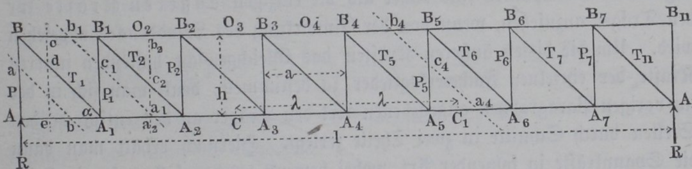
nicht vorhanden angesehen werden muß, und man es daher nur mit drei Gliedern zu thun hat, deren Spannungen nach dem Vorangehenden immer in bestimmter Art ermittelt werden können. Das Nähere über die Wirkung solcher sogenannter Gegenstreben wird in dem Nachfolgenden aus den einzelnen Beispielen sich ergeben, welche nunmehr näher ins Auge gefaßt werden sollen.

Fachwerksträger mit parallelen Gurtungen. Eine für Brückenbauten und ähnliche Ausführungen häufige Construction stellen die Fachwerksträger mit parallelen Gurtungen, Parallelträger, dar. Ein solcher Träger besteht in seiner einfachsten Anordnung aus zwei horizontalen Streckbäumen oder Gurtungen AA_n und BB_n, Fig. 225, welche in §. 54.

Fig. 225.



gleichen Abständen durch eine Anzahl verticaler Ständer oder Pfosten $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ ... mit einander verbunden sind. In die so entstehenden rechteckigen Felder sind ferner diagonale Stangen $A_1 B$, $A_2 B_1$, $A_3 B_2$ ... eingesetzt, welche Streben oder Bänder genannt werden, je nachdem sie gedrückt oder gezogen werden. Zwei solcher Träger, welche, an den Enden bei A und A_n auf festen Pfeilern aufruhend, parallel neben einander die zu überbrückende Oeffnung überspannen, tragen die Last der Brückenbahn in oben besprochener Art mit Hülfe von Querträgern, die in den unteren oder oberen Knotenpunkten A, A_1, A_2 ... bezw. B, B_1, B_2 ... auf den Hauptträgern aufruhen. Es möge zunächst eine Belastung der unteren Knotenpunkte A vorausgesetzt werden. Ist die ganze der Rechnung zu Grunde legende Spannweite oder horizontale Entfernung AA_n der beiden Stützen durch l ausgedrückt, so soll die Länge a jedes Trägerfeldes, bei n Feldern also $a = \frac{l}{n}$, als Einheit angenommen werden, indem die auf ein solches Feld entfallende totale Belastung durch q bezeichnet werde, welche sich zusammensetzt aus dem Eigengewichte p und der Verkehrslast k eines Brückenfeldes von der halben Breite der Brücke. Es ist ersichtlich, daß jeder Knotenpunkt zwischen den Stützen eine Belastung gleich q, dagegen jeder der Endpunkte A und A_n nur eine Belastung gleich $\frac{q}{2}$ empfängt, wenn, wie zunächst angenommen werden soll, die **ganze Brücke gleichförmig** mit der Verkehrslast nk bedeckt ist. Für diesen Fall bestimmen sich die Druckkräfte auf die Stützen A und A_n und die denselben gleichen und entgegengesetzten Reactionen der Pfeiler zu je $\frac{nq}{2}$. Man kann indessen bemerken, daß von jeder Pfeilerreaction ein Theil gleich $\frac{q}{2}$ direct durch die in A und A_n wirkende Belastung im Gleichgewichte gehalten wird, so daß man sich vorzustellen hat, der Träger werde an jedem Ende durch eine vertical aufwärts gerichtete Reaction

$$R = \frac{n-1}{2} q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

angegriffen. Diese Reactionen und die Belastungen q der $n-1$ zwischenliegenden Knotenpunkte sind daher als die einzigen **äußeren Kräfte** für den Träger anzusehen, wenn von der Einwirkung des Winddruckes abgesehen wird. Um die diesen äußeren Kräften das Gleichgewicht haltenden inneren Kräfte der einzelnen Fachwerksglieder zu bestimmen, denkt man sich in der im vorigen Paragraphen angegebenen Art den Träger an den entsprechenden Stellen durch Schnitte in zwei Theile zerlegt. Hiernach erhält man dann die Spannkräfte in folgender Art, wobei bemerkt werden soll, daß mit P die Kräfte in den Pfosten, mit T die in den Diagonalen und mit O die in den oberen, mit U die in den unteren Gurtungstheilen bezeichnet werden sollen.

