Einleitung.

Grundlehren der Kinematik.

§. 1. **Kinematik.** Im ersten Theile dieses Werkes, welcher die theoretische Mechanik behandelt, sind die Bewegungsgesetze der Körper unter der Voraussetzung entwickelt, daß dieselben als materielle Punkte den auf sie einwirkenden Kräften frei beweglich folgen können, wobei dann die von ihnen beschriebene Bahn als Resultat der Einwirkung der gedachten Kräfte sich ergiebt. Beispielsweise ist die Bahn einer abgeschossenen Kugel wesentlich von der Schwerkraft und dem Luftwiderstande bedingt. Im Maschinenbau kann man den einzelnen Organen eine solche Freiheit der Bewegung nicht gestatten, sondern schreibt ihnen durch äußeren Zwang, wie z. B. durch feste Leitungen, bestimmte Bewegungen vor. Bereits in Theil I. §. 299 ist die Wirkung solcher festen Führungen erläutert und dabei besonders hervorgehoben, daß die Leitbahn in jedem Augenblicke genau solche Kräfte auf den Körper ausübt, wie sie auf den frei gedachten Körper wirken müßten, wenn derselbe sich zufolge dieser Kräfte in der nämlichen Bahn bewegen sollte. Es ist also auch hier, wie bei der freien Bewegung, die beschriebene Bahn das Resultat von Kräften, aber es besteht der Unterschied, daß, während bei dem frei bewegten Körper jede Aenderung der Kräfte mit einer Aenderung der Bewegung, ihrer Form wie ihrer Geschwindigkeit nach, verknüpft ist, die Bahn eines zwangläufig geführten Körpers eine bestimmte, von der Einwirkung äußerer Kräfte unabhängige ist. Durch solche äußeren Kräfte kann wohl die Intensität der Bewegung a l l e r T h e i l e des betreffenden Maschinengetriebes vergrößert oder verringert werden, jedoch bleibt das V e r h ä l t n i ß zwischen den Geschwindigkeiten der einzelnen Theile zu einander in jedem Falle unverändert dasselbe, ebenso wie die Bahnen der einzelnen Theile selbst unverändert bleiben. Dieses Verhältniß und diese Bahnen sind nur von dem geometrischen Zusammenhange der geführten Theile zu einander und der Führungsorgane zu ihnen abhängig.

Eine Untersuchung dieser Abhängigkeit, die nach dem Vorstehenden einen wesentlich geometrischen Charakter haben wird, hat also weder auf die äußeren treibenden Kräfte Rücksicht zu nehmen, noch mit der Zeit oder der absoluten Geschwindigkeit zu rechnen. Nur um die Ermittelung der gegenseitigen Bahnen der bewegten Elemente sowie um das Verhältniß von deren relativen Geschwindigkeiten kann es sich handeln. Der Wissenschaft, welche sich mit dieser Untersuchung beschäftigt, und deren Wichtigkeit der Bedeutung des Maschinenwesens entsprechend ist, hat man den Namen Kinematik*) oder Maschinengetriebelehre gegeben. Zum besseren Verständniß der in diesem Bande gegebenen Theorie der Zwischenmaschinen sollen die Grundgesetze dieser Disciplin hier angeführt werden.

Bewegung der Körper im Allgemeinen. In dem Folgenden sind stets starre Körper vorausgesetzt, d. h. solche, deren einzelne Punkte unveränderliche gegenseitige Abstände von einander haben und behalten. Wenn es auch in Wirklichkeit absolut starre Körper nicht giebt, vielmehr alle uns bekannten Materialien unter Einfluß äußerer Kräfte gewisse elastische Formänderungen annehmen, so sind doch bei den im Maschinenbau vorzugsweise angewandten Stoffen diese Veränderungen so unbedeutend, daß sie für die hier folgenden Erörterungen vernachlässigt werden dürfen. §. 2.

Wenn ein freier starrer Körper eine ganz beliebige Bewegung gemacht hat, so ist seine neue Lage im Allgemeinen vollständig bestimmt, wenn die Orte von drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten bekannt sind. Dies geht ohne Weiteres daraus hervor, daß ein Körper vollständig an der Bewegung gehindert ist, sobald drei seiner Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, festgehalten werden. Wenn bei der gedachten Bewegung ein Punkt des Körpers seinen Ort beibehalten hat, etwa indem man ihn durch Festhalten an einer Bewegung verhinderte, so genügt zur Bestimmung der neuen Lage des Körpers

*) Häufig versteht man unter Kinematik oder Phoronomie allgemein die Lehre von der Bewegung, sofern sie auf die Ursachen derselben oder die Kräfte nicht Rücksicht nimmt, sondern lediglich die Natur der Bewegung in Betracht zieht. In dieser Art ist die Kinematik auch im ersten Theile, §. 49, aufgefaßt. (Siehe auch: Schell, Theorie der Bewegung, S. 5.) In dem Folgenden verstehen wir unter Kinematik speciell die Lehre von der „Verursachung der gegenseitigen Ortsveränderungen in der Maschine“, siehe Reuleaux: Theoretische Kinematik, S. 43.

offenbar schon die Kenntniß des Ortes von nur zwei anderen Punkten, die mit dem festgehaltenen nicht in gerader Linie liegen. Ebenso reicht, wenn der Körper in zwei Punkten festgehalten worden ist, zur unzweifelhaften Bestimmung der neuen Körperlage die Kenntniß des Ortes eines einzigen Punktes aus, welcher nicht in der Geraden der beiden festgehaltenen Punkte liegt. Wie schon Theil I. §. 132 angegeben, ist jedem Elemente eines in einem einzigen Punkte festgehaltenen Körpers nur eine Bewegung in einer Kugelfläche gestattet, deren Halbmesser der Abstand des betreffenden Punktes von dem festgehaltenen und deren Centrum der letztere Punkt ist, während irgend ein Element eines in zwei Punkten festgehaltenen Körpers sich nur in einem zur Verbindung der beiden Festpunkte senkrechten Kreise bewegen kann, dessen Halbmesser dem Abstande des Elementes von jener Verbindenden gleich ist. Der letztere Fall ist in der Praxis durch eine in zwei Lagern gehaltene Axe oder Welle repräsentirt, während dem ersteren Falle die um die kugelförmige Nuß drehbare Boussole entspricht.

Handelt es sich speciell um die Bewegung eines sogenannten ebenen Systems, d. h. um eine solche Bewegung eines Körpers, bei welcher die Bahnen aller Körperelemente in parallelen Ebenen gelegen sind, so genügt offenbar schon die Kenntniß des Ortes zweier Punkte zur Bestimmung der bezüglichen Lage des Systems. Ist hierbei außerdem ein Punkt festgehalten, so beschränkt sich die ganze Beweglichkeit des Körpers auf eine Rotation desselben um eine Axe, die im festgehaltenen Punkte auf den parallelen Ebenen senkrecht ist, in denen die Bewegung vor sich geht; es ist also zur Bestimmung der Lage des Systems nur noch die Kenntniß des Ortes von einem Punkte erforderlich.

Faßt man in dem letzteren Falle, wo die Bewegung sämmtlicher Elemente in parallelen Ebenen vor sich geht, die Bahn eines Punktes in seiner Ebene ins Auge, so ist leicht ersichtlich, daß diese Bahn, wie sie auch beschaffen sein möge, congruent mit den Bahnen aller derjenigen Elemente sein muß, die mit dem betrachteten Punkte in einer auf den parallelen Ebenen senkrechten Geraden liegen. Wenn man daher in diesem Falle die Bewegungen der Punkte in einer einzigen der gedachten Parallelebenen kennt, so ist hierdurch auch die Bewegung des ganzen Systems bestimmt. Bei den nachfolgenden Entwickelungen soll zuvor dieser für die Praxis besonders wichtige Specialfall einer ebenen Bewegung ins Auge gefaßt werden, und sei der allgemeinere Fall einer ganz beliebigen Bewegung, welcher nur geringere Bedeutung für den Maschinenbau hat, nachträglich besprochen.

§. 3. **Einfache Bewegungen.** Alle Bewegungen von Körpern lassen sich auf zwei einfache oder elementare Bewegungen zurückführen. Diese bestehen in einer Translation oder Verschiebung nach einer bestimmten Richtung und in einer Drehung um eine gewisse Rotationsaxe. Bei einer Verschiebung beschreiben sämmtliche Punkte des Körpers congruente und parallele Bahnen, und es genügt daher zur Bestimmung einer Verschiebung, die Bewegung eines Punktes zu kennen. Unter der Richtung der Verschiebung ist hier in jedem Augenblicke die Richtung des betreffenden Bahnelementes eines beliebigen Punktes verstanden. Diese Bahn kann geradlinig, einfach oder doppelt gekrümmt sein, je nachdem die auf einander folgenden Richtungen sämmtlich in eine Gerade fallen, oder in einer Ebene liegen oder beliebig im Raume sind. Da die Wege aller Punkte in beliebiger Zeit stets gleich groß sind, so folgert sich daraus auch die Gleichheit der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aller Punkte des Körpers sowohl der Größe wie auch der Richtung nach. Durch eine Strecke von bestimmter Länge und Richtung kann daher immer die Translationsbewegung eines Körpers sowie deren Geschwindigkeit oder Beschleunigung für einen gewissen Augenblick unzweideutig angegeben werden, wenn man durch einen Pfeil oder in sonstiger Weise auch den Sinn der Bewegung andeutet.

Bei der Rotation eines Körpers um eine Axe beschreiben sämmtliche Punkte in irgend einem Augenblicke mit gleicher Winkelgeschwindigkeit Kreisbögen concentrisch zur Drehaxe, deren Längen ihren Halbmessern, d. h. den senkrechten Abständen dieser Punkte von der Axe, proportional sind. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der einzelnen Punkte sind daher wie ihre Wege ebenfalls den senkrechten Axenabständen proportional. Man stellt eine Drehung des Körpers graphisch durch eine Strecke in der Axenrichtung dar, deren Länge proportional dem Drehungswinkel ist, und giebt den Sinn der Drehung durch eine an das Ende der Strecke gesetzte Pfeilspitze an. Diese Pfeilspitze setzt man so, daß einem Beschauer, welcher auf die Spitze hinsieht, die Drehung in dem Sinne der Uhrzeigerbewegung erscheint.

Man kann eine geradlinige Verschiebung auch als eine Rotation um eine unendlich weit entfernte Axe ansehen, so daß die Rotation eigentlich als der allgemeinere und die Verschiebung als der besondere Fall erscheint.

Diese beiden einfachen Bewegungen können sich in mannichfaltiger Weise zusammensetzen, und sollen diese Zusammensetzungen der Hauptsache nach hier angeführt werden.

Zusammensetzung einfacher Bewegungen. Im Folgenden sollen unter Verschiebungen oder Translationen immer geradlinige verstanden werden, wodurch der allgemeinen Gültigkeit der Entwickelungen kein Eintrag geschieht, da man jedes unendlich kleine Element einer gekrümmten Bahn immer als geradlinig ansehen kann. Wie zwei oder mehrere geradlinige Bewegungen zusammengesetzt werden, ist durch die Lehren vom Parallelogramm der Be- §. 4.

wegungen, der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen hinlänglich erläutert. Dabei ist es für das Resultat, d. h. für die Ortsveränderung, gleichgültig, ob die einzelnen Bewegungen nach einander erfolgen oder gleichzeitig vor sich gehen, wie letzteres z. B. der Fall ist, wenn ein Körper sich auf oder in einem anderen verschiebt, welcher selbst eine Translation erleidet, z. B. das Windengestell auf einer in Bewegung begriffenen Laufkrahnbrücke.

Ebenso ist es bei der Zusammensetzung zweier Drehungen eines Körpers um dieselbe Drehaxe gleichgültig, ob die beiden Drehungen nach einander erfolgen oder gleichzeitig, wie es z. B. mit einer Person der Fall wäre, welche auf einem bewegten Caroussel eine eigene Bewegung concentrisch zur Axe des Caroussels hätte. Die absolute Bewegung des Körpers ist in jedem Falle übereinstimmend mit einer Drehung um die gemeinsame Axe und von einem Betrage gleich der algebraischen Summe der beiden Einzeldrehungen.

Wenn ein Körper einer Verschiebung und einer Drehung ausgesetzt ist, so ist es in Bezug auf die Ortsveränderung der Punkte desselben gleichgültig, in welcher Reihenfolge die beiden Bewegungen vor sich gehen und können dieselben daher auch als gleichzeitige angenommen werden. Ist z. B. AB, Fig. 1, die Horizontalprojection eines Krahnauslegers, dessen Säule A auf einem Rollwagen steht, so gelangt der Schnabel B durch eine Drehung um den Winkel α und darauf folgende Verschiebung des Rollkrahns um die Länge s von B durch C nach C'. Ebendahin gelangt aber B auch auf dem Wege $BB'C'$, wenn man den Krahn erst um s verschiebt und hierauf ihn aus der Lage $A'B'$ um den Winkel α dreht. Werden endlich beide Bewegungen gleichzeitig vorgenommen, so bewegt sich der Schnabel B direct, etwa in der Diagonale BC' nach demselben Orte C'.

Fig. 1.

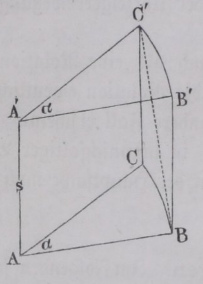
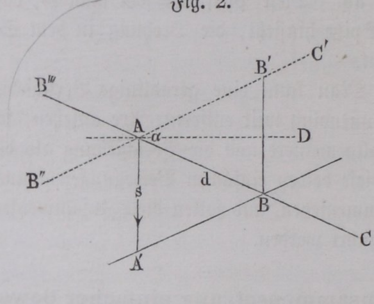


Fig. 2.



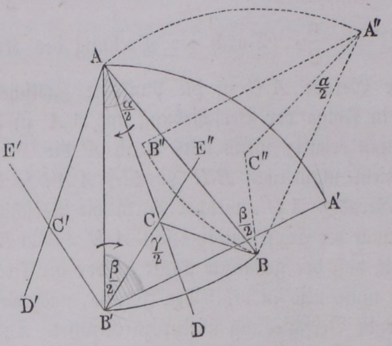
Wenn ein Körper einer Drehung um eine Axe und einer Verschiebung in einer zu dieser Axe senkrechten Richtung unterworfen wird, so lassen sich diese beiden Bewegungen stets zu einer einzigen Drehung zusammensetzen, deren Winkelbetrag gleich dem der gegebenen Drehung ist. Ist nämlich, Fig. 2, A der Durchschnitt der zur Ebene der Zeichnung senkrechten Axe, um welche der Körper eine Drehung im Betrage des Winkels α empfangen soll, und $AA' = s$ die ihm zu ertheilende Verschiebung, so lege man AD senkrecht zu AA' und trage zu jeder Seite von AD den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ an, mache also $DAC = DAC' = \frac{\alpha}{2}$. Durch die Drehung des Körpers um A gelangt offenbar die Gerade AC in die punktirte Zwischenlage AC', aus welcher sie dann in Folge der Verschiebung um AA' in die Endlage $A'B$ übergeht, welche man erhält, wenn man durch A' die Gerade $A'B$ parallel zu AC' legt. Zieht man noch BB' parallel AA', so erhält man in B' einen Punkt der Geraden AC', welcher durch die Verschiebung nach B gelangt. Da nun nach der Construction leicht $AB' = AB$ sich folgern läßt, so ergiebt sich auch, daß der genannte Punkt B' vor der Drehung in B seinen Ort gehabt haben muß, also in demselben Punkte, nach welchem ihn die auf die Drehung folgende Verschiebung wieder zurückführt. Dieser Punkt B und daher die in ihm zur Figur senkrechte Gerade haben daher den ursprünglichen Ort nicht geändert, woraus ohne Weiteres folgt, daß die Bewegung des Körpers nur eine Drehung um die in B normale Axe sein kann. Die Figur ergiebt auch, daß die Drehung um B in demselben Sinne und zu demselben Betrage erfolgt ist, wie die zuerst um A vorgenommene. Wäre die Drehung um A oder die Verschiebung in der entgegengesetzten Richtung vor sich gegangen, als hier angenommen, so würde die Axe der resultirenden Drehung, wie leicht zu erkennen, anstatt in B auf der anderen Seite von AA' nämlich in B'' resp. B''' gelegen sein.

Daß man umgekehrt immer die Drehung eines Körpers um eine gewisse Axe (B) ersetzen kann durch eine ebenso große und in demselben Sinne gerichtete Drehung um eine zu jener Axe parallele Gerade (A) von sonst beliebiger Lage und durch eine entsprechende Verschiebung (AA') normal zu den Axen, folgt leicht durch eine der vorigen analoge Betrachtung. Es ergiebt sich die Größe der betreffenden Verschiebung $AA' = B'B = 2d \sin \frac{\alpha}{2}$, wenn unter d der Abstand AB der beiden Axen verstanden wird.

Zwei Drehungen. Wenn ein Körper nach einander zweien Drehungen um parallele Axen ausgesetzt ist, so kann man dieselben immer ersetzen durch eine einzige Drehung um eine zu jenen parallele Axe, deren Winkel gleich der algebraischen Summe der Winkel ist, um welche die Einzeldrehungen ausgeführt werden. Seien z. B. A und B, Fig. 3 (a. f. S.), die Punkte des Körpers, durch welche die zur Figur senkrechten Drehaxen hindurchgehen, §. 5.

und seien unter α resp. β die zugehörigen Drehungswinkel verstanden. Wird der Körper zunächst um die Axe A gedreht, so gelangt dadurch B in die neue Lage B', welche als Endlage dieser Axe anzusehen ist, da die letztere

Fig. 3.



bei der nun folgenden Drehung um den Winkel β ihre Lage nicht mehr ändert. A hingegen gelangt durch diese Drehung in die Endlage A'. Daß man das Resultat dieser Drehungen auch durch eine einzige ersetzen kann, ergiebt sich in folgender Weise. Halbirt man durch AD den Winkel α oder BAB', macht also $DAB' = DAB = \frac{\alpha}{2}$, so gelangt die Halbirende AD durch die Drehung um A in die Lage AD', wenn $D'AB'$ ebenfalls gleich $\frac{\alpha}{2}$ gemacht wurde. Trägt man nun zu beiden Seiten von AB' den Winkel $\frac{\beta}{2}$ an, macht also $AB'E' = AB'E'' = \frac{\beta}{2}$, so kommt bei der Drehung um B' offenbar die Gerade $B'E'$ in die Lage $B'E''$, und es ist leicht zu erkennen, daß der Durchschnitt C' von AD' mit $B'E'$ nach C fallen muß, da aus der Construction $B'C' = B'C$ folgt. Da nun aber ebenfalls nach der Construction $AC = AC'$ sich ergiebt, so ist hiermit bewiesen, daß der durch die Drehung um B' von C' nach C gelangte Punkt des Körpers ursprünglich schon dieselbe Lage C inne gehabt hat, aus welcher Lage C er durch die um A erfolgte Drehung nach C' übergeführt worden ist. Dieser Punkt C hat also in Folge der beiden Drehungen seinen Ort nicht verändert, weshalb man annehmen muß, daß die gesammte Bewegung des Körpers sich auch durch eine Drehung desselben um die Axe C ersetzen läßt. Da bei dieser Drehung der Punkt B in seine Endlage B' gelangen muß, so ist diese Drehung um den Winkel $BCB' = \gamma$ vorzunehmen. Es folgt aus der Figur für diesen Winkel ohne Weiteres

$$\gamma = BCB' = 2DCB' = \alpha + \beta.$$

Daß es hierbei nicht gleichgültig ist, in welcher Aufeinanderfolge man die einzelnen Drehungen vornimmt, ergiebt folgende Betrachtung. Jede der beiden Drehaxen A und B verdankt ihre Ortsveränderung lediglich der Drehung um die andere Axe, da die Drehung um sie selbst zu einer Veränderung ihres Orts keine Veranlassung giebt. So gelangt beispielsweise B durch die Drehung α um A in ihre definitive Lage B', vorausgesetzt, daß wie oben angenommen wurde, die Drehung α um A zuerst vorgenommen wird. Wollte man nun aber die Drehung β um B zuvörderst eintreten lassen, so würde dadurch A in die neue Endlage A'' geführt, und es würde jetzt durch die um diese Axe A'' folgende Drehung α die Axe B nicht nach B' wie vorhin, sondern nach B'' gelangen. Während also die Linie AB durch die beiden aufeinanderfolgenden Drehungen α und β in die Lage $A'B'$ übergeführt wird, so wird, wenn die Drehungen in der umgekehrten Reihenfolge β, α vorgenommen werden, dieselbe Linie AB in die Endlage $A''B''$ gelangen. Es ist übrigens ohne Weiteres klar, daß diese beiden Lagen $A'B'$ und $A''B''$ parallel sein müssen, denn sie können beide dadurch erhalten werden, daß dem Körper um den Winkel $\alpha + \beta$ in demselben Sinne eine Drehung ertheilt wird, nur sind die Axen, um welche dies zu geschehen hat, verschiedene, in dem ersten Falle, wie oben ermittelt, nämlich C und in dem letzteren Falle C'', welche Lage sich ergiebt, wenn man $ABC'' = \frac{\beta}{2}$ und $BA''C'' = \frac{\alpha}{2}$ macht. Man erkennt aus der Figur übrigens leicht, daß die Oerter C und C'' dieser beiden resultirenden Axen symmetrisch gegen die ursprüngliche Lage der Axenverbindung AB liegen.

Denkt man die Drehungswinkel α und β kleiner und kleiner werdend, so ergiebt sich, daß die beiden Oerter C und C'' für die Axen der resultirenden Drehungen sich der ursprünglichen Axenverbindung AB von beiden Seiten mehr und mehr nähern. In dem Grenzfalle, wo α und β unendlich kleine Winkel vorstellen, wird der Abstand der Axen C und C'' von AB selbst auch ein unendlich Kleines werden, d. h. die beiden Axen fallen in einem Punkte C_0 der Geraden AB zusammen. Was die Lage dieses Punktes C_0 zwischen A und B anbetrifft, so kann man bemerken, daß für die Oerter C und C'' der resultirenden Axe fortwährend die Gleichung gilt:

$$CA : CB = C''A : C''B = \sin\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\alpha}{2}.$$

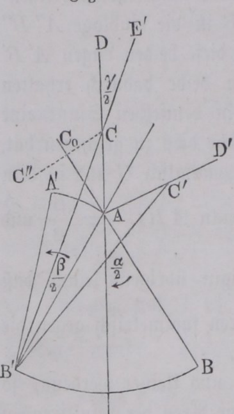
Diese Gleichung geht für den Fall, wo α und β unendlich klein sind und C mit C'' in C_0 zusammenfällt, über in

$$C_0A : C_0B = \beta : \alpha,$$

d. h. die Axe der resultirenden Drehung zweier unendlich kleinen Drehungen um parallele Axen liegt in der Ebene dieser beiden Axen und zwar in Abständen von denselben, welche sich umgekehrt wie die Drehungswinkel verhalten.

Bisher ist angenommen worden, daß die beiden Drehungen um die Axen A und B in demselben Sinne (rechtsum, wie die Uhrzeigerbewegung) vor sich gehen sollen. Vorstehendes bleibt aber auch richtig, wenn die Drehungen in einander entgegengesetztem Sinne erfolgen, nur hat man dann unter der Summe $\alpha + \beta$ die algebraische Summe zu verstehen, indem man dem einen Drehungswinkel das positive, dem anderen das negative Zeichen giebt. Der Sinn der resultirenden Drehung stimmt dann mit derjenigen Drehung überein, deren Vorzeichen die algebraische Summe von α und β hat, d. h. mit dem Sinne der absolut größeren Drehung. Soll z. B., Fig. 4, der Körper einer Rechtsdrehung α um A und dann einer Linksdrehung β um die Axe B, welche dann nach B' gelangt ist, unterworfen werden, so halbire man den Drehungswinkel $BAB' = \alpha$ durch AD und trage den Winkel $\frac{\beta}{2} = AB'E'$ an. In dem Schnitte C erhält man dann denjenigen Punkt, welcher durch die Drehung α um A nach C' und durch die entgegengesetzte Drehung β um B' wieder nach C zurückgeführt wird. Dieser Punkt repräsentirt also die in ihm normal zur Bewegungsebene zu denkende Axe der resultirenden Drehung, deren Betrag gleich $2DCE' = \gamma = \alpha - \beta$ ist, woraus die oben angeführte Regel sich ergiebt.

Fig. 4.

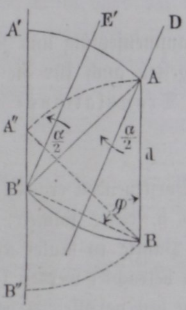


In Bezug der Reihenfolge der beiden Drehungen gilt das oben für übereinstimmende Drehungsrichtungen Gesagte, und man findet demnach in dem Punkte C'', welcher zu AB eine mit C symmetrische Lage hat, den Fußpunkt für die Axe der resultirenden Drehung, welche die umgekehrte Aufeinanderfolge der Drehungen β, α ersetzt. Ebenfalls liegt der Axenpunkt C_0, welcher den unendlich kleinen Drehungswinkeln α und β entspricht, so auf der verlängerten Axenverbindung AB, daß wie oben $C_0 A : C_0 B = \beta : \alpha$ ist.

§. 6. **Rotationspaar.** Wenn die beiden entgegengesetzten Drehungen um zwei parallele Axen A und B, Fig. 5, von gleicher Größe α sind, so fällt die Axe der resultirenden Drehung in die Unendlichkeit, indem nämlich die beiden zur Construction dieses Axenpunktes dienenden Winkelhalbirenden AD und $B'E'$ in diesem Falle parallel werden. Eine Drehung um einen un=

endlich fernen Punkt ist aber einer geradlinigen Verschiebung des Körpers gleichzusetzen. In der That ist die aus beiden Drehungen resultirende Endlage des Körpers $A'B'$ parallel der ursprünglichen AB, und es hat sonach eine Verschiebung stattgefunden, welche durch die Strecke AA' oder BB' ausgedrückt ist. Daher ist die Größe dieser Verschiebung

Fig. 5.



$$AA' = BB' = 2d \sin \frac{\alpha}{2},$$

wenn d wieder den Axenabstand AB bedeutet. Der Winkel φ, welchen die Verschiebungsrichtung mit der Axenverbindung AB bildet, ist

$$\varphi = 90^0 - \frac{\alpha}{2}.$$

Daß ein solches Paar entgegengesetzter gleicher Drehungen wirklich nur eine einfache Verschiebung hervorbringt, ergiebt sich auch aus folgender Betrachtung. Denkt man die Drehung α um die Axe A nach §. 4 ersetzt durch eine ebenso große Drehung um die Axe B und eine Verschiebung im Betrage $2d \sin \frac{\alpha}{2}$, so ergiebt sich die letztere als das einzige Resultat des Drehungspaars, indem die Drehung α um B mit der Drehung $-\alpha$ um dieselbe Axe sich aufhebt.

