

$$\partial y = 2nx \partial x \text{ und } \partial s = (1 + 2n^2x^2) \partial x,$$

so daß man hiermit

$$S = \frac{V2nx + H}{1 + 2n^2x^2}$$

oder annähernd

$$S = (V2nx + H) (1 - 2n^2x^2) \dots \dots (35)$$

erhält.

Setzt man zunächst wieder voraus, der Bogenträger sei wie ein gerader Balken mit seinen Enden verschieblich auf horizontale Stützflächen gesetzt, so daß $H = 0$ ist, so findet man bei einer Belastung des Scheitels C durch $2K$, also mit $V = -K$, die Spannung

$$S = -K2nx(1 - 2n^2x^2).$$

Die Spannung ist daher in diesem Falle im Scheitel gleich Null und wächst mit x , so daß sie an den Enden für $x = l$ den größten Werth

$$S_{max} = -K2nl(1 - 2n^2l^2) = -2K \frac{h}{l} \left(1 - 2 \frac{h^2}{l^2}\right)$$

annimmt.

Wäre unter derselben Voraussetzung verschieblicher Auflager der Träger gleichmäßig mit q pro Längeneinheit der Horizontalprojection belastet, so wäre $V = -qx$, und daher die Spannung

$$S = -2qn^2x^2(1 - 2n^2x^2),$$

oder angenähert

$$S = -2qn^2x^2,$$

da man den Werth $2n^2x^2 = 2 \frac{h^2x^2}{l^4}$ als klein gegen 1 vernachlässigen kann. Auch hierfür ist die Spannung im Scheitel gleich Null, und sie erreicht ihren größten Werth an den Enden zu

$$S_{max} = -2qn^2l^2 = -2qh.$$

Nimmt man dagegen an, daß der Bogen sich in A_1 und A_2 gegen feste Widerlager stemme, so hat man bei einer Belastung des Scheitels durch $2K$ die Verticalkraft $V = -K$ und nach (23) die Horizontalkraft

$$H = -K \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right),$$

womit man aus (35)

$$S = \left[-K2nx - K \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right) \right] (1 - 2n^2x^2)$$

erhält.

Dies schreibt sich, unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von n :

$$\begin{aligned}
 S &= K \left(-2nx - \frac{25l}{32h} + \frac{h}{28l} + \frac{25}{16} \frac{l n^2}{h} x^2 \right) \\
 &= K \left(\frac{25}{16} \frac{h}{l^3} x^2 - 2 \frac{h}{l^2} x - \frac{25l}{32h} + \frac{h}{28l} \right) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (36)
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird mit:

$$\frac{25}{16} \frac{h}{l^3} 2x = 2 \frac{h}{l^2}, \text{ d. h. mit } x = \frac{16}{25} l = 0,64 l$$

ein Maximum von dem Betrage:

$$S_{max} = -K \left(\frac{25l}{32h} + \frac{423h}{700l} \right).$$

Wenn dieser Bogen gleichmäßig belastet ist, so hat man:

$$V = -qx,$$

und nach (24):

$$H = -q \frac{l^2}{2h},$$

so daß man hiermit die Druckkraft:

$$S = \left(-qx \cdot 2nx - q \frac{l^2}{2h} \right) (1 - 2n^2 x^2) = -q \left(\frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right) \quad (37)$$

erhält, und wenn dieser Bogen noch außerdem das Gewicht $2K$ im Scheitel trägt, ist:

$$S = K \left(\frac{25}{16} \frac{h}{l^3} x^2 - 2 \frac{h}{l^2} x - \frac{25l}{32h} + \frac{h}{28l} \right) - q \left(\frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right) \quad (38)$$

Durch Differentiation erhält man hieraus denjenigen Werth von x , für welchen S zu einem Maximum wird, aus:

$$K \left(\frac{25}{8} \frac{h}{l^3} x - 2 \frac{h}{l^2} \right) - 2q \frac{h}{l^2} x = 0$$

zu

$$x = \frac{16K}{25K - 16ql} l.$$

Dieser Ausdruck gilt natürlich nur, so lange er Werthe liefert, welche kleiner als l sind; wenn dagegen $x > l$, d. h. wenn $16K > 25K - 16ql$ ist, oder für $K \leq \frac{16}{9} ql$ stellt sich die größte Druckkraft S an den Enden A_1 und A_2 ein.