Ein Schnitt nach ab schneidet von dem Träger das Dreieck aAb ab, auf welches als einzige äußere Kraft die Pfeilerreaction

$$R = \frac{n-1}{2} q$$

wirkt, welcher Kraft daher die in a wirkende Druckkraft

$$-R = -\frac{n-1}{2} q$$

das Gleichgewicht hält; mit anderen Worten, der Endpfosten AB wird durch eine Kraft

$$P = R = \frac{n-1}{2} q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

auf Druck beansprucht. In dem Gurtungstheile AA_1 findet keinerlei Spannung statt, da eine horizontale Kraft nicht vorhanden ist, welche aufgehoben werden müßte.

Ein Schnitt nach cde liefert zwei Kräfte O_1 in c und T_1 in d, welche sich durch die Momentengleichungen in Bezug auf A_1 und B_1 als Drehpunkte bestimmen, und zwar folgt für A_1 als Momentenmittelpunkt:

$$R\,a + O_1\,h = 0;\; O_1 = -R\,\frac{a}{h} = -\frac{a}{h}\,\frac{n-1}{2}\,q \;.\;.\;.\; (3)$$

wenn mit h die verticale Entfernung der Schwerpunkte beider Gurtungen bezeichnet wird. Das negative Zeichen in (3) deutet darauf hin, daß die Spannkraft O_1 in c nach links gerichtet, die Gurtung $B\,B_1$ also gedrückt ist. In gleicher Weise erhält man für den Mittelpunkt der Momente in B_1:

$$R\,a = T_1\,a\,\sin\alpha,$$

woraus

$$T_1 = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{n-1}{2\sin\alpha}\,q \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4)$$

folgt, wenn $\alpha = B\,A_1 A$ die Neigung der Diagonalen gegen den Horizont bedeutet.

Weiter ergiebt ein Schnitt $a_2\,c_2\,b_2$ für den Mittelpunkt der Momente in A_2 aus

$$R\,2\,a - q\,a = O_2\,h;\; O_2 = \frac{R\,2\,a - q\,a}{h} = \frac{M_2}{h},$$

wenn man das Biegungsmoment des Balkens in A_2 $R\,2\,a - q\,a$ mit M_2 bezeichnet, oder man hat allgemein

$$O_\nu = \frac{M_\nu}{h} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

Es ist ohne Weiteres klar, daß die Spannung U_2 in dem unteren Gurtungsstücke $A_1\,A_2$ der Spannung O_1 in $B\,B_1$ der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt ist, wie man durch einen Schnitt nach $a_1\,c_1\,b_1$ erkennt, wenn man B_1 als Momentenmittelpunkt annimmt, wodurch man aus

$$R\,a = U_2\,h;\; U_2 = R\,\frac{a}{h} = -\,O_1 = -\,\frac{M_1}{h}$$

erhält. Dies geht auch schon daraus hervor, daß von den fünf das Stück $A\,A_1\,a_1\,c_1\,b_1\,B$ angreifenden Kräften R, O_1, P_1, U_2 und q (in A_1) die beiden O_1 und U_2 horizontal, die übrigen drei vertical gerichtet sind, und aus dieser Betrachtung folgt daher auch für die Kraft P_1 in dem Pfosten $A_1\,B_1$:

$$P_1 = R - q = V_1,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (7)$$

wenn mit V_1 die verticale Scheerkraft in A_1 bezeichnet wird.

Da die letztere Betrachtung für jedes andere Balkenfeld, also z. B. für den Schnitt $a_4 c_4 b_4$, in gleicher Weise gilt, und man dafür

$$U_6 = -\,O_5 = -\,\frac{M_5}{h} \text{ und } P_5 = R - 5\,q = V_5$$

erhält, so kann man allgemein schreiben:

$$U_{\nu+1} = - O_\nu = \frac{M_\nu}{h} = q\,\frac{a}{h}\,\nu\,\frac{n-\nu}{2} \text{*)}, \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$P_\nu = R - \nu q = V_\nu = q\,\frac{n-1-2\nu}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Aus der Anstrengung der Pfosten ergiebt sich nun ohne Weiteres wieder die Spannkraft der Diagonalen, denn es ist klar, daß in irgend einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung, wie z. B. in B_5, die verticale Componente der Strebenkraft $T_6 \sin\alpha$ gerade gleich der Kraft P_5 in dem daselbst sich anschließenden Pfosten sein muß. Man hat daher

$$T_6 = \frac{P_5}{\sin\alpha},$$

oder allgemein

$$T_\nu = \frac{P_{\nu-1}}{\sin\alpha} = \frac{V_{\nu-1}}{\sin\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Demgemäß erhält man nach (9) für das letzte Feld die Spannung im Pfosten $A_7 B_7$ zu