Ein solches Paar gleicher und entgegengesetzter Drehungen um parallele Axen heißt ein **Rotationspaar** oder **Drehungspaar**, **dasselbe kann stets durch eine entsprechende Verschiebung ersetzt werden und umgekehrt.**

Daß auch bei dem Rotationspaare die Aufeinanderfolge der Drehungen nicht gleichgültig ist, ergiebt eine Betrachtung der Figur. Während nämlich die Axenverbindende AB in die Lage $A'B'$ gelangt, wenn die Drehung zuerst um A, dann um B' geschieht, so nimmt jene Linie die Lage $A''B''$ an, wenn die Drehungen in der entgegengesetzten Folge geschehen. Die Verschiebung ist also in dem einen Falle durch BB', in dem anderen Falle durch BB'' dargestellt. Diese beiden Strecken BB' und BB'' sind von gleicher Länge $2d \sin \frac{\alpha}{2}$ und von derselben Neigung $\varphi = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ gegen die Axenebene AB, aber die Winkel φ sind in verschiedenem Sinne anzutragen. Die beiden Lagen $A'B'$ und $A''B''$ fallen daher in eine Gerade zusammen. Offenbar hört der Unterschied in der Aufeinanderfolge der Drehungen um A und B auf, sobald BB' mit BB'' zusammenfällt, d. h. wenn der Winkel φ gleich 90^0 wird. Hierzu ist erforderlich, daß α unendlich klein ist, und es gilt also für den Fall differentialer Bewegungen Aehnliches wie oben für ungleiche Drehungen angeführt worden ist. Der Ausdruck $2\,d\,sin\,\frac{\alpha}{2}$ für die Größe der Verschiebung geht für den Fall, daß α unendlich klein ist, in $\alpha\,d$ über.

Die in §§. 4 bis 6 angeführten Sätze über die Zusammensetzung und Zerlegung der Translations- und Rotationsbewegungen gelten auch für die auf die Zeiteinheit bezogenen Wege, d. h. für die Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten.

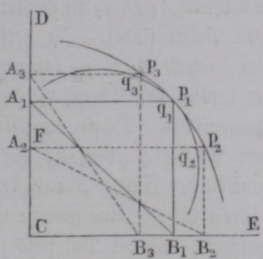
§. 7. **Pol oder Momentancentrum.** Aus dem Vorstehenden ergiebt sich leicht, daß die Bewegung eines ebenen Systems, d. h. eines solchen, bei welchem, wie in §. 2 definirt, die Bewegungen aller Punkte in lauter unter sich parallelen Ebenen geschehen, in jedem Augenblicke betrachtet werden kann als eine unendlich kleine Drehung um eine gewisse, zu den parallelen Ebenen senkrechte Axe. Denn welcher Art die Bewegungen auch sein mögen, so zerfallen sie immer in Verschiebungen in den gedachten Parallelebenen und in Drehungen in denselben, d. h. um Axen, welche auf diesen Ebenen senkrecht stehen. Alle Verschiebungen lassen sich nun mit Hülfe des Parallelogramms der Bewegungen zu einer resultirenden Verschiebung zusammensetzen, während man alle Drehungen um die parallelen Axen nach §. 5 und 6 zu einer einzigen resultirenden Drehung vereinigen kann. Diese resultirende Drehung läßt sich nun wieder mit der auf der Drehaxe normalen resultirenden Verschiebung nach §. 4 zu einer einzigen Drehung um eine Axe zusammensetzen, welche gleichfalls auf dem Ebenensystem normal steht. Wenn hierbei anstatt der resultirenden Drehung ein Drehungspaar zum Vorschein kommt, das einer einfachen Verschiebung äquivalent ist, so kann man die resultirende Verschiebung ebenfalls als eine Drehung um eine Axe auffassen, welche auf der zur Verschiebung normalen Richtung im Unendlichen liegt.

Die Axe dieser resultirenden Drehung wird im Allgemeinen keine feste Lage im Raume haben, sondern in jedem Augenblicke ihren Ort wechseln. Um die Lage derselben in einem bestimmten Momente zu ermitteln, hat man sich nur zu erinnern, daß die einzelnen Punkte eines um eine Axe rotirenden Körpers Bahnen beschreiben, welche auf den Radien, d. h. den Richtungen der Lothe senkrecht stehen, die von den betreffenden Körperpunkten auf die Axe gefällt werden. Wenn man daher in einem beliebigen Punkte der Bahn eines Elementes in der Ebene derselben zur Bahn eine Normale errichtet, so muß dieselbe die Drehaxe schneiden, um welche der Körper in demjenigen Augenblicke sich dreht, in welchem das Element sich im Fußpunkte dieses Lothes befindet. Es ergiebt sich daher ferner, daß man in jedem Augenblicke die Drehaxe unzweideutig finden kann, wenn man die Richtungen der Bewegung von zwei beliebigen Punkten des bewegten Körpers kennt. Der Durchschnitt der beiden, auf diesen Bewegungsrichtungen in den bewegten Punkten errichteten Normalen liefert dann einen Punkt der Drehaxe, welche in ihm senkrecht zu den parallelen Ebenen steht.

Man nennt diese Axe die augenblickliche Drehaxe oder Momentanaxe, auch wohl bei einem ebenen System den betreffenden Schnittpunkt der Normalen schlechtweg den augenblicklichen Drehpunkt oder das Momentancentrum; vielfach gebraucht man für ihn auch die Bezeichnung „Pol", welche im Folgenden benutzt werden soll.

Polbahnen. Die wichtige Rolle, welche der Pol bei der Bewegung eines Systems in einer Ebene spielt, läßt sich am einfachsten an einem Beispiele erläutern. Als solches Beispiel sei etwa die Bewegung einer Stange oder steifen geraden Linie AB, Fig. 6, gewählt, welche gezwungen ist, mit §. 8.

Fig. 6.



ihren Endpunkten A und B stetig in zwei aufeinander senkrechten Geraden CD und CE zu verbleiben; eine Bewegungsart, wie sie bei einem bekannten Ellipsenzirkel vorkommt und weiter unten noch näher besprochen werden wird. Für irgend eine beliebige Lage $A_1 B_1$ der Geraden findet man den augenblicklichen Drehpunkt oder den Pol nach dem Obigen in dem Durchschnittspunkte p_1, in welchem die beiden Normalen $A_1 p_1$ und $B_1 p_1$ sich treffen, die in den Punkten A_1 und B_1 auf deren Bahnen, also auf CD beziehungsweise CE errichtet werden. Ganz in derselben Weise läßt sich für jede beliebige andere Lage des bewegten Körpers, wie $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ . . . der Pol in p_2, p_3 . . . finden. Denkt man sich diese Construction für alle möglichen Lagen der Stange AB ausgeführt, so erhält man ebenso viele Lagen des Pols, welche in ihrer Aufeinanderfolge eine gewisse, von der Natur der Bewegung abhängige Curve $p_2 p_1 p_3$ . . . festlegen. Diese Curve kann man ansehen als die Bahn, welche der Pol während der Bewegung des Körpers durchläuft, indem man sie sich vorstellen kann als eine in der Ebene der Bewegung feste Leitcurve, auf welcher der Pol, resp. die Drehaxe des Systems entlang geführt wird. Man giebt dieser Curve daher auch die Bezeichnung Polbahn, und nennt sie mit Rücksicht auf ihre feste Lage in der Bewegungsebene wohl die feste Polbahn.

Denkt man sich mit der beweglichen Stange AB eine Ebene fest verbunden, welche mit der Bewegungsebene DCE in allen ihren Lagen zusammenfällt, während sie an der Bewegung der Stange Theil nimmt, so ergiebt sich leicht das Folgende. Alle Punkte dieser beweglichen Ebene werden, ebenso wie alle Punkte der Stange AB selbst, in jedem Augenblicke eine drehende Bewegung um den augenblicklichen Drehpunkt oder Pol annehmen, und nur der mit diesem Pol gerade in Deckung befindliche Punkt der beweglichen Ebene hat in dem betreffenden Augenblicke keine eigene Bewegung, da er als Drehpunkt aufgefaßt werden muß. Dieser in der Lage $A_1 B_1$ mit dem Pole p_1 zusammenfallende Punkt der beweglichen Ebene sei etwa mit q_1 bezeichnet. Im darauf folgenden Augenblicke hat der Pol seine Lage geändert, indem er von p_1 auf der festen Polbahn etwa nach p_2 gerückt ist, wenn man die Strecke $p_1 p_2$ als unendlich kleine voraussetzt. Die Stange AB ist jetzt aus der Lage $A_1 B_1$ in diejenige $A_2 B_2$ gerückt, und derjenige Punkt der beweglichen Ebene, welcher mit dem nunmehrigen Pole p_2 zusammenfällt, ist nicht mehr q_1, sondern ein anderer, etwa q_2 geworden. Um diesen Punkt, welcher in der Lage $A_2 B_2$ mit p_2 zusammenfällt, auch in der Lage des Systems $A_1 B_1$ zu bestimmen, hat man offenbar nur über der Grundlinie $A_1 B_1$ das dem Dreieck $A_2 B_2 p_2$ congruente Dreieck $A_1 B_1 q_2$ zu construiren, wodurch man in der Spitze q_2 den gesuchten Punkt findet. In derselben Weise erhält man durch Construction des dem Dreiecke $A_3 B_3 p_3$ congruenten Dreiecks $A_1 B_1 q_3$ in q_3 denjenigen Punkt der beweglichen Ebene, welcher für die Systemlage $A_3 B_3$ mit dem Pol p_3 zusammenfällt. Denkt man sich in solcher Art die Construction der betreffenden Punkte q ebenfalls für alle möglichen Lagen des Systems d. h. allen Punkten der Curve p entsprechend ausgeführt, so erhält man in der beweglichen Ebene eine gewisse Curve $q_2 q_1 q_3 \ldots$ Auch diese Curve hat die Eigenschaft, daß der Pol stets in ihr enthalten ist und bei der Bewegung des Systems auf ihr entlang wandert. Man nennt daher auch diese Linie **Polbahn** und zwar heißt sie die **bewegliche Polbahn** zum Unterschiede von der festen Polbahn $p_2 p_1 p_3 \ldots$

§. 9. Nach dem Vorstehenden giebt es für jede Bewegung eines Systems in einer Ebene immer zwei bestimmte Curven oder Polbahnen, eine feste in der Bewegungsebene und eine in der beweglichen Ebene, welche beide den Pol enthalten. Diese beiden Curven müssen daher stets einen Punkt, nämlich den jedesmaligen Pol, mit einander gemein haben, und zwar müssen sie sich in diesem Punkte berühren, denn ein Durchschneiden der Polbahnen ist darum nicht denkbar, weil sonst der Fall eintreten würde, daß gleichzeitig zwei oder mehrere augenblickliche Drehpunkte vorhanden wären, was natürlich nicht möglich ist. Bei der Bewegung des Systems bleiben diese beiden Curven oder Polbahnen immer in Berührung, wobei der Berührungspunkt fortwährend wechselt, und man kann sich diese Bewegung als ein Wälzen oder Rollen der einen (beweglichen) Polbahn $q_2 q_1 q_3$ auf der anderen (festen) $p_2 p_1 p_3 \ldots$ vorstellen.

Es ist daher aus dem Vorstehenden ersichtlich, daß man die Mittel des äußeren Zwanges, welche der beabsichtigten Bewegung ihren Charakter ertheilen, auch ersetzen kann durch die beiden Polbahnen. Würde man etwa in dem gewählten Beispiele, Fig. 6, die beiden festen Geradführungen CD CE ganz fortlassen, und statt ihrer die in der festen Ebene liegende materiell ausgeführte Curve $p_2 p_1 p_3 \ldots$ anbringen, auf welcher die ebenfalls materielle Curve $q_2 q_1 q_3 \ldots$ sich abwälzt, welche mit der Stange AB verbunden ist, so erhielte man beim Rollen dieser Curven aufeinander dieselbe Bewegung des Systems, wie sie durch die Führungen CD und CE hervorgebracht wird. Die Bewegung ist hierbei in beiden Fällen und nicht nur für A und B dieselbe, sondern die Uebereinstimmung gilt auch für jeden beliebigen Punkt F, da ja durch die Bewegung zweier Punkte diejenige eines ebenen Systems vollkommen bestimmt ist. Wenn daher bei einem bewegten System die beiden Polbahnen bekannt sind, so kann man für jeden Augenblick leicht die Bewegung irgend eines beliebigen Punktes des Systems bestimmen. Zieht man nämlich von dem Berührungspunkte (p_1) der beiden Polbahnen in dem betreffenden Augenblicke nach dem Punkte (F), dessen Bewegung bestimmt werden soll, einen Fahrstrahl, so ist dieser normal zu der Bewegung des betreffenden Punktes gerichtet, und die Geschwindigkeit dieser Bewegung ist der Länge dieses Fahrstrahls proportional. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich ohne Weiteres aus der Bemerkung, daß der Berührungspunkt der beiden Polbahnen der jedesmalige augenblickliche Drehpunkt ist. Wenn man daher um den Pol p_1 mit der Länge $q_1 F$ des Fahrstrahls einen Kreisbogen beschreibt, so muß derselbe die Bahn des Punktes F berühren. Dasselbe gilt aber auch von den Kreisbögen, welche um den Punkt p_2 mit dem Strahl $q_2 F$, oder um den Punkt p_3 mit dem Strahl $q_3 F$ ꝛc. gezeichnet werden, und es ergiebt sich hieraus, daß die um die einzelnen Punkte der Polbahn p mit den bezüglichen Fahrstrahlen von den Punkten q nach einem Systempunkte F beschriebenen Kreisbogen die Bahn des gedachten Punktes F einhüllen. Man erkennt leicht aus der Figur, daß in unserem Beispiele die Kreise, welche von den Punkten p aus mit den Fahrstrahlen beschrieben werden, die man von den Punkten q nach A und B ziehen kann, sämmtlich die Geraden CD resp. CE berühren, welche die Bahnen von A und B sind.

Gegenseitigkeit der Polbahnen. Bisher haben wir angenommen, daß die Curve q als bewegliche Polbahn auf der festen Polbahn p herumgeführt werde, und sahen, in welcher Weise sich die Bahn irgend eines Systempunktes A, B oder F, d. h. diejenige Curve zeichnen läßt, welche der betreffende Punkt in der festen Ebene beschreibt. Es ist nun ein Leichtes, die Verhältnisse entgegengesetzt so zu gestalten, daß aus der festen Polbahn p die §. 10.

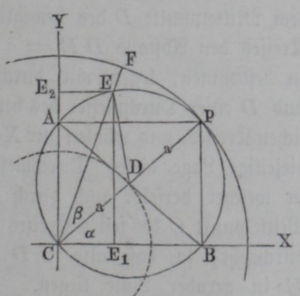
bewegliche und aus der beweglichen Polbahn q die feste wird, und also die Curve p auf derjenigen q sich abwälzt. Es ist zunächst klar, daß an der Bewegung des Körpers AB in der Ebene DCE nichts geändert wird, wenn man ihm noch eine gewisse zusätzliche Bewegung mittheilt, vorausgesetzt nur, daß genau dieselbe Bewegung auch der Ebene ertheilt wird, in welcher der Körper seine Bewegung verrichtet. Die relative Bewegung des letzteren in der Bewegungsebene wird dadurch offenbar nicht abgeändert, und die Bahnen der einzelnen Punkte behalten dabei unverändert ihren geometrischen Charakter bei. Nun denke man sich, daß die solcherart dem Körper sowohl wie der Bewegungsebene zusätzlich mitgetheilte Bewegung in jedem Augenblicke genau derjenigen Bewegung gleich und entgegengesetzt sei, welche der Körper ursprünglich schon hat, so kommt der letztere hierdurch zur Ruhe und die anfänglich fest gedachte Bewegungsebene nimmt dann eine Bewegung an, welche der ursprünglichen Systembewegung in jedem Augenblicke gleich und entgegengesetzt ist. Da die relativen Bahnen der einzelnen Punkte aber, wie angegeben, hierdurch eine Aenderung nicht erleiden, so kann man hieraus den Satz ableiten, daß die Natur der Bewegung dieselbe bleibt, welche der beiden Polbahnen man auch als die bewegliche annehmen möge. In unserem Beispiele würden diese beiden Fälle der Bewegung sich etwa derartig darstellen lassen, daß, wenn die Curve q die bewegliche Polbahn ist, wir es mit der Bewegung eines Systems zu thun haben, von welchem zwei bestimmte Punkte A und B auf zwei festen rechtwinkligen Geraden CD und CE sich führen, während der Fall, wo die Polbahn p als bewegliche angesehen wird, auf eine solche Bewegung hinausläuft, vermöge deren zwei mit dem bewegten System verbundene rechtwinkelige Gerade CD und CE immer durch zwei feste Punkte A und B hindurchgehen. Es liegt hierin ein gewisses Princip der Reciprocität, das von Chasles, welcher zuerst auf diese Eigenthümlichkeit der Bewegung aufmerksam gemacht hat, mit dem Namen Dualismus bezeichnet worden ist.

Ein deutliches Beispiel, welches meistens zur Veranschaulichung dieses Verhaltens angeführt wird, liefert die gewöhnliche Drehbank. Wenn an derselben mit der Spindel eine dazu normale ebene Scheibe (Planscheibe) verbunden ist und mit ihr sich umdreht, so ritzt eine im Abstande a von der Drehaxe festgehaltene Meißelspitze auf dieser Scheibe einen zur Drehaxe concentrischen Kreis vom Halbmesser a ein. Eben dieser Kreis wird aber auch erhalten, wenn man die Scheibe festhält, und dem Meißel bei unverändertem Abstande von der Drehbankspindel eine Rotation mit der letzteren ertheilt, wie dies beispielsweise beim Fräsen und Ausbohren öfter geschieht.

§. 11. **Beispiel.** Aus dem Vorstehenden ergiebt sich die Wichtigkeit, welche die Polbahnen für die Bestimmung der Bewegung eines beliebigen Systems in einer Ebene haben, indem mit ihrer Hülfe die Bahn jedes beliebigen Systempunktes bestimmt werden kann. Man kann in jedem Falle die Polbahnen in der oben angegebenen Weise Punkt für Punkt construiren, wenn man die Bahnen zweier Punkte kennt. Dieses Verfahren führt stets zum Ziele, doch lassen sich in vielen Fällen die Polbahnen bequemer direct zeichnen, wenn der geometrische Charakter derselben sich leicht ermitteln läßt. So z. B. ist in dem hier zu Grunde gelegten Beispiele der Bewegung einer Geraden, deren Endpunkte auf zwei rechtwinkeligen festen Geraden sich führen, leicht zu erkennen, daß die beiden Polbahnen Kreise sein müssen. Man ersieht nämlich aus Fig. 6 sofort, daß die bewegte Linie AB in jeder ihrer Lagen die Diagonale eines Rechtecks $ApBC$ ist, von welchem die beiden anderen Eckpunkte in dem zugehörigen Pole p und dem Durchschnittspunkte C der beiden Führungen CD und CE liegen. Da nun die Diagonalen eines rechtwinkeligen Parallelogrammes einander gleich sind, so folgt, daß der Pol p von dem Durchschnittspunkte C stets dieselbe Entfernung Cp, nämlich gleich der bewegten Geraden AB hat, daß also $Cp_2 = Cp_1 = Cp_3 \ldots$, folglich die Polbahn $p_2 p_1 p_3 \ldots$ ein um C mit der Länge AB beschriebener Kreis ist.

Desgleichen liegen auch die sämmtlichen Punkte $q_2, q_1, q_3 \ldots$ auf dem Umfange eines Kreises, dessen Durchmesser die Gerade $A_1 B_1$ ist, denn wenn man nach dem Vorstehenden die Punkte $q_2, q_3 \ldots$ ermittelt, indem man die rechtwinkeligen Dreiecke $A_2 B_2 p_2$, $A_3 B_3 p_3 \ldots$ über $A_1 B_1$ als $A_1 B_1 q_2$, $A_1 B_1 q_3 \ldots$ construirt, so ist der Ort dieser Punkte q wegen des rechten Winkels bei $q_2, q_3 \ldots$ ein über $A_1 B_1$ als Durchmesser beschriebener Kreis, welcher natürlich auch durch C hindurchgeht und zwar in allen seinen Lagen. Man erhält daher eine mit der hier zu Grunde gelegten Bewegung einer Geraden AB, deren Endpunkte auf den Schenkeln eines rechten Winkels geführt werden, identische Bewegung, wenn man innerhalb eines Kreises, dessen Centrum im Scheitel jenes Rechtwinkels liegt, und dessen Halbmesser der Länge jener gedachten Geraden gleich ist, einen zweiten Kreis von halb so großem Durchmesser sich abwälzen läßt. In Wirklichkeit läßt sich dies durch zwei Zahnräder von den angegebenen Abmessungen leicht erreichen.

Fig. 7.



Bei dieser Bewegung beschreibt jeder Punkt des über der Geraden AB beschriebenen Kreises, d. h. also der beweglichen Polbahn, einen Durchmesser der festen Polbahn, wie sich aus Folgendem ergiebt. Ist E, Fig. 7, ein beliebiger Punkt dieses Kreises, und nimmt man die beiden festen Führungslinien CA und CB als Y- und X-Axe an, so ergeben sich die Cordinaten des Punktes E durch die Gleichungen:

$$x = CE_1 = CE \,.\, \cos(\alpha + \beta) = 2a \cos\beta \,.\, \cos(\alpha + \beta),$$

$$y = CE_2 = CE \,.\, \sin(\alpha + \beta) = 2a \cos\beta \,.\, \sin(\alpha + \beta),$$

wenn man den Durchmesser $Cp = AB$ des rollenden Kreises mit $2a$, den Winkel BCp mit α und ECp mit β bezeichnet. Aus obigen Gleichungen folgt:

$$\frac{y}{x} = tang\,(\alpha + \beta).$$

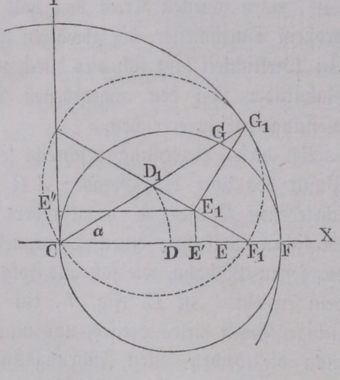
Da $\alpha + \beta$ für jede Lage des rollenden Kreises constant, nämlich gleich dem halben Centriwinkel BDE ist, welcher den Abstand des Punktes E von B im Kreisumfange gemessen angiebt, so stellt obige Gleichung

$$\frac{y}{x} = tang\,\frac{1}{2}\,BDE = tang\,\frac{\gamma}{2}$$

eine Gerade EC dar, deren Neigung gegen die X=Axe gleich jenem halben Centriwinkel ist.

Man erkennt übrigens aus der Figur, daß der Punkt E des rollenden Kreises mit dem festen Kreise in F zur Berührung kommt, da der Bogen Ep gleich demjenigen Fp sein muß, dessen Centriwinkel halb so groß und dessen Radius doppelt so groß ist. Wenn der bewegliche Kreis auf dem ganzen Umkreise des festen sich abgewälzt hat, so hat sich ersterer dabei zweimal um die eigene Axe gedreht, und jeder Punkt seines Umfanges wie E hat einen ganzen Durchmesser des festen Kreises einmal hin und einmal zurück durchlaufen. Daß der Mittelpunkt D des beweglichen Kreises wegen seines constanten Abstandes vom Centrum C des festen Kreises selbst einen Kreis vom Halbmesser a beschreibt, ergiebt sich ohne Weiteres.

Fig. 8.



Um die Bahn irgend eines beliebigen Punktes E, Fig. 8, welcher von dem Mittelpunkte D des beweglichen Kreises den Abstand $DE = e$ hat, zu bestimmen, legen wir durch E und D einen Durchmesser des beweglichen Kreises, und wählen zur X=Axe diejenige Lage dieses Durchmessers, in welcher derselbe auch durch den Mittelpunkt C des festen Kreises hindurchgeht, so daß also C, D und E in gerader Linie liegen. Für irgend eine zweite Lage des Rollkreises, welche derselbe einnimmt, nachdem er auf dem Bogen FG_1 des Winkels

FCG_1 sich abgewälzt hat, ist nach dem Vorigen der Punkt F des Rollkreises in centraler Richtung nach F_1 und der Punkt G nach G_1 gerückt. Man findet daher die nunmehrige Lage von E in E_1, wenn man auf dem Durchmesser $F_1 D_1$ die Strecke $D_1 E_1 = DE = e$ abträgt. Bezeichnet daher wieder $2a$ den Durchmesser CF des rollenden Kreises, so hat man für die Coordinaten von E_1:

$$x = CE' = a \cos \alpha + e \cos \alpha = (a + e) \cos \alpha$$

$$y = CE'' = a \sin \alpha - e \sin \alpha = (a - e) \sin \alpha,$$

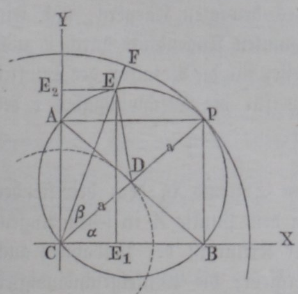
folglich:

$$\left(\frac{x}{a+e}\right)^2 + \left(\frac{y}{a-e}\right)^2 = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren Halbaxen $a + e$ und $a - e$ sind, und gilt diese Gleichung auch für den Fall, daß der Punkt E außerhalb des rollenden Kreises gelegen ist. Es beschreiben sonach sämmtliche Punkte des beweglichen Systems Ellipsen, welche für den Mittelpunkt D des Rollkreises, für welchen $e = 0$ ist, in einen Kreis und für den Umfang des Rollkreises, für welchen $e = a$ ist, in gerade Linien übergehen.

Der Vorgang, welcher eintritt, wenn man die bewegliche mit der festen Polbahn vertauscht, läßt sich nach dem Vorigen jetzt leicht definiren. Zu dem Ende denke man sich das bewegliche System oder die Stange AB, Fig. 8 b, mit ihrer Ebene festgestellt, und die ursprünglich feste Ebene mit den beiden rechtwinkeligen Geraden CA und CB so bewegt, daß diese Geraden fortwährend durch die beiden jetzt festen Punkte A und B hindurchgezogen werden. Es wird alsdann das bewegliche System mit einem zu C concentrischen Kreise vom Halbmesser $CD = a$ durch den jetzt festen Mittelpunkt D der Geraden AB hindurchgezogen, und jeder Punkt des nun festen Systems, welcher wie E vom Mittelpunkte D der Stange einen Abstand a gleich der halben Stangenlänge hat, besitzt die Eigenschaft, daß die bewegliche Ebene bei ihrer Bewegung mit einer durch den Scheitel C des Rechtwinkels gehenden Geraden durch diesen Punkt hindurchgezogen wird. Jeder andere Punkt des festen Systems endlich (wie E, Fig 8) verbleibt bei der Bewegung der Ebene des Rechtwinkels in einer in letzterer liegenden Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Durchschnitte C der beiden Geraden CA und CB zusammenfällt.

Fig. 8 b.



