$$0{,}16 \,.\, 0{,}20 \,.\, 0{,}6 \,.\, 1000 \sqrt{8^2 + 6^2} = 192 = rot\ 200\,\text{kg}$$

tritt, so daß man

$$Q = 1200 + 200 = 1400\,\text{kg}$$

hat. Demgemäß folgt nach (10) der Horizontalschub:

$$H = \frac{1}{2}\,1400\,\frac{6}{8} = 525\,\text{kg}.$$

Der Gesammtdruck des Sparrens im Fußpunkte ist nach (5^a):

$$R_1 = 1400 \sqrt{1 + \left(\frac{6}{16}\right)^2} = 1495\,\text{kg},$$

und seine Neigung δ gegen den Horizont findet man aus:

$$tg\,\delta = 2\,\frac{8}{6} = 2{,}667 \text{ zu } \delta = 69^0\,27'.$$

Der Neigungswinkel α des Sparrens folgt aus:

$$tg\,\alpha = \frac{4}{3} \text{ zu } \alpha = 53^0\,10'.$$

Würde man nach Fig. 276 eine Säule anwenden, so würde man den Horizontalschub nach (10^b) zu

$$H = \frac{1}{2}\,1400\,\frac{6\,.\,8}{36 + 64} = 336\,\text{kg},$$

und den Verticaldruck der Säule, welcher von jedem Sparren ausgeübt wird, zu

$$V_2 = \frac{1}{2}\,1400\,cos^2\,53^0\,10' = 251\,\text{kg}$$

erhalten. Der Verticaldruck im Fußpunkte jedes Sparrens beträgt daher

$$1400 - 251 = 1149\,\text{kg},$$

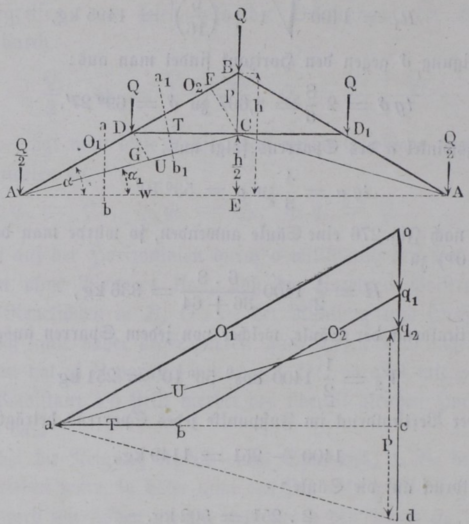
der Gesammtdruck auf die Säule

$$2\,.\,251 = 502\,\text{kg}.$$

Dachstühle. Bei größerer Weite der zu überdachenden Räume werden zusammengesetzte Dachconstructionen oder Dachstühle angewendet, deren Beanspruchung in derselben Weise zu beurtheilen ist, wie die der Fachwerke. Als Beispiele mögen die in der Ausführung gebräuchlichsten Dachconstructionen angeführt werden. §. 60.

Bei dem deutschen Dachstuhle, Fig. 282 (a. f. S.), sind die beiden symmetrisch gegen einander gestellten Sparren AB und A_1B in ihren Mitten D und D_1 durch einen horizontalen Kehlbalken oder Spannriegel unterstützt, dessen Mitte C durch Zugstangen mit den Enden AA_1 und dem First B verbunden ist. Die Belastung drückt hier, wie bei allen Fachwerken, auf die Knotenpunkte A, D und B, indem in diesen Punkten Pfetten angeordnet sind, auf welchen die Sparren ruhen. Diese Lastpunkte werden fast immer in gleichen horizontalen Entfernungen von einander angeordnet, und es möge hier und bei den folgenden Dachconstructionen mit a dieser horizontale Abstand zweier Lastpunkte, mit $2w = AA_1$ die Spannweite und mit h die Höhe BE des Firstes über den Auflagern AA_1 bezeichnet werden. Die Belastung eines inneren Knotenpunktes sei Q; dann kommt auf jedes Auflager A und A_1 eine Last gleich $\frac{Q}{2}$, welche direct von der Mauer aufgenommen wird, daher auf die Spannungen der Fachwerksglieder ohne Einfluß ist und bei deren Bestimmung nicht besonders in Rechnung

Fig. 282.



gebracht werden soll. Der Auflagerdruck in A und in A_1 beträgt daher im vorliegenden Falle

$$R_1 = R_2 = \frac{3}{2}\,Q,$$

oder im Allgemeinen bei n Intervallen (n ist hier stets eine gerade Zahl)

$$R = \frac{n-1}{2}\,Q \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Um die Pressungen O_1 und O_2 in den Strecken des Sparrens oder der oberen Gurtung AD und DB zu bestimmen, denkt man sich einen Schnitt nach ab oder a_1b_1 und wählt C zum Momentenmittelpunkte, wodurch man, wenn CF senkrecht zu AB gezogen ist,

$$O_1\,.\,CF = R\,.\,2a = \frac{3}{2}\,Qw \text{ und}$$

$$O_2\,.\,CF = R\,.\,2a - Qa = Qw$$

erhält.

Führt man noch die Neigungswinkel α des Sparrens AB und α_1 der Zugstange AC gegen den Horizont ein, so hat man

$$CF = CB \cos\alpha = \frac{h}{2}\cos\alpha,$$

und auch

$$AC \sin(\alpha - \alpha_1) = w\,\frac{\sin(\alpha-\alpha_1)}{\cos\alpha_1} = \frac{h}{2}\cos\alpha,$$

und erhält damit

$$O_1 = 3\,Q\,\frac{w}{h\cos\alpha} = \frac{3}{2}\,Q\,\frac{\cos\alpha_1}{\sin(\alpha-\alpha_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$O_2 = 2\,Q\,\frac{w}{h\cos\alpha} = Q\,\frac{\cos\alpha_1}{\sin(\alpha-\alpha_1)} = \frac{2}{3}\,O_1 \quad . \quad . \quad (3)$$

Ebenso erhält man für die untere Gurtung AC, wenn man den Schnitt in ab und den Momentenpunkt in D wählt, und das Loth

$$DG = \frac{w}{2}\sin\alpha_1 = \frac{w}{2}\,\frac{\sin(\alpha-\alpha_1)}{\cos\alpha}$$

setzt:

$$U.DG = U\,\frac{w}{2}\sin\alpha_1 = U\,\frac{w}{2}\,\frac{\sin(\alpha-\alpha_1)}{\cos\alpha} = \frac{3}{2}\,Q\,\frac{w}{2},$$

also

$$U = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{\sin\alpha_1} = \frac{3}{2}\,Q\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\alpha_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und zwar ist U eine Zugspannung, während O_1 und O_2 Pressungen bedeuten.