$$P_{n-1} = R - (n-1)\,q = -\frac{n-1}{2}\,q = -R,$$

während in dem Endpfosten $A_n B_n$ die Kraft gleich Null ist. Ebenso ist die Spannung in dem letzten Stücke der oberen Gurtung $B_7 B_n$ nach (5) gleich Null, während die Strebenkraft in $A_n B_7$ zu

$$T_n = \frac{P_7}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha}$$

sich ergiebt. Aus (5) und (8) erkennt man zunächst, daß die Spannung in den Gurtungen in der Mitte, wo das Moment M ein Maximum ist, den größten Werth und zwar oben links und unten rechts von dem mittleren Pfosten $A_4 B_4$ annimmt. Da ferner in diesem Pfosten die Verticalkraft V ihre Richtung umkehrt, indem dieselbe links von $A_4 B_4$ aufwärts und rechts von $A_4 B_4$ abwärts gerichtet ist, so folgt aus (9) und (10) auch ein entgegengesetzter Sinn für die Kräfte in den Pfosten und Streben zu beiden Seiten dieses mittleren Querschnittes. Während z. B. die Diagonale $A_4 B_3$ durch die Kraft

---

*) Das Biegungsmoment M_ν in dem um ν Felder vom Auflager entfernten Knotenpunkte bestimmt sich bei voller Belastung des Trägers zu

$$M_\nu = R\,\nu\,a - q\,[a + 2a + 3a + \cdots (\nu-1)\,a] = q\,\frac{n-1}{2}\,\nu\,a - q\,\frac{\nu-1}{2}\,\nu\,a$$

$$= q\,a\,\nu\,\frac{n-\nu}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8^a)$$

$$T_4 = \frac{R - 3\,q}{sin\,\alpha} = \frac{q}{2\,sin\,\alpha}$$

gezogen wird, ist die folgende Diagonale $A_5\,B_4$ einer ebenso großen Druckkraft

$$T_5 = \frac{R_1 - 4\,q}{sin\,\alpha} = -\,\frac{q}{2\,sin\,\alpha} = -\,T_4$$

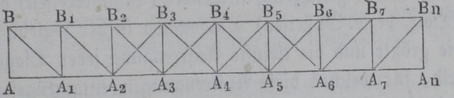
ausgesetzt. Der mittlere Pfosten $A_4 B_4$ wird durch die verticale Componente von T_5 mit $\frac{q}{2}$ gezogen, indem dieser Pfosten im Gleichgewichte ist, unter dem Einflusse der im unteren Knotenpunkte A_4 angreifenden Belastung q und der in A_4 und B_4 nach oben wirkenden gleichen verticalen Componenten der Diagonalspannungen T_4 und T_5, von denen diejenige von T_4 direct durch die Last q aufgenommen wird, während die Componente von T_5 erst durch Vermittelung des Pfostens auf den Lastpunkt übertragen wird, daher in dem Pfosten eine Spannung $\frac{q}{2}$ hervorruft. Wenn man annimmt, daß die Belastung q nicht in den unteren Knotenpunkten A, sondern in den oberen B angreift, so findet sich sogleich, daß dadurch in den Spannungen der einzelnen Fachwerksglieder nur insofern eine Aenderung eintritt, als jeder der inneren Pfosten noch außerdem einer zusätzlichen rückwirkenden Pressung im Betrage q ausgesetzt ist, während für die Endpfosten $A\,B$ und $A_n\,B_n$ diese Vermehrung natürlich nur den Betrag $\frac{q}{2}$ hat. Demgemäß bestimmt sich z. B. in dem Pfosten $A\,B$ die rückwirkende Pressung in dem Falle der Belastung des oberen Streckbaumes zu $P = R + \frac{q}{2} = \frac{n}{2}\,q$, während sie in dem letzten Stiele $A_n\,B_n$ nun nicht gleich Null, sondern gleich $\frac{q}{2}$ anzunehmen ist. Ebenso ist der mittlere Pfosten $A_4\,B_4$ in diesem Falle nicht einer Zug-, sondern einer Druckspannung $\frac{q}{2}$ ausgesetzt. Für die Kräfte in den Gurtungen und Diagonalen jedoch macht es gar keinen Unterschied, ob der obere oder untere Streckbaum zur Aufnahme der Belastung dient, oder ob die Brückenbahn zwischen beiden an den verticalen Pfosten befestigt ist. In dem letzteren Falle gelten offenbar für die Pfostenstücke oberhalb der Fahrbahn diejenigen Spannungen, welche vorstehend unter Zugrundelegung einer Belastung des unteren Streckbaumes gefunden wurden, während für die unterhalb der Fahrbahn befindlichen Stücke der Pfosten für jeden inneren Stiel noch eine rückwirkende Pressung von q und für jeden Endstiel von $\frac{q}{2}$ hinzuzufügen ist, wie dies einer Belastung der oberen Gurtung entsprechen würde.

