Es ist daher aus dem Vorstehenden ersichtlich, daß man die Mittel des äußeren Zwanges, welche der beabsichtigten Bewegung ihren Charakter ertheilen, auch ersetzen kann durch die beiden Polbahnen. Würde man etwa in dem gewählten Beispiele, Fig. 6, die beiden festen Geradführungen CD CE ganz fortlassen, und statt ihrer die in der festen Ebene liegende materiell ausgeführte Curve $p_2 p_1 p_3 \ldots$ anbringen, auf welcher die ebenfalls materielle Curve $q_2 q_1 q_3 \ldots$ sich abwälzt, welche mit der Stange AB verbunden ist, so erhielte man beim Rollen dieser Curven aufeinander dieselbe Bewegung des Systems, wie sie durch die Führungen CD und CE hervorgebracht wird. Die Bewegung ist hierbei in beiden Fällen und nicht nur für A und B dieselbe, sondern die Uebereinstimmung gilt auch für jeden beliebigen Punkt F, da ja durch die Bewegung zweier Punkte diejenige eines ebenen Systems vollkommen bestimmt ist. Wenn daher bei einem bewegten System die beiden Polbahnen bekannt sind, so kann man für jeden Augenblick leicht die Bewegung irgend eines beliebigen Punktes des Systems bestimmen. Zieht man nämlich von dem Berührungspunkte (p_1) der beiden Polbahnen in dem betreffenden Augenblicke nach dem Punkte (F), dessen Bewegung bestimmt werden soll, einen Fahrstrahl, so ist dieser normal zu der Bewegung des betreffenden Punktes gerichtet, und die Geschwindigkeit dieser Bewegung ist der Länge dieses Fahrstrahls proportional. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich ohne Weiteres aus der Bemerkung, daß der Berührungspunkt der beiden Polbahnen der jedesmalige augenblickliche Drehpunkt ist. Wenn man daher um den Pol p_1 mit der Länge $q_1 F$ des Fahrstrahls einen Kreisbogen beschreibt, so muß derselbe die Bahn des Punktes F berühren. Dasselbe gilt aber auch von den Kreisbögen, welche um den Punkt p_2 mit dem Strahl $q_2 F$, oder um den Punkt p_3 mit dem Strahl $q_3 F$ 2c. gezeichnet werden, und es ergiebt sich hieraus, daß die um die einzelnen Punkte der Polbahn p mit den bezüglichen Fahrstrahlen von den Punkten q nach einem Systempunkte F beschriebenen Kreisbogen die Bahn des gedachten Punktes F einhüllen. Man erkennt leicht aus der Figur, daß in unserem Beispiele die Kreise, welche von den Punkten p aus mit den Fahrstrahlen beschrieben werden, die man von den Punkten q nach A und B ziehen kann, sämmtlich die Geraden CD resp. CE berühren, welche die Bahnen von A und B sind.

Gegenseitigkeit der Polbahnen. Bisher haben wir angenommen, §. 10.
daß die Curve q als bewegliche Polbahn auf der festen Polbahn p herumgeführt werde, und sahen, in welcher Weise sich die Bahn irgend eines Systempunktes A, B oder F, d. h. diejenige Curve zeichnen läßt, welche der betreffende Punkt in der festen Ebene beschreibt. Es ist nun ein Leichtes, die Verhältnisse entgegengesetzt so zu gestalten, daß aus der festen Polbahn p die

bewegliche und aus der beweglichen Polbahn q die feste wird, und also die Curve p auf derjenigen q sich abwälzt. Es ist zunächst klar, daß an der Bewegung des Körpers AB in der Ebene DCE nichts geändert wird, wenn man ihm noch eine gewisse zusätzliche Bewegung mittheilt, vorausgesetzt nur, daß genau dieselbe Bewegung auch der Ebene ertheilt wird, in welcher der Körper seine Bewegung verrichtet. Die relative Bewegung des letzteren in der Bewegungsebene wird dadurch offenbar nicht abgeändert, und die Bahnen der einzelnen Punkte behalten dabei unverändert ihren geometrischen Charakter bei. Nun denke man sich, daß die solcherart dem Körper sowohl wie der Bewegungsebene zusätzlich mitgetheilte Bewegung in jedem Augenblicke genau derjenigen Bewegung gleich und entgegengesetzt sei, welche der Körper ursprünglich schon hat, so kommt der letztere hierdurch zur Ruhe und die anfänglich fest gedachte Bewegungsebene nimmt dann eine Bewegung an, welche der ursprünglichen Systembewegung in jedem Augenblicke gleich und entgegengesetzt ist. Da die relativen Bahnen der einzelnen Punkte aber, wie angegeben, hierdurch eine Aenderung nicht erleiden, so kann man hieraus den Satz ableiten, daß die Natur der Bewegung dieselbe bleibt, welche der beiden Polbahnen man auch als die bewegliche annehmen möge. In unserem Beispiele würden diese beiden Fälle der Bewegung sich etwa derartig darstellen lassen, daß, wenn die Curve q die bewegliche Polbahn ist, wir es mit der Bewegung eines Systems zu thun haben, von welchem zwei bestimmte Punkte A und B auf zwei festen rechtwinkligen Geraden CD und CE sich führen, während der Fall, wo die Polbahn p als bewegliche angesehen wird, auf eine solche Bewegung hinausläuft, vermöge deren zwei mit dem bewegten System verbundene rechtwinkelige Gerade CD und CE immer durch zwei feste Punkte A und B hindurchgehen. Es liegt hierin ein gewisses Princip der Reciprocität, das von Chasles, welcher zuerst auf diese Eigenthümlichkeit der Bewegung aufmerksam gemacht hat, mit dem Namen Dualismus bezeichnet worden ist.

Ein deutliches Beispiel, welches meistens zur Veranschaulichung dieses Verhaltens angeführt wird, liefert die gewöhnliche Drehbank. Wenn an derselben mit der Spindel eine dazu normale ebene Scheibe (Planscheibe) verbunden ist und mit ihr sich umdreht, so ritzt eine im Abstande a von der Drehaxe festgehaltene Meißelspitze auf dieser Scheibe einen zur Drehaxe concentrischen Kreis vom Halbmesser a ein. Eben dieser Kreis wird aber auch erhalten, wenn man die Scheibe festhält, und dem Meißel bei unverändertem Abstande von der Drehbankspindel eine Rotation mit der letzteren ertheilt, wie dies beispielsweise beim Fräsen und Ausbohren öfter geschieht.

§. 11. **Beispiel.** Aus dem Vorstehenden ergiebt sich die Wichtigkeit, welche die Polbahnen für die Bestimmung der Bewegung eines beliebigen Systems in einer Ebene haben, indem mit ihrer Hülfe die Bahn jedes beliebigen System-