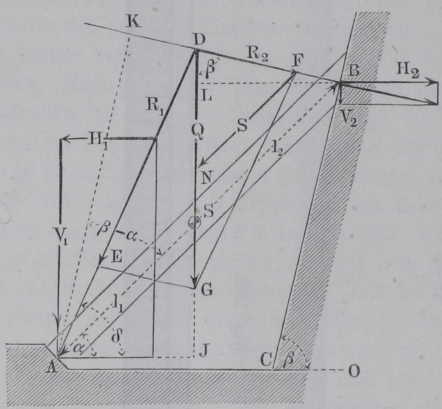
Betrage geprüft wurde. Dieser Anstrengung entsprechend sind die unteren Gurtungen aus 9 . 2 = 18 Blechbändern von je 0,2 m Breite und 12 mm Dicke zusammengesetzt, während jeder Druckbaum aus einer rectangulären Röhre von 1 m Weite und 12 mm Wandstärke besteht.

§. 59. **Sparren.** Zu den Fachwerken hat man auch die Dachstühle zu rechnen, bei denen nur eine ruhende Belastung wirksam ist, welche, aus dem Eigengewichte der Construction incl. des Deckungsmaterials sowie aus dem Schnee und Winddrucke bestehend, gleichförmig über die ganze Dachfläche vertheilt gedacht werden kann. Durch das Gewicht der Bedeckung, den Schnee und Winddruck werden zunächst die Sparren angegriffen, welche den auf sie ausgeübten Druck durch die quer unter ihnen angeordneten Pfetten auf die Knotenpunkte der Dachbinder übertragen, die in gewissen Abständen von einander in parallelen verticalen Ebenen angeordnet sind. Nur bei den kleinsten Spannweiten fallen diese Dachbinder und Pfetten ganz fort, indem die Sparren selbst als Träger auftreten.

Fig. 269.



Es möge zunächst die Wirkung der einfachen Sparren besprochen werden. Zu dem Ende sei ein Sparren von der Länge $AB = l$, Fig. 269, unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt, und in B gegen eine feste Wand BC gestützt, deren Neigung gegen den Horizont durch $BCO = \beta$ gegeben sei. Wenn die auf den Balken wirkende Kraft Q durch den Punkt S im Abstande $AS = l_1$ und $BS = l_2$ von den Mitten der Stützflächen hindurchgeht, so findet man die in diesen Stützflächen erzeugten Druck- oder Stützreactionen R_1 und R_2 in folgender Art. Sieht man von der Reibung in den Stützflächen ab, so hat man sich die Reaction der Wand in B senkrecht zu CB vorzustellen, und wenn man den Durchschnittspunkt D dieser Normalen und der Belastung Q mit dem Fußpunkte A verbindet, so giebt AD die Richtung der Reaction R_1 in A an. Es möge etwa vorausgesetzt sein, daß die Stützfläche bei A senkrecht zu der Richtung AD stehe, was in Wirklichkeit nicht gerade nothwendig ist, da wegen der hier nicht berücksichtigten Reibung das Gleichgewicht auch noch bestehen bleibt, wenn die Druckrichtung AD von der Normalen zur Stützfläche um einen Winkel abweicht, welcher nicht größer ist, als der zugehörige Reibungswinkel.

Zerlegt man nun die Belastung $DG = Q$ nach den Richtungen DA und DB, so erhält man in den Componenten DE und DF die Druckkräfte in A und B, also auch die ihnen gleichen und entgegengesetzten Reactionen R_1 und R_2 in den Stützpunkten A und B. Zur Bestimmung dieser Kräfte hat man für den Mittelpunkt der Momente in A:

$$Q . AJ = R_2 . AK \text{ oder } Q l_1 \cos\alpha = R_2 l \cos(\beta - \alpha),$$

folglich die Reaction der Wand:

$$R_2 = Q \frac{l_1}{l} \frac{\cos\alpha}{\cos(\beta - \alpha)}, \quad \dots \dots \quad (1)$$

deren horizontale und verticale Componenten daher durch:

$$H_2 = R_2 \sin\beta = Q \frac{l_1}{l} \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\cos(\alpha - \beta)} = H \quad \dots \quad (2)$$

und

$$V_2 = R_2 \cos\beta = Q \frac{l_1}{l} \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos(\beta - \alpha)} = H \operatorname{cotg}\beta \quad . \; . \quad (3)$$

ausgedrückt sind. In dem unteren Stützpunkte A muß die Horizontalkraft $H_1 = H_2 = H$ sein, während man daselbst die Verticalkraft zu:

$$V_1 = Q - V_2 = Q \left(1 - \frac{l_1}{l} \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos(\beta - \alpha)}\right) = Q - H \operatorname{cotg}\beta \, . \, (4)$$

findet. Für die Reaction R_1 hat man aus dem Dreieck DGF, wenn $\delta = JAD$ den Neigungswinkel dieser Reactionen gegen den Horizont bedeutet:

$$R_1 = Q \frac{\sin\beta}{\cos(\delta - \beta)} = \sqrt{V_1^2 + H^2}, \quad \dots \quad (5)$$

und zwar bestimmt sich der Neigungswinkel δ nach der Figur, wenn man BL horizontal zieht, aus:

$$tg\,\delta = \frac{DJ}{AJ} = \frac{l \sin\alpha + l_2 \cos\alpha \operatorname{cotg}\beta}{l_1 \cos\alpha} = \frac{l}{l_1} tg\,\alpha + \frac{l_2}{l_1} \operatorname{cotg}\beta \, . \, (6)$$

Um die Spannung S in dem Sparren zu bestimmen, hat man zu beachten, daß der letztere unter dem Einflusse der drei auf ihn wirkenden Kräfte Q, R_1 und R_2 im Gleichgewichte sein muß. Zerlegt man daher jede der Reactionen R_1 und R_2 in zwei Componenten nach der Axe AB des Sparrens, und nach verticaler Richtung, so müssen die beiden letzteren eine Summe gleich Q geben, während die beiden ersteren gleich und ent=

gegengesetzt sind und die Spannung S ergeben, mit anderen Worten: die Spannung S in dem Balken ergiebt sich immer als die Mittelkraft aus der Reaction eines Stützpunktes und der Componente, welche man für diesen Punkt erhält, wenn man die Belastung Q in ihre beiden durch die Stützpunkte gehenden verticalen Componenten zerlegt. Diese Zerlegung von $R_2 = FD$ in $FN = S$ und $ND = Q_b$ ergiebt nach der Figur:

$$\frac{S}{R_2} = \frac{\sin \beta}{\sin (90^0 - \alpha)} = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha},$$

also mit Bezug auf (1):

$$S = R_2 \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} = Q \frac{l_1}{l} \frac{\sin \beta}{\cos (\beta - \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Für die verticale Componente Q_b in dem Stützpunkte B erhält man in gleicher Weise aus:

$$\frac{Q_b}{R_2} = \frac{\sin (90^0 - \beta + \alpha)}{\sin (90^0 - \alpha)} = \frac{\cos (\beta - \alpha)}{\cos \alpha}$$

$$Q_b = R_2 \frac{\cos (\beta - \alpha)}{\cos \alpha} = Q \frac{l_1}{l}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wie auch aus einer directen Zerlegung von Q in zwei durch A und B gehende Seitenkräfte sich ergeben würde. In gleicher Weise liefert eine Zerlegung von R_1 denselben Werth für S und eine verticale Kraft

$$Q_a = Q \frac{l_2}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

In den vorstehend gefundenen Formeln hat man $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ zu setzen, wenn, unter Voraussetzung einer gleichmäßigen vertheilten Last, der Angriffspunkt derselben in der Mitte zwischen A und B gelegen ist. Unter dieser Voraussetzung erhält man:

a) Für eine verticale Wandfläche BC, Fig. 270, mit $\beta = 90^0$:

$$R_2 = H = \frac{Q}{2 \, tg \, \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1^a)$$

$$V_2 = 0 \text{ und } V_1 = Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4^a)$$

$$R_1 = Q \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2 \, tg \, \alpha}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5^a)$$

$$tg \, \delta = 2 \, tg \, \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6^a)$$

und

$$S = \frac{Q}{2 \sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7^a)$$

b) Für $\beta = \alpha$, Fig. 271:

$$R_2 = \frac{Q}{2} \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1^b)$$

$$H = \frac{Q}{4} \sin 2\alpha . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2^b)$$

$$V_2 = \frac{Q}{2} \cos^2 \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3^b)$$

$$V_1 = Q\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4^b)$$

$$R_1 = Q\sqrt{\left(\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)^2 + \left(\frac{2 - \cos^2\alpha}{2}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \qquad (5^b)$$

$$tg\,\delta = 2\,tg\,\alpha + cotg\,\alpha . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6^b)$$

und

$$S = \frac{Q}{2} \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (7^b)$$

Fig. 270.

