Curve $\frac{1}{\varrho} = \frac{\varepsilon}{\partial s}$ den Namen „Krümmung“ beilegt, so kann man den Werth $\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\partial s} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$ als „relative Krümmung“ der beiden Polbahnen bezeichnen. Dieselbe ist nach dem Obigen gleich dem Verhältniß der Winkelgeschwindigkeit ω zur Wechselgeschwindigkeit u.

Beispiel. Wählen wir als Beispiel wieder die Bewegung eines Körpers, §. 13.
welcher mit zwei Punkten A und B im Abstande $2a$ von einander auf den festen Schenkeln eines Rechtwinkels ACB sich führt (Fig. 7), so sind in diesem Falle die Polbahnen zwei Kreise von den Halbmessern $2a$ und a.

Man hat daher

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{2a} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{2a}.$$

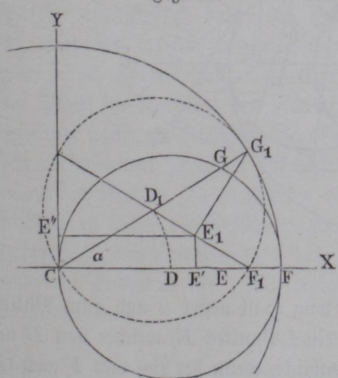
Denkt man sich daher den kleinen Kreis in einer bestimmten Richtung mit gleichbleibender Geschwindigkeit u auf dem größeren Kreise abgewälzt, so bleibt auch die Winkelgeschwindigkeit ω um den Pol während dieser Bewegung constant von der unveränderlichen Größe

$$\omega = -\frac{1}{2a}\, u.$$

Das negative Vorzeichen drückt hierin nur aus, daß die Drehungsrichtung um den Pol eine linke ist, wenn die fortschreitende Bewegung des Pols auf der festen Polbahn einer rechten Drehung um den Krümmungsmittelpunkt entspricht.

Kennt man nun die Winkelgeschwindigkeit $\omega = -\frac{u}{2a}$ der Drehung um den Pol, so kennt man auch die Geschwindigkeit irgend eines Punktes, dessen Abstand vom Pol r sein möge, gleich $v = \omega r = -r\frac{u}{2a}$. Von allen

Fig. 11.



Punkten des bewegten Körpers hat nur der Mittelpunkt D des rollenden Kreises, Fig. 11, einen unveränderlichen Abstand $r = a$ von dem Pol, daher auch nur dieser Punkt seine Bahn mit unveränderlicher Geschwindigkeit durchläuft, wenn man voraussetzt, daß die Rollung mit gleichbleibender Wechselgeschwindigkeit u geschehe. Die Geschwindigkeit $v = r\omega$ des Punktes D ist demzufolge

$$v = a\omega = a\frac{u}{2a} = \frac{u}{2},$$

also halb so groß wie die Wechselgeschwindigkeit des Pols, was auch schon daraus folgt, daß der Punkt D seine kreisförmige Bahn vom Halbmesser $CD = a$ in derselben Zeit mit constanter Geschwindigkeit zurücklegt, während welcher der Pol die feste Polbahn vom Halbmesser $2a$ einmal durchläuft.

Um die Geschwindigkeit irgend eines Punktes des bewegten Körpers zu bestimmen, sei E ein beliebiger Punkt des bewegten Systems im Abstande e von dem Mittelpunkte D des rollenden Kreises. Ist nun der letztere aus der Lage D, in welcher E mit D und C in gerader Linie CX liegt, durch ein Rollen um den Winkel $FCG_1 = \alpha$ in die Lage D_1 gelangt, wobei der Punkt E nach E_1 und G nach G_1 gerückt ist, so ergiebt sich für diese Lage der Polabstand $G_1 E_1$ des betrachteten Punktes aus dem Dreiecke $G_1 D_1 E_1$, dessen Winkel bei D_1 gleich 2α ist, durch

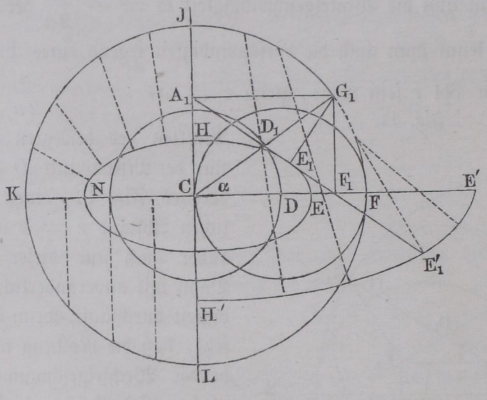
$$G_1 E_1 = r = \sqrt{a^2 + e^2 - 2ae \, . \cos 2\alpha}.$$

Demnach ist die Geschwindigkeit des Punktes in der Lage E_1 gefunden zu:

$$v = \omega \sqrt{a^2 + e^2 - 2ae \, . \cos 2\alpha}$$
$$= \frac{u}{2a} \sqrt{a^2 + e^2 - 2ae \, . \cos 2\alpha}.$$

Man kann sich von den Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte leicht durch eine graphische Darstellung ein anschauliches Bild verschaffen. Es sei C, Fig. 12, der Mittelpunkt der festen und D derjenige der beweglichen Pol-

Fig. 12.