Da übrigens jeder Punkt im Umfange des rollenden Kreises, wie E, Fig. 7, in einer durch C gehenden Geraden sich führt, so erkennt man hieraus auch, daß man zu derselben Bewegung gelangen muß, wenn auch die beiden Geraden einen beliebigen schiefen Winkel einschließen, denn man kann das System, in welchem die beiden Punkte A und B in CA und CB geführt werden, offenbar ersetzen durch ein anderes System, in welchem die beiden Punkte E und B in CE und CB geführt werden. Die Richtigkeit dieser Behauptung ersieht sich sofort, wenn man im Auge behält, daß die Bahnen zweier Punkte eines ebenen Systems dessen Bewegung vollständig bestimmen.

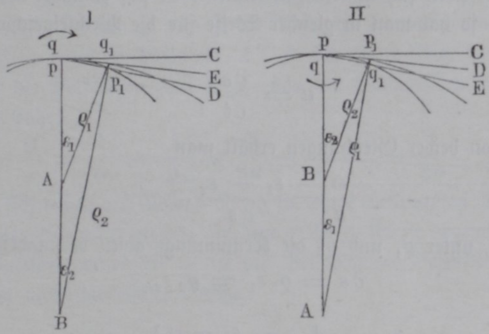
§. 12. **Wechselgeschwindigkeit der Momentanaxe.** Zur Bestimmung der Momentanaxe oder des Pols der Bewegung eines ebenen Systems in einem gewissen Augenblicke genügt nach dem Obigen die Kenntniß der Bewegungsrichtungen zweier Punkte. Ferner kann man aus der Kenntniß der Bahnen zweier Punkte die Polbahnen, d. h. die Lage der Momentanaxe für jeden Augenblick bestimmen. Hieraus kann wieder nach dem Obigen die Bahn jedes beliebigen Systempunktes abgeleitet werden. Die Bewegung eines beliebigen Punktes des bewegten Körpers in einem gewissen Augenblicke ist aber erst bestimmt, wenn außer seinem derzeitigen Orte und der Richtung seiner Bahn auch die Größe seiner Geschwindigkeit bekannt ist. Zur Bestimmung dieses letzteren Elementes für irgend welchen Punkt des Körpers genügt es, wenn man die Geschwindigkeit eines einzigen Körperpunktes kennt. Ist nämlich A ein solcher Punkt des bewegten Körpers, und sein Abstand pA von dem Pol p in einem bestimmten Augenblicke durch r ausgedrückt, welcher Abstand als Drehungshalbmesser für die Rotation des Punktes A um den Pol p anzusehen ist, so hat man für die Geschwindigkeit v des Punktes A:

$$v = r\omega,$$

wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des ganzen Systems in dem betreffenden Augenblicke bedeutet. Kennt man daher von dem Punkte A in jedem Augenblicke die Geschwindigkeit v, so ist, da aus der Kenntniß der Polbahnen auch in jedem Augenblicke die Größe von r sich ergiebt, die Winkelgeschwindigkeit des Systems $\omega = \frac{v}{r}$ ebenfalls für jeden Moment bekannt. Hieraus nun läßt sich auch die Geschwindigkeit v_1 jedes anderen Punktes A_1 im Abstande r_1 vom Pol durch $v_1 = \omega r_1$ bestimmen.

Wenn die Momentanaxe eines bewegten ebenen Systems während der ganzen Bewegungsdauer eine unveränderliche Lage hätte, so würde zur vollkommenen Bestimmung der Bewegung des Körpers die Kenntniß der betreffenden Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe in jedem Augenblicke genügen. Da aber die Momentanaxe ihren Ort auf der festen Polbahn fortwährend verändert, so gehört zur Bestimmung der Körperbewegung noch die Kenntniß der Geschwindigkeit, mit welcher der Pol auf der Polbahn seinen Ort wechselt. Man nennt diese Geschwindigkeit u die **Wechselgeschwindigkeit des Pols** oder der **Momentanaxe**. Sei in einem bestimmten Augenblicke pq, Fig. 9, I und II, der Berührungspunkt der beiden Polbahnen,

Fig. 9.



von denen pp_1 ein unendlich kleines Element der festen und qq_1 ein solches der beweglichen sein möge. Errichtet man in p, p_1, q und q_1 die Normalen zu diesen Polbahnen, so geben dieselben in ihren Durchschnittspunkten A resp. B die Krümmungsmittelpunkte, und man hat daher in $Ap = Ap_1 = \varrho_1$ den Krümmungshalbmesser der festen und in $Bq = Bq_1 = \varrho_2$ denjenigen der beweglichen Polbahn für den augenblicklichen Berührungspunkt oder Pol pq. Der unendlich kleine Winkel ε_1, welchen die beiden Normalen Ap und Ap_1 einschließen, welcher in der analytischen Geometrie der Contingenzwinkel genannt wird, ist offenbar auch gleich dem Winkel CpD, welchen das als geradlinig anzusehende unendlich kleine Element pp_1 mit der gemeinschaftlichen Tangente Cp der Polbahnen im Pol bildet, und ebenso hat man

$$\varepsilon_2 = qBq_1 = CqE,$$

wenn qE die Richtung des Elementes qq_1 vorstellt. Nimmt man nun an, die bewegliche Polbahn qq_1 wälze sich um das Element qq_1 auf der festen Polbahn pp_1 ab, so kommt hierdurch q_1 in p_1 zu liegen, und es fällt qq_1 mit pp_1 zusammen. Damit letzteres geschehe, muß dem beweglichen System und der Polbahn qq_1 eine Drehung um q ertheilt werden, deren Winkelbetrag gleich $EqD = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ ist. In Fig. I ist dieser Werth positiv, in Fig. II, wo $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ist, negativ, durch die Verschiedenheit der Vorzeichen ist nur angedeutet, daß die Drehungsrichtungen des Körpers um den Pol p in den beiden Fällen entgegengesetzt sind, in I nach rechts, in II nach links;

der Betrag der Drehung ist jedoch in beiden Fällen gleich dem absoluten Werthe von $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Bezeichnet daher wieder ω die Winkelgeschwindigkeit, so hat man:

$$\omega = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\partial t}.$$

Wenn man ferner die Länge $p p_1 = q q_1$ des Elementes der Polbahnen, um welches dieselben sich in dem Zeitelemente ∂t auf einander abwälzen, mit ∂s bezeichnet, so hat man in gleicher Weise für die Wechselgeschwindigkeit u des Pols

$$u = \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Durch Division beider Gleichungen erhält man

$$\frac{\omega}{u} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\partial s}.$$

Da nun aber, unter ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungsradien verstanden,

$$\partial s = \varrho_1 \varepsilon_1 = \varrho_2 \varepsilon_2,$$

also

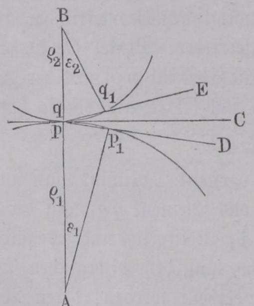
$$\frac{\varepsilon_1}{\partial s} = \frac{1}{\varrho_1} \text{ und } \frac{\varepsilon_2}{\partial s} = \frac{1}{\varrho_2}$$

ist, so kann man obige Gleichung auch schreiben:

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}.$$

Wenn die beiden Polbahnen, wie in Fig. 10, die Krümmungsmittelpunkte auf den entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Tangente qC zu liegen haben, so ist, wie aus der Figur ohne Weiteres sich ergiebt:

Fig. 10.



$$\omega = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\partial t},$$

und daher

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2},$$

doch kann man auch für diesen Fall die obige Form

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$$

beibehalten, wenn man den Krümmungsradien entgegengesetzte Vorzeichen giebt, sobald sie auf entgegengesetzten Seiten der gemeinschaftlichen Tangente der Polbahnen liegen.

Wenn man dem reciproken Werthe des Krümmungshalbmessers einer

Curve $\frac{1}{\varrho} = \frac{\varepsilon}{\partial s}$ den Namen „Krümmung“ beilegt, so kann man den Werth $\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\partial s} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$ als „relative Krümmung“ der beiden Polbahnen bezeichnen. Dieselbe ist nach dem Obigen gleich dem Verhältniß der Winkelgeschwindigkeit ω zur Wechselgeschwindigkeit u.

Beispiel. Wählen wir als Beispiel wieder die Bewegung eines Körpers, welcher mit zwei Punkten A und B im Abstande $2a$ von einander auf den festen Schenkeln eines Rechtwinkels ACB sich führt (Fig. 7), so sind in diesem Falle die Polbahnen zwei Kreise von den Halbmessern $2a$ und a. §. 13.

Man hat daher

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{2a} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{2a}.$$

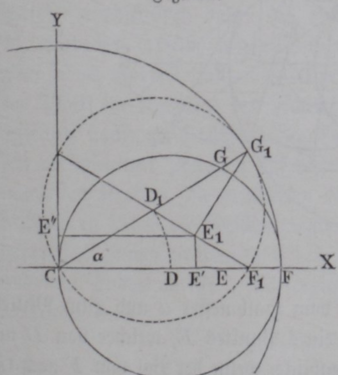
Denkt man sich daher den kleinen Kreis in einer bestimmten Richtung mit gleichbleibender Geschwindigkeit u auf dem größeren Kreise abgewälzt, so bleibt auch die Winkelgeschwindigkeit ω um den Pol während dieser Bewegung constant von der unveränderlichen Größe

$$\omega = -\frac{1}{2a}\,u.$$

Das negative Vorzeichen drückt hierin nur aus, daß die Drehungsrichtung um den Pol eine linke ist, wenn die fortschreitende Bewegung des Pols auf der festen Polbahn einer rechten Drehung um den Krümmungsmittelpunkt entspricht.

Kennt man nun die Winkelgeschwindigkeit $\omega = -\frac{u}{2a}$ der Drehung um den Pol, so kennt man auch die Geschwindigkeit irgend eines Punktes, dessen Abstand vom Pol r sein möge, gleich $v = \omega r = -r\frac{u}{2a}$. Von allen

Fig. 11.



Punkten des bewegten Körpers hat nur der Mittelpunkt D des rollenden Kreises, Fig. 11, einen unveränderlichen Abstand $r = a$ von dem Pol, daher auch nur dieser Punkt seine Bahn mit unveränderlicher Geschwindigkeit durchläuft, wenn man voraussetzt, daß die Rollung mit gleichbleibender Wechselgeschwindigkeit u geschehe. Die Geschwindigkeit $v = r\omega$ des Punktes D ist demzufolge

$$v = a\omega = a\frac{u}{2a} = \frac{u}{2},$$

also halb so groß wie die Wechselgeschwindigkeit des Pols, was auch schon daraus folgt, daß der Punkt D seine kreisförmige Bahn vom Halbmesser $CD = a$ in derselben Zeit mit constanter Geschwindigkeit zurücklegt, während welcher der Pol die feste Polbahn vom Halbmesser $2a$ einmal durchläuft.

Um die Geschwindigkeit irgend eines Punktes des bewegten Körpers zu bestimmen, sei E ein beliebiger Punkt des bewegten Systems im Abstande e von dem Mittelpunkte D des rollenden Kreises. Ist nun der letztere aus der Lage D, in welcher E mit D und C in gerader Linie CX liegt, durch ein Rollen um den Winkel $FCG_1 = \alpha$ in die Lage D_1 gelangt, wobei der Punkt E nach E_1 und G nach G_1 gerückt ist, so ergiebt sich für diese Lage der Polabstand $G_1 E_1$ des betrachteten Punktes aus dem Dreiecke $G_1 D_1 E_1$, dessen Winkel bei D_1 gleich 2α ist, durch

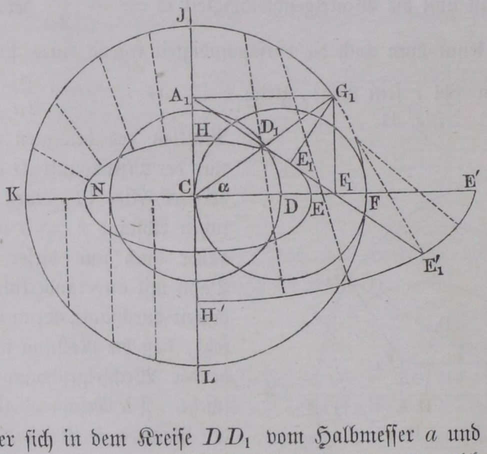
$$G_1 E_1 = r = \sqrt{a^2 + e^2 - 2ae \,.\, \cos 2\alpha}.$$

Demnach ist die Geschwindigkeit des Punktes in der Lage E_1 gefunden zu:

$$v = \omega \sqrt{a^2 + e^2 - 2ae \,.\, \cos 2\alpha}$$
$$= \frac{u}{2a} \sqrt{a^2 + e^2 - 2ae \,.\, \cos 2\alpha}.$$

Man kann sich von den Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte leicht durch eine graphische Darstellung ein anschauliches Bild verschaffen. Es sei C, Fig. 12, der Mittelpunkt der festen und D derjenige der beweglichen Pol-

Fig. 12.



bahn, welcher sich in dem Kreise DD_1 vom Halbmesser a und zum Mittelpunkte C bewegt. Man findet den Ort eines Punktes E, welcher von D um $DE = e$ absteht, in irgend einem Augenblicke, wenn der Pol von F nach G_1

gerückt ist, indem man G_1 auf die Axen CF und CJ nach F_1 und A_1 projicirt, und auf der Diagonale $A_1 F_1$ von der Mitte D_1 die Strecke $D_1 E_1 = e$ anträgt. Man erhält so den Ort des Punktes E als eine Ellipse CEE_1 zum Mittelpunkte C und von den Halbaxen

$$CE = a + e \text{ und } CH = a - e.$$

Die Linie $G_1 E_1$ ist nun offenbar der Drehungshalbmesser des Punktes E in dem Augenblicke, wo G_1 der Pol ist, und man hat wie oben

$$G_1 E_1 = \sqrt{a^2 + e_2 - 2\,ae\,.\cos 2\alpha},$$

welchem Radius $G_1 E_1$ die Geschwindigkeit v proportional ist. Die Linie $G_1 E_1$ steht übrigens nach dem Früheren normal auf der Bahn des Punktes E, d. h. auf der Ellipse in dem Punkte E_1, und man kann daher sagen, daß die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes E in jedem Augenblicke proportional der Normalen ist, welche man von dem betreffenden Punkte der festen Polbahn auf die Bahn des Punktes E fällen kann. Die Construktion der Normalen auf die Ellipse ist mit Hülfe des Rechtecks $CA_1\,G_1 F_1$ und seiner Diagonale $A_1 F_1$ nach Obigem leicht bewirkt.

Nimmt man beispielsweise den Winkel α gleich 0 an, für welchen E in CF liegt, so hat man $\cos 2\alpha = 1$, daher

$$v = \frac{u}{2a}\sqrt{a^2 + e^2 - 2\,ae} = \frac{u}{2a}(a - e),$$

also proportional der Strecke FE. Ebenso folgt für $\alpha = 90^0$, d. h. wenn der Pol in J liegt, $\cos 2\alpha = -1$, daher

$$v = \frac{u}{2a}\sqrt{a^2 + e^2 + 2\,ae} = \frac{u}{2a}(a + e),$$

proportional der Strecke JH.

Die in dem Quadranten $NKJH$ punktirt eingetragenen Normalen der Ellipse repräsentiren daher die verschiedenen Geschwindigkeiten des Punktes E, während derselbe den elliptischen Quadranten HN durchläuft. Setzt man in der Formel für v die Größe $e = a$, nimmt man also den betreffenden Punkt im Umfange des Rollkreises, also etwa in F an, so ist die Bahn desselben nach dem Früheren der Durchmesser FK, und die Normalen von den verschiedenen Pollagen auf diese Bahn sind die zu FK senkrechten Ordinaten des Kreises, die punktirten Normalen in dem Quadranten CKL repräsentiren daher die Geschwindigkeiten des Punktes F. Diese Geschwindigkeiten sind immer proportional dem Sinus des Wälzungswinkels α, wie auch aus dem Ausdrucke für v sich ergiebt, denn wenn man darin $e = a$ setzt, so erhält man:

$$v = \frac{u}{2a} \sqrt{a^2 + a^2 - 2aa \,.\, \cos 2\alpha}$$

$$= \frac{u}{2a} \sqrt{2a^2(1 - \cos.\, 2\alpha)} = \frac{u}{2a} \sqrt{2a^2 \,.\, 2 \sin \alpha^2} = u \sin \alpha.$$

Die Geschwindigkeiten sind also hier dieselben, wie die dem einfachen Schwingungsgesetze entsprechenden; für $\alpha = 0$ ist $v = 0$ und für $\alpha = 90^0$ ist $v = u$, d. h. gleich der Wechselgeschwindigkeit des Pols.

Setzt man endlich $e = 0$, so erhält man für die Geschwindigkeit, mit welcher der Mittelpunkt D der beweglichen Polbahn den Kreis DD_1 durchläuft, den constanten Werth

$$v = \frac{u}{2a} \sqrt{a^2 + 0} = \frac{u}{2},$$

wie bereits früher gefunden. Wenn $e > a$ ist, so liegt der betreffende Punkt in E' außerhalb des beweglichen Kreises und beschreibt beim Abwälzen des letzteren in dem Kreisquadranten FG_1J den elliptischen Quadranten $E'E_1'H'$, dessen Halbaxen ebenfalls $CE' = a + e$ und $CH' = a - e = -(e - a)$ sind. Man erkennt leicht, daß auch hier die von dem Kreisquadranten FG_1J auf die Bahn $E'E_1'H'$ gezogenen Normalen wie FE', G_1E_1' und JH' die Geschwindigkeiten des bewegten Punktes E' repräsentiren.

§. 14. **Beschleunigung eines Systempunktes.** Wenn ein Körper eine einfache Translationsbewegung hat, so sind die Wege aller Punkte in irgend einem Zeitelemente gleich groß und gleich gerichtet, und daraus folgt zunächst die Gleichheit der Geschwindigkeiten aller Punkte für denselben Augenblick. Aendern sich daher im Verlaufe der Zeit diese Geschwindigkeiten der Größe oder Richtung nach, so muß auch die Aenderung für alle Punkte gleich sein, so daß daraus einfach folgt, daß auch die Beschleunigung p in jedem Augenblicke für alle Punkte des bewegten Körpers von gleichem Betrage sein muß. Dies gilt sowohl hinsichtlich der Tangentialbeschleunigung p_t, durch welche die Größe der Geschwindigkeit abgeändert wird, wie auch in Bezug auf die Normalbeschleunigung p_n, welche eine Richtungsveränderung bewirkt. Die Beschleunigungen aller Systempunkte sind daher bekannt, sobald man diejenige eines einzigen Punktes kennt.

Wenn der Körper andererseits einer einfachen Rotation um dieselbe unveränderliche Axe während einer endlichen Zeit unterworfen ist, so sind die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte ihren normalen Abständen von der Drehaxe proportional, also durch $v = r\omega$ ausgedrückt, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Zerlegt man die Beschleunigung p jedes Punktes hier ebenfalls in die Tangentialbeschleunigung p_t und in die Normalbeschleunigung p_n, so hat man nach dem Früheren, Theil I §. 46, ganz allgemein für jeden Punkt

$$p_t = \frac{\partial v}{\partial t} = r\,\frac{\partial \omega}{\partial t},$$

$$p_n = \frac{v^2}{r} = r\,\omega^2$$

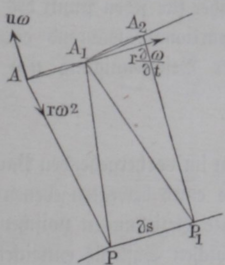
und daher

$$p = \sqrt{p_t^2 + p_n^2} = r\sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + \omega^4}.$$

Es ist daher bei einer einfachen Rotationsbewegung die totale Beschleunigung sowohl wie deren tangentiale und normale Componente für jeden Punkt dem normalen Abstande desselben von der Drehaxe proportional. Wie schon angegeben, reducirt sich in dem Falle, wo die Drehung mit constanter Geschwindigkeit erfolgt, die ganze Beschleunigung auf die Normalcomponente $r\,\omega^2$.

Die allgemeine Bewegung eines ebenen Systems kann nun in jedem Augenblicke als eine Drehung um den Pol angesehen werden. Da aber außer dieser Drehung um den jedesmaligen Pol der letztere selbst mit einer gewissen Wechselgeschwindigkeit u seine Lage auf der festen Polbahn verändert, so ergiebt sich hieraus für jeden Punkt des bewegten Körpers außer der der Drehung um den Pol entsprechenden Beschleunigung noch eine andere Beschleunigung, welche aus der Wechselbewegung des Pols folgt. Um diese Beschleunigung kennen zu lernen, sei $PP_1 = \partial s$, Fig. 13, ein Element der festen Polbahn eines bewegten ebenen Systems und A ein beliebiger Punkt des letzteren. Wenn der Pol in einem bestimmten Augenblicke in P gelegen ist, so beschreibt in dem darauf folgenden Zeitelemente ∂t der Punkt A um den Pol P einen Kreisbogen AA_1 vom Halbmesser $AP = r$ und dem Winkel $\omega\,\partial t$, daher von der Länge

Fig. 13.



$$AA_1 = r\,\omega\,\partial t.$$

Nach Ablauf des Zeittheilchens ∂t ist der Pol von P nach P_1 gerückt, indem er vermöge seiner Wechselgeschwindigkeit u den Weg $\partial s = u\,\partial t$ auf der Polbahn zurückgelegt hat. Das System dreht sich nun um den neuen Pol P_1 mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche jetzt aus ω in $\omega + \partial\omega$ übergegangen ist; es beträgt daher die Drehung während des neuen Zeitelementes ∂t den Winkelwerth $(\omega + \partial\omega)\,\partial t$. Nach §. 4

kann man nun jede Drehung um eine Axe ersetzen durch eine ebenso große Drehung um eine parallele Axe und eine entsprechende auf der Axenebene senkrechte Verschiebung von gewisser Größe. Demgemäß kann man die Drehung um den Pol P_1 im Betrage des Winkels $(\omega + \partial \omega)\partial t$ ersetzen durch eine ebenso große Drehung $(\omega + \partial \omega)\partial t$ um den Pol P vermehrt um eine zu PP_1 normale Verschiebung im Betrage von

$$PP_1\,(\omega + \partial \omega) = \omega \partial s,$$

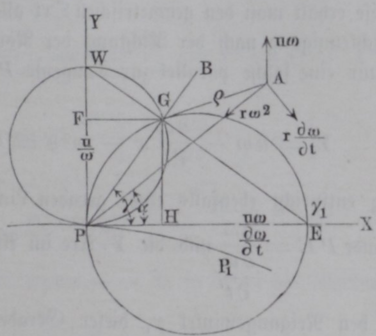
indem die unendlich kleine Größe $\partial \omega$ neben ω verschwindet. Setzt man für ∂s seinen Werth $u \partial t$, so erhält man für die Verschiebung den Betrag $u \omega \partial t$. Es ist somit gefunden, daß der Weg des Punktes A während des ersten Zeittheilchens ∂t den Werth $r \omega \partial t$ hatte, wogegen der Weg während des zweiten Zeittheilchens durch $r(\omega + \partial \omega)\partial t + u \omega \partial t$ sich darstellt. Dividiren wir diese Beträge durch ∂t, so erhalten wir die Geschwindigkeiten des Punktes A im ersten Zeitelemente zu $r \omega$, im zweiten Zeitelemente gleich der Resultante von $r(\omega + \partial \omega)$ senkrecht zu PA und $u \omega$ normal zu PP_1. Die gesammte, dem Punkte A während eines Zeitelementes mitgetheilte Beschleunigung besteht also aus zwei Theilen, und zwar erstens aus derjenigen Beschleunigung p, welche erforderlich ist, um dem mit der Winkelgeschwindigkeit ω um P rotirenden Punkte A eine Rotationsgeschwindigkeit $\omega + \partial \omega$ um denselben Pol P zu ertheilen, und zweitens aus der von der Wechselgeschwindigkeit u herrührenden Beschleunigung $u \omega$. Die erste Beschleunigung p, welche auf den Punkt A allein wirken würde, wenn der Pol nicht wechselte, läßt sich nach dem Früheren in eine Tangentialbeschleunigung $p_t = r \dfrac{\partial \omega}{\partial t}$ und eine Normalbeschleunigung $p_n = r\omega^2$ zerlegen. Diese beiden Beschleunigungscomponenten p_t und p_n sind daher für jeden Punkt des bewegten Körpers dem jedesmaligen Polabstande proportional, während der aus der Wechselgeschwindigkeit herrührende Theil der Beschleunigung $u\omega$ für alle bewegten Punkte von gleicher Größe ist.

§. 15. **Beschleunigungscentrum.** Nachdem im vorhergehenden Paragraphen die Beschleunigung eines beliebigen Punktes eines bewegten ebenen Systems gefunden ist, lassen sich mehrere interessante Beziehungen zwischen den Beschleunigungen der einzelnen Punkte eines solchen Systems entwickeln.

Zu dem Zwecke wählen wir den Pol P, Fig. 14, eines ebenen Systems in einem bestimmten Augenblicke als Coordinatenursprung rechtwinkeliger Axen PX und PY, von denen PX mit der Tangente und PY mit der Normale der festen Polbahn PP_1 im Punkte P zusammenfällt. Auf irgend einen Punkt A im Polabstande $PA = r$ wirken nach dem Vorigen die drei Beschleunigungscomponenten $r\omega^2$ in der Richtung nach dem Pole hin, $r\dfrac{\partial\omega}{\partial t}$ senkrecht zum Drehungshalbmesser PA und $u\omega$ parallel der Normalen PY zur Polbahn.

Zerlegen wir jede dieser Beschleunigungen in ihre Componenten parallel den Coordinatenaxen und bezeichnen die Summen dieser Componenten resp.

Fig. 14.



mit X und Y, so hat man, wie leicht ersichtlich, wenn $XPA = \alpha$ gesetzt wird:

$$X = r\frac{\partial\omega}{\partial t}\sin\alpha - r\omega^2\cos\alpha$$

und

$$Y = u\omega - r\frac{\partial\omega}{\partial t}\cos\alpha - r\omega^2\sin\alpha$$

oder, da $r\sin\alpha = y$ und $r\cos\alpha = x$ ist,

$$X = \frac{\partial\omega}{\partial t}y - \omega^2 x$$

und

$$Y = u\omega - \frac{\partial\omega}{\partial t}x - \omega^2 y.$$

Setzt man nun $X = 0$, so erhält man in $\dfrac{\partial\omega}{\partial t}y - \omega^2 x = 0$ die Bedingung, welcher die Coordinaten derjenigen Punkte entsprechen müssen, die in der Richtung der Polbahntangente eine Beschleunigung nicht haben, deren Beschleunigung also nach der Normalen PY der Polbahn im Pol gerichtet ist. Obige Gleichung

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}y - \omega^2 x = 0$$

entspricht aber offenbar einer durch den Coordinatenursprung P unter dem Winkel γ gegen die X-Axe gerichteten geraden Linie PB, deren Neigung γ bestimmt ist durch

$$tang\ \gamma = \frac{\omega^2}{\frac{\partial \omega}{\partial t}}.$$

In gleicher Weise erhält man den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte, welche keine Beschleunigung nach der Richtung der Normale PY zur Polbahn, sondern nur eine solche parallel zur Tangente PX haben, durch die Gleichung:

$$Y = u\omega - \frac{\partial \omega}{\partial t} x - \omega^2 y = 0.$$

Diese Gleichung entspricht ebenfalls einer geraden Linie WE, welche die X-Axe im Abstande $PE = \frac{u\omega}{\frac{\partial \omega}{\partial t}}$ und die Y-Axe im Abstande $PW = \frac{u}{\omega}$ schneidet. Für den Neigungswinkel γ_1 dieser Geraden gegen die X-Axe hat man

$$tang\,\gamma_1 = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial t}}{\omega^2} = -\,cotg\,\gamma,$$

woraus folgt, daß die beiden Geraden PB und WE auf einander normal stehen.