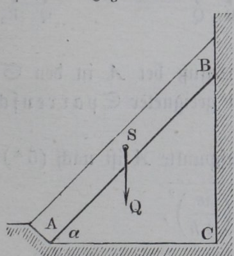


Fig. 271.

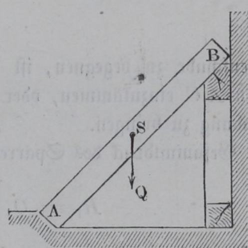
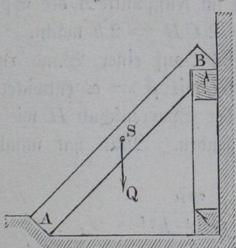


Fig. 272.



c) Für $\beta = 0$, Fig. 272:

$$R_1 = R_2 = V_1 = V_2 = \frac{Q}{2},$$

$$H = 0;\ \delta = 90^0 \text{ und } S = 0 \text{ u. s. f.}$$

Die vorstehend unter a) angegebenen Formeln gelten für die Fälle, in welchen die Sparren gegen eine verticale Wand, Fig. 273 (a. f. S.), oder gegen andere symmetrische Sparren, Fig. 274 (a. f. S.), sich stützen. Setzt man hier noch die Dachhöhe $BC = h$ und die halbe Weite $AC = w$, so hat man mit $tg\,\alpha = \frac{h}{w}$ aus (1^a) den Sparrenschub

$$H = \frac{1}{2} Q \frac{w}{h}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

also direct mit der Spannweite und umgekehrt mit der Dachhöhe proportional. Dieser Sparrenschub fällt daher um so größer aus, je flacher das Dach ist, und wird z. B. für $h = \frac{w}{2}$, oder $\alpha = 26^0\,34'$, gleich der gesammten Belastung Q des Sparrens. Um dem horizontalen

Fig. 273.

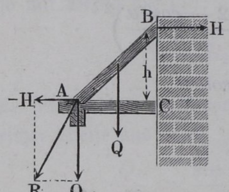
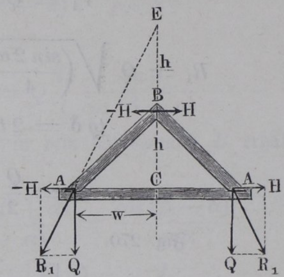


Fig. 274.



Sparrenschube zu begegnen, ist der Sparrenfuß bei A in den Spannbalken AC einzukämmen, oder es ist ein geeigneter Sparrenschuh in Anwendung zu bringen.

Der Gesammtdruck des Sparrens im Fußpunkte A ist nach (5^a):

$$R_1 = Q \sqrt{1 + \left(\frac{w}{2h}\right)^2},$$

und seine Neigung δ gegen den Horizont bestimmt sich nach (6^a) durch:

$$tg\,\delta = 2\,tg\,\alpha = \frac{2h}{w}.$$

Man findet hiernach die Richtung der Reaction im Fußpunkte A des Sparrens in der Geraden AE, sofern man $CE = 2\,CB = 2h$ macht.

Wenn dagegen der Sparren am oberen Ende auf einer Wand ruht, Fig. 275 und Fig. 276, so gelten die unter b) mit $\beta = \alpha$ entwickelten Ausdrücke und es fällt in diesem Falle sowohl der Sparrenschub H wie die Spannung S kleiner aus, als im Vorhergehenden. Man hat nämlich hierfür:

$$H = \frac{Q}{2} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{Q}{2} \frac{wh}{w^2 + h^2},$$

oder, wenn man mit q die Belastung des Sparrens pro Längeneinheit bezeichnet, und die Länge $l = \sqrt{w^2 + h^2}$ setzt:

$$H = \frac{q}{2} \frac{w h}{\sqrt{w^2 + h^2}}, \quad \ldots \ldots \quad (10^b)$$

während bei dem sich anlehnenden Sparren der Figuren 273 und 274

$$H = \frac{q}{2} \frac{w \sqrt{w^2 + h^2}}{h} \quad \ldots \ldots \quad (10^a)$$

gesetzt werden kann.

Man erkennt aus den Gleichungen (10^a) und (10^b), daß bei einer gegebenen Spannweite w und specifischen Belastung q der Sparrenschub des

Fig. 275.

