Für die Diagonale $B_3 D_2$ liegt der Momentenmittelpunkt auf der oberen Gurtung um 0,555 m rechts vom Scheitel und in einem normalen Abstande von der Diagonale gleich 1,5 m. Die beiden Belastungsscheiden liegen nach Fig. 332 im dritten und vierten Felde, man erhält daher den größten Zug in der Diagonale, wenn man nur D_3 belastet, und da man hierfür das Eigengewicht unberücksichtigt lassen kann, so hat man:

$$- 10\,V - 3\,H + 5 \,.\, 2{,}5 \,.\, 3 = 0,$$
$$- 10\,V + 3\,H = 0,$$

woraus

$$V = 1{,}875\,\text{t};\ H = 6{,}25\,\text{t},$$

und daher aus

$$T_{3max}\,1{,}5 = 5 \,.\, (2{,}5 + 0{,}555) - V \,.\, 0{,}555 - H \,.\, 0{,}5 = + 11{,}10\,\text{mt}$$
$$T_{3max} = 7{,}4\,\text{t Zug}$$

folgt. T_{3min} würde man bei Belastung der übrigen Knotenpunkte zu

$$T_{3min} = - 7{,}4\,\text{t Druck}$$

erhalten.

Für den Verticalstiel $D_2 B_2$ gilt derselbe Momentenmittelpunkt wie für die Diagonale, die beiden Belastungsscheiden liegen aber hier nach Fig. 332 im zweiten und vierten Felde, daher die beiden Knotenpunkte D_2 und D_3 das eine Mal allein belastet, das andere Mal unbelastet anzunehmen sind. Wenn D_2 und D_3 belastet sind, erhält man die größte Druckkraft P_{3min} und zwar ist:

$$- 10\,V - 3\,H + 2 \,.\, 2{,}5 + 7 \,.\, 2{,}5\,(2 + 3) + \frac{1}{2} \,.\, 2 \,.\, 2{,}5 \,.\, 4 = 0;$$
$$- 10\,V + 3\,H - 2 \,.\, 2{,}5 \left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right) = 0;$$
$$V = 3{,}125\,\text{t};\ H = 23{,}75\,\text{t};$$

daher

$$P_{3min}\,5{,}555 = - 1 \,.\, 0{,}555 - 7\,(3{,}055 + 5{,}555) + H \,.\, 0{,}5 + V \,.\, 0{,}555,$$
$$P_{3min} = - 8{,}5\,\text{t Druck}.$$

Belastet man die anderen Knotenpunkte, so hat man aus:

$$10\,V - 3\,H + 7 \,.\, 2{,}5 + 2 \,.\, 2{,}5\,(2 + 3) + \frac{1}{2} \,.\, 7 \,.\, 2{,}5 \,.\, 4 = 0,$$
$$10\,V + 3\,H - 7 \,.\, 2{,}5 \left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right) = 0;$$
$$V = 3{,}125\,\text{t};\ H = 36{,}25\,\text{t};$$

womit man

$$P_{3max}\,5{,}555 = H \,.\, 0{,}5 - V \,.\, 0{,}555 - \frac{1}{2}\,7 \,.\, 0{,}555 - 2\,(3{,}055 + 5{,}555),$$

und hieraus

$$P_{3max} = - 0{,}5\,\text{t Druck}$$

erhält.

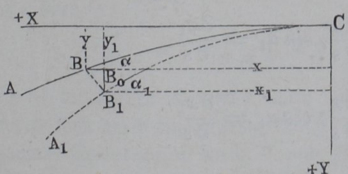
§. 65. **Elastische Bogenträger.** Um die Verhältnisse der Bogenträger ohne Scheitelscharnier zu prüfen, welche Prüfung, wie vorstehend bemerkt wurde, nur unter Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse möglich ist, hat man zunächst die Bedingungen für die Biegung eines krummen Balkens überhaupt festzustellen. Hierzu kann die allgemeine Gleichung der elastischen Linie für den geraden Balken dienen, welche in §. 35, II durch $\varrho = \frac{TE}{M}$ ausgedrückt wurde, wenn E den Elasticitätsmodul des Materials bedeutet und unter T das Trägheitsmoment des Querschnitts, sowie unter ϱ der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie für irgend welche Stelle des Balkens verstanden wird, für welche das Biegungsmoment der äußeren Kräfte gleich M ist. Bezieht man die Balkenaxe auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem und bezeichnet mit α den Winkel, welchen die Balkenaxe im Punkte x, y mit der horizontalen X Axe bildet, so kann man bekanntlich das Balkenelement an dieser Stelle durch $\partial s = \varrho \partial \alpha$ ausdrücken, worin $\partial \alpha$ den Contingenzwinkel oder die Aenderung der Neigung α in zwei unendlich nahe gelegenen Punkten x, y und $x + \partial x$, $y + \partial y$ bedeutet. Hieraus folgt $\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial \alpha}{\partial s}$ und die Gleichung der elastischen Linie schreibt sich daher auch:

$$M = TE \frac{\partial \alpha}{\partial s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Diese zunächst für Balken mit ursprünglich gerader Axe gültige Gleichung kann auch noch genau genug für die schwach gekrümmten Balken angewendet werden, wie sie bei Bogenbrücken vorzukommen pflegen, vorausgesetzt, daß man hier unter dem Werthe $\partial \alpha = \frac{\partial s}{\varrho}$ ebenfalls die Veränderung der Neigung versteht, welche durch das Biegungsmoment in dem betreffenden Elemente hervorgerufen wird.