Aus dem Bemerkten ergiebt sich, daß bei der in der Figur angenommenen Anordnung die Stiele links von der Mitte gedrückt und rechts von der Mitte gezogen werden, und daß umgekehrt die Diagonalen links von der Mitte als Zugbänder und rechts von der Mitte als Druckstreben wirken, welches Verhalten man so ausdrücken kann, daß bei einem Träger wie der vorliegende ist, in jeder Hälfte die Diagonalen gezogen werden, wenn sie nach dem zugehörigen Stützpunkte hin ansteigen, dagegen einer Pressung unterliegen, wenn sie nach der Mitte hin, also von dem zugehörigen Stützpunkte weg, ansteigen.

Derjenige Querschnitt, in welchem dieser Wechsel zwischen Zug- und Druckkräften in den Pfosten und Diagonalen eintritt, ist nach dem Vorhergehenden dadurch charakterisirt, daß in ihm die Verticalkraft V ihr Zeichen ändert oder durch Null geht, also in ihm auch das größte Moment M_{max} stattfindet. Dieser Querschnitt ist in der Mitte des Trägers nur dann gelegen, wenn, wie im Vorstehenden immer vorausgesetzt wurde, der Balken über seine ganze Länge gleichmäßig belastet ist. Wenn man dagegen eine nur theilweise Beschwerung des Trägers durch die mobile Belastung annimmt, so fällt dieser Querschnitt des Maximalmomentes nicht mehr mit der Mitte zusammen. Es ist vielmehr in §. 36 gezeigt worden, daß bei dem Auffahren der mobilen Last auf den Träger etwa in der Richtung von A nach A_n, der gedachte Querschnitt für $V = 0$ oder $M = M_{max}$ aus der Trägermitte der ankommenden Last entgegengeht, bis er mit dem Anfangspunkte derselben in C in einem Abstande λ links von der Mitte zusammentrifft, um dann beim weiteren Fortschreiten der Last mit dieser zugleich nach der Mitte A_4 und über diese hinaus bis zum Abstande $\lambda = A_4 C_1$ sich zu bewegen und schließlich nach der Mitte zurückzukehren, sobald die ganze Trägerlänge mit der Last gleichmäßig bedeckt ist. Hieraus folgt daher, daß auch derjenige Querschnitt, in welchem ein Wechsel zwischen Zug- und Druckspannung der Füllungstheile eintritt, je nach der Bewegung der Last seine Lage innerhalb der Strecke $C C_1$ verändert, oder daß die Pfosten und Diagonalen zu jeder Seite der Mitte in einem Abstande λ ebensowohl auf Druck wie auf Zug in Anspruch genommen werden.

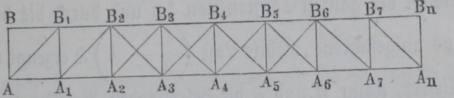
Einen derartigen Wechsel in der Anstrengung der Diagonalen bald auf Zug bald auf Druck muß man nun mit Rücksicht auf die Verbindungen in den Knotenpunkten thunlichst vermeiden, und man pflegt die Anordnung so zu treffen, daß sämmtliche Diagonalen entweder nur auf Druck oder nur auf Zug angesprochen werden können. Insbesondere pflegt man bei der Verwendung von Schmiedeeisen die Diagonalen immer so anzuordnen, daß sie als Bänder oder Zuganker zur Wirkung kommen, während man bei hölzernen Fachwerksträgern die Diagonalen meist als Druckstreben zur Wirkung bringt. Um dies zu erreichen, hat man nur das vorstehend ausgesprochene Gesetz zu berücksichtigen, wonach die Diagonalen in jedem der beiden Theile, in welche der Träger durch den Querschnitt des Maximalmomentes getheilt wird, entweder gezogen oder gedrückt werden, je nachdem sie nach dem zugehörigen Auflager hin ansteigen oder abfallen. Sollen daher die Diagonalen nur gezogen werden, so hat man sie nach Fig. 226 von dem unteren Knotenpunkte A_4 aus beiderseits nach den Auflagern hin

Fig. 226.



ansteigen zu lassen, wie $A_4 B_3$ und $A_4 B_5$, während eine Anordnung wie Fig. 227, bei welcher die Diagonalen von dem mittleren oberen Knotenpunkte nach den Auflagern hin abfallen, die Diagonalen als Druckstreben zur Wirkung bringt. Mit Rücksicht auf die angeführte, durch die Beweg-

