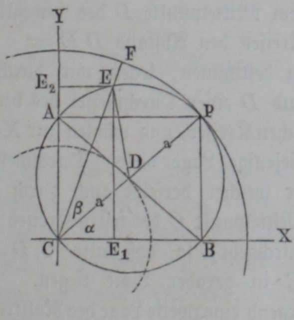
bewegliche und aus der beweglichen Polbahn q die feste wird, und also die Curve p auf derjenigen q sich abwälzt. Es ist zunächst klar, daß an der Bewegung des Körpers AB in der Ebene DCE nichts geändert wird, wenn man ihm noch eine gewisse zusätzliche Bewegung mittheilt, vorausgesetzt nur, daß genau dieselbe Bewegung auch der Ebene ertheilt wird, in welcher der Körper seine Bewegung verrichtet. Die relative Bewegung des letzteren in der Bewegungsebene wird dadurch offenbar nicht abgeändert, und die Bahnen der einzelnen Punkte behalten dabei unverändert ihren geometrischen Charakter bei. Nun denke man sich, daß die solcherart dem Körper sowohl wie der Bewegungsebene zusätzlich mitgetheilte Bewegung in jedem Augenblicke genau derjenigen Bewegung gleich und entgegengesetzt sei, welche der Körper ursprünglich schon hat, so kommt der letztere hierdurch zur Ruhe und die anfänglich fest gedachte Bewegungsebene nimmt dann eine Bewegung an, welche der ursprünglichen Systembewegung in jedem Augenblicke gleich und entgegengesetzt ist. Da die relativen Bahnen der einzelnen Punkte aber, wie angegeben, hierdurch eine Aenderung nicht erleiden, so kann man hieraus den Satz ableiten, daß die Natur der Bewegung dieselbe bleibt, welche der beiden Polbahnen man auch als die bewegliche annehmen möge. In unserem Beispiele würden diese beiden Fälle der Bewegung sich etwa derartig darstellen lassen, daß, wenn die Curve q die bewegliche Polbahn ist, wir es mit der Bewegung eines Systems zu thun haben, von welchem zwei bestimmte Punkte A und B auf zwei festen rechtwinkligen Geraden CD und CE sich führen, während der Fall, wo die Polbahn p als bewegliche angesehen wird, auf eine solche Bewegung hinausläuft, vermöge deren zwei mit dem bewegten System verbundene rechtwinkelige Gerade CD und CE immer durch zwei feste Punkte A und B hindurchgehen. Es liegt hierin ein gewisses Princip der Reciprocität, das von Chasles, welcher zuerst auf diese Eigenthümlichkeit der Bewegung aufmerksam gemacht hat, mit dem Namen Dualismus bezeichnet worden ist.

Ein deutliches Beispiel, welches meistens zur Veranschaulichung dieses Verhaltens angeführt wird, liefert die gewöhnliche Drehbank. Wenn an derselben mit der Spindel eine dazu normale ebene Scheibe (Planscheibe) verbunden ist und mit ihr sich umdreht, so ritzt eine im Abstande a von der Drehaxe festgehaltene Meißelspitze auf dieser Scheibe einen zur Drehaxe concentrischen Kreis vom Halbmesser a ein. Eben dieser Kreis wird aber auch erhalten, wenn man die Scheibe festhält, und dem Meißel bei unverändertem Abstande von der Drehbankspindel eine Rotation mit der letzteren ertheilt, wie dies beispielsweise beim Fräsen und Ausbohren öfter geschieht.