Der Durchschnittspunkt G dieser beiden Linien hat offenbar gar keine Beschleunigung, denn als Punkt der Geraden PB ist seine Beschleunigung parallel der X-Axe gleich Null, und als Punkt der Geraden WE besitzt er keine Beschleunigung parallel der Y-Axe. Dieser Punkt ist, wie die weitere Entwickelung zeigen wird, von besonderer Bedeutung für die Bewegung des Systems, man nennt ihn das Beschleunigungscentrum aus später zu entwickelnden Gründen. Daß es übrigens in jedem Augenblicke der Bewegung nur einen einzigen Punkt geben kann, dessen Beschleunigung Null ist, geht daraus hervor, daß die beiden Geraden PB und WE, welche übrigens während der Bewegung fortwährend ihre Lage ändern, nur einen Durchschnittspunkt haben können.

Es möge ferner die Beschleunigung des Punktes A noch in einer anderen Weise in Componenten zerlegt werden, und zwar nach den Richtungen der Tangente und Normale der Bahn des Punktes A selbst. Die Normale dieser Bahn in A fällt nach dem Früheren mit dem Polstrahl AP zusammen, und die durch diese Zerlegung sich ergebenden Componenten der Beschleunigung stimmen mit der sogenannten Tangential- resp. Normalbeschleunigung

p_t und p_n der krummlinigen Bewegung überein. Durch diese Zerlegung erhält man offenbar:

$$p_t = r\,\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t} - u\,\omega\,\cos\alpha$$

und

$$p_n = u\,\omega\,\sin\alpha - r\,\omega^2.$$

Setzt man wieder

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},\ \sin\alpha = \frac{y}{r} \text{ und } r^2 = x^2 + y^2,$$

so folgt:

$$p_t = \frac{x^2 + y^2}{r}\,\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t} - u\,\omega\,\frac{x}{r}$$

und

$$p_n = u\,\omega\,\frac{y}{r} - \frac{x^2 + y^2}{r}\,\omega^2.$$

Setzt man auch hier wieder $p_t = 0$, so liefert die Gleichung

$$0 = (x^2 + y^2)\,\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t} - u\,\omega\,.\,x$$

den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte, welche nur Normalbeschleunigung, aber keine Tangentialbeschleunigung haben. Diese Gleichung stellt einen Kreis dar, welcher durch den Coordinatenanfang P und durch den Punkt E auf der X-Axe im Abstande $PE = \frac{u\,\omega}{\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t}}$ geht, denn für $y = 0$ liefert jene Gleichung $x = 0$ und $x = \frac{u\,\omega}{\frac{\partial\,\omega}{\partial\,t}}$. Setzt man in gleicher Art $p_n = 0$, so liefert die Gleichung

$$0 = u\,\omega\,.\,y - \omega^2\,(x^2 + y^2)$$

den geometrischen Ort aller Punkte ohne Normalbeschleunigung als einen Kreis, welcher ebenfalls durch den Coordinatenanfang P geht, und welcher die Y-Axe oder die Normale der Polbahn im Pol in einem Polabstande $PW = \frac{u}{\omega}$ schneidet, denn für $x = 0$ liefert jene Gleichung $y = 0$ und $y = \frac{u}{\omega}$. Diese beiden Kreise oder die geometrischen Oerter der Punkte ohne Tangential- und ohne Normalbeschleunigung schneiden daher die Axen in denselben Punkten W, P und E, durch welche die beiden Geraden hindurchgehen, welche oben bestimmt wurden als die geometrischen Oerter der Punkte, die in der Richtung der Polbahntangente und Normale keine Beschleunigung haben. Der Durchschnittspunkt G jener Geraden, welcher weder Beschleunigung nach der X-Axe noch nach der Y-Axe hat, also überhaupt ohne Beschleunigung ist, besitzt also auch weder Tangential- noch Normalbeschleunigung, und muß daher ebenfalls auf den beiden ermittelten Kreisen liegen. Die letzteren müssen sich sonach in demselben Punkte G schneiden, in welchem die Geraden PB und WE sich treffen, und welchem die Bezeichnung Beschleunigungscentrum gegeben wurde. Es geht dies übrigens auch schon daraus hervor, daß die Gerade PB senkrecht auf WE steht, und daher der Scheitel der Rechtwinkel G sowohl auf dem über PE wie über PW beschriebenen Halbkreise liegen muß.

Die Coordinaten x_0 und y_0 des Beschleunigungscentrums G folgen aus der Figur ohne Weiteres zu:

$$GF = x_0 = P\,W\,.\,\sin\gamma\,\cos\gamma = \frac{u}{\omega}\sin\gamma\,\cos\gamma,$$

$$PF = y_0 = PW\,.\,\sin\gamma^2 = \frac{u}{\omega}\sin\gamma^2.$$

Um die Beschleunigung des beliebigen Punktes A mit Hülfe des Abstandes $GA = \varrho$ desselben von dem Beschleunigungscentrum G auszudrücken, subtrahire man von den Beschleunigungen X und Y des Punktes A parallel den Coordinaten die Ausdrücke für dieselben Beschleunigungen X_0 und Y_0 gleich Null in Bezug auf den Punkt G. Es ist nämlich

$$X = \frac{\partial\omega}{\partial t}\,y - \omega^2 x$$

und

$$0 = \frac{\partial\omega}{\partial t}\,y_0 - \omega^2 x_0,$$

daher durch Subtraction

$$X = \frac{\partial\omega}{\partial t}\,(y - y_0) - \omega^2(x - x_0);$$

und ebenso:

$$Y = u\omega - \frac{\partial\omega}{\partial t}\,x - \omega^2 y$$

und

$$0 = u\omega - \frac{\partial\omega}{\partial t}\,x_0 - \omega^2 y_0,$$

daher:

$$Y = -\frac{\partial\omega}{\partial t}\,(x - x_0) - \omega^2(y - y_0).$$

Nun sind aber $x - x_0 = \xi$ und $y - y_0 = \eta$ die entsprechenden Coordinaten des Punktes A in einem Coordinatensystem, dessen Ursprung im Beschleunigungscentrum G gelegen ist und dessen Axen den ursprünglichen PX und PY parallel sind. Man hat daher in Bezug auf dieses System für A die Beschleunigungen parallel den Axen:

$$X = \frac{\partial \omega}{\partial t} \eta - \omega^2 \xi$$

und

$$Y = - \frac{\partial \omega}{\partial t} \xi - \omega^2 \eta.$$

Vereinigt man diese Beschleunigungscomponenten paarweise mit einander nach dem Parallelogramm der Beschleunigungen, so erhält man erstens eine Beschleunigung

$$p_n = - \omega^2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = - \omega^2 \varrho,$$

welche nach dem Anfangspunkte G hin gerichtet ist, und zweitens eine Beschleunigung

$$p_t = \frac{\partial \omega}{\partial t} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\partial \omega}{\partial t} \varrho,$$

welche auf der ersteren p_n normal steht. Man ersieht daher aus diesen Formeln, daß die Beschleunigung des Punktes A übereinstimmt mit derjenigen, welche er annehmen würde, wenn das ganze System eine Drehung um den Punkt G vollführte, dieser Punkt G aber keine Wechselgeschwindigkeit hätte, sondern für zwei auf einander folgende Zeittheilchen die Drehaxe bildete. Für diesen Fall hätte man nämlich die Normal- und Tangentialbeschleunigung irgend eines Punktes A im Abstande ϱ von G nach dem Früheren bezw. gleich $p_n = \varrho \omega^2$ und $p_t = \varrho \dfrac{\partial \omega}{\partial t}$, also ebenso groß wie die hier berechneten Werthe.

Die totale Beschleunigung irgend eines Punktes im Abstande ϱ vom Beschleunigungscentrum ist $p = \varrho \sqrt{\omega^4 + \left(\dfrac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2}$, also proportional dem Abstande ϱ. Der Winkel α, unter welchem die Beschleunigung p gegen die Verbindungslinie des Punktes mit dem Beschleunigungscentrum gerichtet ist, bestimmt sich durch die Gleichung:

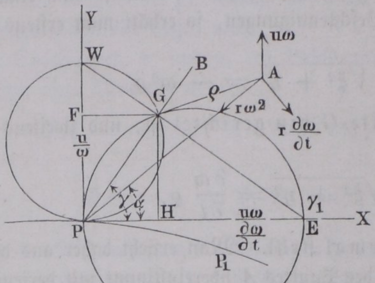
$$tang\, \alpha = \frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial t}}{\omega^2},$$

also ist dieser Winkel für alle Systempunkte constant. Es folgt hieraus ferner sofort, daß alle Punkte, deren Abstand vom Beschleunigungscentrum G denselben Werth ϱ hat, auch gleiche Beschleunigung haben müssen,

d. h. alle Punkte eines zum Beschleunigungscentrum concentrischen Kreises oder alle Punkte eines Cylindermantels, dessen Axe im Beschleunigungscentrum normal zur Bewegungsebene des Systems steht, haben gleiche Beschleunigung. Aus dieser Beziehung rechtfertigt sich die Bezeichnung Beschleunigungscentrum für den Durchschnitt G der beiden gefundenen Kreise.

§. 16. **Wendekreis.** Die Punkte des Kreises PGE, Fig. 15, für welche die Tangentialbeschleunigung gleich Null ist, haben in dem betrachteten Augenblicke ein Maximum oder Minimum ihrer Geschwindigkeit, weil ihre Tangentialbeschleunigung oder die Derivirte der Geschwindigkeit in diesem Augenblicke durch Null geht und das Zeichen wechselt.

Fig. 15.

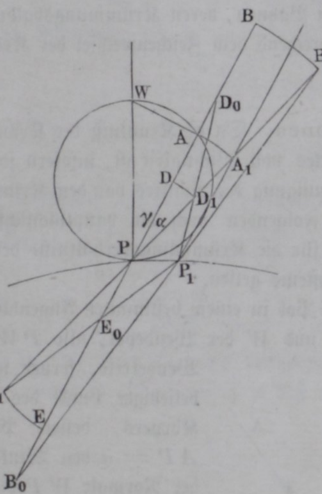


Die Punkte des anderen Kreises PGW, für welche die Normalbeschleunigung gleich Null ist, beschreiben in dem betreffenden Augenblicke Wendepunkte ihrer Bahnen, deren Krümmungshalbmesser ϱ also unendlich groß sind, denn nur für $\varrho = \infty$ kann der Ausdruck $\dfrac{v^2}{\varrho}$ der Normalbeschleunigung zu Null werden, da v einen bestimmten endlichen Werth hat. Man nennt daher den gedachten Kreis PGW auch den Wendekreis und den Durchschnitt W desselben mit der Normale zur Polbahn in P den Wendepol.

Daß übrigens alle Punkte des Systems, welche gleichzeitig in den Wendepunkten ihrer Bahnen sich befinden, in einem Kreise gelegen sind, welcher die feste Polbahn in dem augenblicklichen Pol P berührt, erkennt man auch direct aus folgender Betrachtung.

Sei PP_1, Fig. 16, die feste Polbahn eines ebenen Systems und P in einem bestimmten Augenblicke der Pol, um welchen der bewegte Körper während des Zeitelementes ∂t mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich dreht. Irgend eine durch P gezogene Gerade EPB kommt durch diese Drehung in die Lage E_1PB_1, wobei die Punkte A, B, D und E die resp. Bahnen AA_1, BB_1, DD_1 und EE_1 beschreiben. Wenn in derselben Zeit ∂t der Pol P mit der Wechselgeschwindigkeit u sich auf der festen Polbahn bewegt, so gelangt er nach P_1, wenn $P P_1 = u \partial t$ ist. Verbindet man nun den neuen Pol P_1 mit den jetzigen Lagen A_1, B_1, D_1 und E_1 der bewegten Punkte, so sind die Verbindungslinien $P_1 A_1$, $P_1 B_1$, $P_1 D_1$ und $P_1 E_1$ offenbar in $A_1, B_1 D_1$ und E_1 normal auf den Bahnen dieser Punkte. Ebenso ist aber die Linie EPB auf den Bahnen derselben Punkte in A, B, D und E normal. Da nun der Durchschnitt der Normalen einer Curve in zwei unendlich nahe an einander gelegenen Punkten derselben der Krümmungsmittelpunkt der Curve an dieser Stelle ist, so erhält man also in B_0, D_0 und E_0 die Krümmungsmittelpunkte der resp. Bahnen BB_1, DD_1 und EE_1. Der Krümmungsmittelpunkt der Bahn AA_1 hingegen rückt in die Unendlichkeit, sobald die beiden Normalen PA und $P_1 A_1$ parallel ausfallen, und das ist ein Zeichen, daß der Punkt A in diesem Falle einen Wendepunkt seiner Bahn durchläuft. Damit nun die beiden Normalen PA und $P_1 A_1$ parallel ausfallen, muß der Winkel APA_1 oder $\omega \partial t$ gleich dem Winkel $PA_1 P_1 = PAP_1$ sein. Denkt man nun aber diesen Winkel $\omega \partial t$ über dem Elemente PP_1 in allen möglichen Lagen angetragen, so erhält man offenbar als geometrischen Ort für den Scheitel A einen Kreis PAW, welcher mit der Polbahn in P das unendlich kleine Element PP_1 gemeinsam hat, d. h., welcher die Polbahn in P berührt, und dessen Mittelpunkt daher in der Normale PW der Polbahn gelegen ist. Für den Durchmesser PW dieses Kreises hat man die Beziehung $PW \,.\, \omega \partial t = PP_1$ und da $PP_1 = u \partial t$ ist, so folgt hieraus für den Durchmesser PW des Wendekreises

Fig. 16.



$$PW = \frac{u}{\omega}$$

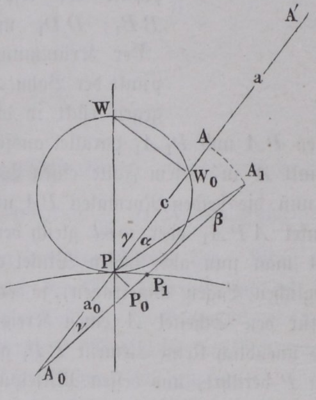
wie oben. Aus der Figur erkennt man auch sofort, daß ein Punkt innerhalb dieses Kreises, wie D, den Krümmungsmittelpunkt seiner Bahn in D_0, also auf derselben Seite der Polbahn hat, auf welcher der Wendekreis liegt, während ein Punkt außerhalb des Wendekreises, wie B oder E, den

Krümmungsmittelpunkt seiner Bahn in B_0 resp. E_0 hat, d. h. auf der dem Wendekreise entgegengesetzten Seite der Polbahn. Die Bahnen sämmtlicher innerhalb des Wendekreises gelegenen Punkte kehren daher dem Pol ihre convexe Seite, die Bahnen der außerhalb des Wendekreises gelegenen Punkte hingegen ihre concave Seite zu, die Punkte auf dem Umfange des Wendekreises beschreiben Bahnen, deren Krümmungshalbmesser in dem betreffenden Augenblicke entsprechend dem Zeichenwechsel der Krümmung unendlich groß werden.

§. 17. **Krümmung der Punktbahnen.** Da die Kenntniß des Krümmungshalbmessers der Bahn eines Punktes von Wichtigkeit ist, insofern sowohl die Tangential- wie die Normalbeschleunigung des Punktes von dem Krümmungsradius abhängt, so mögen im Folgenden noch die hauptsächlichsten Beziehungen erörtert werden, welche für die Krümmungsverhältnisse der Punktbahnen eines bewegten ebenen Systems gelten.

Es sei wieder P, Fig. 17, der Pol in einem bestimmten Augenblicke, PW die Normale zur Polbahn in P und W der Wendepol, also PW_0W der Wendekreis, ferner sei A ein beliebiger Punkt des bewegten Körpers, dessen Polabstand $AP = a$ den Winkel γ mit der Normale WP bildet, und welcher bei der Drehung um P den kleinen Kreisbogen AA_1 zurücklegt. Nach dem Vorstehenden liegt der Krümmungsmittelpunkt des Bahnelementes AA_1 in dem Durchschnitte A_0 der beiden Polstrahlen AP und A_1P_1, wobei vorausgesetzt ist, daß der Pol während des betrachteten Zeitelementes ∂t von P nach P_1 auf der Polbahn sich versetzt.

Fig. 17.



Bezeichnet man nun der Kürze wegen den unendlich kleinen Rotationswinkel APA_1 oder $\omega\partial t$ mit α, den Contingenzwinkel PA_0P_1 mit ν und den ebenfalls kleinen Winkel PA_1P_1 mit β, so hat man für α als Außenwinkel die Beziehung $\alpha = \nu + \beta$. Um diese Winkel durch die Längen auszudrücken, bestimmt sich zunächst zufolge der Eigenschaft des Wendekreises der Winkel α als Peripheriewinkel über dem Elemente PP_1, (s. §. 16) durch

$$PP_1 = WP \,.\, \alpha \text{ zu } \alpha = \frac{PP_1}{WP}.$$

Projicirt man ferner P auf $A_0 A_1$ nach P_0, so ist $PP_0 = PP_1 \cos\gamma$ und man ersieht aus der Figur, daß

$$A_0 P \,.\, v = PP_1 \,.\, \cos\gamma = AP \,.\, \beta$$

ist. Nach Einsetzung der hieraus folgenden Werthe von

$$v = \frac{PP_1}{A_0 P} \cos\gamma = \frac{PP_1}{a_0} \cos\gamma$$

und

$$\beta = \frac{PP_1}{AP} \cos\gamma = \frac{PP_1}{a} \cos\gamma$$

in obige Gleichung $\alpha = v + \beta$ erhält man

$$\alpha = \frac{PP_1}{WP} = \frac{PP_1}{a_0} \cos\gamma + \frac{PP_1}{a} \cos\gamma$$

oder

$$\frac{1}{WP \,.\, \cos\gamma} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a}.$$

Ist nun W_0 die Projection des Wendepols W auf den Polstrahl AP, so ist $WP \,.\, \cos\gamma = W_0 P = c$, so daß man obige Gleichung auch schreiben kann:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a}$$

oder

$$a_0 a = ac + a_0 c.$$

Addirt man hierzu die daraus folgende Gleichung

$$a_0 a - a_0 c = ac,$$

so erhält man:

$$a_0 (2a - c) = c(2a + a_0)$$

oder

$$a_0 : c = 2a + a_0 : 2a - c.$$

Diese Proportion besagt aber, daß zu den drei Punkten A_0, P und W_0 ein vierter harmonischer, dem Pol P zugeordneter Punkt A' in einem Abstande $AA' = a$ gleich der Poldistanz AP gelegen ist, denn macht man $AA' = a$, so ist $A_0 A' = 2a + a_0$ und $W_0 A' = 2a - c$, jene Proportion schreibt sich daher:

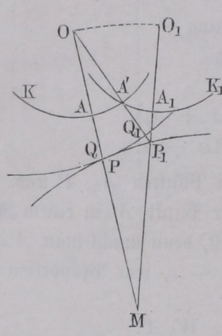
$$A_0 P : W_0 P = A_0 A' : W_0 A'.$$

Der Krümmungsmittelpunkt A_0 des Bahnelementes eines Punktes A und die Projection W_0 des Wendepols auf den Polstrahl AP theilen daher diejenige Strecke PA' harmonisch, deren einer Endpunkt der Pol P und deren Mitte der Punkt A ist. Diese wichtige Beziehung kann in vielen Fällen zur Auffuchung des Krümmungsmittelpunktes A_0 und damit des Krümmungshalbmessers $A_0 A$ der Bahn eines Systempunktes benutzt werden.

§. 18. **Krümmung der Enveloppen.** Bevor aus dem oben entwickelten Lehrsatze weitere Folgerungen abgeleitet werden, möge der Fall näher ins Auge gefaßt werden, daß mit dem bewegten System eine beliebige Curve verbunden ist, welche an der Bewegung Theil nimmt. Die Lage dieser Curve in irgend welchem Augenblicke ist natürlich bekannt, wenn man nur die jedesmalige Lage zweier beliebigen Systempunkte, deren Stellung zu der Curve im System gegeben ist, kennt, weil hierdurch ja nach dem Früheren die Bewegung des ganzen Systems unzweifelhaft bestimmt ist. Denkt man sich alle möglichen Lagen, welche diese Curve nach und nach einnimmt, so kann man sich eine gewisse Linie vorstellen, welche von allen diesen Lagen der Curve berührt wird, oder mit anderen Worten, eine Linie, welche von der bewegten Curve im Laufe der Bewegung umhüllt wird. Man nennt diese Linie die Enveloppe der bewegten Curve, und kann sich von dieser Enveloppe eine Anschauung dadurch verschaffen, daß man die bewegte Curve materiell, etwa in Form eines Drahtes ausgeführt denkt, der mit dem System verbunden ist und bei der Bewegung seine Spur auf einer mit Sand bestreuten Fläche hinterläßt, die der Ebene parallel ist, in der das System sich bewegt. Es ist für die Praxis oft von Interesse, die Natur dieser Enveloppe näher kennen zu lernen.

Es sei P, Fig. 18, zu einer gewissen Zeit t der Pol eines ebenen Systems, mit welchem letzteren eine gewisse Curve K verbunden ist. In dem Zeitelemente ∂t rücke der Pol auf der Polbahn nach P_1 und es komme dabei die Curve K in die Lage K_1. Dabei berührt diese Curve K stets eine gewisse Linie E, welche oben als Enveloppe bezeichnet wurde. Verbindet man den Pol P mit dem Berührungspunkte A dieser Enveloppe und der Curve K, so muß dieser Polstrahl normal auf der gemeinschaftlichen Tangente von K und E stehen. Dies geht daraus hervor, daß der Polstrahl auf den Bahnen aller seiner Punkte senkrecht steht, also auch auf derjenigen des Berührungspunktes A, und daß der Berührungspunkt der Curve K mit E offenbar eine Bewegung hat, deren Richtung mit der Tangente der Enveloppe zusammenfällt. Der Strahl PA fällt daher in die gemeinschaftliche Normale der Curve K und der Enveloppe und geht daher auch durch die Krümmungsmittelpunkte der beiden. Dasselbe gilt nun auch von dem Polstrahl $P_1 A_1$, welcher von der unendlich nahen Lage des Pols P_1 nach

Fig. 18.



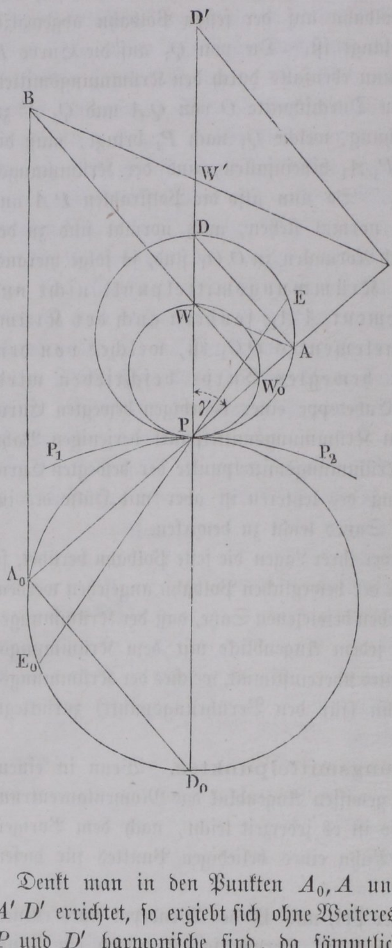
dem nunmehrigen Berührungspunkte A_1 der Curve K_1 mit der Enveloppe gezogen wird. Hieraus folgt daher, daß der Schnittpunkt M dieser beiden Polstrahlen der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe E für das Element $A A_1$ ist. Bei der gedachten kleinen Bewegung des Systems hat sich das Element $Q Q_1$ der beweglichen Polbahn auf der festen Polbahn abgewälzt, so daß der Punkt Q_1 nach P_1 gelangt ist. Die von Q_1 auf die Curve K durch A' gezogene Normale geht nun ebenfalls durch den Krümmungsmittelpunkt der letzteren, welcher in dem Durchschnitte O von QA und $Q_1 A'$ zu suchen ist. Nach geschehener Drehung, welche Q_1 nach P_1 bringt, muß die Normale $Q_1 A'$ in die Normale $P_1 A_1$ hineinfallen, und der Krümmungsmittelpunkt O rückt dabei nach O_1. Da nun also die Polstrahlen PA und $P_1 A_1$, welche auf der Enveloppe normal stehen, auch normal sind zu der Bahn jedes ihrer Punkte, also auch Normalen zu $O O_1$ sind, so folgt hieraus, daß ihr Durchschnitt M der Krümmungsmittelpunkt nicht nur der Enveloppe E für das Element $A A_1$, sondern auch der Krümmungsmittelpunkt des Bahnelementes $O O_1$ ist, welches von dem Krümmungsmittelpunkt der bewegten Curve beschrieben wird. Der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe einer beliebigen bewegten Curve ist daher bekannt, sobald man den Krümmungsmittelpunkt derjenigen Bahn bestimmen kann, welche von dem Krümmungsmittelpunkte der bewegten Curve beschrieben wird. Die Bestimmung des letzteren ist aber mit Hülfe des im vorhergehenden §. 17 entwickelten Satzes leicht zu bewirken.

Da die bewegliche Polbahn in jeder ihrer Lagen die feste Polbahn berührt, so kann letztere auch als die Enveloppe der beweglichen Polbahn angesehen werden, und es ergiebt sich daher aus dem soeben bewiesenen Satze, daß der Krümmungsmittelpunkt der festen Polbahn in jedem Augenblicke mit dem Krümmungsmittelpunkte desjenigen Bahnelementes übereinstimmt, welches der Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Polbahn (für den Berührungspunkt) zurücklegt.

Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes. Wenn in einem bewegten ebenen System für einen gewissen Augenblick das Momentancentrum und der Wendepol bekannt sind, so ist es jederzeit leicht, nach dem Vorigen den Krümmungsmittelpunkt der Bahn eines beliebigen Punktes für diesen Augenblick zu ermitteln. §. 19.

