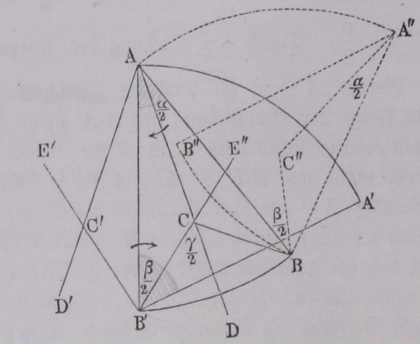
schnitt der zur Ebene der Zeichnung senkrechten Axe, um welche der Körper eine Drehung im Betrage des Winkels α empfangen soll, und $AA' = s$ die ihm zu ertheilende Verschiebung, so lege man AD senkrecht zu AA' und trage zu jeder Seite von AD den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ an, mache also $DAC = DAC' = \frac{\alpha}{2}$. Durch die Drehung des Körpers um A gelangt offenbar die Gerade AC in die punktirte Zwischenlage AC', aus welcher sie dann in Folge der Verschiebung um AA' in die Endlage $A'B$ übergeht, welche man erhält, wenn man durch A' die Gerade $A'B$ parallel zu AC' legt. Zieht man noch BB' parallel AA', so erhält man in B' einen Punkt der Geraden AC', welcher durch die Verschiebung nach B gelangt. Da nun nach der Construction leicht $AB' = AB$ sich folgern läßt, so ergiebt sich auch, daß der genannte Punkt B' vor der Drehung in B seinen Ort gehabt haben muß, also in demselben Punkte, nach welchem ihn die auf die Drehung folgende Verschiebung wieder zurückführt. Dieser Punkt B und daher die in ihm zur Figur senkrechte Gerade haben daher den ursprünglichen Ort nicht geändert, woraus ohne Weiteres folgt, daß die Bewegung des Körpers nur eine Drehung um die in B normale Axe sein kann. Die Figur ergiebt auch, daß die Drehung um B in demselben Sinne und zu demselben Betrage erfolgt ist, wie die zuerst um A vorgenommene. Wäre die Drehung um A oder die Verschiebung in der entgegengesetzten Richtung vor sich gegangen, als hier angenommen, so würde die Axe der resultirenden Drehung, wie leicht zu erkennen, anstatt in B auf der anderen Seite von AA' nämlich in B'' resp. B''' gelegen sein.

Daß man umgekehrt immer die Drehung eines Körpers um eine gewisse Axe (B) ersetzen kann durch eine ebenso große und in demselben Sinne gerichtete Drehung um eine zu jener Axe parallele Gerade (A) von sonst beliebiger Lage und durch eine entsprechende Verschiebung (AA') normal zu den Axen, folgt leicht durch eine der vorigen analoge Betrachtung. Es ergiebt sich die Größe der betreffenden Verschiebung $AA' = B'B = 2d \sin \frac{\alpha}{2}$, wenn unter d der Abstand AB der beiden Axen verstanden wird.

Zwei Drehungen. Wenn ein Körper nach einander zweien Drehungen um parallele Axen ausgesetzt ist, so kann man dieselben immer ersetzen durch eine einzige Drehung um eine zu jenen parallele Axe, deren Winkel gleich der algebraischen Summe der Winkel ist, um welche die Einzeldrehungen ausgeführt werden. Seien z. B. A und B, Fig. 3 (a. f. S.), die Punkte des Körpers, durch welche die zur Figur senkrechten Drehaxen hindurchgehen, §. 5.

und seien unter α resp. β die zugehörigen Drehungswinkel verstanden. Wird der Körper zunächst um die Axe A gedreht, so gelangt dadurch B in die neue Lage B', welche als Endlage dieser Axe anzusehen ist, da die letztere

Fig. 3.



