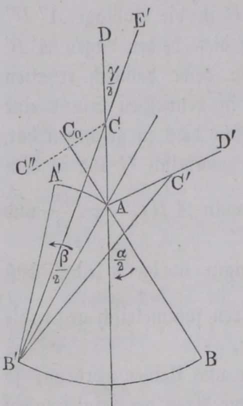
d. h. die Axe der resultirenden Drehung zweier unendlich kleinen Drehungen um parallele Axen liegt in der Ebene dieser beiden Axen und zwar in Abständen von denselben, welche sich umgekehrt wie die Drehungswinkel verhalten.

Bisher ist angenommen worden, daß die beiden Drehungen um die Axen A und B in demselben Sinne (rechtsum, wie die Uhrzeigerbewegung) vor sich gehen sollen. Vorstehendes bleibt aber auch richtig, wenn die Drehungen in einander entgegengesetztem Sinne erfolgen, nur hat man dann unter der Summe $\alpha + \beta$ die algebraische Summe zu verstehen, indem man dem einen Drehungswinkel das positive, dem anderen das negative Zeichen giebt. Der Sinn der resultirenden Drehung stimmt dann mit derjenigen Drehung überein, deren Vorzeichen die algebraische Summe von α und β hat, d. h. mit dem Sinne der absolut größeren Drehung. Soll z. B., Fig. 4, der Körper einer Rechtsdrehung α um A und dann einer Linksdrehung β um die Axe B, welche dann nach B' gelangt ist, unterworfen werden, so halbire man den Drehungswinkel $BAB' = \alpha$ durch AD und trage den Winkel $\dfrac{\beta}{2} = AB'E'$ an. In dem Schnitte C erhält man dann denjenigen Punkt, welcher durch die Drehung α um A nach C' und durch die entgegengesetzte Drehung β um B' wieder nach C zurückgeführt wird. Dieser Punkt repräsentirt also die in ihm normal zur Bewegungsebene zu denkende Axe der resultirenden Drehung, deren Betrag gleich $2\,DCE' = \gamma = \alpha - \beta$ ist, woraus die oben angeführte Regel sich ergiebt.

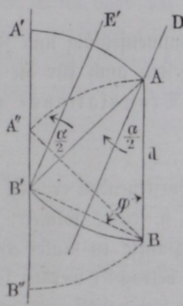
Fig. 4.



In Bezug der Reihenfolge der beiden Drehungen gilt das oben für übereinstimmende Drehungsrichtungen Gesagte, und man findet demnach in dem Punkte C'', welcher zu AB eine mit C symmetrische Lage hat, den Fußpunkt für die Axe der resultirenden Drehung, welche die umgekehrte Aufeinanderfolge der Drehungen β, α ersetzt. Ebenfalls liegt der Axenpunkt C_0, welcher den unendlich kleinen Drehungswinkeln α und β entspricht, so auf der verlängerten Axenverbindung AB, daß wie oben $C_0 A : C_0 B = \beta : \alpha$ ist.

§. 6. **Rotationspaar.** Wenn die beiden entgegengesetzten Drehungen um zwei parallele Axen A und B, Fig. 5, von gleicher Größe α sind, so fällt die Axe der resultirenden Drehung in die Unendlichkeit, indem nämlich die beiden zur Construction dieses Axenpunktes dienenden Winkelhalbirenden AD und $B'E'$ in diesem Falle parallel werden. Eine Drehung um einen unendlich fernen Punkt ist aber einer geradlinigen Verschiebung des Körpers gleichzusetzen. In der That ist die aus beiden Drehungen resultirende Endlage des Körpers $A'B'$ parallel der ursprünglichen AB, und es hat sonach eine Verschiebung stattgefunden, welche durch die Strecke AA' oder BB' ausgedrückt ist. Daher ist die Größe dieser Verschiebung

Fig. 5.



$$AA' = BB' = 2d \sin \frac{\alpha}{2},$$

wenn d wieder den Axenabstand AB bedeutet. Der Winkel φ, welchen die Verschiebungsrichtung mit der Axenverbindung AB bildet, ist

$$\varphi = 90^0 - \frac{\alpha}{2}.$$

Daß ein solches Paar entgegengesetzter gleicher Drehungen wirklich nur eine einfache Verschiebung hervorbringt, ergiebt sich auch aus folgender Betrachtung. Denkt man die Drehung α um die Axe A nach §. 4 ersetzt durch eine ebenso große Drehung um die Axe B und eine Verschiebung im Betrage $2d \sin \frac{\alpha}{2}$, so ergiebt sich die letztere als das einzige Resultat des Drehungspaars, indem die Drehung α um B mit der Drehung $-\alpha$ um dieselbe Axe sich aufhebt.