§. 11. **Beispiel.** Aus dem Vorstehenden ergiebt sich die Wichtigkeit, welche die Polbahnen für die Bestimmung der Bewegung eines beliebigen Systems in einer Ebene haben, indem mit ihrer Hülfe die Bahn jedes beliebigen Systempunktes bestimmt werden kann. Man kann in jedem Falle die Polbahnen in der oben angegebenen Weise Punkt für Punkt construiren, wenn man die Bahnen zweier Punkte kennt. Dieses Verfahren führt stets zum Ziele, doch lassen sich in vielen Fällen die Polbahnen bequemer direct zeichnen, wenn der geometrische Charakter derselben sich leicht ermitteln läßt. So z. B. ist in dem hier zu Grunde gelegten Beispiele der Bewegung einer Geraden, deren Endpunkte auf zwei rechtwinkeligen festen Geraden sich führen, leicht zu erkennen, daß die beiden Polbahnen Kreise sein müssen. Man ersieht nämlich aus Fig. 6 sofort, daß die bewegte Linie AB in jeder ihrer Lagen die Diagonale eines Rechtecks $ApBC$ ist, von welchem die beiden anderen Eckpunkte in dem zugehörigen Pole p und dem Durchschnittspunkte C der beiden Führungen CD und CE liegen. Da nun die Diagonalen eines rechtwinkeligen Parallelogrammes einander gleich sind, so folgt, daß der Pol p von dem Durchschnittspunkte C stets dieselbe Entfernung Cp, nämlich gleich der bewegten Geraden AB hat, daß also $Cp_2 = Cp_1 = Cp_3 \ldots$, folglich die Polbahn $p_2\, p_1\, p_3 \ldots$ ein um C mit der Länge AB beschriebener Kreis ist.

Desgleichen liegen auch die sämmtlichen Punkte $q_2, q_1, q_3 \ldots$ auf dem Umfange eines Kreises, dessen Durchmesser die Gerade $A_1 B_1$ ist, denn wenn man nach dem Vorstehenden die Punkte $q_2, q_3 \ldots$ ermittelt, indem man die rechtwinkeligen Dreiecke $A_2 B_2 p_2$, $A_3 B_3 p_3 \ldots$ über $A_1 B_1$ als $A_1 B_1 q_2$, $A_1 B_1 q_3 \ldots$ construirt, so ist der Ort dieser Punkte q wegen des rechten Winkels bei $q_2, q_3 \ldots$ ein über $A_1 B_1$ als Durchmesser beschriebener Kreis, welcher natürlich auch durch C hindurchgeht und zwar in allen seinen Lagen. Man erhält daher eine mit der hier zu Grunde gelegten Bewegung einer Geraden AB, deren Endpunkte auf den Schenkeln eines rechten Winkels geführt werden, identische Bewegung, wenn man innerhalb eines Kreises, dessen Centrum im Scheitel jenes Rechtwinkels liegt, und dessen Halbmesser der Länge jener gedachten Geraden gleich ist, einen zweiten Kreis von halb so großem Durchmesser sich abwälzen läßt. In Wirklichkeit läßt sich dies durch zwei Zahnräder von den angegebenen Abmessungen leicht erreichen.

Fig. 7.



Bei dieser Bewegung beschreibt jeder Punkt des über der Geraden AB beschriebenen Kreises, d. h. also der beweglichen Polbahn, einen Durchmesser der festen Polbahn, wie sich aus Folgendem ergiebt. Ist E, Fig. 7, ein beliebiger Punkt dieses Kreises, und nimmt man die beiden festen Führungslinien CA und CB als Y- und X-Axe an, so ergeben sich die Cordinaten des Punktes E durch die Gleichungen:

$$x = CE_1 = CE \,.\, \cos(\alpha + \beta) = 2a \cos\beta \,.\, \cos(\alpha + \beta),$$

$$y = CE_2 = CE \,.\, \sin(\alpha + \beta) = 2a \cos\beta \,.\, \sin(\alpha + \beta),$$

wenn man den Durchmesser $Cp = AB$ des rollenden Kreises mit $2a$, den Winkel BCp mit α und ECp mit β bezeichnet. Aus obigen Gleichungen folgt:

$$\frac{y}{x} = \tan(\alpha + \beta).$$

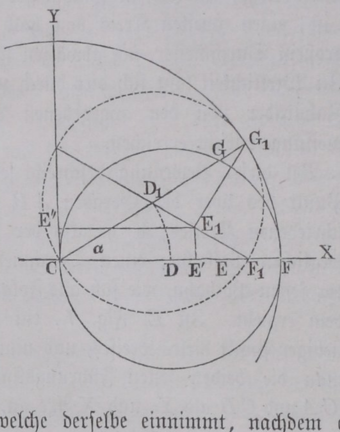
Da $\alpha + \beta$ für jede Lage des rollenden Kreises constant, nämlich gleich dem halben Centriwinkel BDE ist, welcher den Abstand des Punktes E von B im Kreisumfange gemessen angiebt, so stellt obige Gleichung

