Da übrigens jeder Punkt im Umfange des rollenden Kreises, wie E, Fig. 7, in einer durch C gehenden Geraden sich führt, so erkennt man hieraus auch, daß man zu derselben Bewegung gelangen muß, wenn auch die beiden Geraden einen beliebigen schiefen Winkel einschließen, denn man kann das System, in welchem die beiden Punkte A und B in CA und CB geführt werden, offenbar ersetzen durch ein anderes System, in welchem die beiden Punkte E und B in CE und CB geführt werden. Die Richtigkeit dieser Behauptung ersieht sich sofort, wenn man im Auge behält, daß die Bahnen zweier Punkte eines ebenen Systems dessen Bewegung vollständig bestimmen.

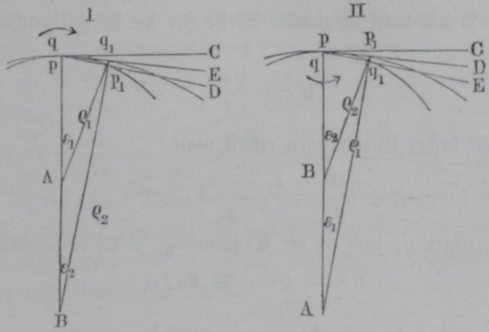
§. 12. **Wechselgeschwindigkeit der Momentanaxe.** Zur Bestimmung der Momentanaxe oder des Pols der Bewegung eines ebenen Systems in einem gewissen Augenblicke genügt nach dem Obigen die Kenntniß der Bewegungsrichtungen zweier Punkte. Ferner kann man aus der Kenntniß der Bahnen zweier Punkte die Polbahnen, d. h. die Lage der Momentanaxe für jeden Augenblick bestimmen. Hieraus kann wieder nach dem Obigen die Bahn jedes beliebigen Systempunktes abgeleitet werden. Die Bewegung eines beliebigen Punktes des bewegten Körpers in einem gewissen Augenblicke ist aber erst bestimmt, wenn außer seinem derzeitigen Orte und der Richtung seiner Bahn auch die Größe seiner Geschwindigkeit bekannt ist. Zur Bestimmung dieses letzteren Elementes für irgend welchen Punkt des Körpers genügt es, wenn man die Geschwindigkeit eines einzigen Körperpunktes kennt. Ist nämlich A ein solcher Punkt des bewegten Körpers, und sein Abstand pA von dem Pol p in einem bestimmten Augenblicke durch r ausgedrückt, welcher Abstand als Drehungshalbmesser für die Rotation des Punktes A um den Pol p anzusehen ist, so hat man für die Geschwindigkeit v des Punktes A:

$$v = r\omega,$$

wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des ganzen Systems in dem betreffenden Augenblicke bedeutet. Kennt man daher von dem Punkte A in jedem Augenblicke die Geschwindigkeit v, so ist, da aus der Kenntniß der Polbahnen auch in jedem Augenblicke die Größe von r sich ergiebt, die Winkelgeschwindigkeit des Systems $\omega = \frac{v}{r}$ ebenfalls für jeden Moment bekannt. Hieraus nun läßt sich auch die Geschwindigkeit v_1 jedes anderen Punktes A_1 im Abstande r_1 vom Pol durch $v_1 = \omega r_1$ bestimmen.

Wenn die Momentanaxe eines bewegten ebenen Systems während der ganzen Bewegungsdauer eine unveränderliche Lage hätte, so würde zur vollkommenen Bestimmung der Bewegung des Körpers die Kenntniß der betreffenden Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe in jedem Augenblicke genügen. Da aber die Momentanaxe ihren Ort auf der festen Polbahn fortwährend verändert, so gehört zur Bestimmung der Körperbewegung noch die Kenntniß der Geschwindigkeit, mit welcher der Pol auf der Polbahn seinen Ort wechselt. Man nennt diese Geschwindigkeit u die **Wechselgeschwindigkeit des Pols oder der Momentanaxe.** Sei in einem bestimmten Augenblicke pq, Fig. 9, I und II, der Berührungspunkt der beiden Polbahnen,

Fig. 9.



von denen pp_1 ein unendlich kleines Element der festen und qq_1 ein solches der beweglichen sein möge. Errichtet man in p, p_1, q und q_1 die Normalen zu diesen Polbahnen, so geben dieselben in ihren Durchschnittspunkten A resp. B die Krümmungsmittelpunkte, und man hat daher in $Ap = Ap_1 = \varrho_1$ den Krümmungshalbmesser der festen und in $Bq = Bq_1 = \varrho_2$ denjenigen der beweglichen Polbahn für den augenblicklichen Berührungspunkt oder Pol pq. Der unendlich kleine Winkel ε_1, welchen die beiden Normalen Ap und Ap_1 einschließen, welcher in der analytischen Geometrie der Contingenzwinkel genannt wird, ist offenbar auch gleich dem Winkel CpD, welchen das als geradlinig anzusehende unendlich kleine Element pp_1 mit der gemeinschaftlichen Tangente Cp der Polbahnen im Pol bildet, und ebenso hat man