Um die Pressung T in dem Kehlbalken DC zu bestimmen, wählt man für den Schnitt $a_1 b_1$ den Auflagerpunkt A zum Momentenmittelpunkte, wodurch die Momente von R, U und O_2 herausfallen und man aus

$$Q\,\frac{w}{2} = T\,\frac{h}{2};\quad T = Q\,\frac{w}{h} = Q \cot g\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

als Druckspannung erhält. Endlich hat die Hängestange BC einer Zugkraft P zu widerstehen, welche sich aus der Summe der Verticalcomponenten der beiden Zugstangen AC und A_1C ergiebt zu

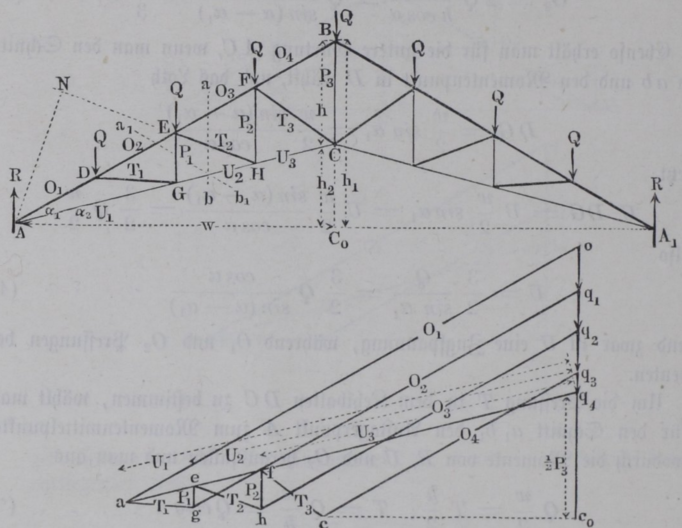
$$P = 2\,U\sin\alpha_1 = 3\,Q. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Denselben Werth muß man für P auch erhalten, wenn man die Belastung Q des Firstes von der Summe der verticalen Componenten der Sparrenkräfte in BD und BD_1 abzieht, es ist dann

$$2\,O_2\sin\alpha - Q = 4\,Q\,\frac{w}{h}\,tg\,\alpha - Q = 3\,Q.$$

Anstatt die Anstrengungen der einzelnen Glieder durch Rechnung, wie oben geschehen, zu ermitteln, führt auch eine einfache Zerlegung der Kräfte auf graphischem Wege schnell und sicher zum Ziele. Zu dem Ende hat man nur auf einer Verticalen durch o in Fig. 282 die Belastung Q von D gleich $o q_1$ und die halbe Belastung $\frac{Q}{2}$ von B gleich $q_1 q_2$ anzutragen, und $o a$ parallel mit AB, und $q_2 a$ parallel mit AC zu ziehen, um O_1 in $a o$ und U in $q_2 a$ zu erhalten. Zieht man ferner durch a eine mit dem Spannriegel DD_1 parallele also horizontale Gerade und legt durch q_1 eine Parallele zu AB, so stellt, wie leicht ersichtlich ist, $a b$ die Kraft T im Spannriegel und $b q_1$ die Pressung im oberen Sparrenstücke DB vor. Um auch

Fig. 283.



die Zugkraft P in der Hängestange BC zu finden, hat man nur nöthig, die Horizontale $a b$ bis nach c zu verlängern, so ist $q_2 c = \frac{P}{2}$, also P durch $q_2 d$ gegeben, wenn noch $a d$ symmetrisch zu $a q_2$ gezogen wird. Die Figur zeigt auch, daß die verticale Componente $c q_1$ der Sparrenkraft O_2 um die Größe $\frac{Q}{2}$ der halben Firstbelastung größer ist, als die Verticalkraft $q_2 c$ jeder Zugstange AC.

Für größere Spannweiten, bei denen die Sparren in mehreren Zwischenpunkten zwischen dem Auflager und dem Firste gestützt werden müssen, wird vielfach der englische Dachstuhl angewendet, von welchem in Fig. 283

eine Anordnung mit drei Zwischenpfetten D, E und F angegeben ist. Dieser Dachstuhl kann, da man in der Anzahl solcher Knotenpunkte wie D, E und F nicht beschränkt ist, für beliebig große Spannweiten $2w$ angewandt werden. Die Ermittelung der Anstrengung irgend eines Theiles geschieht genau in derselben Art, wie für die Fachwerke im Allgemeinen gezeigt worden, indem man für irgend einen Schnitt ab, den unteren Knotenpunkt H oder den oberen Knotenpunkt E der durchschnittenen Strebe EH als Momentenpunkt wählt, je nachdem man die Spannung der oberen oder unteren Gurtung bestimmen will, während für die Spannung in dem durchschnittenen Zwischenstücke der Auflagerpunkt A als Momentenpunkt ausgewählt wird. Selbstverständlich denkt man sich zur Bestimmung der Kraft in einem verticalen Pfosten wie EG einen Schnitt nach $a_1 b_1$ hindurchgelegt. Im Folgenden bedeute $l_1 = AB$ die Länge eines Sparrens, $h_1 = BC_0 = l_1 \sin \alpha_1$ seine Verticalprojection, $l_2 = AC$ die Länge der Zugstange, $h_2 = CC_0 = l_2 \sin \alpha_2$ deren Verticalprojection und $h = h_1 - h_2$ die Höhe BC des Binders in der Mitte, ferner $2w = na$ die Spannweite, die in n Intervalle von der Breite a getheilt sein mag, und es seien mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$ die Neigungswinkel der Streben $DG, EH, FC \ldots$ gegen den Horizont, und mit