Die Druckkraft S erzeugt in dem Querschnitte F des Bogens eine spezifische Druckspannung von der Größe:

$$s_d = \frac{S}{F} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (39)$$

Um für diesen Fall die schwächste Stelle, für welche s ein Maximum wird, zu erhalten, findet man aus (42) durch $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$:

$$\frac{K}{F} \left(\frac{25}{8} \frac{h}{l^3} x - 2 \frac{h}{l^2} \right) + \frac{Ke}{T} \left[-1 + \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = 0,$$

oder mit $\frac{\partial y}{\partial x} = 2nx = 2 \frac{h}{l^2} x$, wenn man mit $\frac{TF l^2}{K}$ multiplicirt:

$$T \frac{25}{8} \frac{h}{l} x - T 2h - Fe l^2 + Fe \left(\frac{25}{16} l - \frac{h^2}{14l} \right) x = 0,$$

woraus

$$x = \frac{T 2h + Fe l^2}{\frac{25}{8} T \frac{h}{l} + Fe \left(\frac{25}{16} l - \frac{h^2}{14l} \right)} \dots \dots \dots (43)$$

folgt. Wenn man hierin das Glied $\frac{h^2}{14l}$ vernachlässigt, so folgt annähernd

$$x = \frac{16}{25} l,$$

und durch Einführung dieses Werthes und

$$y = \frac{h}{l^2} x^2 = \frac{256}{625} h$$

in (42) erhält man daher die größte Spannung:

$$\begin{aligned} s_{max} &= -\frac{K}{F} \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{423}{700} \frac{h}{l} \right) + \frac{Ke}{T} \left[\frac{9}{25} l - \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right) \frac{369}{625} h \right] \\ &= -\frac{K}{F} \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{423}{700} \frac{h}{l} \right) - \frac{Ke}{T} \left(\frac{81}{800} l - \frac{369}{17500} \frac{h^2}{l} \right) \dots \dots \dots (44) \end{aligned}$$

Wenn die Last $2lq$ gleichmäßig über den Bogen vertheilt ist, so hat man, wie oben gefunden, das Moment M und also auch die Biegungsspannung für jeden Querschnitt gleich Null; die ganze Spannung ist also die aus S sich ergebende nach (37) durch:

$$s = \frac{S}{F} = -\frac{q}{F} \left(\frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right) \dots \dots \dots (45)$$

bestimmt.

Durch die Druckkraft S wird auch eine Zusammendrückung des Bogensträgers in tangentialer Richtung, also eine Verkürzung der Bogenlänge, und in Folge davon eine Senkung des Scheitels herbeigeführt, welche sich folgenderart bestimmt. Bezeichnet man mit σ die Verkürzung eines Bogenstückes zwischen dem Scheitel und einem Punkte mit der Abscisse x , ist also

unter $\partial \sigma$ die Verkürzung des Bogenelementes ∂s verstanden, so hat man nach den für die rückwirkende Elasticität geltenden Regeln:

$$\partial \sigma = \frac{S}{FE} \partial s = \frac{S}{FE} (1 + 2n^2 x^2) \partial x,$$

wenn E den Elasticitätsmodul des Bogenmaterials bedeutet. Man erhält daher die Verkürzung σ für das Stück zwischen den Abscissen 0 und x zu:

$$\sigma = \int_0^x \frac{S}{FE} (1 + 2n^2 x^2) \partial x \dots \dots \dots (46)$$

Für einen in der Mitte mit $2K$ belasteten Bogen hat man daher nach (36), wenn wiederum der Querschnitt F überall von gleicher Größe vorausgesetzt wird:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{K}{FE} \int_0^x \left(\frac{25}{16} \frac{h}{l^3} x^2 - 2 \frac{h}{l^2} x - \frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{h}{28l} \right) \left(1 + 2 \frac{h^2}{l^4} x^2 \right) \partial x \\ &= \frac{K}{FE} \left(- \frac{h}{l^2} x^2 - \frac{25}{32} \frac{l}{h} x + \frac{h}{28l} x \right) \dots \dots \dots (47) \end{aligned}$$

und für die Bogenhälfte mit $x = l$:

$$\sigma = - \frac{K}{FE} \left(\frac{27}{28} h + \frac{25}{32} \frac{l^2}{h} \right) \dots \dots \dots (47^a)$$