Es möge etwa ein an dem einen Ende C horizontal eingeklemmter Balken, Fig. 334, von Hause aus die gekrümmte Axenform ABC haben, und unter dem Einflusse von irgend welchen biegenden Kräften in die Form $A_1 B_1 C$ übergehen, so gilt für irgend ein Element von der Länge ∂s in B, für welches die Neigung der Tangente gegen die horizontale X Axe ursprünglich durch α und in der nachherigen Stellung durch α_1 bezeichnet sein mag:

Fig. 334.



$$M = TE \frac{\partial \alpha_1 - \partial \alpha}{\partial s} = TE \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right), \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wenn ϱ und ϱ_1 die Krümmungshalbmesser in B und B_1 vor und nach der Biegung bedeuten. Durch Integration der Gleichung (2) erhält man:

$$\alpha_1 - \alpha = \int \frac{M}{TE} \partial s, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

welche Gleichung für irgend einen Punkt B die Aenderung $\alpha_1 - \alpha$ in der Neigung der Tangente gegen den Horizont ergiebt, sobald man das Integral zwischen den Grenzen $s = 0$ in C und s in B vornimmt.

Bezeichnet man ferner mit x und y die Ordinaten des Punktes B und mit x_1 und y_1 diejenigen des Punktes B_1, so kann man die horizontale Verschiebung $B_0 B = x_1 - x$ und die verticale Senkung $B_0 B_1 = y_1 - y$ in folgender Weise berechnen. Setzt man bei der immer nur geringen Größe der Neigungsänderung $\alpha_1 - \alpha$ annähernd:

$$\sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = \frac{\alpha_1 - \alpha}{2},$$

$$\sin \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} = \sin \alpha$$

und

$$\cos \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} = \cos \alpha,$$

so erhält man aus den bekannten trigometrischen Formeln:

$$\sin \alpha_1 - \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = \cos \alpha \,.\, (\alpha_1 - \alpha)$$

$$= \cos \alpha \int \frac{M}{TE} \partial s;$$

$$\cos \alpha_1 - \cos \alpha = -2 \sin \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = -\sin \alpha \,.\, (\alpha_1 - \alpha)$$

$$= -\sin \alpha \int \frac{M}{TE} \partial s.$$

Wenn hierin

$$\sin \alpha = \frac{\partial y}{\partial s}, \ \sin \alpha_1 = \frac{\partial y_1}{\partial s}$$

und

$$\cos \alpha = \frac{\partial x}{\partial s}, \ \cos \alpha_1 = \frac{\partial x_1}{\partial s}$$

eingeführt wird, so findet man

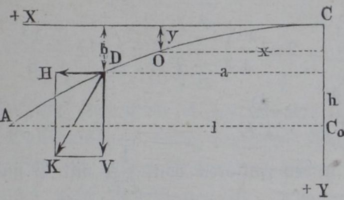
$$\frac{\partial y_1 - \partial y}{\partial x} = \int \frac{M}{TE} \partial s = \alpha_1 - \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\frac{\partial x - \partial x_1}{\partial y} = \int \frac{M}{TE} \partial s = \alpha_1 - \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Diese Gleichungen können, wenn sie integrirt werden, dazu dienen, in jedem gegebenen Falle, d. h. bei bestimmter Form und Belastung des Balkens, die Senkung und horizontale Verschiebung für jeden Punkt des Balkens zu bestimmen.

In den meisten Fällen der Praxis können die immer sehr flachen Bögen der Brückenträger als parabelförmige angesehen werden, unter welcher Voraussetzung im Folgenden die Untersuchung geführt werden möge *).

Fig. 335.



Es sei ABC, Fig. 335, ein parabolischer, im Scheitel C horizontal eingespannter Balken von der horizontalen Ausladung $AC_0 = l$ und der Pfeilhöhe $CC_0 = h$, dessen Scheitelgleichung also durch

$$y = \frac{h}{l^2} x^2 = n x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

dargestellt ist, wenn $n = \frac{h}{l^2}$ gesetzt wird. Hieraus folgt zunächst

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2 n x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und annähernd

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial x \sqrt{1 + 4 n^2 x^2} = (1 + 2 n^2 x^2)\, \partial x, \quad . \quad (8)$$

da für die hier in Betracht kommenden Fälle $n^2 x^2 = \frac{h^2 x^2}{l^4}$ nur klein ist gegen die Einheit.

Setzt man nun für den Balken überall gleiche Querschnitte, also T constant voraus, so geht die Gleichung (3) mit dem aus (8) folgenden Werthe von ∂s über in:

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{1}{TE} \int M (1 + 2 n^2 x^2)\, \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Es sei der Balken in irgend einem Punkte D, dessen Ordinaten a und $b = n a^2$ sind, durch eine beliebige Kraft K angegriffen, deren verticale und horizontale Componenten durch V und H ausgedrückt sein mögen, wobei diese Componenten positiv oder negativ genommen sein sollen, je nachdem sie nach den Richtungen der positiven oder negativen Coordinatenaxen wirksam sind. Für diesen Fall hat man das Biegungsmoment für irgend einen

*) Handelt es sich um die Untersuchung anders geformter krummer Balken, z. B. kreisförmiger, so ändert sich die Rechnung nur insofern, daß anstatt der Parabelgleichung (6) die zugehörige Gleichung der Trägerform zu Grunde zu legen ist.

zwischen D und C gelegenen Punkt, z. B. O, mit den Coordinaten x und $y = n x^2$ zu:

$$M = V(a-x) - H(b-y) = V(a-x) - Hn(a^2 - x^2) \;. \quad (10)$$

Mit diesem Werthe von M liefert daher die Gleichung (9):

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{1}{TE}\int [V(a-x) - Hn(a^2-x^2)](1+2n^2x^2)\,\partial x$$

$$= \frac{V}{TE}\left(ax - \frac{x^2}{2} + 2n^2\frac{ax^3}{3} - 2n^2\frac{x^4}{4}\right) - \frac{H}{TE}n\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right.$$

$$\left. + 2n^2\frac{a^2x^3}{3} - 2n^2\frac{x^5}{5}\right) = \frac{\mathfrak{V}}{TE} - \frac{\mathfrak{H}}{TE} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

wenn man der Kürze wegen die beiden Faktoren von $\frac{1}{TE}$ mit $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{H}$ bezeichnet.