$$c_1 = \frac{a}{\cos \beta_1};\; c_2 = \frac{a}{\cos \beta_2} \ldots$$

die Längen dieser Streben verstanden. Ist jede Pfette wiederum mit Q belastet, so hat man den Auflagerdruck in A und A_1 zu

$$R = \frac{n-1}{2} Q \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Bezeichnet nun ν die Anzahl der belasteten Pfetten zwischen einem beliebigen Schnitte ab und dem der Mitte abgewandten Auflager A, so findet man nach dem Vorstehenden die Spannungen $O_{\nu+1}$ und U_ν der durchschnittenen Gurtungen durch

$$\frac{n-1}{2} Q(\nu+1)a - Q(1+2+\cdots \nu)a = O_{\nu+1} \frac{(\nu+1)a}{\cos \alpha_2} \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

oder, da aus dem Dreiecke ABC sich $\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\cos \alpha_2} = \frac{h}{l_1}$ ergiebt:

$$Q\left(\frac{n-1}{2}(\nu+1) - \nu \frac{\nu+1}{2}\right) = O_{\nu+1}(\nu+1)\frac{h}{l_1},$$

woraus

$$O_{\nu+1} = \frac{n-(\nu+1)}{2} Q \frac{l_1}{h} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

folgt.

In gleicher Weise findet man für den oberen Knotenpunkt als Momentenmitte:

$$\frac{n-1}{2} Qva - Q(1+2+\cdots\nu-1)\,a = U_\nu \frac{\nu a}{\cos\alpha_1} \sin(\alpha_1-\alpha_2)$$

$$= U_\nu \nu a \frac{h}{l_2},$$

d. h.

$$U_\nu = \frac{n-\nu}{2} Q \frac{l_2}{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Für die Strebe erhält man mit A als Momentenpunkt die Spannung T_ν aus:

$$Q(1+2+\cdots\nu)\,a = T_\nu . AN = T_\nu \frac{\nu a}{\cos\alpha_1} \sin(\alpha_1+\beta_\nu)$$

oder, da aus dem Dreiecke EHF:

$$\frac{\sin(\alpha_1+\beta_\nu)}{\cos\alpha_1} = \frac{HF}{EH} = \frac{2\frac{\nu+1}{n}h}{c_\nu} = 2\frac{\nu+1}{n}\frac{h}{c_\nu}$$

folgt, so hat man

$$Q\nu\frac{\nu+1}{2}a = T_\nu 2\nu a \frac{\nu+1}{n}\frac{h}{c_\nu},$$

also

$$T_\nu = \frac{n}{4}\frac{c_\nu}{h} Q. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Für die Verticalstiele endlich hat man, wenn man nach $a_1 b_1$ schneidet, mit A als Momentenpunkt:

$$Q(1+2+\cdots\nu)\,a = P_\nu(\nu+1)\,a,$$

woraus

$$P_\nu = \frac{\nu}{2} Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Setzt man in den Gleichungen (8) bis (11) für ν die Werthe 0, 1, 2, 3 . . ., so erhält man die Spannungen der Gurtungen, Streben und Verticalstangen. Für die mittlere Hängestange BC ergiebt sich die Spannung wieder durch

$$P_\nu = 2\,O_{\nu+1}\sin\alpha_1 - Q,$$

oder, wenn man darin $\nu = \frac{n}{2} - 1$ setzt, nach (8):

$$P = 2\frac{n}{4}Q\frac{l_1}{h}\frac{h_1}{l_1} - Q = \left(\frac{n}{2}\frac{h_1}{h} - 1\right) Q \quad . \; . \quad (12)$$

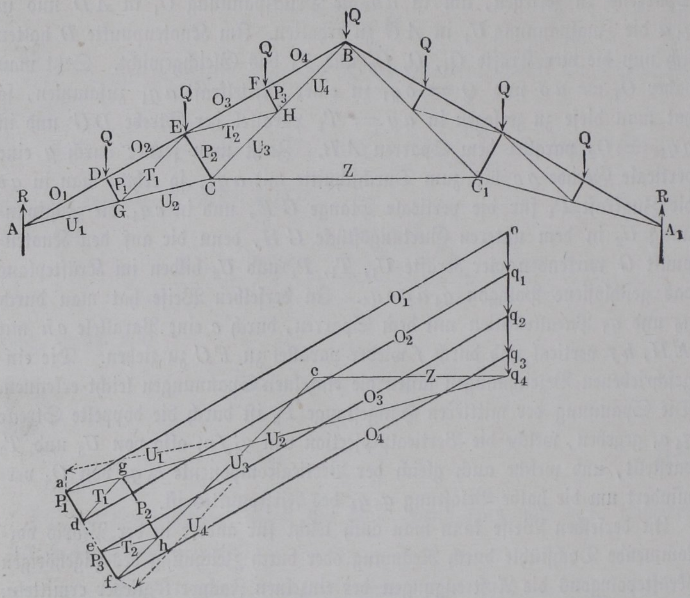
Denselben Werth erhält man natürlich auch durch