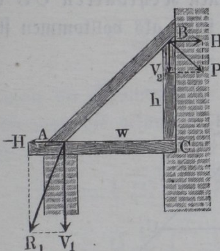
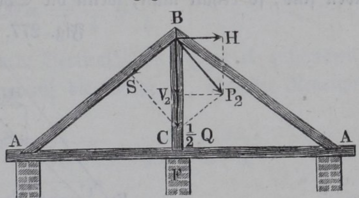


Fig. 276.



nur angelehnten Sparrens, Fig. 274, um so größer, der des gestützten Sparrens, Fig. 276, aber um so kleiner wird, je niedriger das Dach, d. h. je kleiner h gewählt wird.

Eine ähnliche Beziehung gilt hinsichtlich des Sparrendruckes S, welcher bei dem gestützten Sparren, Fig. 276, zu:

$$S = \frac{Q}{2} \sin\alpha = \frac{q}{2} h, \quad \ldots \ldots \quad (11^b)$$

und bei dem nur angelehnten Sparren, Fig. 274, zu:

$$S = \frac{Q}{2 \sin\alpha} = \frac{q}{2} \frac{w^2 + h^2}{h} \quad \ldots \ldots \quad (11^a)$$

folgt.

Der Verticaldruck des durch die Wand gestützten Balkens im Fußpunkte A beträgt nach (4^b):

$$V_1 = Q \left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2}\right),$$

während die stützende Wand bei dem einseitigen Sparren in Fig. 275 den Verticaldruck:

$$V_2 = \frac{Q}{2} \cos^2\alpha$$

und in Fig. 276 den doppelten Druck:

$$V_2 = Q \cos^2\alpha$$

empfängt.

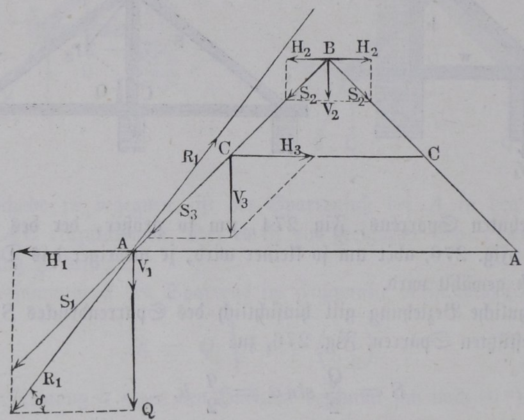
Damit die Säule BC in Fig. 275 durch den Horizontalschub H nicht umgestürzt werde, ist es nöthig, sie von rechts noch besonders durch eine Mauer zu stützen, während in Fig. 276 die beiderseits von den Sparren ausgeübten horizontalen Schubkräfte sich gegenseitig aufheben, wenn die Anordnung und Belastung symmetrisch vorausgesetzt werden. Die Richtung der Reaction im Fußpunkte ist nach (6^b) durch

$$tg\,\delta = 2\,tg\,\alpha + cotg\,\alpha = \frac{2\,h}{w} + \frac{w}{h}$$

gegeben.

Wenn die Sparren AB, Fig. 277, durch einen Kehlbalken CC verbunden sind, so erhält man, wenn die Sparren selbst als vollkommen starr

Fig. 277.



angesehen werden, bei der Belastung der Längeneinheit durch das Gewicht q in A, B und C vertical abwärts wirkende Gewichte zu:

$$V_1 = \frac{1}{2}\,q\,l_1,\; V_2 = \frac{1}{2}\,q\,l_2 \text{ und } V_3 = \frac{1}{2}\,q\,l = \frac{Q}{2},$$

und aus der Zerlegung dieser Kräfte den horizontalen Schub im Scheitelpunkte B:

$$H_2 = \frac{1}{2}\,q\,l_2\,cotg\,\alpha, \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

und die Spannung in dem oberen Sparrenstücke BC:

$$S_2 = \frac{V_2}{sin\,\alpha} = q\,\frac{l_2}{2\,sin\,\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Ebenso folgt für den Kehlbalken CC der Horizontalschub:

$$H_3 = \frac{1}{2}\, q\, l\, cotg\, \alpha = \frac{Q}{2}\, cotg\, \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

sowie für das untere Sparrenstück CA die Kraft:

$$S_1 = S_2 + S_3 = S_2 + \frac{V_3}{sin\, \alpha} = q\, \frac{l_2 + l}{2\, sin\, \alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

und der Horizontalschub in A:

$$H_1 = S_1 \cos \alpha = q\, \frac{l_2 + l}{2}\, cotg\, \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und für $l_1 = l_2 = \frac{1}{2}\, l$:

$$H_1 = \frac{3}{4}\, Q\, cotg\, \alpha = \frac{3}{4}\, Q\, \frac{w}{h}.$$

Setzt man die Spannung S_1 mit dem Verticaldrucke V_1 in A zusammen, so erhält man die gesammte Wirkung auf die Stütze A, oder die Reaction daselbst:

$$R_1 = \sqrt{H_1^2 + (V_1 + S_1 \sin \alpha)^2} = \sqrt{H_1^2 + Q^2}$$
$$= Q \sqrt{\left(\frac{l_2 + l}{2\, l}\, cotg\, \alpha\right)^2 + 1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

also für $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ wird:

$$R_1 = Q \sqrt{\left(\frac{3}{4}\, cotg\, \alpha\right)^2 + 1} = Q \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\, \frac{w}{h}\right)^2} \,. \quad (17^a)$$