Fig. 227.



lichkeit der Last erzeugte Verschiebung des Maximalmomentenquerschnitts aus der Mitte hat man daher, wenn die Diagonalen nur in einer Richtung widerstandsfähig sind, den mittleren Feldern bis zum Abstande λ zu jeder Seite der Mitte, Diagonalglieder nach beiden Richtungen, sogenannte Kreuz- oder Gegenstreben, zu geben, wie dies in den Figuren angedeutet ist. Selbstverständlich wird von diesen in den mittleren Feldern angeordneten gekreuzten Diagonalen immer nur die eine in Spannung versetzt, diejenige nämlich, in welcher eine solche Anstrengung (Zug oder Druck) hervorgerufen wird, gegen welche die Diagonalen vermöge ihrer Anordnung überhaupt nur reagiren können. Würde man annehmen müssen, daß diese Kreuzstangen eben so gut gegen Druck- wie Zugkräfte reagiren könnten, so würde nach dem im vorhergehenden Paragraphen Bemerkten die in jeder einzelnen Stange auftretende Kraft unbestimmt sein. Bei den schmiedeeisernen Fachwerken darf man annehmen, daß die Diagonalen von flacher bandförmiger Gestalt Druckkräften nicht zu widerstehen vermögen, indem sie zufolge ihrer größeren Länge einer seitlichen Ausbiegung unterworfen sind, weshalb man bei schmiedeeisernen Fachwerken solche Diagonalen als Zugbänder nach Fig. 226 anzuordnen hat. Bei hölzernen und gußeisernen, zwischen die Gurtungen gespreizten Diagonalen sind dieselben wesentlich geeignet, Druckkräften zu widerstehen, und erfordern dieselben daher die durch Fig. 227 dargestellte Anordnung. Sollen schmiedeeiserne Fachwerksglieder, wie die oberen Gurtungstheile und Pfosten, druckfähig sein, so hat man natürlich denselben geeignete Querschnitte zu geben, welche vermöge ihrer Form die obgedachte seitliche Ausbiegung nicht zulassen, worüber später noch Näheres angegeben werden wird.

Die Anzahl der mittleren Felder, welche mit Gegenstreben zu versehen sind, findet man dadurch, daß man für das System einfacher, von der Mitte aus nach beiden Seiten gleichzeitig steigender (Schmiedeeisen) oder gleichzeitig abfallender (Holz, bezw. Gußeisen) Diagonalen in der sogleich zu besprechenden Weise die größte und die kleinste Anstrengung jeder Diagonale ermittelt und jedes Feld, für welches diese Anstrengungen entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, mit einer Gegenstrebe versieht. Man kann zu dieser Bestimmung auch durch Berechnung der in Fig. 225 mit λ bezeichneten Entfernung $A_4 C = A_4 C_1$ gelangen, um welche der Querschnitt des Maximalmomentes unter dem Einflusse der mobilen Last sich aus der Mitte verschiebt. Man findet diese Größe λ nach dem im §. 36 darüber Angeführten durch Gleichsetzung der beiden entgegengesetzten abscheerenden Kräfte, welche in C durch das Eigengewicht der ganzen Construction $l\,p$ und durch die bis zum Punkte C von A aus aufgefahrene mobile Last $\left(\frac{l}{2} - \lambda\right) k$ erzeugt werden. Diese Bedingung liefert, wenn p und k die betreffenden Belastungen pro Längeneinheit vorstellen:

$$\frac{p\,l}{2} - p\left(\frac{l}{2} - \lambda\right) = k\left(\frac{l}{2} - \lambda\right)\frac{\frac{l}{2} - \lambda}{2\,l},$$

oder, wenn $\frac{l}{2} - \lambda = A\,C = A_n\,C_1 = c$ gesetzt wird:

$$c^2 + 2\,\frac{p}{k}\,l\,c = \frac{p}{k}\,l^2.$$

Setzt man noch das Verhältniß

$$\frac{\text{Eigengewicht}}{\text{Verkehrslast}} = \frac{p}{k} = n,$$

so folgt aus der gefundenen Gleichung:

$$c = \left(\frac{l}{2} - \lambda\right) = -\,n\,l + \sqrt{(n^2 + n)\,l^2}$$
$$= l\left(-\,n + \sqrt{n^2 + n}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Hieraus erhält man für:

$n = \frac{p}{k} =$	1	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$c = \frac{l}{2} - \lambda =$	0,414 l	0,366 l	0,348 l	0,325 l	0,290 l	0,232 l
$\lambda =$	0,086 l	0,134 l	0,152 l	0,175 l	0,210 l	0,268 l

Hätte man z. B. für einen Träger von 30 m Spannweite $n = \frac{p}{k} = 0{,}3$, so würde $\lambda = 0{,}175 \,.\, 30 = 5{,}25$ m folgen, und wenn der ganze Träger in 10 Felder von je 3 m Länge abgetheilt wäre, so müßten auf jeder Seite von der Mitte zwei, also im Ganzen vier Felder mit Gegenstreben versehen werden.