$$P = 2\, U_\nu \sin \alpha_2 + 2\, T_\nu \sin \beta_\nu.$$

Um die Spannungen der einzelnen Glieder graphisch zu ermitteln, hat man wieder auf einer Verticallinie $o\,c_0$ die Belastungen der Pfetten $o\,q_1 = q_1\,q_2 = q_2\,q_3 = Q$ und $q_3\,q_4 = \frac{Q}{2}$ anzutragen und den Auflagerdruck $q_4\,o = R$ nach den Richtungen $q_4\,a$ der Zugstange und $a\,o$ des Sparrens zu zerlegen, um in $a\,o$ die Druckspannung O_1 in AD und in $q_4\,a$ die Zugspannung U_1 in $A\,G$ zu erhalten. Im Knotenpunkte D halten sich nun die vier Kräfte O_1, Q, O_2 und T_1 das Gleichgewicht. Setzt man daher $O_1 = a\,o$ und $Q = o\,q_1$ zu einer Mittelkraft $a\,q_1$ zusammen, so hat man diese zu zerlegen in $a\,g = T_1$ parallel der Strebe $D\,G$ und in $g\,q_1 = O_2$ parallel dem Sparren AB. Zieht man ferner durch g eine verticale Gerade $g\,e$ bis zum Durchschnitte mit $a\,q_4$, so erhält man in $g\,e$ die Zugkraft P_1 für die verticale Stange GE, und in $e\,q_4$ die Zugspannung U_2 in dem unteren Gurtungsstücke GH, denn die auf den Knotenpunkt G wirkenden vier Kräfte U_1, T_1, P_1 und U_2 bilden im Kräfteplane das geschlossene Polygon $q_4\,a\,g\,e\,q_4$. In derselben Weise hat man durch q_2 und q_3 Parallellinien mit dem Sparren, durch e eine Parallele $e\,h$ mit EH, $h\,f$ vertical und durch f wieder parallel zu $F\,C$ zu ziehen. Die eingeschriebenen Bezeichnungen lassen die einzelnen Spannungen leicht erkennen. Die Spannung der mittleren Hängestange P_3 ist durch die doppelte Strecke $q_4\,c_0$ gegeben, welche die Verticalprojection von $q_4\,f\,c$, also von U_3 und T_3 darstellt, und welche auch gleich der Verticalcomponente $c_0\,q_3$ von O_4 vermindert um die halbe Belastung $q_3\,q_4$ des Firstpunktes ist.

In derselben Weise kann man auch leicht für andere in der Praxis vorkommende Dachstühle durch Rechnung oder durch Zeichnung des zugehörigen Kräftepolygons die Anstrengungen der einzelnen Fachwerksglieder ermitteln. Als ein weiteres Beispiel für die Zeichnung des Kräftepolygons sei hier noch der sogenannte französische Dachstuhl (System Polonceau), Fig. 284 (a. f. S.), angeführt. Man kann diesen Dachstuhl gewissermaßen als die Verbindung der beiden armirten, d. h. zu besonderen Fachwerken gestalteten Sparren $AB\,C$ und $A_1\,B\,C_1$ durch die Zugstange $C\,C_1$ ansehen. Die Zwischenglieder $D\,G$, $E\,C$ und FH werden hierbei senkrecht zu der Sparrenrichtung gestellt, und daher haben wegen der gleichen Entfernung der Pfetten D, E, F, B auch die Stangen AG, GE, EH und HB gleiche Neigungen gegen den Sparren AB. Zur Zeichnung des Kräftepolygons mache man wieder $q_4\,o = R = \frac{n-1}{2}\,Q$ und zerlege diese Kraft in $a\,o = O_1$ und $q_4\,a = U_1$ nach den Richtungen des Sparrens $A\,B$ und der Zugstange $A\,C$. In gleicher Weise wie im vorigen Beispiele zieht man nun $q_1 d$ parallel dem Sparren und durch a eine zur Strebe DG parallele Gerade, wodurch man in ad die Strebenkraft P_1 und in $d q_1$ den Sparrendruck in DE erhält, denn das geschlossene Kräfteviereck $o q_1 d a o$ stellt das Gleichgewicht der vier auf den Punkt D wirkenden Kräfte Q, O_2, P_1 und O_1 dar. Zieht man ferner durch d eine mit GE parallele Gerade dg, so erhält man in dieser die Größe T_1 und in $g q_4$ die Spannung U_2 in GC,

Fig. 284.

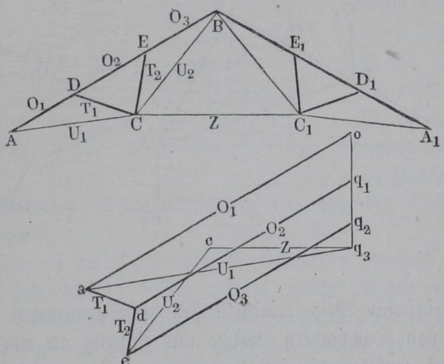


denn für den Punkt G gilt das den darauf wirkenden Kräften U_1, P_1, T_1 und U_2 entsprechende geschlossene Viereck $q_4 a d g q_4$ als Kräfteplan. Um ferner für den Punkt E die Zerlegung vorzunehmen, hat man nur zu beachten, daß die Spannungen T_1 und T_2 wegen der ganz symmetrischen Anordnung und Belastung dieser Stangen gleiche Größe haben müssen. Setzt man daher die Kräfte T_1, O_2 und Q zu dem Linienzuge $g d q_1 q_2$ zusammen, zieht durch g eine Parallele zu EC und durch q_2 eine solche zum Sparren, so wird man in der Verlängerung von ad einen Punkt e finden, so daß $eh = dg$ ist, wenn eh parallel EH gezogen wird. Mit Hülfe der so gefundenen Pressung $P_2 = gh$ in dem Pfosten EC ergeben sich nun ferner die Spannungen U_3 in CH und Z in der Verbindungsstange CC_1, wenn man durch q_4 die Horizontale $q_4 c$ und durch h eine Parallele zu CB zieht,

d. h. wenn man fh verlängert. Dann stellt die geschlossene Figur $q_4 g h c q_4$ in ihren Seiten die vier auf C wirkenden Kräfte U_2, P_2, U_3 und Z vor. Endlich erhält man die Zugspannung U_4 in BH in der Strecke fc, welche als die Schlußlinie des zu den Kräften U_3, T_2 und P_3 gehörigen Kräftepolygons $chef$ betrachtet werden kann.

Von dem französischen Dachstuhle weicht der belgische, Fig. 285, nur unwesentlich dadurch ab, daß von jedem unteren Eckpunkte C und C_1 des charakteristischen Mitteldreiecks zwei Streben CD und CE zur Unterstützung der oberen Gurtung AB abgeführt sind.