Ein solches Paar gleicher und entgegengesetzter Drehungen um parallele Axen heißt ein Rotationspaar oder Drehungspaar, dasselbe kann stets durch eine entsprechende Verschiebung ersetzt werden und umgekehrt.

Daß auch bei dem Rotationspaare die Aufeinanderfolge der Drehungen nicht gleichgültig ist, ergiebt eine Betrachtung der Figur. Während nämlich die Axenverbindende AB in die Lage $A'B'$ gelangt, wenn die Drehung zuerst um A, dann um B' geschieht, so nimmt jene Linie die Lage $A''B''$ an, wenn die Drehungen in der entgegengesetzten Folge geschehen. Die Verschiebung ist also in dem einen Falle durch BB', in dem anderen Falle durch BB'' dargestellt. Diese beiden Strecken BB' und BB'' sind von gleicher Länge $2d \sin \frac{\alpha}{2}$ und von derselben Neigung $\varphi = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ gegen die Axenebene AB, aber die Winkel φ sind in verschiedenem Sinne anzutragen. Die beiden Lagen $A'B'$ und $A''B''$ fallen daher in eine Gerade zusammen. Offenbar hört der Unterschied in der Aufeinanderfolge der Drehungen um A und B auf, sobald BB' mit BB'' zusammenfällt, d. h. wenn der Winkel φ gleich 90^0 wird. Hierzu ist erforderlich, daß α unendlich klein ist, und es gilt also für den Fall differentialer Bewegungen Aehnliches wie oben für ungleiche Drehungen angeführt worden ist. Der Ausdruck $2\,d\,sin\,\frac{\alpha}{2}$ für die Größe der Verschiebung geht für den Fall, daß α unendlich klein ist, in $\alpha\,d$ über.

Die in §§. 4 bis 6 angeführten Sätze über die Zusammensetzung und Zerlegung der Translations- und Rotationsbewegungen gelten auch für die auf die Zeiteinheit bezogenen Wege, d. h. für die Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten.

§. 7. **Pol oder Momentancentrum.** Aus dem Vorstehenden ergiebt sich leicht, daß die Bewegung eines ebenen Systems, d. h. eines solchen, bei welchem, wie in §. 2 definirt, die Bewegungen aller Punkte in lauter unter sich parallelen Ebenen geschehen, in jedem Augenblicke betrachtet werden kann als eine unendlich kleine Drehung um eine gewisse, zu den parallelen Ebenen senkrechte Axe. Denn welcher Art die Bewegungen auch sein mögen, so zerfallen sie immer in Verschiebungen in den gedachten Parallelebenen und in Drehungen in denselben, d. h. um Axen, welche auf diesen Ebenen senkrecht stehen. Alle Verschiebungen lassen sich nun mit Hülfe des Parallelogramms der Bewegungen zu einer resultirenden Verschiebung zusammensetzen, während man alle Drehungen um die parallelen Axen nach §. 5 und 6 zu einer einzigen resultirenden Drehung vereinigen kann. Diese resultirende Drehung läßt sich nun wieder mit der auf der Drehaxe normalen resultirenden Verschiebung nach §. 4 zu einer einzigen Drehung um eine Axe zusammensetzen, welche gleichfalls auf dem Ebenensystem normal steht. Wenn hierbei anstatt der resultirenden Drehung ein Drehungspaar zum Vorschein kommt, das einer einfachen Verschiebung äquivalent ist, so kann man die resultirende Verschiebung ebenfalls als eine Drehung um eine Axe auffassen, welche auf der zur Verschiebung normalen Richtung im Unendlichen liegt.

Die Axe dieser resultirenden Drehung wird im Allgemeinen keine feste Lage im Raume haben, sondern in jedem Augenblicke ihren Ort wechseln. Um die Lage derselben in einem bestimmten Momente zu ermitteln, hat man sich nur zu erinnern, daß die einzelnen Punkte eines um eine Axe rotirenden Körpers Bahnen beschreiben, welche auf den Radien, d. h. den Richtungen der Lothe senkrecht stehen, die von den betreffenden Körperpunkten auf die Axe gefällt werden. Wenn man daher in einem beliebigen Punkte der Bahn eines Elementes in der Ebene derselben zur Bahn eine Normale errichtet, so muß dieselbe die Drehaxe schneiden, um welche der Körper in demjenigen Augenblicke sich dreht, in welchem das Element sich im Fußpunkte dieses Lothes befindet. Es ergiebt sich daher ferner, daß man in jedem Augenblicke die Drehaxe unzweideutig finden kann, wenn man die Richtungen der Be-