$$\frac{y}{x} = \tan \frac{1}{2} BDE = \tan \frac{\gamma}{2}$$

eine Gerade EC dar, deren Neigung gegen die X-Axe gleich jenem halben Centriwinkel ist.

Man erkennt übrigens aus der Figur, daß der Punkt E des rollenden Kreises mit dem festen Kreise in F zur Berührung kommt, da der Bogen Ep gleich demjenigen Fp sein muß, dessen Centriwinkel halb so groß und dessen Radius doppelt so groß ist. Wenn der bewegliche Kreis auf dem ganzen Umkreise des festen sich abgewälzt hat, so hat sich ersterer dabei zweimal um die eigene Axe gedreht, und jeder Punkt seines Umfanges wie E hat einen ganzen Durchmesser des festen Kreises einmal hin und einmal zurück durchlaufen. Daß der Mittelpunkt D des beweglichen Kreises wegen seines constanten Abstandes vom Centrum C des festen Kreises selbst einen Kreis vom Halbmesser a beschreibt, ergiebt sich ohne Weiteres.

Fig. 8.



Um die Bahn irgend eines beliebigen Punktes E, Fig. 8, welcher von dem Mittelpunkte D des beweglichen Kreises den Abstand $DE = e$ hat, zu bestimmen, legen wir durch E und D einen Durchmesser des beweglichen Kreises, und wählen zur X-Axe diejenige Lage dieses Durchmessers, in welcher derselbe auch durch den Mittelpunkt C des festen Kreises hindurchgeht, so daß also C, D und E in gerader Linie liegen. Für irgend eine zweite Lage des Rollkreises, welche derselbe einnimmt, nachdem er auf dem Bogen FG_1 des Winkels

FCG_1 sich abgewälzt hat, ist nach dem Vorigen der Punkt F des Rollkreises in centraler Richtung nach F_1 und der Punkt G nach G_1 gerückt. Man findet daher die nunmehrige Lage von E in E_1, wenn man auf dem Durchmesser $F_1 D_1$ die Strecke $D_1 E_1 = DE = e$ abträgt. Bezeichnet daher wieder $2a$ den Durchmesser CF des rollenden Kreises, so hat man für die Coordinaten von E_1:

$$x = CE' = a \cos \alpha + e \cos \alpha = (a + e) \cos \alpha$$
$$y = CE'' = a \sin \alpha - e \sin \alpha = (a - e) \sin \alpha,$$

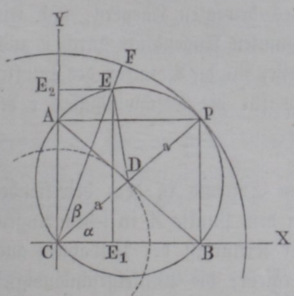
folglich:

$$\left(\frac{x}{a+e}\right)^2 + \left(\frac{y}{a-e}\right)^2 = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren Halbaxen $a + e$ und $a - e$ sind, und gilt diese Gleichung auch für den Fall, daß der Punkt E außerhalb des rollenden Kreises gelegen ist. Es beschreiben sonach sämmtliche Punkte des beweglichen Systems Ellipsen, welche für den Mittelpunkt D des Rollkreises, für welchen $e = 0$ ist, in einen Kreis und für den Umfang des Rollkreises, für welchen $e = a$ ist, in gerade Linien übergehen.