Fig. 285.

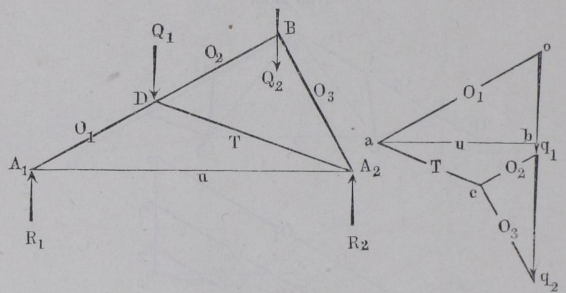


Das Kräftepolygon zeichnet man wieder, indem man zunächst den Auflagerdruck $R = q_3\, o$ in die Spannung $U_1 = q_3\, a$ und den Sparrendruck $O_1 = a\, o_1$ zerlegt. Durch eine Parallele $a\, d$ mit der Strebe DC und eine solche mit dem Sparren durch q_1 gezogen erhält man $T_1 = a\, d$ und $O_2 = d\, q_1$, beide als Druckkräfte. Zieht man in gleicher Art durch q_2 parallel zu dem Sparren und durch d eine Gerade $d\, e$ in der Richtung der Strebe CE, so liefert $d\, e$ die Druckkraft T_2 dieser Strebe und $e\, q_2$ diejenige O_3 des obersten Sparrenstückes. Zur Ermittelung der Zugkräfte $Z = c\, q_3$ in der Verbindungsstange $C\, C_1$ und $U_2 = e\, c$ in BC hat man nur durch q_3 und e mit diesen betreffenden Gliedern Parallelen zu zeichnen.

Bisher wurde immer angenommen, daß das Dach symmetrisch zu der durch den First gehenden Verticalebene angeordnet sei; wenn dagegen nach Fig. 286 (a. f. S.) die Sparren $A_1 B$ und $A_2 B$ verschiedene Neigung gegen den Horizont haben, wie dies häufig bei den sogenannten Sägedächern (Sheds) über Fabrikräumen der Fall ist, bei denen die steilere Dachfläche AB mit Glas eingedeckt wird, so hat man zunächst wieder die Belastungen

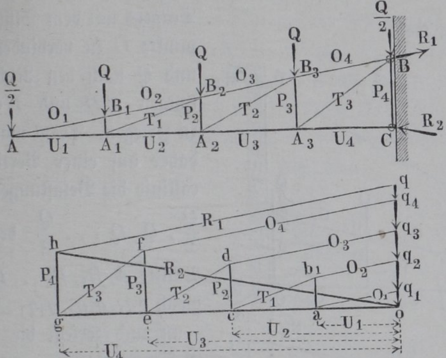
Q_1 von D und Q_2 von B durch die verticalen Strecken $o\,q_1 = Q_1$ und $q_1\,q_2 = Q_2$ darzustellen. Eine Zerlegung von $q_1\,q_2$ nach den Richtungen der Sparren liefert dann in $c\,q_2$ und $c\,q_1$ die Druckkräfte O_3 und O_2 für A_2B und DB. Zieht man alsdann durch o eine Parallele zu A_1B und durch c eine solche zur Strebe A_2D, so ist auch die Druckkraft $a\,o = O_1$ in dem unteren Sparrenstücke A_1D_1 sowie die Strebenkraft $T = a\,c$ gefunden. In der durch a geführten Horizontallinie $a\,b$ erhält man die Zugkraft U in der Spannstange $A_1\,A_2$, und die Strecken $b\,o$ und $q_2\,b$ stellen die Auflagerreactionen R_1 in A_1 und R_2 in A_2 vor.

Fig. 286.



In gleich einfacher Weise ermitteln sich die Spannungen in den Fachwerksgliedern von Dachbindern, welche nur einseitig an einer Mauer befestigt sind und consolenartig frei herausragen (Perrondächer). Es sei $A\,B\,C$, Fig. 287, ein in der Mauer bei B und C befestigter Binder eines Perrondaches, dessen obere Gurtung $A\,B$ außer in A und B noch in den Zwischenpunkten B_1, B_2, B_3 Pfetten trage, auf die je eine Last Q entfällt, während die Punkte A und B nur mit je $\frac{Q}{2}$ belastet anzunehmen sind. Trägt man wieder auf einer Verticalen die Strecken $q\,q_4\,q_3\,q_2\,q_1\,o$ gleich diesen Belastungen der Pfetten ab, so erhält man wie früher O_1 und U_1 in $q_1\,a$ und $a\,o$ durch Zerlegung von $q_1\,o = \frac{Q}{2}$ nach den Richtungen von AB und $A\,C$. In B_1B_2 ist die Spannung $O_2 = O_1 = q_2\,b_1$, während der Pfosten $A_1\,B_1$ einer Pressung $P_1 = Q = b_1\,a_1$ ausgesetzt ist. Zieht man ferner durch b_1 eine mit der Strebe $A_1\,B_2$ Parallele $b_1\,c$, so erhält man in derselben die Zugkraft T_1 dieser Strebe und in $o\,c$ die Pressung U_2 in der unteren Gurtung zwischen A_1 und A_2. Die Wiederholung dieser Construction liefert in den mit der oberen Gurtung Parallelen $q_3\,d$ und $q_4\,f$ die Spannungen O_3 und O_4 und in $q\,h$ diejenige Kraft R_1, welche den Festpunkt B aus der Mauer herauszuziehen bestrebt ist, während der untere Festpunkt C außer der horizontalen Druckkraft $U_4 = g\,o$ nach der durch den Pfosten $B\,C$ ausgeübten Verticalkraft $P_4 = h\,g$, zusammen also einer Kraft ausgesetzt ist, welche durch $R_2 = h\,o$ der Größe und Richtung nach ausgedrückt ist. Es ist leicht zu erkennen, daß, wenn wie hier angenommen, die untere Gurtung $A\,C$ horizontal und die Belastung gleichmäßig vertheilt ist, die beiden Kräfte R_1 und R_2 von gleicher Größe sein müssen, indem das Dreieck $h\,q\,o$ die Zerlegung der in der Mitte B_2 zwischen A und B wirkend zu denkenden Gesammtbelastung $4\,Q$ nach den Richtungen $B_2\,B$ und $B_2\,C$ darstellt.