Um die verticale und horizontale Verschiebung des Punktes O zu ermitteln, dienen die Gleichungen (4) und (5), wenn man darin für $\alpha_1 - \alpha$ den Ausdruck aus (11) einführt und zwischen den Grenzen 0 für C und x für O integrirt, wobei man nach (7) $\partial y = 2nx\partial x$ zu setzen hat. Danach wird:

$$y_1 - y = \frac{V}{TE}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} + n^2\frac{ax^4}{6} - n^2\frac{x^5}{10}\right) - \frac{H}{TE}n\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right.$$

$$\left. + n^2\frac{a^2x^4}{6} - n^2\frac{x^6}{15}\right) = \frac{\mathfrak{V}_1}{TE} - \frac{\mathfrak{H}_1}{TE} = \eta_x \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

und

$$x - x_1 = \frac{V}{TE}2n\left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{8} + 2n^2\frac{ax^5}{15} - n^2\frac{x^6}{12}\right) - \frac{H}{TE}2n^2\left(\frac{a^2x^3}{3}\right.$$

$$\left. - \frac{x^5}{15} + 2n^2\frac{a^2x^5}{15} - 2n^2\frac{x^7}{35}\right) = \frac{\mathfrak{V}_2}{TE} - \frac{\mathfrak{H}_2}{TE} = \xi_x \quad \ldots \quad (13)$$

Die Gleichungen (11) bis (13) gelten nur für das Trägerstück zwischen C und dem Angriffspunkte D der Kraft K, da auf das freie Stück AD ein Biegungsmoment M gar nicht ausgeübt wird. Mit $x = a$ erhält man aus den vorstehenden Gleichungen die Richtungsänderung und die verticale sowie die horizontale Verschiebung in dem Angriffspunkte D der Kraft K zu:

$$\varphi_d = \alpha_1 - \alpha = \frac{V}{TE}\left(\frac{a^2}{2} + n^2\frac{a^4}{6}\right) - \frac{H}{TE}n\left(2\frac{a^3}{3} + n^2\frac{4a^5}{15}\right) \cdot\cdot \quad (11^a)$$

$$\eta_d = y_1 - y = \frac{V}{TE}\left(\frac{a^3}{3} + n^2\frac{a^5}{15}\right) - \frac{H}{TE}n\left(5\frac{a^4}{12} + n^2\frac{a^6}{10}\right) \cdot\cdot \quad (12^a)$$

$$\xi_d = x - x_1 = \frac{V}{TE}n\left(5\frac{a^4}{12} + n^2\frac{a^6}{10}\right) - \frac{H}{TE}n^2\left(8\frac{a^5}{15} + n^2\frac{16a^7}{105}\right) \quad (13^a)$$

Wenn man wegen der Kleinheit von n in vorstehenden Formeln die Glieder in den Klammern, welche mit n^2 behaftet sind, gegen die anderen vernachlässigt, so erhält man annähernd:

$$\varphi_d = \frac{V}{TE}\frac{a^2}{2} - \frac{H}{TE} 2n \frac{a^3}{3} \quad \ldots \ldots \quad (11^b)$$

$$\eta_d = \frac{V}{TE}\frac{a^3}{3} - \frac{H}{TE} 5n \frac{a^4}{12} \quad \ldots \ldots \quad (12^b)$$

$$\xi_d = \frac{V}{TE} 5n \frac{a^4}{12} - \frac{H}{TE} 8n^2 \frac{a^5}{15} \quad \ldots \ldots \quad (13^b)$$

Für das freie Ende A des Trägers ist die Richtungsänderung $\alpha_1 - \alpha$ der Balkentangente durch denselben Werth φ_d aus (11^a), wie für den Angriffspunkt D der Kraft K ausgedrückt, da das Balkenstück AD einer Biegung nicht unterworfen ist. Dagegen setzt sich die Senkung η des Punktes A zusammen aus derjenigen η_d des Punktes D und einem zweiten Betrage, welcher aus der Richtungsänderung um φ_d in D hervorgeht und für den Endpunkt A wegen des horizontalen Abstandes $l - a$ desselben von D den Werth $(l - a)\,\varphi_d$ hat. Folglich hat man für das freie Ende A die verticale Senkung

$$\eta = \eta_d + (l - a)\,\varphi_d \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

und ebenso findet sich die horizontale Verschiebung wegen des verticalen Abstandes $h - b = n\,(l^2 - a^2)$ zwischen D und A zu:

$$\xi = \xi_d + n\,(l^2 - a^2)\,\varphi_d \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Um auch die Biegungsverhältnisse für einen gekrümmten Balken zu ermitteln, welcher durch eine gleichmäßig über seine Horizontalprojection ausgebreitete Last q pro Längeneinheit angegriffen wird, hat man in obige Ausdrücke $H = 0$ und für V das Lastelement $q\,\partial x$ einzuführen. Setzt man dann für den Abstand a allgemein die Abscisse x und integrirt zwischen den Werthen x_1 und x_2, zwischen denen die Last ausgebreitet ist, so erhält man die entsprechenden Gleichungen. Es sollen hier nur die Verschiebungen des freien Endes A unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß der Träger seiner ganzen Länge nach, also zwischen den Abscissen $x_1 = 0$ und $x_2 = l$ mit der Last $q\,l$ bedeckt ist. Unter dieser Voraussetzung erhält man die Verschiebungen des freien Endes A aus den Gleichungen (14) und (15), wenn man darin die Werthe aus (11^a) bis (13^a) mit x anstatt a einführt. Danach folgt die verticale Verschiebung aus (14):

$$\eta = \int_0^l \frac{q\,\partial x}{TE}\left(\frac{x^3}{3} + n^2\frac{x^5}{15}\right) + \int_0^l (l - x)\frac{q\,\partial x}{TE}\left(\frac{x^2}{2} + n^2\frac{x^4}{6}\right)$$

$$= \frac{q}{TE}\left(\frac{l^4}{8} + n^2\frac{l^6}{60}\right) \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