Für die Sparren ohne Kehlbalken fand sich oben nach (1^a) und (5^a):

$$H_1 = \frac{1}{2}\, Q\, \frac{w}{h} \text{ und } R_1 = Q \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\, \frac{w}{h}\right)^2},$$

so daß also durch die Anwendung des Kehlbalkens der Sparrenschub und die Auflagerreaction vergrößert werden.

Der Neigungswinkel δ für die Reactionsrichtung ergiebt sich zu:

$$tg\, \delta = \frac{Q}{H_1} = \frac{2\, l}{l_2 + l}\, tg\, \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

was mit $l_1 = l_2$ in $\frac{4}{3}\, tg\, \alpha$ und mit $l_2 = 0$ in $tg\, \delta = 2\, tg\, \alpha$ wie oben übergeht.

Wenn der Kehlbalken CC durch die Stuhlsäulen CD, Fig. 278 (a. f. S.), unterstützt ist, zerlegt sich der Verticaldruck $\frac{Q}{2}$ auf die Pfette in C nach der Richtung des Kehlbalkens und der unter α_1 geneigten Stuhlsäule in:

$$H_3 = \frac{Q}{2}\, cotg\, \alpha_1$$

und

$$S_3 = \frac{Q}{2 \sin \alpha_1}.$$

In diesem Falle ist der Horizontalschub in A durch:

$$H_1 = \frac{1}{4}\, Q\, cotg\, \alpha$$

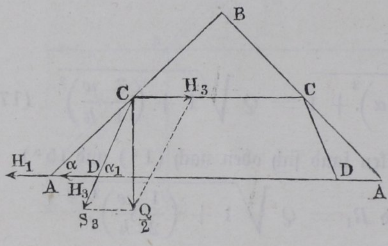
ausgedrückt, während die Stuhlsäule den Spannbalken AA in D mit der Kraft $H_3 = \frac{Q}{2}\, cotg\, \alpha_1$ angreift, so daß das mittlere Balkenstück DD einem Gesammtzuge

$$H = H_1 + H_3 = Q\, \frac{cotg\, \alpha + 2\, cotg\, \alpha_1}{4} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

ausgesetzt ist.

Wenn die beiden Sparren A_1B und A_2B, Fig. 279, unter verschiedenen Winkeln α_1 und α_2 gegen den Horizont geneigt sind, so weicht die Reaction R_3, mit welcher sie auf einander wirken, von der horizontalen Richtung um einen gewissen Winkel β ab, welcher sich wie folgt bestimmt.

Fig. 278.



Bezeichnet man mit H_3 die horizontale und mit V_3 die verticale Componente der Kraft R_3, so hat man für A_1 als Mittelpunkt der Momente:

$$Q_1\, \frac{w_1}{2} - V_3\, w_1 = H_3\, h$$

oder

$$V_3 = \frac{Q_1}{2} - H_3\, tg\, \alpha_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Ebenso ist für den Momentenmittelpunkt in A_2:

$$Q_2\, \frac{w_2}{2} + V_3\, w_2 = H_3\, h$$

oder

$$V_3 = H_3\, tg\, \alpha_2 - \frac{Q_2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Aus der Gleichsetzung dieser Ausdrücke für V_3 folgt:

$$H_3 = \frac{1}{2}\,\frac{Q_1 + Q_2}{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2}, \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (22)$$

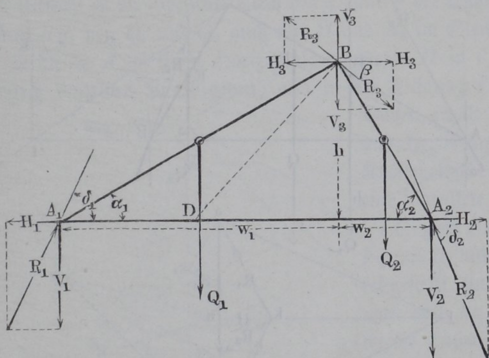
und daher

$$V_3 = \frac{Q_1}{2} - H_3\,tg\,\alpha_1 = \frac{1}{2}\,\frac{Q_1\,tg\,\alpha_2 - Q_2\,tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2} \quad \cdot \cdot \quad (23)$$

Der Neigungswinkel β folgt daher aus:

$$tg\,\beta = \frac{V_3}{H_3} = \frac{Q_1\,tg\,\alpha_2 - Q_2\,tg\,\alpha_1}{Q_1 + Q_2} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (24)$$

Fig. 279.