Wenn dagegen der Bogen gleichmäßig mit $2ql$ belastet ist, so erhält man mit $S = -q \left(\frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right)$ nach (37):

$$\begin{aligned} \sigma &= - \frac{q}{FE} \int_0^x \left(\frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right) \left(1 + 2 \frac{h^2}{l^4} x^2 \right) \partial x \\ &= - \frac{q}{FE} \left(\frac{2}{3} \frac{h}{l^2} x^3 + \frac{l^2}{2h} x + \frac{2}{5} \frac{h^3}{l^6} x^5 \right) \dots \dots \dots (48) \end{aligned}$$

und für die Bogenhälfte:

$$\sigma = - \frac{q}{FE} \left(\frac{2}{3} hl + \frac{l^3}{2h} + \frac{2}{5} \frac{h^3}{l} \right) \dots \dots \dots (48^a)$$

Wenn der Bogen beiden Belastungen $2K$ und $2ql$ ausgesetzt ist, so bestimmt sich die Verkürzung einer Bogenhälfte durch die Summe von (47^a) und (48^a).

Aus der Verkürzung einer Bogenhälfte läßt sich auch die Senkung η des Scheitels bestimmen. Man findet nämlich die Bogenlänge s der Parabel durch Integration von (8) zu:

$$s = x + \frac{2}{3} n^2 x^3 = x + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^4} x^3$$

und für die Bogenhälfte mit $x = l$:

$$s = l + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l}.$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiiren nach h :

$$\partial s = \frac{4}{3} \frac{h}{l} \partial h \text{ oder } \partial h = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \partial s.$$

Setzt man daher für ∂s die Verkürzung σ ein, so giebt ∂h die Veränderung von h , d. h. die Senkung des Scheitels:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \sigma.$$

Beispielsweise würde für gleichzeitige Belastung des Bogens mit $2K$ im Scheitel und mit $2lq$ in gleichmäßiger Vertheilung die Senkung des Scheitels nach (47^a) und (48^a) annähernd zu:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l^3}{h^2 FE} \left(\frac{25}{32} K + \frac{q l}{2} \right) \dots \dots \dots (49)$$

folgen.

Nach den vorstehenden Ermittlungen ist es nunmehr auch leicht, den Einfluß von Temperaturänderungen auf die Spannungsverhältnisse der Bogenträger zu ermitteln. Denkt man sich nämlich zunächst den Bogenträger mit seinen Enden verschieblich auf horizontale Stützflächen gestellt, so wird die mit der Zunahme der Temperatur verbundene Verlängerung des Trägers eine Vergrößerung der horizontalen Entfernung der Enden A_1 und A_2 und somit eine Verschiebung der letzteren nach außen im Gefolge haben. Gesezt diese Verschiebung betrage für jedes Ende den Werth τl , unter τ die durch die Temperaturerhöhung bewirkte Aenderung der Längeneinheit verstanden, so kann man sich die Wirkung der festen Widerlager derartig denken, daß dieselben Horizontalkräfte H auf die Trägerenden ausüben, von genügender Größe, um die Verschiebung wieder aufzuheben. Man erhält daher den hierzu erforderlichen Horizontalschub aus (13^b), wenn man darin $V = 0$ setzt und l für a einführt, durch:

$$\xi = \tau l = - \frac{H}{TE} \frac{8}{15} h^2 l.$$

Der hieraus folgende Horizontaldruck:

$$H = \frac{15}{8} \frac{\tau TE}{h^2}$$

erzeugt im Querschnitte durch den Scheitel eine Druckspannung:

$$s_a = \frac{H}{F}$$

und eine Biegungsspannung:

$$s_b = \frac{M e}{T} = \frac{H h e}{T},$$

so daß die durch die Temperaturzunahme erzeugte Spannung im Scheitel den größten Werth:

$$s_t = \frac{H}{F} + \frac{H h e}{T} = \frac{15}{8} \frac{\tau E}{h^2} \left(\frac{T}{F} + h e \right) \dots (50)$$

annimmt.

Hierin kann man den Ausdehnungscoefficienten für Eisen zu 0,000012 für 1° C. annehmen, so daß $\tau = 0,000012 t$ zu setzen ist, wenn t die Temperaturveränderung in Graden C. bedeutet. Um diese durch die Temperaturveränderung hervorgerufene Spannung muß die durch die Belastung erzeugte geringer sein, als die höchstens zulässige, und hierdurch wird der Vortheil einer günstigen Materialverwendung größtentheils wieder aufgehoben, welcher sonst mit dem elastischen Bogenträger verbunden ist.