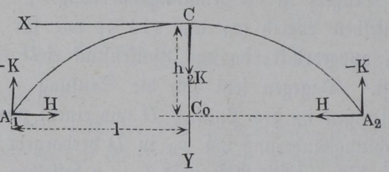
und die horizontale Verschiebung aus (15):

$$\xi = \int_0^l \frac{q\partial x}{TE} n\left(5\frac{x^4}{12} + n^2\frac{x^6}{10}\right) + \int_0^l n(l^2 - x^2)\frac{q\partial x}{TE}\left(\frac{x^2}{2} + n^2\frac{x^4}{6}\right)$$

$$= \frac{q}{TE} n\left(\frac{3l^5}{20} + n^2\frac{l^7}{42}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Die hier entwickelten Gleichungen krummer einseitig eingeklemmter Balken können nun dazu dienen, die Verhältnisse der Biegung bogenförmiger Träger festzustellen. Zu dem Ende sei A_1CA_2, Fig. 336, die Mittellinie eines parabolischen Balkens von der Spannweite $A_1A_2 = 2l$ und der Höhe in der Mitte $CC_0 = h$, dessen Gleichung also wieder durch (6):

Fig. 336.



$$y = \frac{h}{l^2}x^2 = nx^2$$

gegeben ist. Es sei zunächst vorausgesetzt, daß der Träger in A_1 und A_2 auf horizontalen Stützflächen ohne Reibung ruhe, so daß ein seitliches Verschieben der Stützpunkte möglich ist, und daß der Träger in der Mitte mit einem Gewichte $2K$ belastet sein soll. Unter dieser Voraussetzung wird in jedem Fußpunkte A_1 und A_2 durch die feste Stütze eine vertical aufwärts gerichtete Reaction $V = -K$ gegen den Träger geäußert, wogegen eine horizontale Reaction wegen der angenommenen Verschieblichkeit der Enden nicht auftritt. Man denke sich nunmehr den Träger zur Hälfte CA_2 in eine feste Wand eingeschlossen, was hier deswegen angängig ist, ohne an den Bedingungen des Gleichgewichtes etwas zu ändern, weil der Träger wegen der symmetrischen Anordnung immer im Scheitel C eine horizontale Tangente beibehält. Hierdurch ist die Untersuchung des Trägers auf die vorstehend durchgeführte eines einseitig bei C horizontal eingeklemmten Balkens A_1C zurückgeführt, welcher am freien Ende A_1, also am Hebelarme l, einer Verticalkraft $-K$ ausgesetzt ist. Man erhält daher ohne Weiteres die verticale und horizontale Verschiebung jedes Fußpunktes A_1 und A_2 in Bezug auf den fest vorausgesetzten Scheitel C, wenn man in (12^a) und (13^a) für V den Werth $-K$, und $a = l$ sowie $H = 0$ setzt, zu:

$$\eta = -\frac{K}{TE}\left(\frac{l^3}{3} + n^2\frac{l^5}{15}\right) = -\frac{K}{TE}\left(\frac{l^3}{3} + \frac{h^2 l}{15}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

$$\xi = -\frac{K}{TE} n\left(\frac{5l^4}{12} + n^2\frac{l^6}{10}\right) = -\frac{K}{TE}\left(\frac{5hl^2}{12} + \frac{h^3}{10}\right) \quad . \quad (19)$$

Das negative Vorzeichen von $\xi = x - x_1$ deutet an, daß die Schenkel A_1 und A_2 nach außen treten und das von $\eta = y_1 - y$ bedeutet eine Verminderung des verticalen Abstandes zwischen $A_1 A_2$ und C, d. h. also eine Senkung des Scheitels C um η.

Nimmt man an, daß der Bogen $A_1 C A_2$ gleichmäßig mit q pro Längeneinheit der Horizontalprojection belastet ist, so erhält man die Verschiebungen, wenn man zu den durch diese gleichförmig vertheilte Last nach (16) und (17) sich ergebenden Werthen

$$\eta = \frac{q}{TE}\left(\frac{l^4}{8} + \frac{h^2 l^2}{60}\right)$$

und

$$\xi = \frac{q}{TE}\left(\frac{3\,h\,l^3}{20} + \frac{h^3 l}{42}\right)$$

diejenigen Beträge hinzufügt, welche durch die verticalen Stützreactionen $-\,q\,l$ in A_1 und A_2 erzeugt werden. Danach findet sich mit Bezug auf (12^a) und (13^a):

$$\eta = \frac{q}{TE}\left(\frac{l^4}{8} + \frac{h^2 l^2}{60}\right) - \frac{q\,l}{TE}\left(\frac{l^3}{3} + n^2\,\frac{l^5}{15}\right)$$

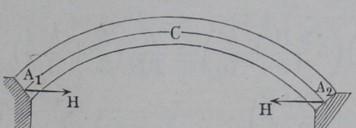
$$= -\,\frac{q}{TE}\left(\frac{5\,l^4}{24} + \frac{h^2 l^2}{20}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$$\xi = \frac{q}{TE}\left(\frac{3\,h\,l^3}{20} + \frac{h^3 l}{42}\right) - \frac{q\,l}{TE}\,n\left(\frac{5\,l^4}{12} + n^2\,\frac{l^6}{10}\right)$$

$$= -\,\frac{q}{TE}\left(\frac{4\,h\,l^3}{15} + \frac{8\,h^3 l}{105}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Wenn nun aber vorausgesetzt wird, daß der Bogenträger sich mit seinen Fußpunkten A_1 und A_2 gegen unverschiebliche Widerlager, Fig. 337, stemmt, so hat man sich zu denken, daß von jedem dieser Widerlager außer der verticalen Reaction V noch ein horizontaler nach innen gerichteter Schub H auf den Bogenschenkel ausgeübt wird, welcher genau in solcher Größe auftritt, daß die durch denselben hervorgerufene horizontale Verschiebung gerade die oben durch (19) und (21) berechneten Verschiebungen ξ aufhebt, welche durch die Belastung $2K$ bezw. $2\,q\,l$ nach außen veranlaßt werden. Durch die Horizontalkraft H in A_1 wird nun eine horizontale Verschiebung des Endes A_1 erzeugt, welche sich aus (13^a) mit $V = 0$ zu

