Um diese Beschleunigung kennen zu lernen, sei $PP_1 = \partial s$, Fig. 13, ein Element der festen Polbahn eines bewegten ebenen Systems und A ein beliebiger Punkt des letzteren. Wenn der Pol in einem bestimmten Augenblicke in P gelegen ist, so beschreibt in dem darauf folgenden Zeitelemente ∂t der Punkt A um den Pol P einen Kreisbogen AA_1 vom Halbmesser $AP = r$ und dem Winkel $\omega \partial t$, daher von der Länge

Fig. 13.



$$AA_1 = r\omega\partial t.$$

Nach Ablauf des Zeittheilchens ∂t ist der Pol von P nach P_1 gerückt, indem er vermöge seiner Wechselgeschwindigkeit u den Weg $\partial s = u\partial t$ auf der Polbahn zurückgelegt hat. Das System dreht sich nun um den neuen Pol P_1 mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche jetzt aus ω in $\omega + \partial\omega$ übergegangen ist; es beträgt daher die Drehung während des neuen Zeitelementes ∂t den Winkelwerth $(\omega + \partial\omega)\,\partial t$. Nach §. 4

kann man nun jede Drehung um eine Axe ersetzen durch eine ebenso große Drehung um eine parallele Axe und eine entsprechende auf der Axenebene senkrechte Verschiebung von gewisser Größe. Demgemäß kann man die Drehung um den Pol P_1 im Betrage des Winkels $(\omega + \partial \omega) \partial t$ ersetzen durch eine ebenso große Drehung $(\omega + \partial \omega) \partial t$ um den Pol P vermehrt um eine zu PP_1 normale Verschiebung im Betrage von

$$PP_1 (\omega + \partial \omega) = \omega \partial s,$$

indem die unendlich kleine Größe $\partial \omega$ neben ω verschwindet. Setzt man für ∂s seinen Werth $u \partial t$, so erhält man für die Verschiebung den Betrag $u \omega \partial t$. Es ist somit gefunden, daß der Weg des Punktes A während des ersten Zeittheilchens ∂t den Werth $r \omega \partial t$ hatte, wogegen der Weg während des zweiten Zeittheilchens durch $r(\omega + \partial \omega)\partial t + u \omega \partial t$ sich darstellt. Dividiren wir diese Beträge durch ∂t, so erhalten wir die Geschwindigkeiten des Punktes A im ersten Zeitelemente zu $r \omega$, im zweiten Zeitelemente gleich der Resultante von $r(\omega + \partial \omega)$ senkrecht zu PA und $u \omega$ normal zu PP_1. Die gesammte, dem Punkte A während eines Zeitelementes mitgetheilte Beschleunigung besteht also aus zwei Theilen, und zwar erstens aus derjenigen Beschleunigung p, welche erforderlich ist, um dem mit der Winkelgeschwindigkeit ω um P rotirenden Punkte A eine Rotationsgeschwindigkeit $\omega + \partial \omega$ um denselben Pol P zu ertheilen, und zweitens aus der von der Wechselgeschwindigkeit u herrührenden Beschleunigung $u \omega$. Die erste Beschleunigung p, welche auf den Punkt A allein wirken würde, wenn der Pol nicht wechselte, läßt sich nach dem Früheren in eine Tangentialbeschleunigung $p_t = r \dfrac{\partial \omega}{\partial t}$ und eine Normalbeschleunigung $p_n = r \omega^2$ zerlegen. Diese beiden Beschleunigungscomponenten p_t und p_n sind daher für jeden Punkt des bewegten Körpers dem jedesmaligen Polabstande proportional, während der aus der Wechselgeschwindigkeit herrührende Theil der Beschleunigung $u \omega$ für alle bewegten Punkte von gleicher Größe ist.

§. 15. **Beschleunigungscentrum.** Nachdem im vorhergehenden Paragraphen die Beschleunigung eines beliebigen Punktes eines bewegten ebenen Systems gefunden ist, lassen sich mehrere interessante Beziehungen zwischen den Beschleunigungen der einzelnen Punkte eines solchen Systems entwickeln.

Zu dem Zwecke wählen wir den Pol P, Fig. 14, eines ebenen Systems in einem bestimmten Augenblicke als Coordinatenursprung rechtwinkeliger Axen PX und PY, von denen PX mit der Tangente und PY mit der Normale der festen Polbahn PP_1 im Punkte P zusammenfällt. Auf irgend einen Punkt A im Polabstande $PA = r$ wirken nach dem Vorigen die drei Beschleunigungscomponenten $r \omega^2$ in der Richtung nach dem Pole