Beispiel. Ein gußeiserner Bogenträger von 5 m Spannweite und 1 m Pfeilhöhe der parabolischen Mittellinie hat in seinem Scheitel ein Gewicht von 5000 kg zu tragen. Wie groß hat man die Breite b des rechteckigen Querschnitts im Scheitel anzunehmen, wenn die Höhe daselbst 0,3 m gewählt wird, unter der Bedingung, daß mit Berücksichtigung einer Temperaturschwankung von 30° C. die größte Faserpannung den Betrag von $s = 6$ kg pro Quadratmillimeter nicht übersteige?

Hier ist, unter $a = 300$ mm die Höhe und unter b die gesuchte Breite des Querschnitts im Scheitel verstanden:

$$F = b \cdot 300 \text{ und } T = \frac{b}{12} 300^3,$$

daher

$$\frac{T}{F} = \frac{300^2}{12} \text{ und } e = \frac{a}{2} = 150,$$

daher erhält man nach (50) die durch die Temperaturveränderung hervorgerufene Spannung, wenn der Elasticitätsmodul $E = 10\,000$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} s_t &= \frac{15}{8} \frac{0,000012 \cdot 30 \cdot 10\,000}{1000 \cdot 1000} \left(\frac{300 \cdot 300}{12} + \frac{300 \cdot 1000}{2} \right) \\ &= \frac{0,054}{8} \left(\frac{90}{12} + \frac{300}{2} \right) = 0,054 \cdot 19,7 = 1,06 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Die durch die Belastung erzeugte Spannung darf daher nicht mehr als $6 - 1,06 = 4,94$ kg betragen. Für den Scheitel erhält man nun aus (42^a) durch Einführung von $K = 2500$, $l = 2,5$ m und $h = 1$ m die größte Spannung:

$$s_c = - \frac{2500}{b \cdot 300} \left(\frac{25}{32} \frac{2,5}{1} - \frac{1}{28 \cdot 2,5} \right) - \frac{2500 \cdot 150}{\frac{1}{12} b \cdot 300^3} \left(\frac{7}{32} 2500 + \frac{1000 \cdot 1000}{28 \cdot 2500} \right)$$

$$= - \frac{16,15}{b} - \frac{93,53}{b} = - \frac{109,68}{b}.$$

Daher folgt:

$$b = \frac{109,68}{4,94} = 22,2 \text{ mm.}$$

Wenn der Bogen außerdem noch eine gleichmäßig über seine Horizontalprojection verbreitete Last von $q = 500 \text{ kg}$ pro Meter Länge zu tragen hätte, so würde dadurch im Scheitel nach (45) noch eine Spannung:

$$s = - \frac{500}{b \cdot 300} \frac{2,5 \cdot 2,5}{2 \cdot 1} = - \frac{5,21}{b}$$

eintreten, so daß man für diesen Fall die erforderliche Breite aus:

$$b = \frac{16,15 + 93,53 + 5,21}{4,94} = \frac{114,89}{4,94} = 23,2 \text{ mm}$$

erhalten würde.

Die Senkung des Scheitels durch die Compression des Materials berechnet sich in diesem letzteren Falle nach (49) zu:

$$\eta_1 = \frac{3}{4} \frac{2,5^3}{1000^2} \frac{1000^3}{23,2 \cdot 300 \cdot 10000} \left(\frac{25}{32} 2500 + 500 \cdot 2,5 \right)$$

$$= \frac{15,63 \cdot 32,03}{928} = 0,54 \text{ mm,}$$

während die durch die Biegung sich nach (25^a) zu:

$$\eta_2 = \frac{1}{12} \frac{2500}{23,2 \cdot 300^3 \cdot 10000} \frac{2,5^3 \cdot 1000^3}{128} = \frac{3906}{6682} = 0,59 \text{ mm,}$$

also die gesammte Senkung zu:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = 1,13 \text{ mm}$$

berechnet.

Anmerkung. Für einen geraden Balken von gleicher Spannweite und Belastung hätte man für die Mitte das Biegemoment durch:

$$M = 5000 \frac{5}{4} + 500 \frac{5^2}{8} = 7812,5 \text{ mkg,}$$

folglich erhielte man bei gleicher Höhe des Trägers die erforderliche Breite b aus:

$$M = s \frac{T}{e} = 6 \frac{b h^2}{6} = b h^2$$

zu

$$b = \frac{7812,5 \cdot 1000}{300 \cdot 300} = 86,7 \text{ mm.}$$

Dieses Resultat zeigt die günstigere Verwendung des Materials bei dem Bogenträger im Vergleich zu dem geraden Balken, welche auch dann noch stattfindet, wenn man bei dem letzteren einen vortheilhafteren Querschnitt als den rechteckulären wählen wird.