Fig. 337.



$$\xi = \frac{H}{TE}\left(\frac{8\,h^2 l}{15} + \frac{16\,h^4}{105\,l}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

bestimmt. Daher hat man, um die Größe des horizontalen Widerlagerdruckes H zu ermitteln, einfach den Werth (22) gleich demjenigen (19) oder (21) zu setzen, je nachdem der Bogen im Scheitel C durch $2\,K$ oder über der ganzen Länge gleichmäßig durch $2\,q\,l$ belastet ist. Diese Gleichsetzung liefert bei der Belastung des Scheitels aus (22) und (19) den gesuchten Horizontalschub:

$$H = -\,K\,\frac{\frac{5}{12}\,h l^2 + \frac{h^3}{10}}{\frac{8}{15}\,h^2 l + \frac{16}{105}\,\frac{h^4}{l}} = rot - K\left(\frac{25}{32}\,\frac{l}{h} - \frac{h}{28\,l}\right), \quad . \; (23)$$

und bei gleichmäßig vertheilter Belastung aus (22) und (21):

$$H = -\,q\,\frac{\frac{4}{15}\,h l^3 + \frac{8}{105}\,h^3 l}{\frac{8}{15}\,h^2 l + \frac{16}{105}\,\frac{h^4}{l}} = -\,q\,\frac{l^2}{2\,h} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Die Horizontalkraft H, welche in dem Falle einer Belastung des Scheitels durch $2\,K$ vermittelst der Gleichung (23) bestimmt ist, bringt für sich allein eine verticale Verschiebung hervor, die nach (12^a) sich bestimmt zu:

$$\eta = \frac{K}{TE}\left(\frac{25}{32}\,\frac{l}{h} - \frac{h}{28\,l}\right)\left(5\,\frac{h\,l^2}{12} + \frac{h^3}{10}\right).$$

Addirt man daher diese Verticalverschiebung algebraisch zu der durch (18) gegebenen, welche durch die Belastung $2\,K$ des Scheitels und die verticalen Stützreactionen in A_1 und A_2 allein hervorgerufen werden, so erhält man die Senkung des Scheitels:

$$\eta = \frac{K}{TE}\left(\frac{25}{32}\,\frac{l}{h} - \frac{h}{28\,l}\right)\left(5\,\frac{h\,l^2}{12} + \frac{h^3}{10}\right) - \frac{K}{TE}\left(\frac{l^3}{3} + \frac{h^2\,l}{15}\right)$$
$$= -\,\frac{K}{TE}\left(\frac{l^3}{128} + \frac{23\,h\,l^2}{6720}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

oder für die meisten Fälle genau genug zu:

$$\eta = -\,\frac{K}{TE}\,\frac{l^3}{128} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25^a)$$

Das negative Zeichen deutet auf eine Verringerung des verticalen Abstandes h zwischen dem Scheitel und den Kämpfern, d. h. auf eine Senkung des Scheitels. Vergleicht man diese Senkung mit derjenigen eines geraden Balkens von der Länge $L = 2l$ und der Belastung $Q = 2K$ in der Mitte, für welchen die Durchbiegung nach §. 35 zu:

$$f = \frac{QL^3}{48\,TE} = \frac{2K(2l)^3}{48\,TE} = \frac{Kl^3}{3\,TE}$$

ist, so erkennt man, daß die Senkung des Bogenscheitels nur $\frac{3}{128}$ von der Durchbiegung des geraden Balkens beträgt.

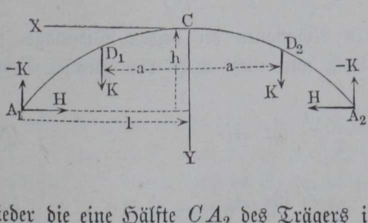
Wenn man in gleicher Art für einen durch die gleichmäßig vertheilte Last $2ql$ angegriffenen Bogenträger die durch den Horizontalschub $H = -q\frac{l^2}{2h}$ allein erzeugte verticale Verschiebung η des Fußpunktes nach (12^a) bestimmt, so erhält man diese Größe zu:

$$\eta = \frac{q}{TE}\frac{l^2}{2h}\left(5\frac{hl^2}{12} + \frac{h^3}{10}\right) = \frac{q}{TE}\left(\frac{5l^4}{24} + \frac{h^2l^2}{20}\right), \quad \cdot \cdot \quad (26)$$

also gleich und entgegengesetzt derjenigen Verschiebung, welche durch die Belastung $2ql$ und die verticalen Stützreactionen nach (20) erzeugt werden, so daß man daraus schließt, daß in diesem Falle der Scheitel durch die Biegung gar keiner Senkung ausgesetzt ist. In diesem Falle ist überhaupt das Biegungsmoment in allen Punkten des Trägers gleich Null, indem in jedem Querschnitte die Mittelkraft der äußeren Kräfte in die Richtung der Tangente an die Parabel hineinfällt. Der Bogen verhält sich daher genau so wie die parabolische Gurtung eines Parabelträgers (§. 56), oder wie eine parabolische Kette mit gleichmäßig über die Horizontalprojection vertheilter Belastung. Für diese Belastungsart ist die parabolische Trägerform daher eine sogenannte Gleichgewichtscurve, und die ganze Formänderung des Bogens reducirt sich auf diejenige, die durch die Verkürzung entsteht, welcher der Bogen in Folge der Druckspannungen ausgesetzt ist.