Es sei P, Fig. 19 (a. f. S.), der Pol, und W der Wendepol eines ebenen Systems in einem gewissen Augenblicke. Ferner sei A irgend ein Punkt des bewegten Körpers, für dessen Bahnelement der Krümmungsmittelpunkt bestimmt werden soll. Zieht man den Polstrahl PA und macht $AA' = PA$, so ist der gesuchte Krümmungsmittelpunkt gefunden, wenn man zum Pol P, dem Punkte A' und der Projection W_0 des Wendepols den vierten, W_0 zugeordneten harmonischen Punkt A_0 sucht. Diese Construction ist immer leicht in bekannter Weise auszuführen. Man kann sie hier noch besonders vereinfachen, wenn man den Punkt A auch mit dem Wendepol W verbindet, dann $A'W'$ parallel zu AW zieht und bis zum Durchschnitt B mit dem Projectionsstrahle $W_0 W$ verlängert. Die drei Punkte P, W und W', von denen W in der Mitte zwischen P und W' liegt, bilden mit dem in der Unendlichkeit liegenden Krümmungsmittelpunkte der Bahn von W vier harmonische Punkte. Daher fällt der den drei Strahlen BW', BP und BW zugeordnete vierte harmonische Strahl BA_0 parallel der Normalen WP zur Polbahn aus. Dieselben vier Strahlen theilen nun aber auch die Gerade AP in den Punkten A', P, W_0 und A_0 harmonisch, folglich ist A_0 der Krümmungsmittelpunkt des von A in dem Augenblicke beschriebenen Bahnelementes, in welchem der Pol in P liegt. Die Constructionsregel zur Auffindung von A_0 aus P, W und A erhellt hieraus von selbst.

Fig. 19.



Denkt man in den Punkten A_0, A und A' die Lothe $A_0 D_0$, AD und $A'D'$ errichtet, so ergiebt sich ohne Weiteres, daß auch die vier Punkte D_0, W, P und D' harmonische sind, da sämmtliche Abschnitte auf $D_0 D'$ in dem Verhältnisse $\frac{1}{\cos\gamma}$ größer sind, als die entsprechenden Abschnitte auf $A_0 A'$. Es ist folglich, da D in der Mitte zwischen P und D' liegt, D_0 der Krümmungsmittelpunkt des von D beschriebenen Bahnelementes. Legt man nun durch PAD einen Kreis und einen anderen durch $PA_0 D_0$, welche beiden

Kreise ihre Mittelpunkte wegen der rechten Winkel bei A und A_0 auf der Polbahnnormale $D_0 D'$ haben müssen, so erkennt man leicht, daß die oben in Hinsicht auf A angestellte Betrachtung für jeden Punkt des Kreises PAD gilt. Ist also E ein beliebiger Punkt dieses Kreises, so liefert der Polstrahl EPE_0 auf dem durch PA_0D_0 gelegten Kreise in E_0 den Krümmungsmittelpunkt des von E beschriebenen Bahnelementes.

Daraus folgt die Beziehung, daß die Punkte eines die Polbahn im Pol berührenden Kreises Bahnelemente beschreiben, deren Krümmungsmittelpunkte auf einem zweiten, die Polbahn ebenfalls im Pol berührenden Kreise liegen.

Um die gegenseitige Lage und das Größenverhältniß dieser Kreise zu ermitteln, nehme man zunächst an, der Kreis durch A nähere sich mehr und mehr dem Wendekreise, bis er mit ihm zusammenfällt. Damit ist der zugehörige Kreis für den Krümmungsmittelpunkt A_0 größer und größer und in dem Augenblicke unendlich groß geworden, in welchem A in den Wendekreis tritt. Dies folgt daraus, daß jetzt die Projection W_0 des Wendepols in die Mitte zwischen P und A' fällt, daher der vierte harmonische Punkt in der Unendlichkeit liegt. Dies entspricht auch der schon früher entwickelten Eigenschaft des Wendekreises, wonach alle Punkte desselben Bahnelemente von unendlich großem Halbmesser beschreiben.

Denkt man sich umgekehrt den Punkt A weiter und weiter vom Pol P sich entfernend, so wird der Kreis für die Krümmungsmittelpunkte A_0 kleiner und kleiner, und erreicht in der Grenze, wenn A unendlich weit fortrückt, eine Größe gleich dem Wendekreise, welchem er dann auf der anderen Seite der Polbahntangente symmetrisch gegenüberliegt. Dies geht daraus hervor, daß der Punkt A und also A' in der Unendlichkeit liegt, wonach der dem Punkte A' harmonisch zugeordnete Pol P die Entfernung $A_0\, W_0$ halbiren muß.

Wenn der beschreibende Punkt A von dem Wendekreise aus nach dem Pole P hin rückt, so liegt der Krümmungsmittelpunkt nach §. 16 mit dem Wendekreise auf derselben Seite der Polbahntangente und zwar nähert sich der Kreis, auf welchem er liegt, mehr und mehr dem Wendekreise, je mehr A sich dem Pole nähert. Gelangt dabei der Punkt A in einen die Polbahn in P berührenden Kreis, welcher halb so großen Durchmesser hat wie der Wendekreis, so liegt der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf dem Wendekreise, denn da von den betreffenden vier harmonischen Punkten P, A', W_0 und A_0 die beiden A' und W_0 auf dem Wendekreise in einen zusammenfallen, so fällt auch A_0 in diesen Doppelpunkt. Nähert sich A noch mehr dem Pole, so ist dies auch mit A_0 der Fall, bis schließlich A und A_0 gleichzeitig den Pol P erreichen.

Nimmt man an, daß der bewegte Punkt A durch den Pol hindurch auf die dem Wendekreise abgewendete Seite der Polbahntangente tritt, so liegt der Krümmungsmittelpunkt der Punktbahn auf einem Kreise, welcher die Polbahn auf derselben Seite berührt, auf welcher A liegt, und welcher Kreis kleiner ist, als der durch den Punkt A und den Pol gelegte Berührungskreis der Polbahn. Je mehr sich der Kreis, auf welchem A liegt, erweitert, desto größer wird auch derjenige Kreis, auf welchem der Krümmungsmittelpunkt A_0 liegt, und erreicht dieser letztere Kreis eine Größe gleich dem Wendekreise (auf der dem letzteren entgegengesetzten Seite der Polbahn), sobald der beschreibende Punkt in die Unendlichkeit rückt, wie schon oben bemerkt worden.

§. 20. **Bestimmung des Wendepols.** Die obigen Untersuchungen setzen die Kenntniß des Wendepols eines bewegten ebenen Systems voraus. Dieser Punkt ergiebt sich im Allgemeinen aus den Bedingungen, durch welche die betreffende Bewegung charakterisirt ist. Sind z. B. die beiden Polbahnen gegeben, also auch deren Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 für irgend welchen Punkt bekannt, so erhält man den Wendepol W, wenn man auf der gemeinschaftlichen Normale der Polbahnen vom Pol aus ein Stück gleich dem Durchmesser $\frac{\omega}{u}$ des Wendekreises abträgt, und zwar ergiebt sich diese Größe nach §. 12 durch die Gleichung

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}.$$

Ist die Bewegung des Körpers durch die Bahnen zweier Punkte A und B gegeben, so kann man nach dem Früheren (§. 7) jederzeit den Pol P als den Durchschnitt der Normalen dieser Curven in A resp. B bestimmen. Trägt man nun auf diesen Polstrahlen PA und PB, auf welchen auch die Krümmungsmittelpunkte A_0 und B_0 der bekannten Bahnen von A und B liegen, die Polabstände PA und PB bezw. gleich AA' und BB' an, so erhält man in der vierten harmonischen den Krümmungsmittelpunkten zugeordneten Punkten zu P, A', A_0 und P, B', B_0 die beiden Projectionen W_0 des Wendepols auf die beiden Polstrahlen PA und PB. Man findet daher den Wendepol selbst in dem Durchschnittspunkte W der beiden Normalen, welche man in den beiden Punkten W_0 auf PA und PB errichtet.

In gewissen in der Praxis häufigen Fällen kann man für die Lage des Wendepols ohne Weiteres bestimmte Regeln angeben, von denen hier nur die hauptsächlichsten angeführt werden mögen. Wenn ein Punkt A des bewegten Körpers eine geradlinige Bahn beschreibt, so liegt deren Krümmungsmittelpunkt A_0 in der Unendlichkeit und daher muß dessen harmonischer Gegenpunkt, d. h. die Projection W_0 des Wendepols W in der Mitte zwischen dem Pol P und dem Punkte A' liegen, d. h. mit dem gleichfalls in der Mitte von PA' liegenden Punkte A zusammenfallen. Da also der Wendepol W in der in A auf dem Polstrahle PA errichteten Normale, d. h. in der Bahnrichtung des Punktes A liegt, so folgt daraus, daß, wenn ein Punkt eine Gerade beschreibt, diese durch den Wendepol gehen muß.

Bei den Bewegungsmechanismen kommt häufig der Fall vor, daß der bewegte Körper mit einer gewissen Curve K auf einer anderen festen Curve E, Fig. 18, so entlang bewegt wird, daß die feste Curve E fortwährend von der beweglichen Curve K berührt wird. In diesem Falle ist E die Enveloppe von K und da nach §. 18 der Krümmungsmittelpunkt M der Enveloppe mit demjenigen der Bahn OO_1 übereinstimmt, welche der Krümmungsmittelpunkt O der bewegten Curve K zurücklegt, so müssen auch die vier Punkte, der Pol P, der Punkt O', welcher auf der Verlängerung von PO in dem Abstande $OO' = PO$ liegt, der Krümmungsmittelpunkt M der festen Curve E und die Projection W_0 des Wendepunkts auf den Strahl MO vier harmonische sein. Wird in diesem Falle die bewegte Curve K zu einer Geraden, welche eine feste Curve E fortwährend berührt, so liegt von den gedachten vier harmonischen Punkten O' ebenso wie O in der Unendlichkeit, folglich liegt der Pol P in der Mitte zwischen dem Krümmungsmittelpunkte M der festen Curve E und der Projection W_0 des Wendepols auf den Polstrahl.

Wenn hierbei die feste Curve E in einen festen Punkt zusammenschrumpft, durch welchen die bewegte Curve K fortwährend hindurchgezogen wird, so fällt von den vier Punkten der Krümmungsmittelpunkt M der festen Curve in den festen Punkt E selbst hinein, und die Projection W_0 des Wendepols ist zu dem festen Punkte E, dem Pol P und dem Punkte O' im Abstande $OO' = PO$ der vierte harmonische Punkt und zwar der dem festen Punkte E zugeordnete. Wird in diesem Falle aus der bewegten Curve speciell eine Gerade, so fällt O' ins Unendliche, daher liegt der Pol in der Mitte zwischen dem festen Punkte E und der Projection W_0 des Wendepols auf den nach dem festen Punkte gerichteten Polstrahl.

Wird endlich die feste Curve E zu einer Geraden, welche von der bewegten Curve K fortwährend berührt wird, so liegt der Krümmungsmittelpunkt M in der Unendlichkeit, weswegen die zugeordnete Projection W_0 des Wendepols in der Mitte zwischen dem Pol und dem Punkte O' liegt, d. h. in den Krümmungsmittelpunkt O der bewegten Curve K hineinfällt. Wenn auch hier die Curve K in einen Punkt zusammenschrumpft, welcher also die gerade Bahn beschreibt, so fällt der Krümmungsmittelpunkt O und also nach dem Obigen auch die Projection W_0 in die Gerade E hinein, woraus die früher schon angegebene Eigenschaft sich ergiebt, daß die Gerade

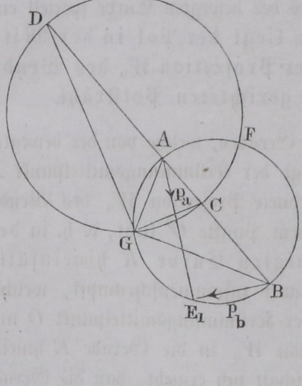
E, in welcher der Körperpunkt K geführt wird, durch den Wendepol hindurchgeht.

Was schließlich noch die Geschwindigkeit des Wendepols anbetrifft, so ist dieselbe nach dem Früheren gleich $PW \,.\, \omega$, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des ganzen Systems um das Momentencentrum P und wenn PW den Abstand des Wendepols von P bezeichnet. Letztgedachter Abstand ist nun aber der Durchmesser des Wendekreises, welcher in §. 15 zu $\frac{u}{\omega}$ gefunden worden ist. Demzufolge ergiebt sich die Geschwindigkeit des Wendepols W zu $\frac{u}{\omega}\,\omega = u$, d. h. gleich der Wechselgeschwindigkeit des Momentancentrums oder Pols. Die Geschwindigkeit, welche irgend ein Punkt des Wendekreises W_0, Fig. 19, hat, dessen Polstrahl PW_0 den Winkel γ mit der Normale PW zur Polbahn bildet, bestimmt sich demgemäß zu

$$v = PW_0 \,.\, \omega = \frac{u}{\omega}\cos\gamma \,.\, \omega = u\cos\gamma.$$

§. 21. Bestimmung des Beschleunigungscentrums. In §. 15 lernten wir das Beschleunigungscentrum als einen Punkt ohne Beschleunigung kennen, dessen Lage durch den Schnittpunkt der zwei zu einander senkrechten Geraden gegeben ist, welche eine Beschleunigung nach der Polbahntangente und beziehungsweise nach der Polbahnnormale im Pol nicht haben. Die Kenntniß dieses Punktes, welcher übrigens auch in den Schnittpunkt des Wendekreises mit dem Kreise für die Punkte ohne Tangentialbeschleunigung hineinfällt, ist für die Untersuchung der Bewegung der Mechanismen von besonderer Wichtigkeit, und soll daher noch die Bestimmung dieses Beschleunigungscentrums erörtert werden.

Fig. 20.



Das Beschleunigungscentrum G, Fig. 20, hat nach §. 15 die Eigenschaft, daß die Beschleunigung irgend eines bewegten Systempunktes A proportional dem Abstande GA desselben vom Beschleunigungscentrum G ist, und daß der Winkel, welchen die Beschleunigung p_a von A mit dem Strahl GA bildet, für alle Punkte des Systems derselbe, nämlich durch

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\partial\omega}{\partial t}}{\omega^2} \text{ bestimmt ist.}$$

Kennt man daher von zwei beliebigen Punkten A und B die Beschleunigungen p_a und p_b, so muß das Beschleunigungscentrum G offenbar so gelegen sein, daß $GA : GB = p_a : p_b$ ist. Denkt man sich also die Strecke AB in C und D nach dem Grundverhältnisse $p_a : p_b$ harmonisch getheilt, so daß $CA : CB = DA : DB = p_a : p_b$ ist, so muß das Beschleunigungscentrum auf dem über DC als Durchmesser beschriebenen Kreise liegen. Dieser Kreis ist nämlich der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von A und B in dem Grundverhältnisse $p_a : p_b$ stehen. Denn verbindet man irgend welchen Punkt G mit A, B, C, D, so halbiren von den vier harmonischen Strahlen die auf einander senkrechten Strahlen GD und GC bekanntlich die Winkel des anderen Strahlenpaares, AGB, und man hat daher auch $GA : GB = CA : CB = p_a : p_b$.

Sind nun die Beschleunigungen p_a und p_b der Punkte A und B ihren Richtungen nach bekannt, und man trägt sie in A und B an, so geben diese Richtungen, bis zum Durchschnitt E verlängert, in dem Winkel AEB auch denjenigen Winkel an, welchen die Strahlen von A und B nach dem Beschleunigungspol bilden. Dies geht einfach daraus hervor, daß die Beschleunigung jedes Systempunktes einen constanten Winkel mit dem von diesem Punkte nach dem Beschleunigungspol gezogenen Strahle bildet, zwei dieser letzteren Strahlen daher einen Winkel mit einander einschließen, welcher gleich demjenigen Winkel ist, unter welchem die Beschleunigungen der zugehörigen Systempunkte gegeneinander geneigt sind. Beschreibt man daher auch um die drei Punkte A, B und E einen Kreis, so hat jeder Punkt desselben die Eigenschaft, daß die von ihm nach A und B gezogenen Strahlen einen Winkel gleich AEB einschließen. Das Beschleunigungscentrum muß also auch auf diesem Kreise gelegen sein, kann also nur in einem der Durchschnittspunkte G der beiden Kreise liegen. Welcher der beiden Durchschnitte dieser Kreise als Beschleunigungscentrum anzusehen ist, ergiebt sich hierbei leicht, wenn man jede der beiden Beschleunigungen p_a und p_b in zwei Componenten zerlegt denkt, von denen die eine in den Strahl von A oder B nach dem Beschleunigungscentrum, die andere in die dazu senkrechte Richtung fällt. Die erste dieser Componenten muß dann von dem betreffenden Punkte A oder B nach dem Beschleunigungscentrum hin gerichtet sein. Der zweite Schnittpunkt F kann daher im vorliegenden Falle nicht in Betracht kommen, da die erwähnten Componenten die Richtungen von F weg nach A und B haben würden, was der gefundenen Eigenschaft des Beschleunigungscentrums nicht entsprechen würde.

Kennt man nun noch die Beschleunigung eines Punktes A ihrer wirklichen Größe nach als p_a, so kann man leicht die Beschleunigung jedes beliebigen Systempunktes C finden, denn dieselbe muß $p_c = \frac{p_a}{GA} \cdot GC$ sein. Hat man z. B. den Pol P dadurch gefunden, daß man die Normalen in A und B auf den bekannten Geschwindigkeitsrichtungen zeichnet, so erhält man in $\frac{p_a}{GA} \,.\, GP$ die Beschleunigung des Pols. Dieser hat aber nach §. 14 eine Beschleunigung $u\omega$ in der Richtung der Polbahnnormale. Setzt man daher

$$\frac{p_a}{GA} \,.\, GP = u\omega,$$

so erhält man den Werth für die Wechselgeschwindigkeit u, wenn die Winkelgeschwindigkeit ω bekannt ist. Bildet endlich die Beschleunigung p_a mit dem Strahl GA den Winkel α, so hat man die senkrecht auf dem Strahle GA stehende Componente der Beschleunigung von A gleich $p_a \sin\alpha$, und da dieselbe den Werth $GA \,.\, \frac{\partial\omega}{\partial t}$ haben muß, so findet man:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{p_a}{GA} \sin\alpha$$

u. s. f.

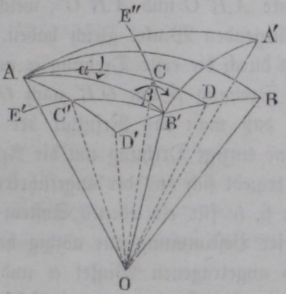
§. 22. **Parallelogramm der Drehungen.** Bei den bisherigen Ermittelungen wurde immer vorausgesetzt, daß das bewegte System ein solches sei, bei welchem die Bahnen sämmtlicher Punkte in einer Schaar paralleler Ebenen gelegen sind, und daß also jeder einzelne Punkt fortwährend in der ihm zugehörigen Ebene verbleibe, weshalb auch schlechtweg von der Bewegung eines ebenen Systems gesprochen wurde. Bei dieser Bewegung, bei welcher die vorkommenden Drehaxen unter sich parallel, nämlich senkrecht zu den parallelen Ebenen sind, genügte die Untersuchung der Bewegung in einer einzigen dieser Parallelebenen zur Bestimmung der Bewegung des ganzen Systems. Wenn nun auch die weitaus überwiegende Mehrzahl der Maschinengetriebe, denen man in der Praxis begegnet, auf diesen einfachen Fall der Bewegung in einer Ebene zurückgeführt werden kann, so kommen doch auch zuweilen Mechanismen vor, bei welchen die Bewegungen der einzelnen Punkte einen allgemeineren und weniger einfachen Charakter haben. Insbesondere sind die Axen, um welche Rotationen des Körpers eintreten, nicht immer parallel.

Der allgemeinste Fall der Bewegung ist derjenige, in welchem das System irgend welchen Translationen und Rotationen unterliegt, die nach beliebig im Raume zerstreuten Richtungen, resp. um beliebig sich kreuzende Axen stattfinden. Bevor dieser allgemeinste Fall besprochen wird, sei der specielle näher untersucht, daß das System zweien Rotationen um zwei sich schneidende Axen unterworfen ist.

Es seien OA und OB, Fig. 21, zwei in O sich schneidende Geraden in einem bewegten Körper, welcher nach einander um diese Axen zwei Drehungen empfangen soll, und zwar in dem Winkelbetrage α um OA und β um OB.

In analoger Art wie in §. 5 für ein ebenes System geschehen, ist auch hier leicht nachzuweisen, daß derselbe Erfolg durch eine einzige Drehung um eine gewisse Axe OC erreicht werden kann. Zu dem Zwecke denke man sich um O als Mittelpunkt fest im absoluten Raume eine Kugelfläche von dem Halbmesser gleich der Einheit gelegt, welche von den Axen OA und OB in A resp. B getroffen werde. Empfängt nun der Körper eine Drehung um die Axe OA im Betrage $\alpha = B(OA)B'$, so gelangt dadurch die Gerade OB des Körpers, welche als nachherige Drehaxe fungiren soll, in die Lage OB', welche als ihre Endlage anzusehen ist, da sie bei der folgenden Drehung des Körpers um sie selbst ihre Lage OB' unverändert beibehält. Findet nun diese Drehung um OB' in dem Winkelbetrage $A(OB')A' = \beta$ statt, so wird dadurch die Axe OA in ihre Endlage OA' übergeführt. Zunächst ist ersichtlich, daß der Schnittpunkt O der beiden Axen, vermöge eben seiner Eigenschaft als solcher, seinen Ort im Raume nicht geändert hat, und da außer ihm die neuen Lagen der Punkte A und B in A' und B' durch die Winkel α und β gegeben sind, so ist durch die drei nicht in gerader Linie liegenden Punkte O, A' und B' auch überhaupt die Lage des ganzen Systems bestimmt.

Fig. 21.



Wenn man sich nun durch OA eine Ebene OAD gelegt denkt, welche den Drehungswinkel $B(OA)B' = \alpha$ halbirt, so daß also $D(OA)B' = \frac{\alpha}{2}$ ist, so wird diese Ebene OAD durch die erste Drehung um OA in die Lage OAD' gelangen, vorausgesetzt, daß $B'(OA)D' = \frac{\alpha}{2}$, also $D(OA)D' = \alpha$ ist. Ebenso denke man sich nach Vollführung der zweiten Drehung um OB' eine Ebene $OB'E''$ mit dem System verbunden, welche durch die zweite Drehaxe in ihrer definitiven Lage OB' so gelegt ist, daß sie den Winkel $A(OB')A' = \beta$ halbirt, so daß also $A(OB')E'' = \frac{\beta}{2}$ ist. Man erkennt dann leicht, daß diese Ebene vor Ausführung der zweiten Drehung die Lage $OB'E'$ haben mußte, vorausgesetzt nämlich, daß der Winkel $E'(OB')A$ ebenfalls gleich $\frac{\beta}{2}$ gemacht ist. Diese Ebene $OB'E'$ schneidet sich mit der Ebene OAD' in dem Kugelradius OC', und es er=

giebt sich ohne Weiteres aus der Construction, daß diese Schnittlinie OC' durch die zweite Drehung um OB' in die Lage OC übergeführt wird, so daß sie mit der Durchschnittslinie zusammenfällt, in welcher die beiden winkelhalbirenden Ebenen OAD und $OB'E''$ sich treffen. Dies folgt aus der Symmetrie der beiden sphärischen Dreiecke $AB'C$ und $AB'C'$, welche eine Seite AB' gemeinschaftlich und die anliegenden Winkel gleich haben. Die Gerade OC ist daher eine solche, welche durch die erste Drehung α um OA nach OC' gelangt und durch die zweite Drehung β um OB' nach OC zurückgeführt worden ist. Daraus folgt, daß man das Resultat der beiden Drehungen auch erreichen muß durch eine einzige Drehung um die Axe OC.

Die Lage der resultirenden Axe OC ergiebt sich aus der angeführten Construction ganz von selbst analog der in §. 5 für ein ebenes System angegebenen Regel, wonach man behufs dieser Bestimmung nur nöthig hat, die beiden an OA und OB' entsprechend angetragenen Winkel α und β zu halbiren. Auch der Betrag γ der resultirenden Drehung um OC folgt aus der Figur mit Rücksicht darauf, daß durch diese Drehung die Axe OA nach OA' und OB nach OB' übergeführt werden muß. Es ist daher offenbar der Außenwinkel $D(OC)B' = E''(OC)A$ des sphärischen Dreiecks $AB'C$ gleich dem halben Drehungswinkel um die resultirende Axe OC.

Dieser halbe Drehungswinkel $\frac{\gamma}{2}$ bestimmt sich durch die bekannte trigonometrische Beziehung sphärischer Dreiecke:

$$\cos . A(OC)B' = \cos\left(180^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos AOB'$$

oder

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos AOB'.$$

Ebenso gilt für die Lage der resultirenden Axe die Beziehung:

$$\frac{\sin AOC}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin B'OC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin AOB'}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Daß bei verschiedenen Drehungsrichtungen die Winkel α und β in entsprechendem Sinne angetragen werden müssen, ist an sich deutlich. Es ist auch hier, gerade wie beim ebenen System und zwar aus ganz analogen Gründen wie in §. 5 und 6 angegeben worden, eine Veränderung in der Aufeinanderfolge der Drehungen nur dann zulässig, wenn die Drehungswinkel α und β und daher auch γ unendlich kleine Größen sind. Wenn dies der

Fall ist, so liegt die Axe OC der resultirenden Drehung in der Ebene AOB' der beiden Axen, und man hat, da

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2};\ \sin\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} \text{ und } \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$$

gesetzt werden muß,

$$\frac{\sin AOC}{\beta} = \frac{\sin B'OC}{\alpha} = \frac{\sin AOB'}{\gamma}.$$

Dieser Gleichung wird offenbar Genüge geleistet durch die Seiten eines Dreiecks und deren gegenüberliegende Winkel, und es ergiebt sich daher in diesem Falle zur Bestimmung der resultirenden Drehung γ die folgende Construction: Man trägt auf den Richtungen der Axen OA und OB',

Fig. 22.

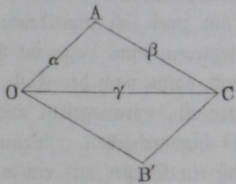


Fig. 22 von O aus die Stücke OA proportional α und OB' proportional β auf, die Diagonale OC des aus OA und OB' construirten Parallelogramms giebt dann die Richtung der Axe der resultirenden Drehung an, und die Länge OC ist dem Drehungswinkel γ der resultirenden Drehung nach demselben Verhältnisse proportional, nach welchem OA und OB' mit α und beziehungsweise β verhältnißgleich angenommen sind. Die Richtigkeit der Construction folgt ohne Weiteres daraus, daß in dem Parallelogramme die Gleichung erfüllt ist:

$$\frac{\sin AOC}{\beta} = \frac{\sin B'OC}{\alpha} = \frac{\sin AOB'}{\gamma},$$

welche für die resultirende Drehung gilt.

