wohl mit besonderen Tragwänden, welche die in einzelnen Punkten wirkenden Lasten auf eine größere Länge der Kette vertheilen. Diese Träger sind bei der gänzlich belasteten, sowie bei der vollständig leeren Brücke gar nicht beansprucht, indem für diese Belastungszustände die Gewichte durch die Hängestangen direct auf die Ketten übertragen werden, und die Träger sind daher nur auf die einseitigen Belastungen zu berechnen. Auch pflegt man wohl die Brücken mit Zugseilen zu versehen, welche von der Brückenbahn nach dem Boden oder den Brückenpfeilern herabgehen, wie z. B. bei der Niagarabrücke; ferner wendet man wohl unterhalb eine Gegenkette an, welche durch aufwärtsgehende Zugstangen mit der Brückenbahn verbunden wird. Desgleichen vergrößert man die Steifigkeit einer Hängebrücke dadurch, daß man zwei Tragketten über einander hängt und dieselben unter einander verstrebt, wie einen Fachwerksträger.

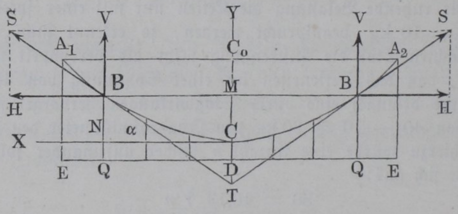
§. 71. **Ketten von gleichem Widerstande.** Da die Spannung der Tragketten einer Brücke von unten nach oben allmälig zunimmt, so sollte man auch den Querschnitt dieser Ketten vom Scheitel nach den Aufhängepunkten hin entsprechend größer werden lassen. Gewöhnlich sucht man dieser Forderung annähernd dadurch zu genügen, daß man entweder die Anzahl oder die Dicke der Schienen in den einzelnen Kettengliedern nach den Aufhängepunkten hin vergrößert. Streng genommen hätte man den Ketten die Form von Körpern gleichen Widerstandes zu geben, für welche die Forderung zu stellen ist, daß für jeden Punkt, dessen Querschnitt F und in welchem die Spannung S ist, die Bedingung:

$$\frac{S}{F} = s = const.$$

gilt, wenn wieder s die zulässige Materialspannung pro Flächeneinheit bedeutet.

Es seien $CN = x$ und $CM = y$, Fig. 363, die Ordinaten des Punktes B des Kettenbogens, dessen Tangente BT den Winkel α mit der

Fig. 363.



horizontalen X Axe bildet, so hat man, unter F den Querschnitt der Kette daselbst und unter γ das specifische Gewicht derselben verstanden, das Gewicht eines Bogenelementes ∂b durch $F \partial b . \gamma$ und daher das Gewicht des Bogenstückes CB durch:

$$G = \gamma \int F \partial b = \frac{\gamma}{s} \int S \partial b$$

ausgedrückt.

Wenn daher das Gewicht der Brückenbahn pro laufenden Meter durch q bezeichnet wird, so ist die Verticalkraft in B:

$$V = \frac{\gamma}{s} \int S \partial b + q x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

oder, da

$$S = \frac{H}{\cos \alpha} = H \frac{\partial b}{\partial x}$$

ist, wenn H den constanten Horizontalzug bedeutet, so folgt auch:

$$V = \frac{\gamma H}{s} \int \frac{\partial b^2}{\partial x} + q x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

woraus ferner

$$\frac{V}{H} = tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\gamma}{s} \int \frac{\partial b^2}{\partial x} + \frac{q x}{H}$$

sich ergiebt. Durch Differentiiren erhält man:

$$\partial \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\gamma}{s} \frac{\partial b^2}{\partial x} + \frac{q}{H} \partial x = \frac{\gamma}{s} \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial x} + \frac{q}{H} \partial x$$

$$= \frac{\gamma}{s} \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] \partial x + \frac{q}{H} \partial x$$

und daher

$$\partial x = \frac{\partial \frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\gamma}{s} + \frac{q}{H} + \frac{\gamma}{s} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{\partial\, tg\,\alpha}{\frac{\gamma}{s} + \frac{q}{H} + \frac{\gamma}{s} tg^2 \alpha}.$$