bei der nun folgenden Drehung um den Winkel β ihre Lage nicht mehr ändert. A hingegen gelangt durch diese Drehung in die Endlage A'. Daß man das Resultat dieser Drehungen auch durch eine einzige ersetzen kann, ergiebt sich in folgender Weise. Halbirt man durch AD den Winkel α oder BAB', macht also $DAB' = DAB = \frac{\alpha}{2}$, so gelangt die Halbirende AD durch die Drehung um A in die Lage AD', wenn $D'AB'$ ebenfalls gleich $\frac{\alpha}{2}$ gemacht wurde. Trägt man nun zu beiden Seiten von AB' den Winkel $\frac{\beta}{2}$ an, macht also $AB'E' = AB'E'' = \frac{\beta}{2}$, so kommt bei der Drehung um B' offenbar die Gerade $B'E'$ in die Lage $B'E''$, und es ist leicht zu erkennen, daß der Durchschnitt C' von AD' mit $B'E'$ nach C fallen muß, da aus der Construction $B'C' = B'C$ folgt. Da nun aber ebenfalls nach der Construction $AC = AC'$ sich ergiebt, so ist hiermit bewiesen, daß der durch die Drehung um B' von C' nach C gelangte Punkt des Körpers ursprünglich schon dieselbe Lage C inne gehabt hat, aus welcher Lage C er durch die um A erfolgte Drehung nach C' übergeführt worden ist. Dieser Punkt C hat also in Folge der beiden Drehungen seinen Ort nicht verändert, weshalb man annehmen muß, daß die gesammte Bewegung des Körpers sich auch durch eine Drehung desselben um die Axe C ersetzen läßt. Da bei dieser Drehung der Punkt B in seine Endlage B' gelangen muß, so ist diese Drehung um den Winkel $BCB' = \gamma$ vorzunehmen. Es folgt aus der Figur für diesen Winkel ohne Weiteres

$$\gamma = BCB' = 2DCB' = \alpha + \beta.$$

Daß es hierbei nicht gleichgültig ist, in welcher Aufeinanderfolge man die einzelnen Drehungen vornimmt, ergiebt folgende Betrachtung. Jede der beiden Drehaxen A und B verdankt ihre Ortsveränderung lediglich der Drehung um die andere Axe, da die Drehung um sie selbst zu einer Veränderung ihres Orts keine Veranlassung giebt. So gelangt beispielsweise B durch die Drehung α um A in ihre definitive Lage B', vorausgesetzt, daß wie oben angenommen wurde, die Drehung α um A zuerst vorgenommen wird. Wollte man nun aber die Drehung β um B zuvörderst eintreten lassen, so würde dadurch A in die neue Endlage A'' geführt, und es würde jetzt durch die um diese Axe A'' folgende Drehung α die Axe B nicht nach B' wie vorhin, sondern nach B'' gelangen. Während also die Linie AB durch die beiden aufeinanderfolgenden Drehungen α und β in die Lage $A'B'$ übergeführt wird, so wird, wenn die Drehungen in der umgekehrten Reihenfolge β, α vorgenommen werden, dieselbe Linie AB in die Endlage $A''B''$ gelangen. Es ist übrigens ohne Weiteres klar, daß diese beiden Lagen $A'B'$ und $A''B''$ parallel sein müssen, denn sie können beide dadurch erhalten werden, daß dem Körper um den Winkel $\alpha + \beta$ in demselben Sinne eine Drehung ertheilt wird, nur sind die Axen, um welche dies zu geschehen hat, verschiedene, in dem ersten Falle, wie oben ermittelt, nämlich C und in dem letzteren Falle C'', welche Lage sich ergiebt, wenn man $ABC'' = \frac{\beta}{2}$ und $BA''C'' = \frac{\alpha}{2}$ macht. Man erkennt aus der Figur übrigens leicht, daß die Oerter C und C'' dieser beiden resultirenden Axen symmetrisch gegen die ursprüngliche Lage der Axenverbindung AB liegen.