Man hat die Ebene BD, in welcher sich die Sparrenköpfe berühren, senkrecht zur Richtung von R_3, d. h. den Winkel $BDA_2 = 90^0 - \beta$ zu machen.

Für die Sparrenfüße A_1 und A_2 sind die Horizontalschübe H_1 und H_2 ebenfalls gleich H_3, während die Verticalkräfte durch:

$$V_1 = Q_1 - V_3 = Q_1 - \frac{1}{2}\,\frac{Q_1\,tg\,\alpha_2 - Q_2\,tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2} \quad \cdot \cdot \quad (25)$$

in A_1 und durch

$$V_2 = Q_2 + V_3 = Q_2 + \frac{1}{2}\,\frac{Q_1\,tg\,\alpha_2 - Q_2\,tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2} \quad \cdot \cdot \quad (26)$$

in A_2 gegeben sind.

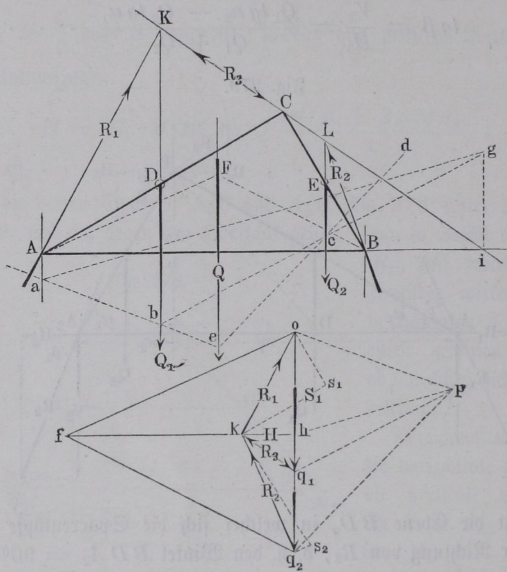
Für die Winkel δ_1 und δ_2 der Reactionen R_1 und R_2 hat man daher:

$$tg\,\delta_1 = \frac{V_1}{H} = \frac{(2\,Q_1 + Q_2)\,tg\,\alpha_1 + Q_1\,tg\,\alpha_2}{Q_1 + Q_2} \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

$$tg\,\delta_2 = \frac{V_2}{H} = \frac{Q_2\,tg\,\alpha_1 + (2\,Q_2 + Q_1)\,tg\,\alpha_2}{Q_1 + Q_2} \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Man findet auch leicht in jedem Falle die auf die Sparren wirkenden Kräfte auf graphischem Wege, welcher an dem allgemeinen Beispiele der Fig. 280

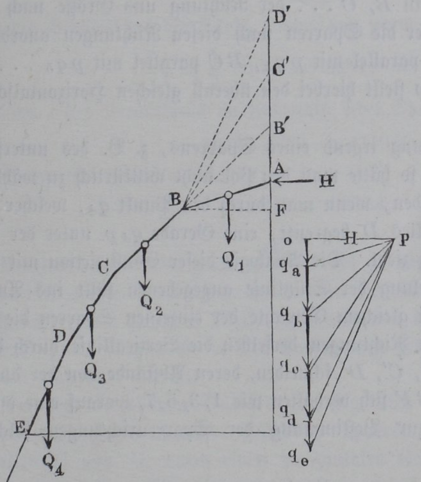
Fig. 280.



gezeigt werden soll, in welchem die Sparren AC und BC beliebig gegen den Horizont geneigt sein mögen, und auch die Belastungen Q_1 und Q_2 in beliebigen Punkten D und E angreifend gedacht werden sollen. Man trägt zunächst auf einer Verticalen die Belastungen $Q_1 = o\,q_1$ und $Q_2 = q_1\,q_2$ auf, wählt ganz beliebig den Pol p und zeichnet zu den Polstrahlen $p\,o$, $p\,q_1$ und $p\,q_2$ parallel das Seilpolygon $a\,b\,c\,d$, wodurch man in dem Schnittpunkte e der Endseile einen Punkt für die Gesammtbelastung $Q = Q_1 + Q_2$ erhält. Durch dieses Gesammtgewicht Q werden in den Stützpunkten A und B verticale Auflagerdrucke Q_a und Q_b erzeugt, welche man erhält, wenn man Q in einem beliebigen Punkte F nach den Richtungen FA und FB zerlegt denkt. Zieht man daher im Kräftepolygone durch o eine