Bisher wurde immer eine volle Belastung des Trägers über *seine ganze Länge* angenommen und es bleibt daher noch zu untersuchen, ob dieser Belastungszustand auch der ungünstigste ist, welchem die größte Anstrengung der einzelnen Fachwerksglieder entspricht. In Betreff der Gurtungen ist dies allerdings der Fall, denn da nach (8) an irgend einem Pfosten A_ν die Spannung der rechts unten bezw. links oben sich anschließenden Gurtung

$$U_{\nu+1} = O_\nu = \frac{1}{h} M_\nu,$$

ist, und da nach §. 36 das Biegungsmoment M in irgend einem Querschnitte seinen absolut größten Werth bei der vollen Belastung des Balkens erreicht, so folgt, daß *die Gurtungen in allen Querschnitten ihre größten Spannungen bei voller Belastung des ganzen Trägers annehmen.* Man kann daher die in §. 36 für die größten Momente angegebene Parabel ebenfalls als eine Darstellung für die Spannkräfte in den Gurtungen und für die den Gurtungen zu gebenden Querschnitte ansehen. Wenn man nämlich in den Figuren 228 und 229 über

Fig. 228.

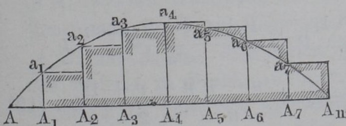
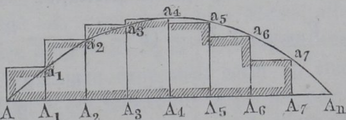


Fig. 229.



$AA_n = l$ die Parabeln aufträgt, für welche die Ordinaten in den Knotenpunkten $A, A_1, A_2 \ldots$ gleich den zugehörigen Momenten M, M_1, M_2 des Fachwerksträgers, Fig. 225, bei voller Belastung sind, so ist nach dem Vorstehenden klar, daß jede dieser Ordinaten, z. B. $A_3 a_3$, auch ein Maß abgiebt für die Spannung also den Querschnitt der unteren Gurtung in dem Felde rechts von $A_3 B_3$ und der oberen Gurtung in dem Felde links von $A_3 B_3$, weil nach (8)

$$U_4 = O_3 = \frac{1}{h} M_3 \text{ ist.}$$

Wenn man daher annimmt, daß die Querschnitte der Gurtungen, die innerhalb der einzelnen Felder constant sein müssen, von Knotenpunkt zu Knotenpunkt sich den daselbst auftretenden Spannungen gemäß ändern, so erkennt man, daß durch die schraffirten, aus einzelnen Rechtecken zusammengesetzten Flächen in Fig. 228 der Materialaufwand der unteren und in Fig. 229 derjenige der oberen Gurtung graphisch veranschaulicht wird.

In Betreff der Anstrengungen, welchen die Füllungsglieder, die Pfosten und Diagonalen, ausgesetzt sind, erkennt man aus (9) und (10), daß diese mit der Verticalkraft V proportionalen Anstrengungen P und T ihre äußersten Werthe gleichzeitig mit den größten und kleinsten Werthen der Verticalkraft V annehmen. Nun ist aber in §. 36 gezeigt worden, daß in irgend einem Querschnitte die Verticalkraft V den größten positiven Werth annimmt, wenn die ganze Strecke zwischen diesem Querschnitte und dem jenseitigen Stützpunkte mit der beweglichen Last bedeckt ist, während der größte negative Werth von V sich einstellt, wenn die Strecke zwischen dem Querschnitte und dem diesseitigen Stützpunkte belastet ist. Will man also für irgend einen Knotenpunkt, z. B. für A_3, Fig. 225, die größte positive oder aufwärts gerichtete Verticalkraft V_{max} finden, so hat man die Strecke $A_3 A_n$ als mit der mobilen Belastung bedeckt anzunehmen, und nach den bekannten Regeln die Scheerkraft in diesem Querschnitte als die aus der Gesammtbelastung des Trägers resultirende Auflagerreaction in A, vermindert um das Eigengewicht des Stückes $A A_3$ zu bestimmen. Ebenso findet man die kleinste Schubkraft für A_3 unter der Annahme, daß die bewegliche Last die Strecke von A bis A_3 bedeckt.