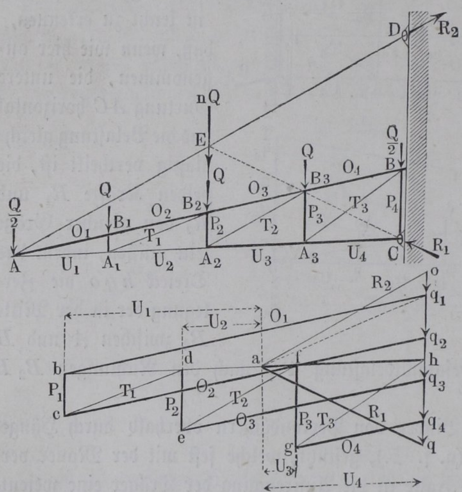
Fig. 287.



Zuweilen werden die Binder von Perrondächern oberhalb durch Hängestangen $A\,D$, Fig. 288 (a. f. S.), gestützt, welche fest mit der Mauer verbunden sind. In diesem Falle ist die Anstrengung der Träger eine wesentlich andere als bei der durch Fig. 287 dargestellten Anordnung, insofern der Träger in Fig. 288 gewissermaßen wie ein in A und C auf zwei Stützen ruhender Balken anzusehen ist, bei dessen Belastung also die obere Gurtung gedrückt wird, während der Träger in Fig. 287 einen an einem Ende eingeklemmten consolartigen Balken bildet, bei dessen Biegung die obere Gurtung convex, also gezogen wird. Durch die Hängestange in Fig. 288 wird nämlich auf das Ende A ein gewisser Zug R_2 ausgeübt, dessen verticale Componente genau so wirkt, wie die Reaction einer unterhalb A angebrachten Stütze, während die horizontale Componente in dem Träger eine Pressung nach der Richtung seiner Längenaxe hervorruft. Es möge zum Schlusse auch dieser Fall hier noch näher geprüft werden, und zwar soll der Allgemeinheit wegen die untere Gurtung $A\,C$ des Fachwerkes nicht horizontal, sondern beliebig gegen den Horizont geneigt gedacht werden. Es muß hierbei jedoch bemerkt werden, daß die Prüfung unter der Voraussetzung geführt wird, der Träger ruhe an der Mauer nur in einem Stützpunkte C auf, sei aber nicht, wie in Fig. 287, mit der Mauer unwandelbar befestigt. Wollte man nämlich eine solche starre Befestigung voraussetzen, so würde die Untersuchung nur unter Berücksichtigung der elastischen Durchbiegungen zu führen sein, ähnlich wie dies für alle Balken zu geschehen hat, die in mehr als zwei Punkten gestützt werden.

Um die in der Hängestange AD hervorgerufene Spannung R_2 zu bestimmen, hat man nur den Durchschnitt E der Gesammtbelastung nQ des Trägers mit dem Stützpunkte C zu verbinden, und Q nach den Richtungen ED und EC zu zerlegen. Trägt man daher auf einer Verticallinie die Belastungen $\frac{Q}{2}, Q, Q \ldots \frac{Q}{2}$ der Punkte $A, B_1, B_2 \ldots B$ gleich $oq_1, q_1q_2, q_2q_3 \ldots$ an und zerlegt die Gesammtbelastung $nQ = oq$ nach den Richtungen von ED und EC, so erhält man in oa die Zugkraft R_2 der Hängestange AD und in aq die Druckkraft R_1 gegen den Stützpunkt C.

Fig. 288.

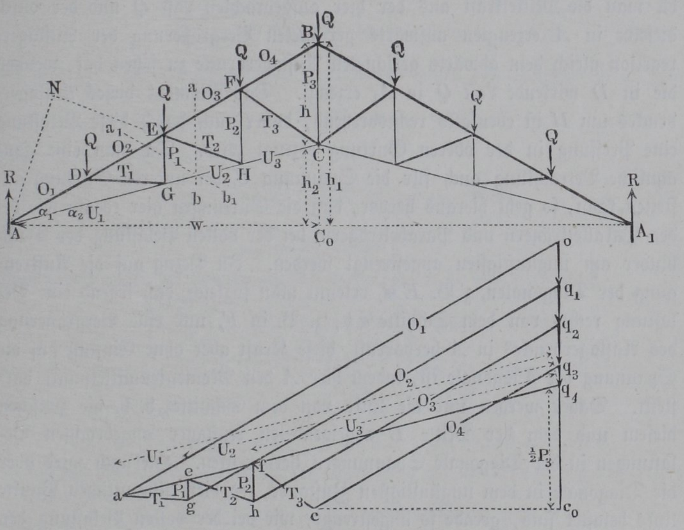


Mit Hülfe der Zugstangenkraft R_2, welche man als die in A auf den Träger geäußerte Reaction anzusehen hat, zeichnet man nun in der bekannten Art das Kräftepolygon, dessen einzelne Strecken die Anstrengungen der Fachwerksglieder vorstellen.