Parallele of mit AF und durch q_2 eine Parallele $q_2 f$ mit BF, so theilt die durch f gezogene Horizontale fh die Belastung Q bekanntlich in die beiden verticalen Stützendrucke $oh = Q_a$ und $hq_2 = Q_b$. Da der Punkt F beliebig gewählt worden, so ist durch fh noch nicht der Horizontalschub H gegeben; um denselben zu erlangen, muß noch die Richtung der Reaction R_3 bestimmt werden, mit welcher die Sparren in C gegen einander wirken. Hierzu denkt man sich einen Sparren, z. B. AC, im Gleichgewichte unter dem Einflusse der Kräfte Q_1 in D, R_3 in C und R_1 in A. R_3 ist noch der Richtung und Größe nach unbekannt, und von der Reaction R_1 ist nur die verticale Componente $Q_a = ho$ gefunden. Man setzt nun Q_1 mit Q_a zu einer Mittelkraft zusammen, deren Lage man erhält, wenn man parallel mit den Polstrahlen pq_1, po und ph das Seilpolygon gba zeichnet, indem die gesuchte Mittelkraft in die Verticale durch den Schnitt g der Endseile fällt. Diese Mittelkraft hq_1 von Q_1 und Q_a muß mit H und R_3 im Gleichgewichte sein, und da sie die in A wirksame Horizontalcomponente H in i schneidet, so muß R_3 durch denselben Punkt gehen, also in die Richtung iC fallen.

Fig. 281.



Daher erhält man H und R_3, wenn man im Kräftepolygon durch q_1 eine Parallele $q_1 k$ mit iC zieht, wodurch $kq_1 = R_3$ und $kh = H$ festgestellt sind. Zieht man nach ko und kq_2, welche Linien mit AK und BL parallel ausfallen müssen, so erhält man der Richtung und Größe nach die Stützreactionen $R_1 = ko$ in A und $R_2 = q_2 k$ in B. Will man endlich die Spannkräfte in den Sparren finden, so hat man nur durch k Parallelen zu denselben zu ziehen und die Kräfte R_1 und R_2 auf diese Linien zu projiciren, um die Spannung von AC in $S_1 = ks_1$ und diejenige von BC in $S_2 = s_2 k$ zu finden.

Ebenso kann das Kräftepolygon dazu dienen, die Kräfte für ein Gespärre zu finden, bei welchem der Sparren AB, Fig. 281, mit seinem Fuße A

nicht auf einem Balken oder **Bundtrame**, sondern auf einem zweiten Sparren BC, dieser wieder auf einem dritten CD u. s. w. aufruht, wie dies bei den bekannten **Mansarddächern** der Fall ist. Hierbei ist jedem der unteren Sparren diejenige Richtung zu geben, in welcher der auf ihn sich stützende Sparren drückt. Seien die Gewichte Q_1, Q_2, Q_3 . . . der einzelnen Sparren, welche in deren Mitten wirksam gedacht werden mögen, jedes in die beiden verticalen Componenten zerlegt, die in den Enden des Sparrens angreifen, und seien also die Belastungen der Knotenpunkte A, B, C, D durch

$$Q_a = \frac{Q_1}{2}, \; Q_b = \frac{Q_1 + Q_2}{2}, \; Q_c = \frac{Q_2 + Q_3}{2} \ldots$$

ausgedrückt, so trägt man diese Kräfte nach einem beliebigen Kräftemaßstabe auf einer Verticalen zu

$$o\,q_a = Q_a, \; q_a\,q_b = Q_b, \; q_b\,q_c = Q_c \ldots$$

an, und wählt auf der Horizontalen durch o willkürlich den Pol p.

Es ist nun ohne Weiteres klar, daß die einzelnen Polstrahlen $p\,q_a$, $p\,q_b$ . . . die Reactionen in B, C . . . der Richtung und Größe nach ergeben, und daß man daher die Sparren nach diesen Richtungen anordnen muß, d. h. man hat AB parallel mit $p\,q_a$, BC parallel mit $p\,q_b$ . . . zu stellen. Die Poldistanz op stellt hierbei den überall gleichen Horizontalschub des Gespärres dar.