Da im Scheitel C die Spannung gleich H ist, so kann man, wenn F_0 den Querschnitt der Kette daselbst bedeutet, $H = F_0 s$ setzen, und erhält, wenn man noch

$$\frac{q}{F_0} = \gamma_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

einführt:

$$\partial x = \frac{s \,.\, \partial\, tg\,\alpha}{\gamma + \gamma_1 + \gamma\, tg^2 \alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

welcher Ausdruck zu integriren ist, um die Gleichung für die Kettenbrückenlinie zu finden. Es kann bemerkt werden, daß der Gleichung $q = F_0 \gamma_1$ zufolge unter γ_1 das specifische Gewicht desjenigen Körpers zu denken ist, welcher bei einer Grundfläche F_0 gleich dem Kettenquerschnitte im Scheitel und bei einer Höhe von 1 m ein Gewicht hat, das gerade gleich der Belastung q von 1 laufenden Meter Brücke ist. Um obige Gleichung zu integriren, schreibt man sie:

$$\partial x = \frac{s . \partial \, tg\, \alpha}{(\gamma + \gamma_1)\left(1 + \frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} tg^2 \alpha\right)}$$

$$= \frac{s . \partial \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}} tg\, \alpha}{\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}\left[1 + \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}} tg\, \alpha\right)^2\right]}$$

$$= \frac{s}{\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}} \frac{\partial u}{1 + u^2},$$

wenn der Kürze wegen $\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}} tg\, \alpha = u$ gesetzt wird. Da nun aber bekanntlich:

$$\int \frac{\partial u}{1 + u^2} = arc.\, tg\, u$$

ist, so hat man im vorliegenden Falle:

$$x = \frac{s}{\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}} arc.\, tg \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}} tg\, \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

sowie umgekehrt:

$$tg \frac{x\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}} tg\, \alpha,$$

d. i.:

$$tg\, \alpha = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}} tg \frac{x\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} = \frac{\partial y}{\partial x} \quad . \quad . \quad (33)$$

Die Integrationsconstante ist Null, weil für $x = 0$ auch $\alpha = 0$ ist. Diese Gleichung:

$$\partial y = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}} tg \frac{x\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} \partial x$$

liefert durch nochmalige Integration vermöge der bekannten Integralformel:

$$\int tg\, w\, \partial w = -\, log\, nat\, cos\, w = ln \frac{1}{cos\, w} = ln\, sec\, w,$$

$$y = \frac{s}{\gamma} log\, nat\, sec \frac{x\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

wobei ebenfalls die Constante Null ist, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muß, was der Fall ist, da $sec\, 0 = 1$ und $log\, nat\, 1 = 0$ ist. Diese

Gleichung (34) kann dazu dienen, für jedes x das zugehörige y zu ermitteln, wenn $\gamma_1 = \frac{q}{F_0}$ gegeben ist.

Sind die Coordinaten x und y gegeben, so kann man γ_1 wie folgt bestimmen. Es ist, unter e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems verstanden, nach (34):

$$sec\, \frac{x\sqrt{\gamma(\gamma+\gamma_1)}}{s} = e^{\frac{\gamma}{s}y}.$$

Setzt man den Bogen:

$$\frac{x\sqrt{\gamma(\gamma+\gamma_1)}}{s} = \psi, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35)$$

also

$$log\ nat\ sec\ \psi = \frac{\gamma}{s}\, y,$$

so folgt

$$\gamma + \gamma_1 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{s\,\psi}{x}\right)^2,$$

und daher

$$\gamma_1 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{s\,\psi}{x}\right)^2 - \gamma = \left[\left(\frac{s\,\psi}{\gamma\, x}\right)^2 - 1\right]\gamma \quad \ldots \quad (36)$$

Hieraus bestimmt sich weiter der Querschnitt F_0 der Kette im Scheitel:

$$F_0 = \frac{q}{\gamma_1} = \frac{q}{\gamma\left[\left(\frac{s\,\psi}{\gamma\, x}\right)^2 - 1\right]} \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

und die Horizontalspannung:

$$H = F_0\, s = \frac{q\, s}{\gamma\left[\left(\frac{s\,\psi}{\gamma\, x}\right)^2 - 1\right]} \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Ferner hat man bekanntlich für jeden Punkt der Kette die Verticalspannung:

$$V = H\, tg\, \alpha,$$

die Tangentialspannung:

$$S = \frac{H}{cos\ \alpha}$$

und den Querschnitt:

$$F = \frac{S}{s} = \frac{H}{s\ cos\ \alpha} = \frac{F_0}{cos\ \alpha},$$

wobei sich α einfach nach (33) und (35) durch

$$tg\, \alpha = \sqrt{\frac{\gamma+\gamma_1}{\gamma}}\ tg\, \psi \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

bestimmen läßt.

Das Gewicht $G = \frac{\gamma}{s} \int S \partial b$ des Kettenstückes CB ist endlich gefunden durch (28) zu:

$$G = V - qx = H tg\alpha - qx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Die Aufgabe wird durch die vorstehenden Formeln insofern noch nicht genau gelöst, als bei der Entwickelung derselben auf das veränderliche Gewicht der Hängestangen keine Rücksicht genommen worden ist. Es fällt indessen dieses Gewicht klein genug aus, um auch hier eine mittlere Hängestangenlänge $\lambda = \frac{y}{3}$ einführen und folglich auch das Gewicht $G_1 = F_1 \lambda \gamma$ setzen zu können.