Das hierin enthaltene Gesetz, welches man als das vom Parallelogramm der Rotationen bezeichnet, läßt sich demnach dahin aussprechen. Die Resultante zweier unendlich kleinen Drehungen um zwei sich schneidende Axen ist eine Drehung um eine durch den Schnittpunkt der ersten beiden Axen gehende und in deren Ebene liegende dritte Axe, und zwar bestimmt die Diagonale desjenigen Parallelogramms, dessen Seiten den Axen parallel und den zugehörigen Drehungswinkeln proportional sind, durch ihre Richtung die Lage der resultirenden Axe und durch ihre Länge die Größe der resultirenden Drehung.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes ist die Zusammensetzung beliebig vieler unendlich kleinen Drehungen um Axen, die sich sämmtlich in einem Punkte schneiden, möglich gemacht, und man kann entsprechend den früher angeführten Sätzen vom Parallelogramm der (geradlinigen) Bewegungen, der Geschwindigkeiten 2c. von einem Polygon und einem Parallelepipedum der Drehungen sprechen, je nachdem die in einem Punkte sich schneidenden Axen von mehreren unendlich kleinen Drehungen in derselben oder in verschiedenen Ebenen liegen.

Ebenso gestattet der vorstehende Satz jederzeit die Zerlegung einer unendlich kleinen Drehung in zwei oder mehrere andere um Axen vor sich gehende, welche mit der Axe der Hauptdrehung in demselben Punkte sich schneiden. Für die Zerlegung gelten ähnliche Regeln, wie diejenigen sind, welche bei den analogen Sätzen des Parallelogramms der Bewegungen, Geschwindigkeiten 2c. früher an verschiedenen Stellen angeführt worden sind.

§. 23. **Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt.** Es ist bereits im vorigen Paragraphen bemerkt worden, daß bei der Ausführung der beiden Drehungen, welchen der Körper um zwei sich schneidende Axen unterworfen wird, der Schnittpunkt O der letzteren seine Lage im Raume nicht ändern kann. Dasselbe ist natürlich auch dann noch der Fall, wenn die Anzahl der Drehungen eine beliebig größere ist, vorausgesetzt nur, daß sämmtliche Drehaxen durch denselben Punkt O hindurchgehen. Wenn daher der in der Praxis häufigere Fall vorliegt, daß ein Körper mit einem seiner Punkte im absoluten Raume festgehalten wird, so kann man umgekehrt behaupten, daß sämmtliche Bewegungen, deren der Körper noch fähig ist, sich auf Drehungen um Axen beschränken müssen, welche letzteren durch den festen Punkt hindurchgehen. Denn es ist ebensowohl jede Translation als auch jede Drehung um eine andere nicht durch den festen Punkt O gehende Axe als unverträglich mit der unveränderlichen Lage des festen Punktes O ausgeschlossen. Bei dieser Bewegungsart wird irgend ein Punkt A des bewegten Körpers, welcher von dem festen Punkte O den Abstand $OA = r$ hat, offenbar stets auf einer zu O concentrischen Kugelfläche vom Halbmesser r verbleiben müssen, d. h. die Bahnen sämmtlicher Punkte des Körpers sind sphärische. Nach dem vorigen Paragraphen kann man nun stets zwei beliebig große, um zwei sich schneidende Axen erfolgende Drehungen ersetzen durch eine Drehung um eine gewisse, durch denselben Schnittpunkt mit jenen hindurchgehende Axe. Da diese Drehung sich weiter mit jeder dritten und vierten Drehung um Axen, die durch denselben Punkt hindurchgehen, vereinigen läßt, so geht daraus hervor, daß man jede Bewegung eines um einen Punkt rotirenden Körpers, aus wie viel verschiedenen Drehungen sie auch bestehen möge, immer ersetzen kann durch eine einzige Drehung um eine gewisse Axe, welche durch den festen Mittelpunkt hindurchgeht. Es sei nun ein Körper vorausgesetzt, von welchem ein Punkt O festgehalten werde, und denke man sich um diesen Punkt als Mittelpunkt eine feste Kugelfläche etwa vom Halbmesser gleich der Einheit gelegt. Die Lage des Körpers ist dann immer vollkommen bestimmt, wenn der Ort von zwei Punkten A und B des Körpers auf dieser Kugeloberfläche gegeben ist, da durch drei Punkte O, A und B die Lage eines Körpers ganz allgemein bestimmt ist. Man denke sich nun, daß nach Verlauf einer bestimmten Zeit der Körper aus seiner ursprünglichen Lage, die durch A und B bestimmt wird, in eine andere Lage gelangt sei, für welche jene Punkte nach A_1 beziehungsweise B_1 gekommen sind, welche Lage also etwa kurz durch $A_1 B_1$ bezeichnet sein möge. Dann ist nach dem Vorigen klar, daß der Körper aus seiner anfänglichen Lage AB in seine neue Lage $A_1 B_1$ durch eine Drehung um eine gewisse Axe übergeführt werden kann, welche Axe in der im Vorstehenden angegebenen Weise zu bestimmen ist. Es möge mit P_1 derjenige Punkt auf der gedachten Kugelfläche bezeichnet sein, in welcher die letztere von dieser Axe getroffen wird. Denkt man sich hierauf den Körper nach einer gewissen Zeit in eine dritte Lage $A_2 B_2$ gekommen, so läßt sich wiederum eine Axe OP_2 von solcher Beschaffenheit angeben, daß eine Drehung des Körpers um sie den ersteren aus der Lage $A_1 B_1$ in diejenige $A_2 B_2$ überführt. Setzt man die hier angedeutete Construction für eine beliebige Anzahl von aufeinanderfolgenden Lagen des Körpers fort, so erhält man eine gleiche Anzahl von Axen OP_1, OP_2, OP_3 . . ., die sämmtlich durch den festen Punkt O hindurchgehen und die Kugeloberfläche in den Punkten P_1, P_2, P_3 . . . schneiden. Alle diese Axen bilden die Kanten einer gewissen Pyramide, welche die Kugelfläche in dem sphärischen Polygon $P_1 P_2 P_3$ . . . treffen, und jede von ihnen, OP_n, ist als eine Drehaxe aufzufassen, um welche zu der betreffenden Zeit der Körper gedreht werden muß, um aus einer Lage $A_{n-1} B_{n-1}$ in die darauf folgende $A_n B_n$ übergeführt zu werden. Nimmt man nun die aufeinander folgenden Lagen des Körpers näher und näher aneinander liegend, bis ihre Abstände unendlich klein werden, so macht die sprungweise Lagenveränderung des Körpers einer stetigen Aufeinanderfolge Platz, wie sie bei der effectiven Bewegung wirklich stattfindet. Die besagte Pyramide geht hierbei in eine Kegelfläche über, deren Spitze in dem festen Punkte liegt, und welche die um diesen Punkt concentrische Kugelfläche in einer gewissen Curve $P_1 P_2 P_3$ . . . schneidet, in welche das vorgedachte sphärische Polygon in der Grenze übergegangen ist. Die einzelnen Seiten OP oder Erzeugungslinien sind als die Drehaxen aufzufassen, um welche nach und nach dem Körper unendlich kleine Drehungen ertheilt werden müssen, wenn die wirkliche Bewegung des Körpers hervorgebracht werden soll.

Diejenige Erzeugungslinie dieser Kegelfläche, um welche in einem bestimmten Augenblicke der Körper zu drehen ist, heißt die augenblickliche Drehaxe oder die Momentanaxe für das betreffende Zeitelement, und entspricht dieselbe offenbar dem Pol oder Momentancentrum des ebenen Systems, unter welchem ja auch streng genommen eine Axe zu verstehen ist, welche im Pol zu dem System der parallelen Ebenen senkrecht steht. Die gedachte feste Kegelfläche, deren Mittelpunkt in O liegt, entspricht in derselben Art der festen Polbahn beim ebenen System, welche gleichfalls streng genommen nicht als eine Curve, sondern als eine feste Cylinderfläche anzusehen ist, deren Erzeugungslinie die Momentanaxe ist. Ebenso wie die Momentanaxe beim ebenen System auf dieser Cylinderfläche oder Polbahn entlang wandert, so wird in dem vorliegendem Falle die Momentanaxe auf der Kegelfläche $O P_1 P_2 P_3 \ldots$ herumgeführt. Es erhellt hieraus, daß die Bewegung des ebenen Systems nur ein specieller Fall des um einen festen Punkt rotirenden Systems ist, zu welchem man gelangt, wenn man den festen Punkt O ins Unendliche fortrücken läßt.

Wie man nun bei dem ebenen System neben der festen noch eine zweite, mit dem bewegten Körper verbundene, daher selbst bewegliche Polbahn angeben kann, welche auf der festen abgerollt wird, ebenso giebt es auch in dem vorliegenden Falle eine zweite Kegelfläche, welche mit dem bewegten Körper verbunden ist und an dessen Bewegung Theil nimmt. Der Mittelpunkt derselben fällt in den festen Punkt O oder den Mittelpunkt der festen Kegelfläche hinein, auf welcher letzteren bei der Systembewegung ein Abwälzen der beweglichen Kegelfläche stattfindet. Denkt man sich nämlich auch mit dem bewegten Körper eine um O concentrische Kugelfläche vom Halbmesser Eins verbunden, welche also mit der schon betrachteten festen Kugelfläche zusammenfällt, so wird diese Kugelfläche in einem gewissen Augenblicke, wo $O P_1$ Momentanaxe ist, in einem Punkte Q_1 getroffen, welcher mit dem Punkte P_1 auf der festen Kugelfläche zusammenfällt. Im nächsten Augenblicke wird die Momentanaxe durch die unendliche nahe gelegene Erzeugungslinie $O P_2$ der festen Kegelfläche gegeben sein. Der bewegte Körper tritt nun aber nicht mehr mit der Geraden $O Q_1$ in die neue Momentanaxe $O P_2$, sondern mit einer anderen Geraden $O Q_2$, welche die bewegte Kugelfläche in Q_2 trifft. Ebenso wird der Körper mit den aufeinanderfolgenden Momentanaxen $O P_3$, $O P_4 \ldots$ der festen Kegelfläche nach und nach mit ebenso vielen auf einander folgenden Geraden $O Q_3$, $O Q_4$ in Berührung kommen. Alle diese durch O gehenden Geraden bilden nun wieder eine mit dem bewegten Körper verbundene Kegelfläche, welche, der beweglichen Polbahn des ebenen Systems analog, auf der festen Kegelfläche $O P_1 P_2 P_3 \ldots$ sich abwälzt. Diese Kegelfläche trifft die bewegliche Kugel in einer sphärischen Curve $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$, welche die andere Curve $P_1 P_2 P_3 \ldots$ in einem Punkte (P_1) berührt und auf dieser bei dem Abwälzen des Kegels $O Q$ auf dem Kegel $O P$ entlang rollt. Die Analogie mit der beweglichen Polbahn des ebenen Systems ist auch hier unverkennbar.

Nach dem Vorstehenden kann daher jede beliebige Bewegung eines um einen festen Punkt rotirenden Körpers erzeugt werden durch Abrollen eines mit dem Körper verbundenen Kegelmantels, dessen Spitze in den festen Punkt fällt, auf einem festen Kegelmantel mit derselben Spitze, und ist die Berührungslinie dieser beiden Kegelflächen die jedesmalige augenblickliche Drehaxe des Körpers. Es ist also die Bewegung des Körpers für jeden Augenblick gegeben, sobald man die beiden Kegelflächen oder, was auf dasselbe hinausläuft, sobald man die beiden sphärischen Curven $P_1 P_2 P_3 \ldots$ und $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$ kennt. Es lassen sich hinsichtlich der Bewegungen der einzelnen Punkte des Körpers ähnliche Folgerungen ziehen, wie in §. 9 für das ebene System aus dem analogen Charakter der Polbahnen geschehen ist.

Beispiel. Der in §. 22 gefundene Satz vom Parallelogramm der Rotationen, welcher für unendlich kleine Drehungen gilt, hat auch für die Rotationsgeschwindigkeiten seine Geltung, da man diese Geschwindigkeiten als die unendlich kleinen Winkel betrachten muß, um welche in dem Zeitelemente ∂t der Körper um die betreffenden Axen gedreht wird. Bezeichnet man daher mit ω_1, ω_2, ω_3 die Winkelgeschwindigkeiten des bewegten Körpers in einem bestimmten Augenblicke um die entsprechenden Axen $OA, OB, OC \ldots$, so läßt sich die Axe der resultirenden Drehung, d. h. also die augenblickliche Drehaxe sowie die resultirende Drehungsgeschwindigkeit ω um diese Axe ganz ebenso nach dem Parallelepipedum der Rotationsgeschwindigkeiten bestimmen, wie man geradlinige Bewegungen oder Geschwindigkeiten zur Resultante zusammensetzt. Man hat dazu nur auf den Axen vom festen Punkte O aus Stücke abzutragen, welche den Drehungsgeschwindigkeiten ω_1, ω_2, $\omega_3 \ldots$ nach einem gewissen Maßstabe proportional sind, dann liefert die Diagonale des betreffenden Parallelepipedums in ihrer Richtung die Lage der Momentanaxe und in ihrer Länge nach dem zu Grunde gelegten Maßstabe die Größe der resultirenden Winkelgeschwindigkeit ω. Ferner ist die Geschwindigkeit v irgend eines Punktes A des Körpers, welcher von der Momentanaxe den senkrechten Abstand r hat, wie früher durch $v = r\omega$ gegeben. Daher ist auch hier die resultirende Winkelgeschwindigkeit des Körpers $\omega = \frac{v}{r}$ für jeden Augenblick bekannt, für welchen man die Geschwindigkeit v eines Punktes A und den Abstand r desselben von der jedesmaligen Momentanaxe kennt. Die Bestimmung der letzteren geschieht aber aus den bekannten sphärischen Bahnen zweier Punkte in analoger Weise, wie beim ebenen System, indem zwei durch den festen Punkt O und je einen der Punkte $A, B, C \ldots$ gelegte, zu den Bahnen dieser Punkte senkrechte Ebenen in ihrem Durchschnitte offenbar die Momentanaxe liefern müssen. Insbesondere läßt sich auch durch ähnliche Betrachtungen wie sie in §. 12 für das ebene System angestellt §. 24.

wurden, für die Wechselgeschwindigkeit u der Momentanaxe wie dort die Beziehung finden:

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}.$$

Hierin hat man unter ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungshalbmesser derjenigen Schnittcurven in ihrem Berührungspunkte zu verstehen, die man erhält, wenn man die beiden mehrgedachten Kegelflächen durch eine Ebene schneidet, welche auf der Berührungslinie dieser Kegel oder der Momentanaxe im Abstande Eins vom festen Punkte senkrecht steht.

Als ein Beispiel für die Rotation eines Körpers um einen festen Punkt sei die in §. 8 und 13 betrachtete Bewegungsform, in entsprechender Weise verallgemeinert, hier näher geprüft. Dort wurden zwei Punkte A und B, Fig. 23, einer Geraden auf zwei führenden Geraden CD und CE zu verbleiben gezwungen, oder eigentlich waren es zwei in A und B auf dem System der parallelen Bewegungsebenen senkrechte Geraden, welche in zwei Ebenen verbleiben mußten, die in CD und CE ebenfalls senkrecht zu dem System der Bewegungsebenen zu denken sind. Man kann sich vorstellen, die drei Ebenen, die führenden CD und CE und die geführte AB schnitten sich beständig in einem Punkte in der Unendlichkeit, und bei dieser Vorstellung ergiebt sich sogleich, daß diese Bewegungsart nur einen speciellen Fall einer anderen vorstellt, wo der Durchschnitt der drei Ebenen ein fester Punkt O in endlicher Entfernung ist. In Folge der letzteren Annahme schneiden die in §. 8 parallel angenommenen Geraden durch A und B sich nunmehr in O und sei angenommen, der Schnitt geschehe unter rechten Winkeln, um

Fig. 23.

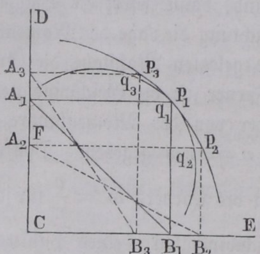
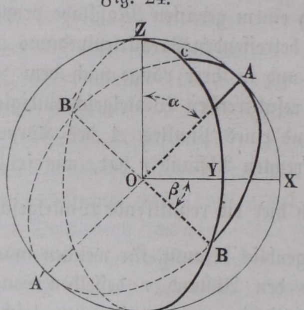


Fig. 24.



in dem Beispiele an den Mechanismus des sogenannten Universalgelenkes (s. unten) anzuschließen. Die zu betrachtende Bewegungsart läßt sich daher folgendermaßen kennzeichnen: Ein Körper wird einer solchen Bewegung ausgesetzt, daß zwei in ihm vorhandene sich rechtwinklig schneidende Geraden OA und OB, Fig. 24, gezwungen sind, in zwei sich schneidenden festen Ebenen

OXZ beziehungsweise OYZ zu verbleiben, und der Durchschnitt O der Geraden stets in denselben Punkt der Durchschnittslinie OZ der beiden Ebenen hineinfällt. (Wie aus dem Späteren folgen wird, ist bei dem Universalgelenke die Ebene der beiden rechtwinkeligen Geraden durch das sogenannte Kreuz repräsentirt, während die beiden Führungsebenen die auf den kuppelnden Wellen senkrechten durch die Gabelzinken gelegten Ebenen sind.)

Denkt man sich durch den festen Punkt O eine Kugel vom Halbmesser $OA = OB =$ Eins gelegt, so wird dieselbe von den beiden Führungsebenen OXZ und OYZ in den größten Kreisen ZAX und ZYB geschnitten, während der Durchschnitt der bewegten Ebene AOB mit der Kugelfläche durch den größten Kreis $ABA'B'$ dargestellt ist. Wenn die Gerade OA bei der vorausgesetzten Bewegung in den Durchschnitt OZ der beiden Führungsebenen hineinfällt, so muß wegen des rechten Winkels AOB die Gerade OB mit dem zu OZ senkrechten Durchmesser OY zusammenfallen. Nimmt man diese zugehörigen Lagen OZ und OY als Anfangslagen von OA und OB an, von denen die Drehungswinkel $ZOA = \alpha$ und $YOB = \beta$ gezählt werden, um welche die geführten Geraden in ihren Ebenen gedreht sind, so hat man für das sphärische Dreieck $OABZ$, wenn der Winkel $A(OZ)B$ zwischen den festen Ebenen mit c bezeichnet wird:

$$\cos AOB = \cos AOZ \,.\, \cos BOZ + \sin AOZ \,.\, \sin BOZ \,.\, \cos A(OZ)B$$

oder

$$\cos 90^0 = 0 = \cos\alpha \cos(90^0 + \beta) + \sin\alpha \sin(90^0 + \beta) \cos c.$$

Hierfür kann man schreiben:

$$0 = -\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta \cos c$$

oder nach Division mit $\cos\alpha \cos\beta$

$$\cos c = \frac{\tang\beta}{\tang\alpha}\,.$$

Die Drehungswinkel der beiden Geraden von den angenommenen Anfangslagen an gerechnet, sind also so beschaffen, daß ihre Tangenten in dem constanten Verhältniß $\cos c$ zu einander stehen.

Um auch das Verhältniß der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 der Geraden OA und ω_2 der Geraden OB zu finden, setze man:

$$\omega_1 = \frac{\partial\alpha}{\partial t} \text{ und } \omega_2 = \frac{\partial\beta}{\partial t}$$

folglich ist:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\partial\alpha}{\partial\beta}.$$

Diesen Ausdruck zu bestimmen differentiire man

$$\cos c \tang\alpha = \tang\beta,$$

so erhält man:

$$\cos c \frac{\partial \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\partial \beta}{\cos^2 \beta},$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \frac{1}{\cos c} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Da nun

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha},$$

so kann man für diesen Ausdruck auch schreiben:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tang}^2 \beta} \cos c = \frac{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha \,.\, \cos^2 c} \cos c$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tang}^2 a \, (1 - \sin^2 c)} \cos c = \frac{\cos c}{1 - \sin^2 \alpha \,.\, \sin^2 c},$$

welcher Ausdruck sich findet, wenn man im Nenner einmal

$$\operatorname{tang}^2 \alpha = \sin^2 \alpha \, (1 + \operatorname{tang}^2 \alpha)$$

setzt.

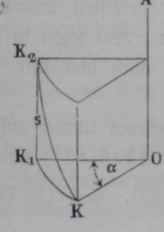
§. 25. **Allgemeine Bewegung eines Körpers.** Nachdem in dem Vorangehenden die Bewegung eines Körpers für specielle Fälle untersucht worden, sei nunmehr die Bewegung ganz beliebig vorausgesetzt und in ihrer allgemeinsten Form ins Auge gefaßt. Diese allgemeinste Bewegungsform ist offenbar dadurch gekennzeichnet, daß keiner der Punkte des Körpers festgehalten oder durch einen äußeren Zwang veranlaßt ist, in einer bestimmten Linie oder Fläche zu verbleiben, daß vielmehr der Körper vollkommen frei beweglich und einer beliebigen Anzahl ganz willkürlicher Drehungen und Verschiebungen unterworfen ist. Wie nun auch diese letzteren Bewegungen beschaffen sein mögen, so ist doch unter allen Umständen eine Vereinigung derselben zu einer resultirenden Verschiebung möglich, wie sich aus folgender Betrachtung leicht ergiebt.

Seien die Verschiebungen, welchen der Körper während einer gewissen Zeit ausgesetzt ist, durch die Strecken $s_1, s_2, s_3 \ldots$ ihrer Richtung und Größe nach dargestellt, so kann man zunächst vermöge des Parallelepipedums der Bewegungen alle diese Verschiebungen zu einer resultirenden Translation vereinigen, welche mit s bezeichnet sein mag.

Um auch die einzelnen Drehungen um die Axen $A_1, A_2, A_3 \ldots$, welche beliebig im Raume zerstreut anzunehmen sind, mit einander zu vereinigen, kann man nach §. 4 die Axen sämmtlich parallel ihren Richtungen nach einem beliebigen Punkte O verlegen, wenn man nur bei jeder Verlegung einer Axe dem Körper noch eine Verschiebung σ ertheilt, deren Größe durch

$\sigma = 2d\,sin\,\frac{\alpha}{2}$ ausgedrückt ist, unter d die Größe der Axenverlegung und unter α den zugehörigen Drehungswinkel verstanden. Vermöge dieser Construction hat man die Drehungen des Körpers um eine Anzahl im Raume sich kreuzender Axen ersetzt durch eine gleiche Anzahl von gleich großen Drehungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ um Axen, die jenen parallel sind und sämmtlich durch einen Punkt O hindurchgehen, und eine ebenso große Anzahl von Verschiebungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$ Nun können alle diese Drehungen nach §. 22 zu einer einzigen vereinigt werden, deren Axe OA ebenfalls durch den Punkt O geht, und ebenso lassen sich die Verschiebungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$ nach dem Parallelepiped der Bewegungen zu einer Verschiebung σ zusammensetzen, welche wieder mit der früher gedachten Resultante s vereinigt werden kann zu einer Gesammtresultante S. Hierdurch ist die Summe aller Bewegungen zurückgeführt auf eine Drehung im Betrage α um die Axe OA und auf eine Verschiebung, welche durch S der Richtung und Größe nach angegeben ist. Die Richtung von S und diejenige der Axe OA werden im Allgemeinen sich kreuzen, und es möge γ den Winkel bezeichnen, welchen dieselben mit einander bilden. Man kann alsdann die resultirende Verschiebung S in zwei Componenten $S\,cos\,\gamma$ und $S\,sin\,\gamma$ zerlegen, von welchen die erstere $S\,cos\,\gamma$ parallel zur Axe OA der resultirenden Drehung gerichtet ist, während die andere $S\,sin\,\gamma$ auf dieser Axe senkrecht steht. Diese letztere Verschiebung $S\,sin\,\gamma$ zusammen mit der Drehung α um die Axe OA läßt sich nun aber nach §. 4 ersetzen durch eine einzige Drehung von demselben Betrage α um eine zu OA in dem Abstande $d = \dfrac{S\,sin\,\gamma}{2\,sin\,\frac{\alpha}{2}}$ mit ihr parallele Axe, und es bleibt daher neben dieser Drehung nur noch die der Drehaxe parallele Verschiebung $S\,cos\,\gamma$ übrig. Aus vorstehenden Betrachtungen folgt, daß es immer möglich ist, die Ortsveränderung, welche ein ganz frei beweglicher Körper in Folge beliebiger Drehungen und Verschiebungen erleidet, durch eine einzige Drehung um eine Axe OA, Fig. 25, im Winkelbetrage $KOK_1 = \alpha$, verbunden mit einer Verschiebung $K_1K_2 = s$ parallel zu jener Axe zu ersetzen.

Fig. 25.



Die Bewegung eines Punktes, vermöge welcher derselbe um eine gewisse Axe in einem bestimmten Gerade gedreht und gleichfalls parallel dieser Axe um ein gewisses Stück verschoben wird, nennt man eine schraubenförmige, und mit Rücksicht hierauf kann man den obigen Satz auch dahin aussprechen, daß jede Ortsveränderung, die ein frei beweglicher Körper erleidet, auch hervorgebracht werden kann durch eine bestimmte Schraubenbewegung um eine gewisse Axe. Faßt man bei einem bewegten Körper die unmittelbar aufeinander folgenden Lagen desselben ins Auge, nimmt also eine Aufeinanderfolge von unendlich kleinen Ortsveränderungen an, so werden natürlich auch die diesen entsprechenden Schraubenbewegungen unendlich klein, und es folgt weiter, daß man die ganze Bewegung eines freien Körpers im Laufe einer gewissen Zeit ersetzen kann durch eine continuirliche Aufeinanderfolge von Schraubenbewegungen.

In dem Vorhergehenden ergab sich aus einer geeigneten Vereinigung der beliebigen Verschiebungen und Drehungen die Schraubenbewegung, es ist daher ohne Weiteres klar, daß der umgekehrte Weg zu einer Zerlegung der Schraubenbewegung in beliebige Verschiebungen und Drehungen führen muß. Es kann hier insbesondere noch bemerkt werden, daß jede Schraubenbewegung sich stets in unendlich mannichfacher Weise durch zwei Drehungen um zwei sich kreuzende Axen ersetzen läßt und umgekehrt.

Denkt man sich nämlich einen Körper, welcher zweien Drehungen um zwei zu einander windschiefe Axen A und B ausgesetzt ist, so läßt sich die eine Drehaxe A parallel mit sich selbst unter Zuhülfenahme einer entsprechenden Translation (s. §. 4) so weit verschieben, bis sie die andere Axe B in einem Punkte trifft, worauf die beiden Drehungen sich nach §. 22 zu einer einzigen um eine resultirende Axe C zusammensetzen lassen. Gegen diese Axe C muß die aus der Verlegung von A herrührende Verschiebung schräg geneigt sein, weil dieselbe senkrecht zu A steht, C aber als resultirende Axe von A und B eine andere Richtung hat als A. Wenn man daher diese Verschiebung in zwei Componenten parallel mit C und senkrecht zu C zerlegt, so läßt sich die senkrechte Componente zusammen mit der Drehung um C ersetzen durch eine Drehung um eine zu C parallele Axe C_1, welche als die Axe einer Schraubenbewegung angesehen werden kann, deren Translationsbewegung durch die zweite zu C parallele Componente der erwähnten Verschiebung gegeben ist. Natürlich kann man auch umgekehrt jede Schraubenbewegung in zwei Drehungen um zwei sich kreuzende Axen zerlegen, wovon die eine beliebig angenommen werden kann. Je zwei solche zu einander windschiefe Axen, deren Drehungen zusammen einer gewissen Schraubenbewegung gleichwerthig sind, heißen conjugirte Axen. Wie schon in §. 22 ausgeführt, ist die Aufeinanderfolge der Rotationen auch hier nur dann gleichgültig, wenn die Drehungen unendlich klein sind.