Wenn hierbei die Neigung irgend eines Sparrens, z. B. des untersten ED, vorgeschrieben wäre, so hätte man den Pol nicht willkürlich zu wählen, sondern man wird ihn finden, wenn man durch den Punkt q_d, welcher die Belastung des Knotenpunktes D begrenzt, eine Gerade $q_d\,p$ unter der gewünschten Sparrenneigung zieht. Die Analogie dieser Construction mit der bei Gewölben zur Ermittelung der Stützlinie angegebenen fällt ins Auge. Auch erkennt man, daß bei gleichem Gewichte der einzelnen Sparren die an den Punkt B angetragenen Richtungen derselben die Verticallinie durch den Scheitel in Punkten A, B', C', D' schneiden, deren Abstände von der durch B gelegten Horizontalen BF sich verhalten wie 1, 3, 5, 7, worauf eine öfter angegebene Construction zur Bestimmung der Sparrenrichtungen solcher Dächer beruht.

Beispiel. Ein Dach nach Art der Fig. 274 habe 12 m Tiefe und 8 m Höhe, die um 1 m von einander abstehenden Sparren haben 0,16 m Breite und 0,20 m Höhe des Querschnitts, wie groß ist der Sparrenschub für eine Belastung des Daches von 200 kg pro Quadratmeter Grundfläche?

Hier beträgt die Belastung eines Sparrens durch die Dachfläche 6 . 1 . 200 = 1200 kg, wozu das Gewicht des Sparrens bei einem specifischen Gewichte des Holzes von 0,6 mit

$$0{,}16 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}6 \cdot 1000 \sqrt{8^2 + 6^2} = 192 = rot\ 200\,\text{kg}$$

tritt, so daß man

$$Q = 1200 + 200 = 1400\,\text{kg}$$

hat. Demgemäß folgt nach (10) der Horizontalschub:

$$H = \frac{1}{2}\, 1400\, \frac{6}{8} = 525\,\text{kg}.$$

Der Gesammtdruck des Sparrens im Fußpunkte ist nach (5^a):

$$R_1 = 1400 \sqrt{1 + \left(\frac{6}{16}\right)^2} = 1495\,\text{kg},$$

und seine Neigung δ gegen den Horizont findet man aus:

$$tg\,\delta = 2\,\frac{8}{6} = 2{,}667 \text{ zu } \delta = 69^0\,27'.$$

Der Neigungswinkel α des Sparrens folgt aus:

$$tg\,\alpha = \frac{4}{3} \text{ zu } \alpha = 53^0\,10'.$$

Würde man nach Fig. 276 eine Säule anwenden, so würde man den Horizontalschub nach (10^b) zu

$$H = \frac{1}{2}\, 1400\, \frac{6 \cdot 8}{36 + 64} = 336\,\text{kg},$$

und den Verticaldruck der Säule, welcher von jedem Sparren ausgeübt wird, zu

$$V_2 = \frac{1}{2}\, 1400\, cos^2\, 53^0\, 10' = 251\,\text{kg}$$

erhalten. Der Verticaldruck im Fußpunkte jedes Sparrens beträgt daher

$$1400 - 251 = 1149\,\text{kg},$$

der Gesammtdruck auf die Säule

$$2 \cdot 251 = 502\,\text{kg}.$$

Dachstühle. Bei größerer Weite der zu überdachenden Räume werden zusammengesetzte Dachconstructionen oder Dachstühle angewendet, deren Beanspruchung in derselben Weise zu beurtheilen ist, wie die der Fachwerke. Als Beispiele mögen die in der Ausführung gebräuchlichsten Dachconstructionen angeführt werden. §. 60.

Bei dem deutschen Dachstuhle, Fig. 282 (a. f. S.), sind die beiden symmetrisch gegen einander gestellten Sparren AB und A_1B in ihren Mitten D und D_1 durch einen horizontalen Kehlbalken oder Spannriegel unterstützt, dessen Mitte C durch Zugstangen mit den Enden AA_1 und dem First B verbunden ist. Die Belastung drückt hier, wie bei allen Fachwerken, auf die Knotenpunkte A, D und B, indem in diesen Punkten Pfetten angeordnet sind, auf welchen die Sparren ruhen. Diese Lastpunkte werden fast immer in gleichen horizontalen Entfernungen von einander angeordnet, und es möge hier und bei den folgenden Dachconstructionen mit a dieser