Um auch die Wirkung einer einseitigen Belastung des Bogenträgers zu ermitteln, sei der Träger zunächst in zwei gleichweit um a vom Scheitel C abstehenden Punkten D_1 und D_2, Fig. 338, mit je K belastet. Für diesen Fall, in welchem die verticale Stützreaction in A_1 und A_2 jederseits $-K$ beträgt, bestimmt sich der horizontale Schub H in gleicher Weise wie vorstehend. Denkt man nämlich wieder die eine Hälfte CA_2 des Trägers in eine feste Wand eingeschlossen, so hat man die horizontale Verschiebung, welche das Balkenende A_1 durch

Fig. 338.



die Belastung K in D_1 erleidet, gleich und entgegengesetzt derjenigen zu setzen, welche die Reactionen $-K$ und $-H$ in A_1 hervorbringen. Man findet diese von K veranlaßte Verschiebung von A_1 nach (15), wenn man die angenäherten Formeln (11^b) und (13^b) zu Grunde legt zu:

$$\xi = \xi_d + n(l^2 - a^2)\varphi_d = \frac{K}{TE} 5n \frac{a^4}{12} + n(l^2 - a^2)\frac{K}{TE}\frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{K}{TE} n \left(\frac{l^2 a^2}{2} - \frac{a^4}{12}\right), \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

während durch $-K$ und $-H$ in A_1 wirkend eine horizontale Verschiebung erzeugt wird, die aus (13^b), wenn l für a gesetzt wird, sich berechnet zu:

$$\xi = -\frac{K}{TE} 5n \frac{l^4}{12} + \frac{H}{TE} 8n^2 \frac{l^5}{15} \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

Setzt man die Summe von (27) und (28) gleich Null, so folgt daraus der Horizontalschub:

$$H = \frac{15}{8n^2 l^5} K \left(\frac{5nl^4}{12} - \frac{nl^2a^2}{2} + \frac{na^4}{12}\right)$$

$$= \frac{5}{32nl} K \left(5 - 6\frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4}\right), \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

Es ist nun leicht ersichtlich, daß zu diesem Horizontalschube jede der beiden in D_1 und D_2 angebrachten Belastungen K die Hälfte des Betrages liefert. Dies folgt daraus, daß die Belastung K in D_1 auf A_1 denselben Einfluß ausüben muß, wie die Belastung K in D_2 ihn auf A_2 äußert, und daraus, daß die Horizontalkräfte stets in beiden Widerlagern in gleicher Größe auftreten.

Wenn daher der Bogen nur in einem Punkte der einen Hälfte, etwa in D_1, durch die Last K angegriffen wird, so ist der Horizontalschub der Widerlager auch nur halb so groß, als (29) anzeigt, daher hat man für diesen Fall:

$$H = \frac{5}{64nl} K \left(5 - 6\frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4}\right) \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Selbstredend sind die verticalen Reactionen der beiden Widerlager für diesen Fall der einseitigen Belastung nun nicht mehr von gleicher Größe, sondern durch:

$$V_1 = K \frac{l + a}{2l} \text{ für } A_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

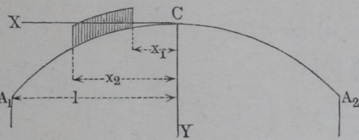
und

$$V_2 = K \frac{l - a}{2l} \text{ für } A_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

gegeben.

Wenn man in (30) für K im Abstande a von der Mitte die Belastung $q\,\partial x$ eines Elementes im Abstande x einführt, so hat man für H den durch dieses Element erzeugten Betrag ∂H zu setzen, und man erhält daher für einen Bogenträger, welcher nach Fig. 339 einerseits zwischen den Abscissen x_1 und x_2 gleichförmig mit $q\,(x_2 - x_1)$ belastet ist, durch Integration den Horizontalschub:

Fig. 339.



$$H = \int_{x_1}^{x_2} \frac{5}{64\,n\,l}\, q\,\partial x \left(5 - 6\,\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4}\right)$$

$$= \frac{5}{64\,n\,l}\, q \left[5\,(x_2 - x_1) - 2\,\frac{x_2^3 - x_1^3}{l^2} + \frac{1}{5}\,\frac{x_2^5 - x_1^5}{l^4}\right], \cdot \quad (30^{a})$$

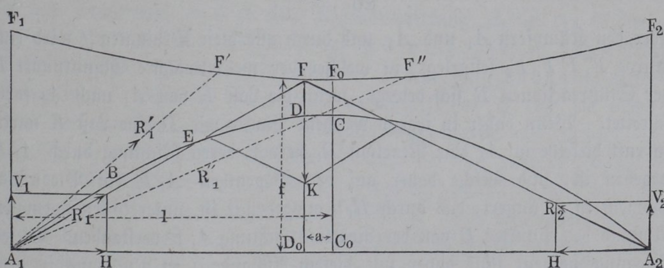
welcher Ausdruck für den Fall der Belastung einer ganzen Bogenhälfte, also mit $x_1 = 0$ und $x_2 = l$, entsprechend der Gleichung (24) in

$$H = \frac{5}{64\,n\,l}\, q \left(5\,l - 2\,l + \frac{1}{5}\,l\right) = q\,\frac{l^2}{4\,h}$$

übergeht.