Denkt man die Drehungswinkel α und β kleiner und kleiner werdend, so ergiebt sich, daß die beiden Oerter C und C'' für die Axen der resultirenden Drehungen sich der ursprünglichen Axenverbindung AB von beiden Seiten mehr und mehr nähern. In dem Grenzfalle, wo α und β unendlich kleine Winkel vorstellen, wird der Abstand der Axen C und C'' von AB selbst auch ein unendlich Kleines werden, d. h. die beiden Axen fallen in einem Punkte C_0 der Geraden AB zusammen. Was die Lage dieses Punktes C_0 zwischen A und B anbetrifft, so kann man bemerken, daß für die Oerter C und C'' der resultirenden Axe fortwährend die Gleichung gilt:

$$CA : CB = C''A : C''B = \sin\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\alpha}{2}.$$

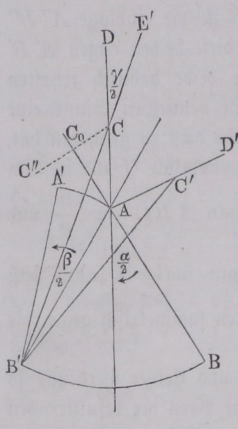
Diese Gleichung geht für den Fall, wo α und β unendlich klein sind und C mit C'' in C_0 zusammenfällt, über in

$$C_0A : C_0B = \beta : \alpha,$$

d. h. die Axe der resultirenden Drehung zweier unendlich kleinen Drehungen um parallele Axen liegt in der Ebene dieser beiden Axen und zwar in Abständen von denselben, welche sich umgekehrt wie die Drehungswinkel verhalten.

Bisher ist angenommen worden, daß die beiden Drehungen um die Axen A und B in demselben Sinne (rechtsum, wie die Uhrzeigerbewegung) vor sich gehen sollen. Vorstehendes bleibt aber auch richtig, wenn die Drehungen in einander entgegengesetztem Sinne erfolgen, nur hat man dann unter der Summe $\alpha + \beta$ die algebraische Summe zu verstehen, indem man dem einen Drehungswinkel das positive, dem anderen das negative Zeichen giebt. Der Sinn der resultirenden Drehung stimmt dann mit derjenigen Drehung überein, deren Vorzeichen die algebraische Summe von α und β hat, d. h. mit dem Sinne der absolut größeren Drehung. Soll z. B., Fig. 4, der Körper einer Rechtsdrehung α um A und dann einer Linksdrehung β um die Axe B, welche dann nach B' gelangt ist, unterworfen werden, so halbire man den Drehungswinkel $BAB' = \alpha$ durch AD und trage den Winkel $\frac{\beta}{2} = AB'E'$ an. In dem Schnitte C erhält man dann denjenigen Punkt, welcher durch die Drehung α um A nach C' und durch die entgegengesetzte Drehung β um B' wieder nach C zurückgeführt wird. Dieser Punkt repräsentirt also die in ihm normal zur Bewegungsebene zu denkende Axe der resultirenden Drehung, deren Betrag gleich $2\,DCE' = \gamma = \alpha - \beta$ ist, woraus die oben angeführte Regel sich ergiebt.

Fig. 4.



In Bezug der Reihenfolge der beiden Drehungen gilt das oben für übereinstimmende Drehungsrichtungen Gesagte, und man findet demnach in dem Punkte C'', welcher zu AB eine mit C symmetrische Lage hat, den Fußpunkt für die Axe der resultirenden Drehung, welche die umgekehrte Aufeinanderfolge der Drehungen β, α ersetzt. Ebenfalls liegt der Axenpunkt C_0, welcher den unendlich kleinen Drehungswinkeln α und β entspricht, so auf der verlängerten Axenverbindung AB, daß wie oben $C_0 A : C_0 B = \beta : \alpha$ ist.

§. 6. **Rotationspaar.** Wenn die beiden entgegengesetzten Drehungen um zwei parallele Axen A und B, Fig. 5, von gleicher Größe α sind, so fällt die Axe der resultirenden Drehung in die Unendlichkeit, indem nämlich die beiden zur Construction dieses Axenpunktes dienenden Winkelhalbirenden AD und $B'E'$ in diesem Falle parallel werden. Eine Drehung um einen un-