$$\varepsilon_2 = qBq_1 = CqE,$$

wenn qE die Richtung des Elementes qq_1 vorstellt. Nimmt man nun an, die bewegliche Polbahn qq_1 wälze sich um das Element qq_1 auf der festen Polbahn pp_1 ab, so kommt hierdurch q_1 in p_1 zu liegen, und es fällt qq_1 mit pp_1 zusammen. Damit letzteres geschehe, muß dem beweglichen System und der Polbahn qq_1 eine Drehung um q ertheilt werden, deren Winkelbetrag gleich $EqD = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ ist. In Fig. I ist dieser Werth positiv, in Fig. II, wo $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ist, negativ, durch die Verschiedenheit der Vorzeichen ist nur angedeutet, daß die Drehungsrichtungen des Körpers um den Pol p in den beiden Fällen entgegengesetzt sind, in I nach rechts, in II nach links;

der Betrag der Drehung ist jedoch in beiden Fällen gleich dem absoluten Werthe von $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Bezeichnet daher wieder ω die Winkelgeschwindigkeit, so hat man:

$$\omega = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\partial t}.$$

Wenn man ferner die Länge $p p_1 = q q_1$ des Elementes der Polbahnen, um welches dieselben sich in dem Zeitelemente ∂t auf einander abwälzen, mit ∂s bezeichnet, so hat man in gleicher Weise für die Wechselgeschwindigkeit u des Pols

$$u = \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Durch Division beider Gleichungen erhält man

$$\frac{\omega}{u} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\partial s}.$$

Da nun aber, unter ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungsradien verstanden,

$$\partial s = \varrho_1 \varepsilon_1 = \varrho_2 \varepsilon_2,$$

also

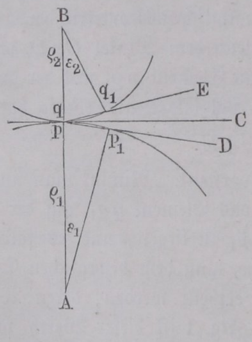
$$\frac{\varepsilon_1}{\partial s} = \frac{1}{\varrho_1} \text{ und } \frac{\varepsilon_2}{\partial s} = \frac{1}{\varrho_2}$$

ist, so kann man obige Gleichung auch schreiben:

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}.$$

Wenn die beiden Polbahnen, wie in Fig. 10, die Krümmungsmittelpunkte auf den entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Tangente $q\,C$ zu liegen haben, so ist, wie aus der Figur ohne Weiteres sich ergiebt:

Fig. 10.



$$\omega = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\partial t},$$

und daher

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2},$$

doch kann man auch für diesen Fall die obige Form

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$$

beibehalten, wenn man den Krümmungsradien entgegengesetzte Vorzeichen giebt, sobald sie auf entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Tangente der Polbahnen liegen.

Wenn man dem reciproken Werthe des Krümmungshalbmessers einer

Curve $\frac{1}{\varrho} = \frac{\varepsilon}{\partial s}$ den Namen „Krümmung“ beilegt, so kann man den Werth $\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\partial s} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$ als „relative Krümmung“ der beiden Polbahnen bezeichnen. Dieselbe ist nach dem Obigen gleich dem Verhältniß der Winkelgeschwindigkeit ω zur Wechselgeschwindigkeit u.

Beispiel. Wählen wir als Beispiel wieder die Bewegung eines Körpers, welcher mit zwei Punkten A und B im Abstande $2a$ von einander auf den festen Schenkeln eines Rechtwinkels ACB sich führt (Fig. 7), so sind in diesem Falle die Polbahnen zwei Kreise von den Halbmessern $2a$ und a. §. 13.

Man hat daher

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{2a} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{2a}.$$

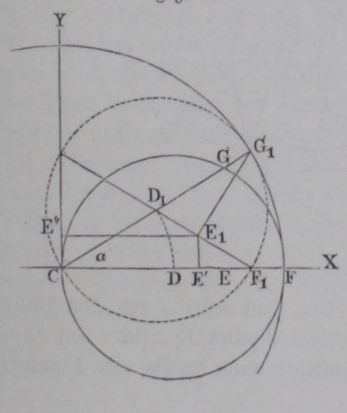
Denkt man sich daher den kleinen Kreis in einer bestimmten Richtung mit gleichbleibender Geschwindigkeit u auf dem größeren Kreise abgewälzt, so bleibt auch die Winkelgeschwindigkeit ω um den Pol während dieser Bewegung constant von der unveränderlichen Größe

$$\omega = -\frac{1}{2a}\, u.$$

Das negative Vorzeichen drückt hierin nur aus, daß die Drehungsrichtung um den Pol eine linke ist, wenn die fortschreitende Bewegung des Pols auf der festen Polbahn einer rechten Drehung um den Krümmungsmittelpunkt entspricht.

Kennt man nun die Winkelgeschwindigkeit $\omega = -\frac{u}{2a}$ der Drehung um den Pol, so kennt man auch die Geschwindigkeit irgend eines Punktes, dessen Abstand vom Pol r sein möge, gleich $v = \omega r = -r\,\frac{u}{2a}$. Von allen Punkten des bewegten Körpers hat nur der Mittelpunkt D des rollenden Kreises, Fig. 11, einen unveränderlichen Abstand $r = a$ von dem Pol, daher auch nur dieser Punkt seine Bahn mit unveränderlicher Geschwindigkeit durchläuft, wenn man voraussetzt, daß die Rollung mit gleichbleibender Wechselgeschwindigkeit u geschehe. Die Geschwindigkeit $v = r\omega$ des Punktes D ist demzufolge

Fig. 11.



$$v = a\omega = a\,\frac{u}{2a} = \frac{u}{2},$$