bahn, welcher sich in dem Kreise DD_1 vom Halbmesser a und zum Mittelpunkte C bewegt. Man findet den Ort eines Punktes E, welcher von D um $DE = e$ absteht, in irgend einem Augenblicke, wenn der Pol von F nach G_1

gerückt ist, indem man G_1 auf die Axen CF und CJ nach F_1 und A_1 projicirt, und auf der Diagonale $A_1 F_1$ von der Mitte D_1 die Strecke $D_1 E_1 = e$ anträgt. Man erhält so den Ort des Punktes E als eine Ellipse CEE_1 zum Mittelpunkte C und von den Halbaxen

$$CE = a + e \text{ und } CH = a - e.$$

Die Linie $G_1 E_1$ ist nun offenbar der Drehungshalbmesser des Punktes E in dem Augenblicke, wo G_1 der Pol ist, und man hat wie oben

$$G_1 E_1 = \sqrt{a^2 + e_2 - 2\,ae\,.\,\cos 2\alpha},$$

welchem Radius $G_1 E_1$ die Geschwindigkeit v proportional ist. Die Linie $G_1 E_1$ steht übrigens nach dem Früheren normal auf der Bahn des Punktes E, d. h. auf der Ellipse in dem Punkte E_1, und man kann daher sagen, daß die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes E in jedem Augenblicke proportional der Normalen ist, welche man von dem betreffenden Punkte der festen Polbahn auf die Bahn des Punktes E fällen kann. Die Construktion der Normalen auf die Ellipse ist mit Hülfe des Rechtecks $CA_1 G_1 F_1$ und seiner Diagonale $A_1 F_1$ nach Obigem leicht bewirkt.

Nimmt man beispielsweise den Winkel α gleich 0 an, für welchen E in CF liegt, so hat man $\cos 2\alpha = 1$, daher

$$v = \frac{u}{2a}\sqrt{a^2 + e^2 - 2\,ae} = \frac{u}{2a}(a - e),$$

also proportional der Strecke FE. Ebenso folgt für $\alpha = 90^0$, d. h. wenn der Pol in J liegt, $\cos 2\alpha = -1$, daher

$$v = \frac{u}{2a}\sqrt{a^2 + e^2 + 2\,ae} = \frac{u}{2a}(a + e),$$

proportional der Strecke JH.

Die in dem Quadranten $NKJH$ punktirt eingetragenen Normalen der Ellipse repräsentiren daher die verschiedenen Geschwindigkeiten des Punktes E, während derselbe den elliptischen Quadranten HN durchläuft. Setzt man in der Formel für v die Größe $e = a$, nimmt man also den betreffenden Punkt im Umfange des Rollkreises, also etwa in F an, so ist die Bahn desselben nach dem Früheren der Durchmesser FK, und die Normalen von den verschiedenen Pollagen auf diese Bahn sind die zu FK senkrechten Ordinaten des Kreises, die punktirten Normalen in dem Quadranten CKL repräsentiren daher die Geschwindigkeiten des Punktes F. Diese Geschwindigkeiten sind immer proportional dem Sinus des Wälzungswinkels α, wie auch aus dem Ausdrucke für v sich ergiebt, denn wenn man darin $e = a$ setzt, so erhält man:

$$v = \frac{u}{2a} \sqrt{a^2 + a^2 - 2aa \cdot \cos 2\alpha}$$

$$= \frac{u}{2a} \sqrt{2a^2(1 - \cos. 2\alpha)} = \frac{u}{2a} \sqrt{2a^2 . 2 \sin \alpha^2} = u \sin \alpha.$$

Die Geschwindigkeiten sind also hier dieselben, wie die dem einfachen Schwingungsgesetze entsprechenden; für $\alpha = 0$ ist $v = 0$ und für $\alpha = 90^0$ ist $v = u$, d. h. gleich der Wechselgeschwindigkeit des Pols.

Setzt man endlich $e = 0$, so erhält man für die Geschwindigkeit, mit welcher der Mittelpunkt D der beweglichen Polbahn den Kreis DD_1 durchläuft, den constanten Werth

$$v = \frac{u}{2a} \sqrt{a^2 + 0} = \frac{u}{2},$$

wie bereits früher gefunden. Wenn $e > a$ ist, so liegt der betreffende Punkt in E' außerhalb des beweglichen Kreises und beschreibt beim Abwälzen des letzteren in dem Kreisquadranten FG_1J den elliptischen Quadranten $E'E_1'H'$, dessen Halbaxen ebenfalls $CE' = a + e$ und $CH' = a - e = -(e - a)$ sind. Man erkennt leicht, daß auch hier die von dem Kreisquadranten FG_1J auf die Bahn $E'E_1'H'$ gezogenen Normalen wie FE', G_1E_1' und JH' die Geschwindigkeiten des bewegten Punktes E' repräsentiren.

§. 14. **Beschleunigung eines Systempunktes.** Wenn ein Körper eine einfache Translationsbewegung hat, so sind die Wege aller Punkte in irgend einem Zeitelemente gleich groß und gleich gerichtet, und daraus folgt zunächst die Gleichheit der Geschwindigkeiten aller Punkte für denselben Augenblick. Aendern sich daher im Verlaufe der Zeit diese Geschwindigkeiten der Größe oder Richtung nach, so muß auch die Aenderung für alle Punkte gleich sein, so daß daraus einfach folgt, daß auch die Beschleunigung p in jedem Augenblicke für alle Punkte des bewegten Körpers von gleichem Betrage sein muß. Dies gilt sowohl hinsichtlich der Tangentialbeschleunigung p_t, durch welche die Größe der Geschwindigkeit abgeändert wird, wie auch in Bezug auf die Normalbeschleunigung p_n, welche eine Richtungsveränderung bewirkt. Die Beschleunigungen aller Systempunkte sind daher bekannt, sobald man diejenige eines einzigen Punktes kennt.

Wenn der Körper andererseits einer einfachen Rotation um dieselbe unveränderliche Axe während einer endlichen Zeit unterworfen ist, so sind die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte ihren normalen Abständen von der Drehaxe proportional, also durch $v = r\omega$ ausgedrückt, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Zerlegt man die Beschleunigung p jedes Punktes hier ebenfalls in die Tangentialbeschleunigung p_t und in die Normal=