Denkt man sich für den Bogenträger $A_1\,C\,A_2$, Fig. 340, welcher in D durch die Belastung K angegriffen wird, die Horizontalkraft H berechnet,

Fig. 340.



und diese in jedem Widerlager A_1 und A_2 mit der daselbst auftretenden verticalen Reaction V_1 und V_2 zu je einer Mittelkraft R_1 und R_2 vereinigt, so müssen diese beiden letzteren Auflagerreactionen R_1 und R_2 mit der Belastung K im Gleichgewichte sein, folglich ihre Richtungen sich in einem Punkte F der Richtung von K schneiden. Die Höhe $F D_0 = f$ dieses

Durchschnittspunktes über der Horizontalen $A_1 A_2$ durch die Widerlager ist leicht zu bestimmen, denn man hat nach der Figur:

$$\frac{V_1}{H} = \frac{F D_0}{A_1 D_0} = \frac{f}{l - a}$$

oder

$$V_1 (l - a) = f H,$$

d. h. mit Rücksicht auf (30) und (31):

$$K \frac{l^2 - a^2}{2 l} = f \frac{5}{64 n l} K \left(5 - 6 \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4}\right).$$

Hieraus folgt jene Höhe f, wenn $n = \frac{h}{l^2}$ eingeführt wird:

$$f = \frac{32}{5} h \frac{l^2 - a^2}{5 l^2 - 6 a^2 + \frac{a^4}{l^2}} = \frac{32}{5} \cdot \frac{h}{5 - \frac{a^2}{l^2}}, \quad \ldots \quad (33)$$

also unabhängig von der Größe der Belastung K, und nur abhängig von deren Lage (a) und von der Form des Parabelbogens.

Wenn man in dieser Gleichung nach und nach für $\frac{a}{l}$ alle Werthe von 0 für den Scheitel C bis 1 für die Kämpfer A_1 und A_2 einführt, so erhält man für die Höhen f des Schnittpunktes F über $A_1 A_2$ Werthe zwischen

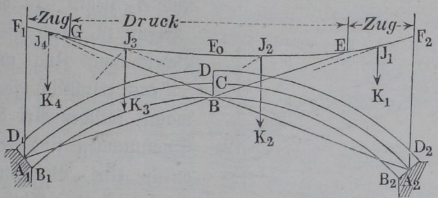
$$f_0 = \frac{32}{25} h = 1{,}28\ h$$

in C und

$$f_1 = \frac{32}{20} h = 1{,}6\ h$$

über den Kämpfern A_1 und A_2, und durch alle diese Ordinaten f wird eine Curve $F_1 F F_0 F_2$ festgelegt, in welcher der mehrerwähnte Schnittpunkt F der Stützreactionen R sich bewegt, wenn die Last K von A_1 nach A_2 fortschreitet. Wenn daher in irgend welchem Punkte wie D eine Last K wirkt, so ruft dieselbe in A_1 eine Reaction R_1 hervor, deren Richtung durch $A_1 F$ gegeben ist, und welche daher auf den Bogentheil $A_1 E$ ein Biegungsmoment in B äußert, das durch $R_1 b$ ausgedrückt ist, unter b den normalen Abstand des Punktes B von der Reactionsrichtung $A_1 F$ verstanden. Dieses Biegungsmoment fällt daher mit diesem Abstande b zu Null aus in dem Punkte E, in welchem die Bogenlinie von der Reactionsrichtung $A_1 F$ geschnitten wird. Hieraus folgt weiter, daß die Verticalebene durch F eine Scheide der Belastungen bildet, welche in E entgegengesetzte Biegungsmomente hervorrufen. Es ist nämlich ebenfalls aus der Figur zu ersehen, daß eine Versetzung der Last K nach F', links von FD, eine Reaction R_1' in A_1 erzeugt, welche das Trägerstück $A_1 E$ um E rechts herum zu drehen strebt, während die Last in einem Punkte rechts von F, etwa in F'', eine im entgegengesetzten Sinne drehende Reaction in A_1 hervorruft. Diese Eigenschaft der Curve F kann daher dazu dienen, für irgend welchen Querschnitt des Bogenträgers den ungünstigsten Belastungszustand zu ermitteln.

Fig. 341.

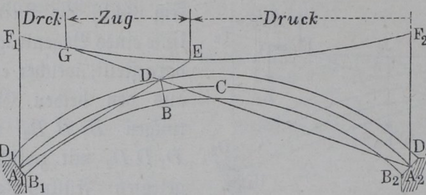


Es sei zu dem Ende wieder durch $A_1 C A_2$, Fig. 341, die Mittellinie eines Bogenträgers dargestellt, welcher etwa aus den beiden Gurtungen $B_1 B B_2$ und $D_1 D D_2$ mit zwischengesetzten Füllungsgliedern bestehen möge. Es sei ferner $F_1 F_0 F_2$ die gemäß der Gleichung (33) ermittelte Curve, welche den geometrischen Ort für die Schnittpunkte der beiderseitigen Stützreactionen R darstellt. Um für die obere Gurtung in irgend einem Querschnitte des Bogenträgers, z. B. BD, den ungünstigsten Belastungszustand zu ermitteln, denkt man sich nach dem Früheren B als Momentenmittelpunkt angenommen. Legt man nun durch B die beiden nach A_1 und A_2 gerichteten Strahlen, welche die Curve F in E und G treffen, so ist leicht zu ersehen, daß die Verticalebenen durch diese Schnittpunkte Grenzscheiden für die Belastungen bilden, welche in der Obergurtung bei D entgegengesetzte Anstrengungen hervorrufen.

Irgend eine Belastung K_1 des Feldes zwischen E und A_2 äußert nämlich auf das Trägerstück $A_1 B D$ eine Reactionswirkung R_1 in der Richtung $A_1 J_1$, welche das Trägerstück $A_1 B$ um B linksherum zu drehen strebt, so daß dadurch in der oberen Gurtung bei D eine Zugspannung hervorgerufen wird. Eine Last K_2 dagegen zwischen B und E ruft die rechts um B drehende Reaction von der Richtung $A_1 J_2$ hervor, und erzeugt somit Druckspannung in D. Dasselbe gilt auch für eine zwischen B und G wirkende Last K_3, denn deren Einfluß auf das Trägerstück $A_1 B D$ stellt sich dar als die Mittelkraft aus der in der Richtung $A_1 J_3$ wirkenden Reaction R_1 und der Belastung K_3, und diese Mittelkraft ist nichts anderes, als der in der Richtung $J_3 A_2$ wirkende Auflagerdruck gegen die Stütze A_2. Da diese Kraft auch um B rechtsdrehend wirkt, so muß sie in D ebenfalls Druckspannung erzeugen. Endlich wird eine die Strecke zwischen G und A_1 angreifende Last K_4 eine Wirkung in der Richtung $J_4 A_2$ auf das Bogenstück $A_1 B D$ ausüben, folglich wegen der linksdrehenden Wirkung Zugspannung in D hervorrufen. Die obere Gurtung wird daher in D den äußersten Anstrengungen ausgesetzt sein, wenn die bewegliche Last entweder nur die Strecke EG, oder nur die beiden Strecken $F_1 G$ und EF_2 bedeckt.