Der Vorgang, welcher eintritt, wenn man die bewegliche mit der festen Polbahn vertauscht, läßt sich nach dem Vorigen jetzt leicht definiren. Zu dem Ende denke man sich das bewegliche System oder die Stange AB, Fig. 8b, mit ihrer Ebene festgestellt, und die ursprünglich feste Ebene mit den beiden rechtwinkeligen Geraden CA und CB so bewegt, daß diese Geraden fortwährend durch die beiden jetzt festen Punkte A und B hindurchgezogen werden. Es wird alsdann das bewegliche System mit einem zu C concentrischen Kreise vom Halbmesser $CD = a$ durch den jetzt festen Mittelpunkt D der Geraden AB hindurchgezogen, und jeder Punkt des nun festen Systems, welcher wie E vom Mittelpunkte D der Stange einen Abstand a gleich der halben Stangenlänge hat, besitzt die Eigenschaft, daß die bewegliche Ebene bei ihrer Bewegung mit einer durch den Scheitel C des Rechtwinkels gehenden Geraden durch diesen Punkt hindurchgezogen wird. Jeder andere Punkt des festen Systems endlich (wie E, Fig 8) verbleibt bei der Bewegung der Ebene des Rechtwinkels in einer in letzterer liegenden Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Durchschnitte C der beiden Geraden CA und CB zusammenfällt.

Fig. 8b.



Da übrigens jeder Punkt im Umfange des rollenden Kreises, wie E, Fig. 7, in einer durch C gehenden Geraden sich führt, so erkennt man hieraus auch, daß man zu derselben Bewegung gelangen muß, wenn auch die beiden Geraden einen beliebigen schiefen Winkel einschließen, denn man kann das System, in welchem die beiden Punkte A und B in CA und CB geführt werden, offenbar ersetzen durch ein anderes System, in welchem die beiden Punkte E und B in CE und CB geführt werden. Die Richtigkeit dieser Behauptung ersieht sich sofort, wenn man im Auge behält, daß die Bahnen zweier Punkte eines ebenen Systems dessen Bewegung vollständig bestimmen.

§. 12. **Wechselgeschwindigkeit der Momentanaxe.** Zur Bestimmung der Momentanaxe oder des Pols der Bewegung eines ebenen Systems in einem gewissen Augenblicke genügt nach dem Obigen die Kenntniß der Bewegungsrichtungen zweier Punkte. Ferner kann man aus der Kenntniß der Bahnen zweier Punkte die Polbahnen, d. h. die Lage der Momentanaxe für jeden Augenblick bestimmen. Hieraus kann wieder nach dem Obigen die Bahn jedes beliebigen Systempunktes abgeleitet werden. Die Bewegung eines beliebigen Punktes des bewegten Körpers in einem gewissen Augenblicke ist aber erst bestimmt, wenn außer seinem derzeitigen Orte und der Richtung seiner Bahn auch die Größe seiner Geschwindigkeit bekannt ist. Zur Bestimmung dieses letzteren Elementes für irgend welchen Punkt des Körpers genügt es, wenn man die Geschwindigkeit eines einzigen Körperpunktes kennt. Ist nämlich A ein solcher Punkt des bewegten Körpers, und sein Abstand pA von dem Pol p in einem bestimmten Augenblicke durch r ausgedrückt, welcher Abstand als Drehungshalbmesser für die Rotation des Punktes A um den Pol p anzusehen ist, so hat man für die Geschwindigkeit v des Punktes A:

$$v = r\omega,$$

wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des ganzen Systems in dem betreffenden Augenblicke bedeutet. Kennt man daher von dem Punkte A in jedem Augenblicke die Geschwindigkeit v, so ist, da aus der Kenntniß der Polbahnen auch in jedem Augenblicke die Größe von r sich ergiebt, die Winkelgeschwindigkeit des Systems $\omega = \frac{v}{r}$ ebenfalls für jeden Moment bekannt. Hieraus nun läßt sich auch die Geschwindigkeit v_1 jedes anderen Punktes A_1 im Abstande r_1 vom Pol durch $v_1 = \omega r_1$ bestimmen.

Wenn die Momentanaxe eines bewegten ebenen Systems während der ganzen Bewegungsdauer eine unveränderliche Lage hätte, so würde zur vollkommenen Bestimmung der Bewegung des Körpers die Kenntniß der betreffenden Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe in jedem Augenblicke