Für das νte Feld, von dem Auflager A an gerechnet, findet man demnach die äußersten Scheerkräfte:

$$V_{\nu\,max} = R_\nu - (\nu - 1)\, p = \frac{n-1}{2} p + \frac{1 + 2 + \cdots n - \nu}{n} k$$

$$- (\nu - 1)\, p = \frac{n - 2\nu + 1}{2} p + \frac{n-\nu}{n} \frac{n - \nu + 1}{2} k \,. \quad (12)$$

und

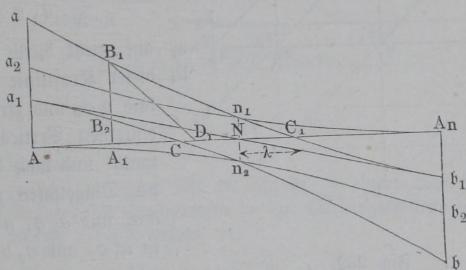
$$V_{\nu\,min} = R_\nu - (\nu - 1)\, q = \frac{n-1}{2} p + \frac{n - 1 + n - 2 + \cdots n - \nu + 1}{n} k$$

$$- (\nu - 1) p - (\nu - 1) k = \frac{n - 2\nu + 1}{2} p - \nu \frac{\nu - 1}{2n} k \,. \, . \quad (13)$$

Aus diesen Grenzwerthen der Scheerkraft V findet man daher nach (9) und (10) die äußersten Inanspruchnahmen P der Pfosten und T der Diagonalen.

Nach dem in §. 36 über die Maxima und Minima der verticalen Scheerkräfte Angeführten ist es nun auch leicht, die Anstrengungen der Füllungsglieder graphisch zu veranschaulichen. Trägt man nämlich auf einer Axe $A A_n = l$, Fig. 230, die Strecke $A a_1 = A_n b_1 = p \frac{l}{2}$ ab und zieht die Gerade $a_1 N b_1$, so erhält man in dieser das Diagramm für die aus dem Eigengewichte herrührenden Scheerkräfte. Ferner erhält man die Begrenzung

Fig. 230.



der maximalen Schubkräfte, welche durch die mobile Belastung k erzeugt werden, in den beiden Parabeln $a_2 n_1 A_n$ und $A n_2 b_2$, die ihren Scheitel bezw. in A_n und A haben, und deren zur Scheiteltangente $A A_n$ senkrechte Ordinaten $A a_2 = A_n b_2 = k \frac{l}{2}$ sind. Eine Vereinigung dieser beiden Diagramme für p und k durch Addition der Ordinaten führt dann zu den beiden Curven $a C_1 b_1$ und $a_1 C b$ derart, daß $a C_1 b_1$ den größten und $a_1 C b$ den kleinsten Schubkräften entspricht. Zeichnet man auf der Axe $A A_n$ die den Knotenpunkten $A_1, A_2 \ldots$ entsprechenden Ordinaten, so findet man für jeden Knotenpunkt wie A_1 zwei verschiedene Schubkräfte $A_1 B_1$ und $A_1 B_2$. Von diesen ist die größere $A_1 B_2$ der Dimensionirung des Pfostens zu Grunde zu legen. Zieht man dann noch durch B_1 eine Gerade $B_1 D_1$ unter dem Neigungswinkel α der Diagonalen gegen die Horizontale, so giebt $B_1 D_1$ das Maß für die in der Diagonale wirkende Kraft $\frac{V}{\sin \alpha}$, welche von dem unbelasteten Knotenpunkte des Pfostens $A_1 B_1$ ausgeht. Das Diagramm giebt in der Strecke $C C_1$ zwischen den Durchschnittspunkten der Axe mit den beiden Curven der maximalen Schubkraft ebenfalls die Länge 2λ in der Mitte des Trägers, für welche Gegenstreben anzuordnen sind, da in dieser Strecke die beiden gedachten Schubkräfte entgegengesetzte Vorzeichen annehmen.