Setzt man für den Punkt A die Kraft $R_2 = ao$ in AD mit dem Gewichte $\frac{Q}{2} = oq_1$ in A zu der Resultirenden aq_1 zusammen, zieht durch q_1 eine Parallele zur oberen Gurtung AB und durch a eine solche zur unteren Gurtung AC, so erhält man die Pressung O_1 des Stückes AB_1 in der Strecke bq_1, während die Spannung U_1 in AA_1 durch ab dargestellt ist. Für den Punkt B_1, auf welchen die Kräfte O_1, Q, O_2 und P_1 wirken, gilt dann das Kräftepolygon $b\,q_1\,q_2\,c$, aus welchem $cq_2 = O_2 = O_1$ und $cb = P_1$ als Druckkraft in der ersten Verticalen A_1B_1 folgt. Ebenso zeichnet man für den Punkt A_1 aus U_1, P_1, T_1 und U_2 das Kräftepolygon $a\,b\,c\,d\,a$, welches in cd die Zugkraft T_1 der Diagonale A_1B_2 und in da die Zugkraft U_2 in A_1A_2 liefert. Die weitere Ausführung der Zeichnung führt für den Punkt B_2 zu dem Polygon $d\,c\,q_2\,q_3\,e\,d$, also zu der Druck=

kraft $O_3 = e\,q_3$ in $B_2 B_3$ und zu derjenigen $P_2 = e\,d$ in $A_2 B_2$. Wenn man nun weiter für A_2 die Kräfte U_2, P_2, T_2 und U_3 zu dem Vierecke $a\,d\,e\,f\,a$ zusammensetzt, so findet man, daß die untere Gurtung $A_2 A_3$ mit $U_3 = f\,a$ gedrückt wird, während die Diagonale $A_2 B_3$ einem Zuge von $T_2 = e\,f$ ausgesetzt ist. Eine weitere Fortsetzung führt in derselben Weise zu $O_4 = g\,q_4$, $U_4 = a\,h$, $P_3 = g\,f$, $P_4 = q\,h$ und $T_3 = g\,h$. Der Punkt C ist einer Einwirkung der Kraft $P_4 = h\,q$ des Endpfostens und einer Druckkraft $U_4 = a\,h$ der Gurtung $A_3 C$, also wie oben schon gefunden wurde, einer resultirenden Kraft $R_1 = a\,q$ ausgesetzt.

Fig. 289.



Diese graphischen Ermittelungen geben unter der Voraussetzung eines nicht zu kleinen Maßstabes die gesuchten Kräfte in jedem Falle mit genügender Schärfe. Auch ist es leicht, aus dem Kräftepolygone die analytischen Ausdrücke für die einzelnen Anstrengungen zu ermitteln, wenn man die Neigungen bezw. Längen der einzelnen Fachwerksglieder einführt, eine solche Entwickelung der Formeln für verschiedene Fälle soll hier nicht vorgenommen werden.

Im Vorstehenden wurde immer vorausgesetzt, daß der Dachbinder über seine ganze Länge gleichmäßig belastet ist, wie dies dem thatsächlichen Zustande entspricht. Es ist auch leicht zu erkennen, daß bei den gewöhnlichen Dachstühlen diesem Zustande der vollen Belastung die ungünstigste Bean=

spruchung der einzelnen Fachwerksglieder entspricht. Denkt man sich nämlich durch irgend einen Dachstuhl, wie in Fig. 289 (a. v. S.), einen beliebigen Schnitt ab gelegt, und wählt zur Bestimmung der Spannung O der oberen Gurtung den Momentenmittelpunkt in H, so erkennt man, daß die Belastung jedes beliebigen Knotenpunktes das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf H und somit die Pressung O in EF vergrößert. Wirkt nämlich die betreffende Last rechts von dem Schnitte, z. B. in F, so bringt sie nur eine Vergrößerung der Auflagerreaction R in A, folglich eine Vergrößerung des rechts drehenden Momentes um H hervor. Das letztere gilt auch für die Belastung eines links vom Schnitte ab gelegenen Punktes wie z. B. D, da man die Mittelkraft aus der hier aufgebrachten Last Q und der durch dieselbe in A erzeugten aufwärts gerichteten Vergrößerung der Auflagerreaction gleich dem abwärts gerichteten Auflagerdrucke zu setzen hat, welchen die in D wirkende Last Q in A_1 erzeugt. Das Moment dieses Auflagerdruckes um H ist ebenfalls rechtsdrehend, daher auch durch diese Belastung eine Pressung in der oberen Gurtung erzeugt wird. Da man eine ganz ähnliche Betrachtung auch für die Spannung U der unteren Gurtung anstellen kann, so geht hieraus hervor, daß die Gurtungen hier ebenso wie bei den Parallelträgern und Parabelträgern, bei der vollen Belastung der Dachbinder am ungünstigsten angestrengt werden. In Bezug auf die Anstrengung der Diagonalen, z. B. EH, erkennt man sogleich, daß irgend eine Belastung rechts von dem Schnitte ab, z. B. in F, nur eine Vergrößerung des Auflagerdruckes in A hervorruft, diese Kraft aber ohne Einfluß auf die Spannung der Diagonale ist, indem hier A den Momentenmittelpunkt darstellt. Daher werden nur die links von dem Schnitte, d. h. die zwischen diesem und dem der Mitte B abgewendeten Auflager angebrachten Belastungen in der Diagonale Spannungen hervorrufen. Hiernach wird aber die Diagonale in dem ungünstigsten Zustande, wo diese sämmtlichen Punkte links belastet sind, gerade so angestrengt, wie bei der vollen Belastung des Trägers, da die Belastungen rechts vom Schnitte ohne Einfluß auf die Spannung der Diagonale sind. Da eine gleiche Betrachtung auch für die Verticalstiele wie FH gilt, so geht daraus hervor, daß die volle Belastung des Dachbinders dem Zustande entspricht, in welchem sämmtliche Fachwerksglieder ihrer größten Anstrengung ausgesetzt sind.

Beispiel. Ueber einem Raume von 16 m Spannweite soll ein Dach nach Art der Fig. 289 angebracht werden, dessen Binder 2,5 m von einander entfernt sind. Die Höhe des Firstes über der Horizontalen durch die Auflager soll zu $h_1 = 3{,}5$ m angenommen werden, während der untere Knotenpunkt der Mitte, in welchem sich die Spannstangen vereinigen, um $h_2 = 0{,}5$ m über den Auflagern gelegen ist. Es sind die Anspannungen der einzelnen Constructionsglieder unter Annahme einer Gesammtbelastung des Daches durch Eigengewicht, Schnee und Wind, von 160 kg pro Quadratmeter Grundrißfläche zu ermitteln.