Nun ist aber der Querschnitt sämmtlicher Hängestangen an CB zusammen genommen durch:

$$F_1 = \frac{q\,x}{s_1 - \lambda\gamma} \text{ annähernd } \frac{q\,x}{s_1}$$

gegeben, daher folgt das Gewicht derselben:

$$G_1 = \frac{\gamma\,\lambda}{s_1}\, q\,x,$$

und man hat, um es zu berücksichtigen, in der vorstehenden Rechnung überall anstatt $q\,x$ den Werth:

$$\left(1 + \frac{\gamma\,\lambda}{s_1}\right) q\,x$$

einzuführen.

Anmerkung. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe mit Rücksicht auf das veränderliche Gewicht der Hängestangen ist zu finden in „The Mechanical Principles of Engineering and Architecture by Moseley, London 1843". S. auch in Bd. I des Civilingenieurs die Abhandlung von Dr. O. Schlömilch über Kettenbrücken von durchaus gleicher Sicherheit.

Beispiel. Für die Kettenbrücke in §. 69 erhält man, wenn in

$$log\,nat\,sec\,\psi = \frac{\gamma}{s}\,y; \;\; \gamma = 0{,}0000076$$

$s = 10$, und für y die ganze Pfeilhöhe $h = 4000$ mm eingesetzt wird:

$$log\,nat\,sec\,\psi = \frac{0{,}0000076}{10}\,4000 = 0{,}00304$$

oder

$$log\,cos\,\psi = log\,\frac{1}{sec\,\psi} = 0 - \frac{0{,}00304}{2{,}302586} = -\,0{,}001320$$

$$= 9{,}998680 - 10;$$

daher

$$\psi^0 = 4^0\,27'\,30'' = 4{,}4584^0$$

und

$$\psi = \frac{2 \,.\, 3{,}1416 \,.\, 4{,}4584}{360} = 0{,}077814,$$

so daß nun nach (36), wenn man darin für x die halbe Spannweite 20 m = 20 000 mm einsetzt,

$$\gamma_1 = \left[\left(\frac{10 \,.\, 0{,}077814}{0{,}0000076 \,.\, 20\,000}\right)^2 - 1\right] 0{,}0000076 = 25{,}204 \,.\, 0{,}0000076$$
$$= 0{,}0001916 \text{ kg}$$

sich ergiebt.

Da die Belastung einer halben Kette 44 000 kg und das Gewicht der zugehörigen Hängestäbe 223 kg beträgt, so hat man die Belastung pro 1 mm der Länge:

$$q = \frac{44\,223}{20\,000} = 2{,}2112 \text{ kg},$$

und es ist der erforderliche Querschnitt der Kette im Scheitel:

$$F_0 = \frac{q}{\gamma_1} = \frac{2{,}2112}{0{,}0001916} = 11\,540 \text{ qmm}.$$

Für den Aufhängewinkel α_1 hat man nach (39):

$$tg\,\alpha_1 = \sqrt{\frac{0{,}0000076 + 0{,}0001916}{0{,}0000076}}\; tg\, 4^0\, 27'\, 30'' = 5{,}11 \,.\, 0{,}07797$$
$$= 0{,}3984 = tg\, 21^0\, 43'.$$

Der Querschnitt der Kette am Aufhängepunkte ist nun:

$$F_1 = \frac{F_0}{\cos\alpha_1} = \frac{11\,540}{0{,}9290} = 12\,422 \text{ qmm}.$$

Die Horizontalspannung der Kette folgt:

$$H = F_0 s = 115\,400 \text{ kg},$$

und die Verticalspannung im Aufhängepunkte:

$$V = H\, tg\,\alpha_1 = 115\,400 \,.\, 0{,}3984 = 45\,975 \text{ kg},$$

daher ist das Gewicht einer Kettenhälfte:

$$G = V - q\,l = 45\,975 - 44\,223 = 1752 \text{ kg}.$$

Bei constantem Querschnitte ergab sich $G = 1940$, folglich ist die Ersparniß an Material für jede Kette:

$$2\,(1940 - 1752) = 376 \text{ kg}$$

gleich ca. 10 Proc. des Kettengewichtes.

Pfeiler und Widerlager. Von besonderer Wichtigkeit ist noch die Bestimmung der Dimensionen der Pfeiler und der Widerlagsmauern einer Hängebrücke. Sind S_1 und S_2 die Spannungen der über einen Pfeiler $ABCD$ weggehenden Ketten, Fig. 364 (a. f. S.), und α_1 und α_2 ihre Neigungswinkel, so hat man den Verticaldruck auf den Pfeiler: §. 72.

$$V = V_1 + V_2 = S_1 \sin\alpha_1 + S_2 \sin\alpha_2,$$