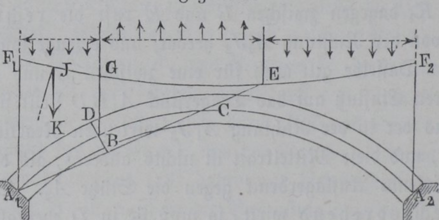
In gleicher Weise findet sich für die untere Gurtung in B, Fig. 342, die ungünstigste Belastung, wenn man den oberen Knotenpunkt D als Momentenmittelpunkt betrachtet, und von D nach A_1 und A_2 zieht. In der Figur ist durch die Bezeichnung Zug und Druck ersichtlich gemacht, welcher Art die Spannungen sind, die durch eine Belastung der betreffenden Abtheilung in B hervorgerufen werden. Es muß dabei bemerkt werden, daß die hier ins Auge gefaßten, durch die bewegliche Last K hervorgerufenen Zug- oder Druckspannungen zu denjenigen Spannungen hinzutreten, welche vermöge der constanten Belastung durch das Eigengewicht p hervorgerufen werden. Da diese letzteren Spannungen immer Druckspannungen sind, so erkennt man, daß die ungünstigste für die Dimensionen der Gurtungen maßgebende Belastungsart diejenige sein wird, bei welcher auch durch die bewegliche Last nur Druckspannung erzeugt wird, d. h. wenn die in den Figuren 341 und 342 mit Druck bezeichneten Abtheilungen allein belastet sind, also die innere, wenn es sich um die Obergurtung, und die beiden äußeren, wenn es sich um die Untergurtung handelt.

Fig. 342.



Die mehrerwähnte Curve F, welche den geometrischen Ort für die Durchschnittspunkte der Stützreactionen darstellt, kann auch dazu dienen, denjenigen Belastungszustand zu ermitteln, für welchen die tangentiale Abscheerungskraft in irgend einem Querschnitte ihren größten Werth erreicht, so daß hieraus auch die größten Anstrengungen der Füllungsglieder bestimmt werden können. Es sei nämlich BD, Fig. 343, wieder ein beliebiger Querschnitt des Bogens und $A_1 E$ senkrecht zu diesem Querschnitte gezogen, so ist nach dem Obigen klar, daß ein in der verticalen Ebene durch E wirkendes Gewicht in BD keine tangentiale Schubkraft erzeugen kann, da die hervorgerufene Reaction R_1

Fig. 343.

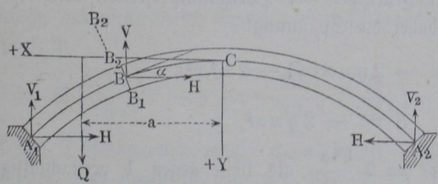


der Stütze A_1 normal zu der Querschnittsfläche BD gerichtet ist. Man erkennt daraus, daß jede rechts von E zwischen E und A_2 wirkende Belastung eine Schubkraft in DB erzeugt, welche bestrebt ist, das Bogenstück $A_1 B D$ nach innen oder unten zu verschieben, während eine Belastung zwischen E und der Verticalebene G durch die Mitte des Querschnittes eine Auflagerreaction R_1 erzeugt, welche das Stück $A_1 B D$ aufwärts zu verschieben trachtet. Eine Belastung der Strecke $G A_1$ dagegen muß wieder abwärts wirkende Schubkräfte hervorrufen, da der Einfluß einer solchen Belastung K auf $A_1 B D$ sich wieder als Mittelkraft aus K und der nach $A_1 J$ gerichteten Reaction R_1, d. h. als der nach $J A_2$ gerichtete Druck gegen die jenseitige Stütze A_2 bestimmt.

Den Horizontalschub H für diese ungünstigsten Belastungszustände hat man in jedem Falle nach der Gleichung (30^a) zu ermitteln.

Spannungen der Bögen. Hat man in der vorstehend angegebenen Art für einen bestimmten Belastungszustand eines Bogens die horizontale Schubkraft H, sowie die verticalen Auflagerreactionen V_1 und V_2 in A_1 und A_2, Fig. 344, ermittelt, so bestimmt sich für irgend einen Querschnitt durch den Punkt B die daselbst auftretende Spannung wie folgt. Auf diesen Querschnitt wirkt eine Horizontalkraft, welche für den Bogen an jeder Stelle den constanten Werth $-H$ der horizontalen Widerlagerreaction hat, und eine verticale Kraft V, welche sich aus der Differenz zwischen der aufwärts gerichteten Auflagerreaction $-V_1$ in A_1 und den zwischen A_1 und B wirkenden Belastungen Q, also zu §. 66.

Fig. 344.



$$V = Q - V_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

bestimmt. Es sind hier wieder diese Kräfte positiv oder negativ angenommen, je nachdem sie nach den Richtungen der positiven oder negativen Coordinatenaxen wirken. Bezeichnet nun α den Neigungswinkel der parabolischen Mittellinie des Bogens in B gegen den Horizont, so erhält man die nach dieser Tangente, d. h. normal zu dem Querschnitte $B_1 B_2$ gerichtete Spannung zu

$$S = V \sin\alpha + H \cos\alpha = V \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{H \partial x}{\partial s}.$$

Für die Parabel hat man nun nach (7) und (8):