Der Satz, wonach die beliebige Bewegung eines Systems immer auf eine Schraubenbewegung zurückgeführt werden kann, ist von Chasles*) gefunden

*) Bulletin des sciences mathém. von Ferusac. 1831. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte 1870. Thl. II, Cap. V.

worden, und wird die Axe der Schraubenbewegung wohl auch die Central-axe der Bewegung genannt.

Axoide. Wenn ein frei beweglicher Körper K nach einander in verschiedene Lagen K_1, K_2, K_3 . . . gelangt, so kann man nach dem Vorstehenden immer gewisse schraubenförmige Bewegungen $\alpha_1 s_1$, $\alpha_2 s_2$, $\alpha_3 s_3$ . . . um bestimmte Axen A_1, A_2, A_3 . . . angeben, welche dasselbe Resultat der Ueberführung des Körpers K in die Lagen K_1, K_2, K_3 . . . herbeiführen. Der Körper nimmt also in Folge dieser Schraubenbewegungen dieselben Endstellungen K_1, K_2, K_3 . . . ein, wie vermöge seiner wirklichen Bewegung, ohne daß indessen die Bewegungen auch in den Zwischenstellungen zwischen K_1 und K_2, K_2 und K_3 . . . übereinstimmten, so lange es sich um Bewegungen von endlicher Größe handelt. Nur wenn die Ortsveränderungen zwischen den verschiedenen Lagen K_1, K_2, K_3 . . . unendlich klein sind, wird die continuirliche Folge der entsprechenden unendlich kleinen Schraubenbewegungen für jeden Augenblick mit der wirklichen Bewegung des Körpers identisch sein. Die in unendlich kleinen Zeitintervallen auf einander folgenden Schraubenbewegungen geschehen im Allgemeinen um verschiedene feste Axen im Raume, und es ist leicht zu erkennen, daß diese Axen, deren gegenseitige Abstände ebenfalls unendlich klein sein müssen, in ihrer Gesammtheit eine gewisse feste Fläche im Raume bestimmen. §. 26.

Sind A_1, A_2, A_3 . . . diese Axen oder die auf einanderfolgenden Erzeugungslinien dieser festen Fläche A, so giebt es, ähnlich wie in den früheren Fällen bei dem ebenen und dem um einen Punkt rotirenden Systeme, auch hier eine mit dem Körper verbundene zweite Fläche, welche mit jener ersten während der Bewegung stets in Berührung bleibt. Sei z. B. zu der gewissen Zeit t die augenblickliche Schraubenaxe in A_1 gegeben, so fällt eine gewisse Gerade B_1 des bewegten Körpers mit A_1 zusammen, um welche die Drehung α_1 stattfindet, während gleichzeitig zufolge der Schraubenbewegung der Körper mit der Geraden B_1 auf der festen Axe A_1 sich um die Größe s_1 verschiebt. Nach Vollführung dieser unendlich kleinen Schraubung um die Axe A_1 folgt eine zweite um die benachbarte Erzeugungslinie A_2 der festen Fläche, mit welcher nun auch eine andere Gerade B_2 des Körpers zusammenfällt. Der Körper dreht sich jetzt nicht nur um diese zweite Axe A_2 im Betrage α_2, sondern er verschiebt sich mit der Geraden B_2 auf der festen Axe A_2 um die Größe s_2, worauf eine dritte Gerade B_3 des Körpers in die darauf folgende Schraubenaxe A_3 hineinfällt u. s. w. Alle die gedachten Geraden B_1, B_2, B_3 . . ., welche in unendlich kleinen Abständen auf einander folgen, bilden daher eine gewisse, mit dem Körper verbundene geradlinige Fläche B. Man kann daher die beliebige Bewegung eines Körpers stets so auffassen, als wenn eine gewisse mit dem Körper verbundene und mit ihm bewegliche geradlinige Fläche B auf einer anderen geradlinigen festen Fläche A gleichzeitig rollt und gleitet.

Die Ergebnisse der bisherigen Untersuchung lassen sich nunmehr folgendermaßen in eine allgemeine Uebersicht zusammenfassen. Die relative Bewegung irgend eines starren Körpers, welcher Art sie auch sein möge, gegen einen anderen ebenfalls starren Körper läßt sich immer so auffassen, als seien mit diesen Körpern zwei geradlinige Flächen A und B fest verbunden, welche auf einander rollen, indem sie sich fortwährend in der jedesmaligen Momentanaxe berühren und gleichzeitig neben dem Rollen einer Verschiebung gegeneinander längs dieser Berührungslinie ausgesetzt sind. Es möge für diese die Momentanaxen enthaltenden Flächen, welche man sich etwa als Hyperboloide vorstellen kann, der von Reuleaux gewählte Name Axoide gebraucht werden.

Es ist natürlich, daß diese der allgemeinsten Bewegungsform entsprechenden Axoide auch diejenigen für gewisse specielle Bewegungen enthalten müssen, also z. B. die Axoide für die Bewegung eines ebenen Systems und eines um einen Punkt rotirenden Körpers, von welchen Bewegungen oben specieller gehandelt wurde. Es kann z. B. die betreffende Bewegung der Körper derart sein, daß sie durch bloßes Rollen der Axoide auf einander ohne Gleitung längs der Berührungslinien hervorgebracht werden kann. Die beiden Axoide müssen dann der geometrischen Bedingung der Abwickelbarkeit*) entsprechen, wie es etwa bei einem auf einer Schraubenfläche sich abrollenden Umdrehungshyperboloid der Fall ist. Ein specieller Fall hiervon ist derjenige, wo die beiden Körper einen Punkt O mit einander gemein haben, dessen relative Bewegung also Null ist. Durch diese Bedingung ist nicht nur jede relative Verschiebung der Körper gegen einander von vornherein unmöglich gemacht, sondern es müssen auch sämmtliche Momentanaxen auf beiden Axoiden durch diesen Punkt hindurchgehen, d. h. die beiden Axoide gehen in zwei Kegelflächen über, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt in dem Punkte O liegt. Dieser Fall entspricht offenbar dem um einen Punkt rotirenden Körper (§. 23).

Wenn ferner der Mittelpunkt O dieser Kegelflächen ins Unendliche rückt, so gehen die Axoide in gerade Cylinderflächen über und ihre Schnitte mit irgend einer zur Axenrichtung senkrechten Ebene sind die für das ebene System charakteristischen Polbahnen.

Es muß hierbei bemerkt werden, daß die Axoide A und B zweier irgendwie bewegten Körper durch ihr Rollen und Gleiten auf einander die relative Bewegung dieser Körper gegen einander bestimmen. Will man daher die absolute Bewegung eines der Körper im Raume, z. B. desjenigen mit dem Axoide B bestimmen, so ist es nöthig, den anderen Körper, dessen

*) S. Reuleaux, Kinematik S. 84.

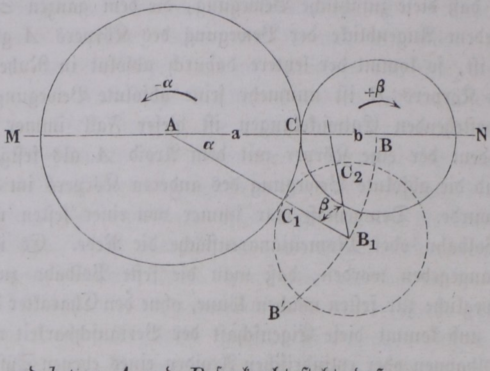
Axoid A ist, festzuhalten. Dies kann man immer dadurch erreichen, daß man beiden Körpern eine und dieselbe zusätzliche Bewegung ertheilt denkt, wodurch an der relativen Bewegung nichts geändert wird. Setzt man nämlich voraus, daß diese zusätzliche Bewegung, die dem ganzen System ertheilt wird, in jedem Augenblicke der Bewegung des Körpers A gleich und entgegengesetzt ist, so kommt der letztere dadurch absolut in Ruhe und die Bewegung des Körpers B ist nunmehr seine absolute Bewegung im Raume. In den vorstehenden Entwickelungen ist dieser Fall immer vorausgesetzt worden, indem der eine Körper mit dem Axoid A als festgehalten angenommen und die absolute Bewegung des anderen Körpers im festen Raume untersucht wurde. Demgemäß war immer von einer festen und einer beweglichen Polbahn oder Momentanaxenfläche die Rede. Es ist auch schon im §. 10 angegeben worden, daß man die feste Polbahn zur beweglichen und die bewegliche zur festen machen könne, ohne den Charakter der Bewegung zu ändern, und kommt diese Eigenschaft der Vertauschbarkeit natürlich nicht bloß den Polbahnen oder cylindrischen Axoiden eines ebenen Systems, sondern überhaupt den Momentanaxenflächen der allgemeinen Bewegung zu.

Da die Axoide, wie bemerkt, die relative Bewegung zweier Körper gegen einander feststellen, so wird die Bewegung des einen Körpers durch sie auch vollständig bestimmt sein, welche Bewegung man auch immer dem anderen Körper beigelegt denkt. Dies ist für die Theorie der Maschinengetriebe von großer Wichtigkeit, denn wenn auch bei den Maschinen stets gewisse Theile in absoluter Ruhe verharren, so sind doch ebenso häufig zwei solche Organe mit einander zu vergleichen, von welchen jedes seine besondere Bewegung hat. Ein Beispiel, welches sehr häufig in der Praxis vorkommt, möge hier zur Erläuterung angeführt sein.

Beispiel. Zwei parallele Axen oder Wellen, A und B, Fig. 26 (a. f. S.), sollen mit einander so in Verbindung gebracht werden (etwa durch zwei Zahnräder oder Frictionsscheiben), daß sie sich beide mit unveränderlicher Winkelgeschwindigkeit $-\alpha$ und beziehungsweise $+\beta$ in entgegengesetztem Sinne drehen, etwa wie die Pfeile bei α und β anzeigen. Um die vorläufig noch unbekannte Momentanaxe oder den Pol für einen beliebigen Augenblick zu bestimmen, sei beiden Wellen zunächst eine zusätzliche Bewegung $+\alpha$ ertheilt, d. h. eine Drehung um die Axe A von der Größe α, welche diese Welle bereits hat, aber von entgegengesetzter Richtung, wodurch offenbar an der relativen Bewegung der beiden Wellen nichts geändert wird. Dadurch wird jede der Wellen zweien Drehungen ausgesetzt, und zwar die Welle A einer Drehung $-\alpha$ und einer solchen $+\alpha$ um die eigene Axe, in Folge deren die Welle A zur Ruhe kommt. Die Welle B erhält ebenfalls eine Drehung $+\alpha$ um die Axe A und eine Drehung $+\beta$ um die Axe B. Diese unendlich §. 27.

kleinen Drehungen geben nach §. 5 vereinigt, eine resultirende Drehung $\alpha + \beta$ um eine Axe C, welche auf der Verbindungslinie AB in solchen

Fig. 26.



Abständen a und b von A und B senkrecht steht, daß

$$a\alpha = b\beta \text{ oder } a : b = \beta : \alpha$$

ist. Da die Bewegung eine constante sein soll, so erkennt man ohne Weiteres, daß die beiden Axoide in dem vorliegenden Falle zwei um A und B mit AC resp. BC beschriebene normale Cylinderflächen sein müssen. Diese Axoide finden, wenn die beiden Wellen durch Frictionsräder in Verbindung gebracht werden, ihre materielle Verwirklichung in den angewandten cylindrischen Frictionsscheiben selbst, und entsprechen beim Zahnradbetrieb den sogenannten Theilrißflächen der Zahnräder. Der gemachten Voraussetzung, welcher zufolge die Welle A vollkommen ohne Bewegung ist, entspricht eine kreiselnde Bewegung der Axe B, vermöge deren dieselbe unter gleichzeitiger Drehung um sich selbst, planetenartig um die Axe A in dem Kreise BB_1 herumgeführt wird, wie solche Bewegungen in der That in der Praxis z. B. bei den Drehvorrichtungen von Krahnen vorkommen. Die gesammte Verdrehung der Axe B beträgt natürlich für jedes Zeitelement die Größe $\alpha + \beta$. Dies zu erkennen, denke man sich eine im absoluten Raume feste Gerade MN, welche mit der Verbindungslinie AB für den betrachteten Anfangszustand der Bewegung übereinstimmt, und stelle man sich ferner vor, es sei mit B ein in die Richtung BA fallender Arm oder Zeiger BC fest verbunden. Wenn dann die Axe B den unendlich kleinen Winkel $BAB_1 = \alpha$ durchlaufen hat, der Pol also von C nach C_1 gelangt ist, so ist der Zeiger in die Lage B_1C_2 gekommen, welche von der Richtung B_1C_1 um den Winkel $C_1B_1C_2 = \beta$ abweicht. Dieser Zeiger bildet daher mit seiner ursprünglichen Lage, d. h. mit der festen Richtung im Raume MN einen Winkel gleich $\alpha + \beta$.

Wenn man nunmehr dem ganzen Systeme, also sowohl der Welle A wie derjenigen B eine zusätzliche Drehung $-\alpha$ um A ertheilt, so verbleibt der Welle B nur noch die Drehung β um die eigene Axe, und man hat daher den ursprünglich zu Grunde gelegten Fall, wonach beide Axen sich nach entgegengesetzten Richtungen um $-\alpha$ resp. $+\beta$ drehen sollen, wie er in der Praxis bei fest gelagerten Wellen so häufig vorkommt. Da die relative Bewegung sich als Differenz ausdrücken läßt, so folgt für die Welle B eine relative Bewegung gegen A, die durch $\beta - (-\alpha) = \beta + \alpha$ ausgedrückt ist, während die Welle A gegen B eine relative Drehung von

$$-\alpha - (+\beta) = -(\alpha + \beta)$$

hat. Die relative Drehung der einen Welle gegen die andere ist also auch in diesem wie überhaupt in jedem Falle gleich $\alpha + \beta$.

Wenn man nun noch dem ganzen Systeme eine Drehung $-\beta$ um B ertheilt, so kommt die Welle B ganz in Ruhe und die Welle A wird in einem durch A gezeichneten, zu B concentrischen Kreise um den Winkel $-\beta$ herumgeführt, während sie sich gleichzeitig um den Winkel $-\alpha$ um die eigene Axe herumdreht. Die ganze Verdrehung der Welle A beträgt jetzt ebenfalls $\alpha + \beta$, aber diese Verdrehung ist derjenigen entgegengesetzt gerichtet, welche der Welle B ertheilt wurde, als A in Ruhe war.

Im Vorstehenden haben sich drei verschiedene Bewegungsformen für den vorliegenden Fall gefunden, welche in der Praxis auch vorkommen. Kinematisch stimmen diese Bewegungen vollkommen mit einander überein, denn es entspricht ihnen dasselbe Polbahnen- oder Axoidenpaar. Der ganze Unterschied der einzelnen Fälle besteht nur darin, daß entweder nur der einen oder nur der anderen, oder beiden Polbahnen eine Bewegung ertheilt wird. Die relative Bewegung hat, wie gezeigt wurde, immer denselben durch $\alpha + \beta$ ausgedrückten Betrag.

Es leuchtet aber sofort ein, daß die Mannigfaltigkeit der verschiedenen Bewegungsformen, dessen das betrachtete Getriebe fähig ist, eine unendlich große sein kann. Denn denkt man sich z. B., daß in jedem Zeittheilchen ∂t, in welchem der Welle B eine Drehung $+\beta$ um sich selbst ertheilt wird, der Welle A zwar eine Drehung, aber nicht im Werthe $-\alpha$, sondern in einem anderen Betrage $-\alpha_1$ gestattet wird, so ist es klar, daß für die Welle B eine Bewegung β_1 resultiren muß von solcher Beschaffenheit, daß die relative Bewegung von B gegen A den constanten Werth $\alpha + \beta$ hat. Es bestimmt sich daher β_1 aus der Gleichung

$$\beta_1 - (-\alpha_1) = \alpha + \beta \text{ zu } \beta_1 = \alpha + \beta - \alpha_1,$$

wofür man $\beta_1 = \alpha + \beta + \alpha_1$ zu setzen hätte, wenn der Welle A eine Drehung im Betrage $+\alpha_1$, also rechts herum, ertheilt würde.

Hieraus ergiebt sich, daß man wegen der ganz willkürlichen Annahme von

α_1 bei dem betrachteten einfachen Mechanismus die Bewegung in unendlich verschiedener Art modificiren kann, daß aber alle diese verschiedenen Bewegungsformen insofern mit einander übereinstimmen, als ihnen dasselbe Axoidenpaar entspricht. Auch die zuletzt betrachteten Abänderungen der Bewegung kommen in der Praxis sehr häufig bei den sogenannten Differentialgetrieben vor, welche weiter unten specieller behandelt werden sollen. Es dürfte aber wohl aus dem Vorhergehenden schon sich ergeben, daß die Prüfung der Bewegung mit Hülfe der zugehörigen Axoide den betreffenden Problemen eine große Durchsichtigkeit und Klarheit verleiht.

§. 28. **Elementenpaare.** Die in dem Vorhergehenden entwickelten Gesetze gelten ganz allgemein von der Bewegung starrer Körper. Da wir es hier aber nur mit den Maschinengetrieben zu thun haben, so werden wir jene Sätze auch nur in Bezug auf diese letzteren zur Anwendung bringen. Gleich im Eingange dieser Einleitung wurde auf den Unterschied aufmerksam gemacht, welcher zwischen einem frei bewegten Körper, z. B. einem geworfenen Steine, und einem Maschinenorgane hinsichtlich der Bewegung besteht. Während die Bahn des freien Körpers lediglich ein Ergebniß der auf ihn von außen wirkenden Kräfte ist (beim Steine der erste Anstoß, die Schwerkraft, der Luftwiderstand), so ist die Bahn eines Maschinentheils hiervon unabhängig. Hier sind es nicht sowohl äußere, sondern gewissermaßen innere Kräfte, welche den Körper dadurch zu einer bestimmten Bewegung zwingen, daß sie ihn an jeder anderen Bewegung hindern, die er etwa in Folge einer äußeren Kraft anzunehmen bestrebt ist. Diese inneren Kräfte beruhen in der Widerstandsfähigkeit derjenigen Materialien, womit man den betreffenden Körper umgiebt. Diese Widerstandskräfte werden nur durch die Einwirkung äußerer Kräfte hervorgerufen und verschwinden mit diesen. Man hat sie daher auch passend als latente Kräfte im Gegensatz zu den äußeren oder sensibeln Kräften bezeichnet.

Der geworfene Stein z. B. bewegt sich in einer gewissen näherungsweise parabolischen Bahn unter Einfluß der auf ihn wirkenden Kräfte, und jede zufällige, neu hinzutretende äußere Kraft, wie ein seitlicher Windstoß, lenkt ihn von der Bahn ab, welche er ohne diese Kraft beschrieben haben würde. Ein Maschinentheil hingegen, z. B. eine Welle, wird durch das sie fest umgreifende Lager gehindert, außer einer Drehung um ihre eigene Axe irgend welche andere Bewegung anzunehmen. Eine äußere Kraft, welche beispielsweise eine Verschiebung der Welle nach einer beliebigen Richtung anstrebt, wird wohl einen Druck der Welle gegen das Lager, aber keine wirkliche Verschiebung hervorrufen können, da das Lager sofort mit einer jenem Drucke gleichen und entgegengesetzten Widerstandskraft reagirt. Es geht hieraus hervor, daß die Maschinenorgane stets paarweise auftreten müssen, wie in dem angezogenen Falle der Zapfen und sein Lager ein solches Paar darstellen. Die Art der Bewegung, welche dem einen oder anderen Theile eines solchen Paars gestattet ist, kann lediglich eine Folge der Form dieser Theile sein, von welcher Form ja die Natur der möglichen Widerstandskräfte abhängig ist. Wenn z. B. der Zapfen, wie hier vorausgesetzt ist, die Gestalt eines an beiden Enden mit vorstehenden Rändern versehenen Cylinders hat, so wird ihm eine Drehung um seine Axe gestattet sein, und er wird eine solche in Folge einer entsprechenden äußeren Kraft annehmen, weil gegen eine drehende Bewegung das passend gearbeitete Lager keine (von der Reibung abgesehen) Widerstandskraft zu äußern vermag. Wäre dagegen der Zapfen prismatisch gebildet, so würde er eine Verschiebung in seiner Axenrichtung annehmen können, während das passend gearbeitete ebenfalls prismatische Lager sich einer Drehung des Zapfens entgegensetzen würde.

Mit Rücksicht hierauf definirt *Reuleaux* eine Maschine als *eine Verbindung widerstandsfähiger Körper, welche so eingerichtet ist, daß mittelst ihrer mechanische Naturkräfte genöthigt werden können, unter bestimmten Bewegungen zu wirken.*

Die Lehre von der Anordnung der Maschinengetriebe wird demnach darauf hinauskommen, die Formen zu bestimmen, welche man den einzelnen Maschinentheilen zu geben hat, um bestimmt vorgeschriebene Bewegungen zu erzielen. Es ist nun im Obigen näher erläutert, wie alle Bewegungen, so verwickelt sie auch sein mögen, sich stets auf gewisse elementare Bewegungen zurückführen lassen, nämlich auf Drehungen und Verschiebungen, oder wenn man will, auf eine schraubenförmige Bewegung (§. 25), welche als die allgemeinste Bewegungsform angesehen werden muß, aus der man die einfache Drehung und die einfache Verschiebung erhält, je nachdem man die Translation beziehungsweise die Rotation der Schraubenbewegung verschwinden läßt.

Diesen drei elementaren Bewegungen, aus denen alle anderen zusammengesetzt werden können, entsprechen nun ebenso viele Grundformen für die betreffenden Maschinentheile oder vielmehr Maschinentheilpaare, und es möge die von *Reuleaux**) gewählte Bezeichnung *Elementenpaare* für die entsprechenden Organe gebraucht werden.

Diese Elementenpaare sind:

1. Das *Drehkörperpaar*, Fig. 27 (a. f. S.), bestehend aus einem massiven Umdrehungskörper A und seiner entsprechenden Umschlußform B, bei denen die Meridianlinie so geformt ist, daß eine Verschiebung in der Axenrichtung CD nicht möglich ist.

---

*) Bei der hier gegebenen kurzen Erläuterung der Grundlehren der Kinematik und bei den späteren Anwendungen ist die von *Reuleaux*, dem Schöpfer der eigentlichen Maschinengetriebelehre, eingeschlagene Methode befolgt.

Die relative Bewegung dieser beiden Theile gegen einander beschränkt sich hierbei auf eine Drehung um die geometrische Axe CD. Will man diese Bewegung nach dem Vorstehenden durch die zugehörigen Momentanaxenflächen oder Axoide kennzeichnen, so findet sich sofort, daß beide Axoide hier in eine Gerade, nämlich die geometrische Axe CD zusammenschrumpfen, da jede Ebene, welche man in irgend einem Elemente der Bahn eines beliebigen Punktes zu dieser Bahn senkrecht errichtet, durch diese Axe CD hindurchgeht. Dieses Elementenpaar findet im Maschinenbau als Zapfen

Fig. 27.

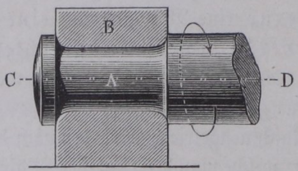
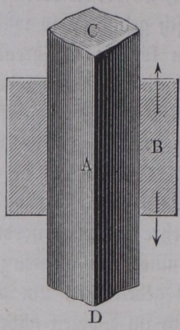


Fig. 28.

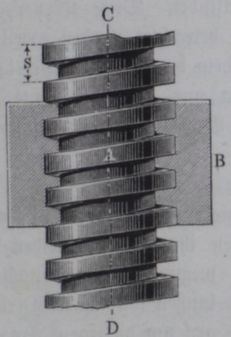


und Lager eine ausgedehnte Anwendung. Dabei ist die Grundform des Zapfens am häufigsten eine cylindrische, seltener conische, doch sind auch andere Umdrehungsformen nicht ausgeschlossen, insbesondere kommt bei Spurzapfen vielfach eine ebene Fläche vor, die als Umdrehungsfläche, erzeugt durch eine zur Axe senkrechte Gerade, angesehen werden kann.

2. Das Prismenpaar, bestehend aus einem massiven geraden Prisma A, Fig. 28, und einem dasselbe umschließenden Hohlprisma B, bei denen als Querschnittsform jede beliebige ebene Figur gewählt werden kann, mit alleiniger Ausnahme des Kreises, welcher letztere eine Drehung nicht ausschließen würde. Wenn trotzdem in der Praxis die Kreisform wegen der bequemen Ausführbarkeit genauer Cylinder sehr allgemein auch für Prismenpaare gewählt wird, z. B. bei Kolbenstangen und Stopfbüchsen, so ist dabei doch immer durch andere Mittel die Drehbarkeit verhindert. Die relative Beweglichkeit der beiden Theile dieses Paares besteht in einer Verschiebbarkeit in der Richtung der Prismenaxe CD. Will man eine solche Verschiebung als eine Drehung um eine in der Unendlichkeit gelegene Axe auffassen, so kann man die unendlich entfernte Gerade in einer Querschnittsebene als stetige Momentanaxe bezeichnen, in welche die beiden Axoide hier ausarten.

3. Das Schraubenpaar, bestehend aus einer cylindrischen Schraube oder Spindel A mit ihrer Mutter B, Fig. 29. Die Größe der Steigung s dieser Schraube ist ebenso wie diejenige der Halbmesser ihres Querschnitts gleichgültig, nur ist wegen der Möglichkeit der Bewegung bei vollkommenem Umschluß der Bedingung zu genügen, daß die Schraubenfläche von jedem zur Schraubenaxe concentrischen Kreiscylinder in einer geometrischen Schraubenlinie von gleichmäßiger Steigung geschnitten werde, und daß alle so erhaltenen Schraubenlinien dieselbe Steigung s haben. Bezeichnet daher r den Halbmesser eines solchen Cylinders, so hat man für den Neigungswinkel α der in ihm liegenden Schraubenlinie die Gleichung:

Fig. 29.



$$tang \alpha = \frac{s}{2 r \pi},$$

woraus folgt, daß bei derselben Schraube der Neigungswinkel α um so kleiner wird, je größer der Abstand r gewählt wird.