Man hat hier bei $n = 8$ Feldern $a = \frac{16}{n} = 2$ m, und daher die Belastung jedes Knotenpunktes

$$Q = 2 \,.\, 2{,}5 \,.\, 160 = 800 \text{ kg}.$$

Ferner folgen die Längen eines Sparrens

$$AB = l_1 = \sqrt{8^2 + 3{,}5^2} = 8{,}732; \quad \frac{l_1}{4} = 2{,}18 \text{ m},$$

einer Spannstange

$$AC = l_2 = \sqrt{8^2 + 0{,}5^2} = 8{,}015; \quad \frac{l_2}{4} = 2{,}004 \sim 2{,}0 \text{ m}.$$

Der mittlere Verticalpfosten hat $h = 3$ m Länge, so daß die der beiden anderen Pfosten GE und HF zu

$$\frac{h}{2} = 1{,}5 \text{ bezw. } \frac{3}{4}\, h = 2{,}25 \text{ m}$$

sich ergeben. Der Neigungswinkel der Sparren gegen den Horizont folgt aus

$$tg\, \alpha_1 = \frac{3{,}5}{8} = 0{,}4375 \text{ zu } \alpha_1 = 23^0\, 40',$$

derjenige der Spannstangen aus

$$tg\, \alpha_2 = \frac{0{,}5}{8} = 0{,}0625 \text{ zu } \alpha_2 = 3^0\, 35',$$

mithin hat man

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 20^0\, 5'.$$

Man erhält daher die Längen der Streben DG, EH und FC durch

$$c_1 = \sqrt{\left(\frac{l_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2\, l_2}{4}\right)^2 - 2\, \frac{l_1}{4}\, \frac{2\, l_2}{4}\, cos\, (\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$= \sqrt{4{,}752 + 16 - 2 \,.\, 2{,}18 \,.\, 4 \,.\, 0{,}939} = 2{,}09 \text{ m},$$

$$c_2 = \sqrt{(2 \,.\, 2{,}18)^2 + (3 \,.\, 2)^2 - 2 \,.\, 4{,}36 \,.\, 6 \,.\, 0{,}939} = 2{,}43 \text{ m},$$

$$c_3 = \sqrt{(3 \,.\, 2{,}18)^2 + (4 \,.\, 2)^2 - 2 \,.\, 6{,}54 \,.\, 8 \,.\, 0{,}939} = 2{,}92 \text{ m},$$

Demgemäß finden sich nun die Spannungen nach (8) bis (11) in dem Sparren:

$$O_1 = \frac{8-1}{2}\, 800\, \frac{8{,}732}{3} = 8150 \text{ kg in } AD,$$

$$O_2 = \frac{8-2}{2}\, 800\, \frac{8{,}732}{3} = 6987 \text{ kg in } DE,$$

$$O_3 = \frac{8-3}{2}\, 800\, \frac{8{,}732}{3} = 5822 \text{ kg in } EF,$$

$$O_4 = \frac{8-4}{2}\, 800\, \frac{8{,}732}{3} = 4658 \text{ kg in } FB;$$

in der Spannstange:

$$U_1 = \frac{8-1}{2}\, 800\, \frac{8{,}015}{3} = 7481 \text{ kg in } AG,$$

$$U_2 = \frac{8-2}{2}\, 800\, \frac{8{,}015}{3} = 6413 \text{ kg in } GH,$$

$$U_3 = \frac{8-3}{2}\, 800\, \frac{8{,}015}{3} = 5344 \text{ kg in } HC,$$

in den Streben:

$$T_1 = \frac{8}{4}\,\frac{2{,}09}{3}\,800 = 1115\,\text{kg in } D\,G,$$

$$T_2 = \frac{8}{4}\,\frac{2{,}43}{3}\,800 = 1296\,\text{kg in } E\,H,$$

$$T_3 = \frac{8}{4}\,\frac{2{,}92}{3}\,800 = 1557\,\text{kg in } F\,C;$$

in den Verticalen:

$$P_1 = \frac{1}{2}\,800 = 400\,\text{kg in } E\,G,$$

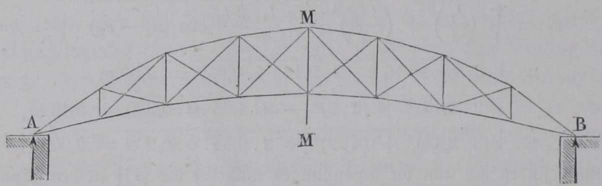
$$P_2 = 800\,\text{kg in } F\,H.$$

In der mittleren Hängestange $B\,C$ hat man:

$$P_3 = \left(\frac{n}{2}\,\frac{h_1}{h} - 1\right) Q = \left(4\,\frac{3{,}5}{3} - 1\right) 800 = 2933\,\text{kg}.$$

§. 61. **Sichelförmige Träger.** Zur Ueberdeckung weiter Räume, z. B. der Bahnhofshallen, wendet man in neuerer Zeit häufig als Dachbinder eiserne Fachwerksträger an, deren obere sowohl wie untere Gurtungen nach krummen bezw. gebrochenen Linien gebildet sind, so daß die Träger die sichelförmige Gestalt der Fig. 290 annehmen.

Fig. 290.



Diese Träger, welche kurz als Sichelträger bezeichnet werden mögen, sind wie die vorstehend besprochenen Brückenträger ebenfalls mit einem System von Füllungsgliedern zwischen den Gurtungen zu versehen, und es dienen die Knotenpunkte der oberen Gurtung zur Aufnahme der durch das Gewicht der Decke sowie des Schnees ꝛc. dargestellten Belastung. Das Eigengewicht der Träger selbst kann für die Berechnung ebenfalls genügend genau in den Knotenpunkten der oberen Gurtung wirksam gedacht werden, indem nur der kleinere Theil dieses Gewichtes, etwa $^1/_3$ desselben, thatsächlich in den unteren Knotenpunkten wirkt. Will man dem letzteren Umstande jedoch Rechnung tragen, so wird man leicht die dadurch veranlaßte geringe Correction der Resultate vornehmen können, welche die Rechnung unter der Annahme der Concentrirung des Eigengewichtes in den oberen Knotenpunkten ergiebt.