Die relative Bewegung der beiden Theile gegen einander besteht in einer Drehung um die geometrische Axe CD und einer gleichzeitigen Verschiebung in der Richtung derselben von solchem Betrage, daß das Verhältniß des Drehungswinkels zur Schiebung stets constant bleibt. Die Axoidenflächen sind hier ebenfalls beide in dieselbe gerade Linie, nämlich in die Schraubenaxe CD zusammengeschrumpft, und man kann sich vorstellen, diese Gerade wälze sich auf sich selbst, indem sie sich gleichzeitig ihrer Länge nach verschiebt.

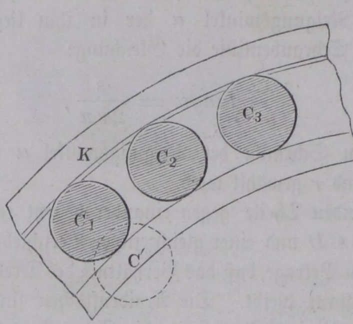
Bei allen diesen Elementenpaaren ist es gleichgültig, welcher der beiden Theile die Bewegung erhält, und es kann nach dem in §. 27 Gesagten auch jeder der Theile eine Bewegung machen, insbesondere kann bei dem Schraubenpaare die Spindel die drehende und die Mutter die schiebende Bewegung erhalten oder umgekehrt. Diese letzteren Fälle kommen in der Praxis fast noch häufiger vor, als diejenigen, wo der eine Theil ganz in Ruhe ist und die gesammte Bewegung von dem anderen Theile vollführt wird.

Höhere Elementenpaare. Die im vorstehenden Paragraphen betrachteten Elementenpaare haben die Eigenthümlichkeit, daß immer das eine Element von dem zugehörigen vollständig umschlossen wird, indem beide Elemente dieselbe Form haben, so zwar, daß das eine den Hohlkörper, das andere den Vollkörper vorstellt. Man nennt daher diese Paare Umschlußpaare. §. 29.

Im Gegensatz hierzu finden sich in dem Maschinenbau noch vielfach andere Elementenpaare vor, bei denen ein solcher Umschluß oder eine Berührung in sämmtlichen Punkten der Oberfläche nicht vorkommt, sondern wo die Berührung immer nur in einzelnen Punkten stattfindet. Diese Körperpaare müssen aber doch als wirkliche Elementenpaare betrachtet werden, weil sie der hierfür geltenden Bedingung genügen, daß jedem der beiden Körper durch die Widerstandsfähigkeit und Form des anderen nur ganz bestimmte Bewegungen gestattet sind, indem alle übrigen Bewegungen ausgeschlossen werden.

Seien z. B. C_1, C_2, C_3 . . ., Fig. 30, verschiedene Stellungen, in welche ein normaler Kreiscylinder bei einer bestimmten ihm zu ertheilenden Bewegung nach und nach gelangen soll, wobei Drehungen um die eigene Axe nicht ausgeschlossen sein mögen. Es läßt sich dann etwa ein canal- oder rinnenförmiges Stück K von solcher Beschaffenheit angeben, daß dasselbe dem Cylinder C nur diese vorausgesetzten Bewegungen gestattet, jede andere Bewegung z. B. in der Richtung $C_1\,C'$ oder in der Axenrichtung des Cylinders jedoch verbietet. Diese beiden Stücke C und K bilden dann nach der obigen Definition ein Elementenpaar, bei welchem K die **Umhüllungsform** für die Bewegung des Cylinders C erhalten hat. Letztere Eigenschaft ist übrigens eine gegenseitige, und man kann auch sagen, der Cylinder C bilde die Umhüllungsform des Canalstücks K, wie man sich durch folgende Betrachtung leicht überzeugt. Denkt man den Cylinder C in Stillstand versetzt, indem man in jedem Augenblicke dem ganzen Systeme, d. h. dem Cylinder C sowohl wie dem Canale K eine Bewegung ertheilt, welche derjenigen gleich und entgegengesetzt ist, die der Cylinder hat, so wird an der relativen Bewegung der beiden Elemente gegen einander nichts geändert. Der Canal nimmt bei dieser Voraussetzung eine gewisse Bewegung gegen den nun ruhenden Cylinder C an, und wenn man den Canal in allen aufeinanderfolgenden Stellungen in dieser Bewegung verzeichnet, so wird man finden, daß alle diese verschiedenen Lagen der Canalcurve den Kreis C

Fig. 30.



in der festen Stellung berühren, mit anderen Worten, daß der Kreis C auch die Umhüllungsform des Canals K ist.

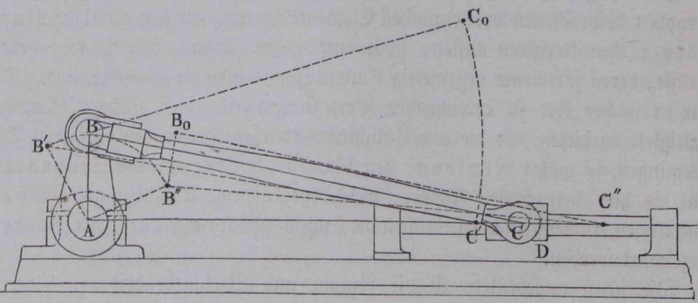
Hieraus geht hervor, daß es in der Praxis außer jenen im vorigen Paragraphen besprochenen drei einfachen Elementenpaaren, die sich als Umschlußkörper charakterisiren lassen, noch eine große Anzahl von Paaren geben müsse, deren Elemente gegenseitig Umhüllungsformen zu einander sind. Da die in solcher Art zu erreichenden Bewegungen eine viel größere Mannigfaltigkeit darbieten, als die den Umschlußpaaren entsprechenden einfachen Bewegungen, so wählt Reuleaux den Namen „höhere Elementenpaare“ für die hier betrachteten Körper, welche gegenseitige Umhüllungsformen an sich tragen, im Gegensatz zu welchen die Umschlußpaare als „niedere Paare“ bezeichnet werden.

Wie schon angedeutet, ist die Anzahl und Verschiedenheit der höheren Paare sehr groß, eine Aufzählung aller derselben würde ebenso unmöglich wie unnöthig sein, die in der Praxis hauptsächlich vorkommenden Repräsentanten werden sich im Laufe der folgenden Untersuchungen von selbst darstellen.

Kinematische Ketten. Aus den in §§. 29 und ~~30~~ 28 besprochenen §. 30.
Elementenpaaren setzen sich alle Maschinengetriebe zusammen, so verwickelt die Bewegungen auch sein mögen, welche durch sie erzielt oder vermittelt werden. Die Art und Weise der Zusammensetzung ist immer eine sehr einfache, und besteht lediglich darin, daß man das eine Element A_1 eines Paares A mit dem einen Elemente B_1 eines anderen Paares B zu einem starren Körper vereinigt, das zweite Element B_2 dieses Paares B ebenso mit dem einen Elemente C_1 eines dritten Paares C verbindet u. s. f. Diese Art der Vereinigung verschiedener Elemente und damit die Bildung der Maschinengetriebe läßt sich am besten an einem Beispiele veranschaulichen. Als solches sei das für die Praxis so wichtige Kurbelgetriebe, Fig. 31 (a.f.S.), gewählt, welches aus einer Vereinigung von drei Drehkörperpaaren oder Cylinderpaaren A, B, C und einem Prismenpaare D besteht. Es seien mit A_1, B_1, C_1 die Vollkörper oder cylindrischen Zapfen und mit A_2, B_2, C_2 die Hohlkörper oder zugehörigen Lager bezeichnet, und ebenso soll D_1 das massive Prisma und D_2 die prismatische Führungshülse bedeuten. Man kann diese vier Elementenpaare in verschiedener Weise so mit einander verbinden, daß immer ein Element eines Paares mit einem Elemente eines anderen Paares zu einem starren Körper vereinigt wird, und möge die bei dem Kurbelgetriebe gewöhnliche Verbindungsart hier vorausgesetzt werden. Demzufolge vereinigt man die Axe oder Welle A_1 mit dem Zapfen B_1 durch einen Körper, welcher die Kurbel genannt wird, und der durch $A_1 B_1$ bezeichnet werde. Ebenso soll das Zapfenlager B_2 mit demjenigen C_2 zu einer steifen Schub-

oder Lenkerstange $B_2 C_2$ verbunden gedacht werden. Der Zapfen C_1 des dritten Cylinderpaares bilde ferner mit der hohlen Büchse D_2 ein Stück

Fig. 31.



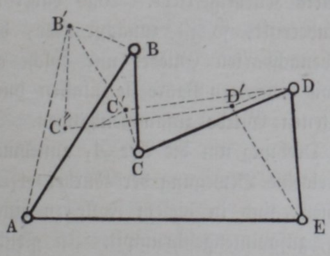
$C_1 D_2$, für welches der Name Kreuzkopf gebräuchlich ist, und endlich sei das massive Prisma D_1 mit dem Lager A_2 der Welle durch einen starren Fundamentrahmen oder die Sohlplatte $A_2 D_1$ verbunden. Auf diese Weise sind die einzelnen Elemente in ähnlicher Art mit einander vereinigt, wie es die Glieder einer in sich zurücklaufenden Kette sind, daher Reuleaux einer derartigen Verbindung von Elementenpaaren auch den Namen einer kinematischen Kette und jedem der erhaltenen Körper, die durch Verbindung zweier Elemente entstanden sind, den Namen eines Gliedes der kinematischen Kette beilegt. Man hat es hier mit den vier Gliedern, Kurbel, Schubstange, Kreuzkopf und Sohlplatte zu thun, und es leuchtet ein, daß man durch die erwähnte Verbindungsart ebenso viele Glieder erlangt hat, als Paare zur Verbindung gekommen sind. Diese letztere Eigenschaft ist übrigens nicht der Ausfluß eines allgemein gültigen Gesetzes, vielmehr sind recht wohl kinematische Ketten denkbar, und wie in der Folge sich zeigen wird, häufig angewandt, bei denen ein Glied mehr als zwei Elemente verschiedener Paare mit einander verknüpft. Daß die Verbindung der hier vorliegenden vier Paare auch in anderer Art geschehen kann, davon überzeugt man sich sehr leicht, denn es hätte z. B. auch die Axe A_1 mit dem Lager B_2 verbunden werden können, und der Zapfen B_1 mit dem Lager C_2 sowohl wie mit dem Zapfen C_1 u. s. f., wie denn derartige Anwendungen in der Praxis vorkommen, wenn auch weniger häufig, als die oben vorausgesetzte.

Wie nun aber auch die Verbindung geschehe, so verbleibt den einzelnen Paaren in jedem Falle der allgemeine Charakter der Relativbewegung, welcher den Elementen des Paares eigenthümlich ist, da ja niemals zwei Elemente desselben Paares mit einander starr verbunden werden. Der Zapfen eines Cylinderpaares behält auch nach der Verbindung die Möglichkeit einer relativen Verdrehung gegen sein Lager und einer prismatischen Führungshülse verbleibt nach wie vor die Eigenschaft einer relativen Verschiebbarkeit gegen das zugehörige Prisma in dessen Axenrichtung.

Wenn nun auch durch die vollzogene Verbindung in der Natur der den einzelnen Paaren belassenen Bewegungen nichts geändert wird, so wird doch der Betrag dieser Bewegungen dadurch bestimmten Beschränkungen unterworfen und die Bewegung in einem Paare von denjenigen der benachbarten Paare in gewissem Maße abhängig gemacht. Es ist z. B. klar, daß während das Cylinderpaar C in vorliegendem Falle vor der Verbindung eine relative Verdrehung der beiden Elemente C_1 und C_2 im Betrage einer vollen Umdrehung gestattet, diese Drehung nach der Vereinigung der Theile zum Kurbelgetriebe nur noch um einen bestimmten Winkel stattfinden kann. Ebenso ersieht man, daß die Verschiebung der Hülse D_2 auf dem Prisma D_1 in dem Kurbelgetriebe auf ein ganz bestimmtes Maß, nämlich die doppelte Kurbellänge $A_1 B_1$ beschränkt, während in einem Prismenpaare an sich die Verschiebung innerhalb der Prismenlänge beliebig ist.

Wenn man in einer solchen Verbindung von Elementenpaaren, wie z. B. in Fig. 31, einem Gliede, etwa der Kurbel $A_1 B_1$, eine relative Bewegung gegen das benachbarte Glied $A_2 D_1$ ertheilt, so werden im Allgemeinen auch die übrigen Glieder zu Bewegungen veranlaßt werden. Hierbei sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem durch eine gewisse Bewegung eines Gliedes gegen ein Nachbarglied die sämmtlichen übrigen Glieder zu ganz bestimmten Bewegungen veranlaßt werden, oder nicht. Das erstere ist bei dem hier betrachteten Kurbelbetriebe offenbar der Fall, denn giebt man z. B. der Kurbel irgend welche Bewegung von AB in die Lage AB', so ist die zugehörige Verschiebung von C nach C' vollkommen bestimmt, da ja zur Verzeichnung des Dreiecks $AB'C'$ die Bestimmungsstücke bekannt sind. Anders verhält sich in dieser Hinsicht z. B. die in Fig. 32 skizzirte Verbindung der fünf Cylinderpaare $ABCDE$, denn wenn man hier dem Gliede AB gegen AE eine Bewegung ertheilt, etwa von AB nach AB', so ist dadurch die Lage von C und D noch vollkommen unbestimmt, da die zur Feststellung des Fünfecks $ABCDE$ gegebenen Bestimmungsstücke, die fünf Seiten und ein Winkel EAB' nicht ausreichen. Es kann z. B. das Paar C ebensowohl nach C' wie nach C'' gelangen, und D in seiner ursprünglichen Lage D verharren oder nach D' geführt werden. Da es bei Ausführung der Maschinengetriebe darauf ankommt, ganz bestimmte Bewegungen der einzelnen Organe zu erzielen, so ergiebt

Fig. 32.

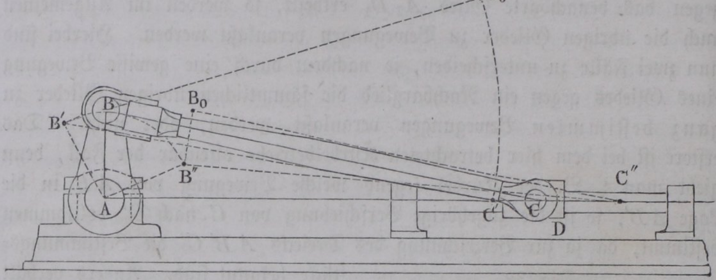


sich also, daß es sich dabei nur um solche kinematische Ketten handeln kann, bei welchen eine Bewegung eines Gliedes gegen ein benachbartes ganz bestimmte Bewegungen der übrigen Glieder zur Folge hat. Eine solche Kette heißt eine zwangläufig geschlossene oder schlechtweg eine geschlossene Kette.

Wenn man in einer zwangläufigen kinematischen Kette, d. h. einer Verbindung von Elementenpaaren wie die oben besprochene, Fig. 31, ein gewisses Glied festhält, z. B. den Fundamentrahmen $A_2 D_1$, so werden aus den relativen Bewegungen der einzelnen Glieder, z. B. der Kurbel $A_1 B_1$, der Lenkerstange 2c. absolute Bewegungen in dem mit dem festgehaltenen Gliede verbunden gedachten Raume. Eine solche geschlossene kinematische Kette, von welcher ein Glied festgehalten wird, ist nach Reuleaux ein Maschinengetriebe oder ein Mechanismus, und es wird daraus, der oben gegebenen Definition entsprechend, eine Maschine, wenn auf ein Glied desselben eine äußere Kraft in solcher Weise wirkt, daß sie eine Bewegung desselben hervorbringt.

§. 31. **Getriebebildung aus der kinematischen Kette.** Denkt man sich das Glied $A_2 D_1$ der kinematischen Kette Fig. 33 festgestellt, so erhält

Fig. 33.



man das bekannte und viel verbreitete Kurbelgetriebe. Was dabei die Bewegungen der einzelnen Glieder anbetrifft, so ist zunächst klar, daß die dem festgestellten Gliede $A_2 D_1$ benachbarten Glieder nur solche absolute Bewegungen annehmen können, wie diejenigen Paare sie zulassen, durch welche jene Glieder mit dem festgehaltenen Gliede zusammenhängen. So kann z. B. die Kurbel $A_1 B_1$ nur eine Drehung um die Axe A_1 annehmen, und die beiden Polbahnen, welche die relative Bewegung der Kurbel $A_1 B_1$ gegen die Grundplatte $A_2 D_1$ bestimmen, sind in diesem Falle zu einem Punkte, dem Axenpunkte der Welle A_1, zusammengeschrumpft. In gleicher Art erkennt man, daß die Bewegung des Kreuzkopfes $C_1 D_2$ lediglich eine geradlinige Schiebung sein kann, wie das Prismenpaar D sie gestattet, in welchem der Kreuzkopf $C_1 D_2$ mit dem festgehaltenen Gliede $A_2 D_1$ zusammenhängt. Die Bewegung eines Gliedes, welches wie die Lenkerstange $B_2 C_2$ nicht direct mit dem festgehaltenen Gliede verbunden ist, sondern mit demselben erst durch Zwischenglieder zusammenhängt, ist von einer mehr zusammengesetzten Beschaffenheit, denn diese Bewegung des Gliedes $B_2 C_2$ hängt ebensowohl von der Natur der Paare B und C ab, durch welche es mit den benachbarten Gliedern verbunden ist, wie auch von der Bewegung dieser Glieder selbst, d. h. also von der Art der Paare A und D, welche diese Zwischenglieder mit dem festgehaltenen verbinden, im vorliegenden Falle also von allen vier Paaren. Will man die absolute Bewegung eines solchen Gliedes $B_2 C_2$, d. h. also seine relative Bewegung gegen das festgehaltene $A_2 D_1$ kennen lernen, so hat man nur nöthig, in der in §. 8 angegebenen Weise die Polbahnen für die Bewegung zu zeichnen. Hierbei erhält man zwei Polbahnen, eine feste P_1, mit dem Gliede $A_2 D_1$, und eine bewegliche P_2, mit der Lenkerstange $B_2 C_2$ verbundene, welche letztere auf der ersteren rollend zu denken ist.

Wenn nun auch, wie schon bemerkt, die Bewegung der Lenkerstange $B_2 C_2$ von der Natur sämmtlicher Paare A, B, C, D abhängig ist, so läßt sich doch zeigen, daß man diese Bewegung immer aus nur zwei Bewegungen zusammensetzen kann, von denen die eine dem Paare entspricht, welches die Stange mit einem Nachbargliede verbindet, während die andere Bewegung demjenigen Paare eigenthümlich ist, welches dieses besagte Nachbarglied mit dem festgehaltenen verknüpft. Man kann nämlich die Bewegung der Stange $B C$ ebensowohl zusammengesetzt denken aus einer Drehung um B in Verbindung mit einer gewissen Drehung um A, wie auch andererseits aus einer Drehung um C in Verbindung mit einer Schiebung entlang dem Prisma D.

Um dies zu erkennen, hat man sich nur vorzustellen, daß dem ganzen Systeme eine zusätzliche Bewegung ertheilt werde, welche der Umdrehungsbewegung der Kurbel $A B$ um A genau gleich und entgegengesetzt ist, wodurch an der relativen Bewegung der einzelnen Glieder nichts geändert wird. Man erhält dadurch aber offenbar eine veränderte Anordnung des Getriebes, indem nunmehr die Kurbel $A B$ in Stillstand versetzt wird, während die vorher festgehaltene Grundplatte $A D$ die zusätzliche Bewegung um A annimmt. Auch die absolute Bewegung der beiden anderen Glieder $B C$ und $C D$ ist natürlich durch die gedachte zusätzliche Bewegung verändert worden, und zwar hat die Stange $B C$ jetzt nur noch eine Rotationsbewegung um B. Diese Stange hatte aber im vorher angenommenen Falle, wo $A D$ das festgehaltene Glied war, eine Bewegung, wie sie dem Abrollen der Polbahn P_2 auf der festen Polbahn P_1 entspricht, und da nun diese letztere Bewegung durch Zusatz einer Drehung um A auf eine Drehung um B reducirt worden ist, so geht daraus hervor, daß die absolute Bewegung der Stange $B C$, wenn $A D$ festgehalten wird, sich aus zwei Drehungen um A und B zusammensetzen mußte. Man kann sich dieses Verhalten auch leicht durch die Figur veranschaulichen. Denkt man nämlich die Kurbel aus ihrer Lage $B A$ in eine andere Lage $A B'$ gebracht, so gelangt hierdurch C nach C', also die Stange BC in die Lage $B'C'$. In dieselbe Lage wird die Stange BC aber auch übergeführt, wenn man ihr zuerst eine Drehung um A in demselben Betrage BAB' wie der Kurbel ertheilt, z. B. indem man die Stange BC bei B unwandelbar mit der Kurbel verbunden denkt, wodurch BC in die Lage $B'C_0$ geführt wird, und darauf eine Drehung der Stange um B aus der Lage $B'C_0$ in diejenige $B'C'$ folgen läßt.

Wenn man andererseits dem ganzen Systeme, in welchem zunächst wieder der Rahmen AD festgehalten gedacht wird, eine zusätzliche Bewegung ertheilt, welche der Verschiebung des Kreuzkopfs CD gleich und entgegengesetzt ist, so wird dadurch der Kreuzkopf zum Stillstande gebracht, während der Rahmen AD die gedachte Verschiebung annimmt. Die Bewegung der Lenkerstange BC reducirt sich jetzt auf eine Drehung derselben um C und man kann daraus in ähnlicher Weise wie vorher schließen, daß die Bewegung der Lenkerstange bei festgehaltenem Rahmen AD auch aus einer Drehung um C und einer Verschiebung entlang dem Prisma D zusammengesetzt gedacht werden kann. Auch diese Eigenschaft der Bewegung von BC läßt sich aus der Figur erkennen. Dazu denke man sich die Kurbel AB in die Lage AB'' gebracht, wobei C nach C'', also BC in die neue Lage $B''C''$ gelangt. Dann ersieht man, daß die Stange aus BC auch in dieselbe Lage $B''C''$ übergeführt wird durch eine Verschiebung im Betrage CC'', wodurch die Stange nach B_0C'' gelangt, und eine darauf folgende Drehung um C'', wodurch B_0 nach B'' fällt.

Es ist daher die oben angegebene Behauptung nachgewiesen, wonach die Bewegung irgend eines Gliedes (BC) sich zusammensetzt aus einer Bewegung, wie sie eines der Paare (B oder C) gestattet, die durch das Glied verbunden sind, und einer zweiten Bewegung, welche diesem Paare selbst vermöge seiner Verbindung mit dem festen Gliede (bei A resp. D) zugelassen ist.

Faßt man einen der im Vorstehenden betrachteten Fälle ins Auge, etwa denjenigen, wo die Kurbel durch Einführung einer zusätzlichen Drehung des ganzen Systems um A in Stillstand versetzt ist, so haben in diesem Getriebe die beiden der Kurbel benachbarten Glieder BC und AD nur einfache Drehbewegungen um B resp. A, und ihre Polbahnen reduciren sich auf diese Axen. Das vierte Glied CD dagegen hat jetzt eine zusammengesetzte Bewegung, die man nach dem obigen Gesetze als aus einer Drehung um C verbunden mit einer solchen um B oder aus einer Schiebung entlang D verbunden mit einer Drehung um A zusammengesetzt ansehen kann. Es läßt sich auch diese Bewegung wie vordem diejenige der Lenkerstange mit Hülfe der Polbahnen als eine rollende auffassen. Man erhält hier durch die entsprechende in §. 8 angegebene Construction zwei weitere Polbahnen, und zwar eine mit der festgehaltenen Kurbel verbundene P_3, auf welcher die andere mit dem Kreuzkopfe verbundene P_4 sich abwälzt.

Wollte man dagegen, von der ursprünglichen Voraussetzung des festgehaltenen Rahmens AD ausgehend, durch eine dem ganzen Systeme ertheilte zusätzliche Schiebung parallel dem Prisma D den Kreuzkopf CD in Stillstand versetzen, so würde man bei der Construction der Polbahnen, welche nunmehr die Bewegung der Kurbel gegen den festgehaltenen Kreuzkopf bestimmen, offenbar zu denselben Curven P_3 und P_4 wie vorhin gelangen, nur daß jetzt die dem Kreuzkopfe zugehörige Polbahn P_4 als die feste und P_3 als die bewegliche anzusehen ist. Ein ganz analoges Verhalten findet natürlich auch zwischen den beiden nicht benachbarten Gliedern AD und BC statt; wenn man nämlich die Lenkerstange BC in Stillstand versetzt, so erhält man die Bewegung des Rahmens AD gegen die Lenkerstange durch eben dieselben Polbahnen P_1 und P_2 dargestellt, welche schon oben bei festgehaltenem Rahmen AD gefunden wurden, wobei jetzt aber die der Lenkerstange zugehörige Polbahn P_2 die feste und P_1 die bewegliche ist.

Aus den vorstehenden Ermittelungen hat sich ergeben, wie man aus derselben kinematischen Kette durch Feststellung ihrer verschiedenen Glieder zu ebenso vielen verschiedenen Getrieben Veranlassung geben kann, als die Kette Glieder hat. So verschieden oftmals auch die Bewegungen dieser einzelnen Getriebe erscheinen, so liegt doch allen dasselbe Gesetz der relativen Bewegungen zu Grunde, das durch dieselben Polbahnen ausgedrückt ist. Dieses für die Maschinenconstruction äußerst wichtige Gesetz der Getriebebildung durch Feststellung verschiedener Glieder einer kinematischen Kette ist zuerst von Reuleaux gefunden worden.

Literatur. Die Kinematik als besondere Wissenschaft der Bewegung ohne Berücksichtigung der Kräfte ist zuerst von Ampère eingeführt worden, vergl. dessen Essai sur la Philosophie des sciences 1830. Das Momentancentrum wurde zuerst von Descartes (1724) bei der Erzeugung der Cycloide erkannt und von Johann Bernouilli für die allgemeine Bewegung eines ebenen Systems gefunden (1742). Von großer Bedeutung für die theoretische Kinematik sind die Arbeiten von Chasles (Comptes rend. de l'Académie T. XVI, 1843 und T. LI 1860. Vergl. auch dessen Aperçu historique, deutsch von Sohnke, Halle 1839), sowie Poinsot, Théorie de la rotation des corps und Théorie des cônes circulaires. Ausführlich über Kinematik handeln die Werke: Laboulaye, Cinématique, 1849, Girault, Elémens de géometrie appl. à la transformation du mouvement, 1858, Resal, Traité de cinématique pure, 1862, Belanger, Traité de cinématique pure 1864, und Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte 1870. Die Arbeit von Bresse, welcher die beiden nach ihm benannten Kreise in §. 15 zuerst fand, siehe in Journal de l'école polytechnique T. XX, 1853. Ebenso sind die Arbeiten von Chelini, Gilbert, Aronhold u. A. von Bedeutung. Ein für die Anwendung vorzügliches inhaltreiches Werk ist das von Willis, Principles of mecanism, 1841, und verdient auch Giulio's Cinematica applicata besondere Erwähnung. Der „Theoretischen Kinematik von Reuleaux, 1875," ist schon mehrfach gedacht worden.