Nach dem Vorstehenden ist es nun auch leicht, die Anstrengungen der einzelnen Glieder des Fachwerkes aus der Construction eines einfachen Kräftepolygons zu entnehmen. Nimmt man wieder volle Belastung des Trägers, Fig. 225, an, und trägt in Fig. 231 und 232 auf einer Verticallinie von o bis q_8 die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte gleich

$$\frac{q}{2},\ q,\ q \cdots \frac{q}{2}$$

auf, zieht durch die Mitte a dieser Kraftlinie die Horizontale $a a_4$ und zerlegt nun die einzelnen Verticalkräfte horizontal und nach der Richtung der Diagonalen z. B. $a q$ in $a a_1$ und $a_1 q$, $a q_1 = a_1 b_1$ in $a_1 a_2$ und $a_2 b_1$ u. s. f., so erhält man das Diagramm in Fig. 231, wenn die unteren Knotenpunkte belastet sind, während Fig. 232 für die Anordnung gilt, bei der die Fahrbahn auf der oberen Gurtung ruht. Die Vergleichung der in die einzelnen Strecken eingetragenen Bezeichnung mit der übereinstimmenden in Fig. 225 läßt ohne Schwierigkeit die Anstrengung jedes einzelnen Gliedes bei voller Belastung erkennen. Will man dann auch die größten Spannungen der Pfosten und Diagonalen bei theilweiser Belastung kennen lernen, so kann in der vorgedachten Weise die Fig. 230 hierzu dienen, wenn man in derselben die Verticalkraft Aa in den Auflagern gleich $a q = a q_7$ der Figuren 231 und 232 macht, u. s. f.

Fig. 231.

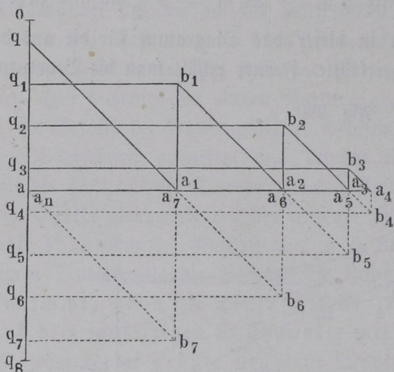
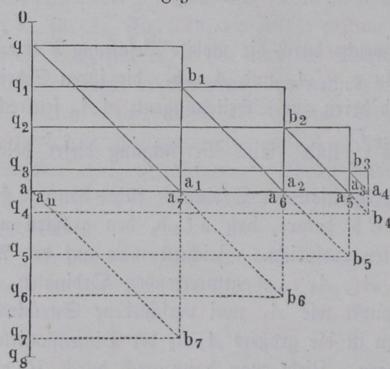


Fig. 232.



Das hier erörterte Fachwerksystem mit rechtwinkeligen Dreiecken und Zugstreben heißt das Mohnié'sche; bei dem Howe'schen Systeme wirken die Diagonalen als Druckstreben. Die Höhe h derartiger Träger pflegt man in der Praxis etwa gleich $\frac{1}{10}$ der Spannweite l zu wählen, und den Diagonalen meist eine Neigung unter 45^0 gegen den Horizont zu geben, da sich leicht zeigen läßt, daß bei einer solchen Neigung der Diagonalen der Materialaufwand verhältnißmäßig am geringsten ausfällt. Nimmt man $\alpha = 45^0$ und $h = \frac{1}{10} l$, so erhält man die Anzahl der Felder gleich 10.

Beispiel. Für einen Fachwerksträger von 30 m Länge und 3 m Höhe zwischen den parallelen Gurtungen, welcher in 10 quadratische Felder abgetheilt ist, sollen die Spannungen der Glieder ermittelt werden, wenn das Eigengewicht der ganzen Brückenconstruction pro laufenden Meter mit 2 Tonnen und die Verkehrslast des Geleises mit 6 Tonnen angenommen wird.

Da das Gewicht der Brückenbahn auf zwei Träger sich vertheilt, so erhält man für jeden Knotenpunkt

$$p = \frac{1}{2}\, 3\,.\, 2 = 3 \text{ Tonnen}$$

und

$$k = \frac{1}{2}\, 3\,.\, 6 = 9 \text{ Tonnen}$$

also $q = 12$ Tonnen.

Legt man zunächst die Figur 233 zu Grunde, so findet man für die volle Belastung des Trägers die Spannungen in den Gurtungstheilen, wenn man in (8) für ν die Werthe 1 bis 9 einsetzt, zu:

$$O_1 = U_2 = q\,\frac{a}{h}\,\nu\,\frac{n-\nu}{2} = 12\,\frac{3}{3}\,1\,\frac{10-1}{2} = 54 \text{ Tonnen},$$

$$O_2 = U_3 = 12\,.\,2\,\frac{8}{2} = 96 \text{ Tonnen},$$

$$O_3 = U_4 = 12\,.\,3\,\frac{7}{2} = 126 \text{ Tonnen},$$

$$O_4 = U_5 = 12\,.\,4\,\frac{6}{2} = 144 \text{ Tonnen},$$

$$O_5 = U_6 = 12\,.\,5\,\frac{5}{2} = 150 \text{ Tonnen},$$

$$O_6 = U_7 = 12\,.\,6\,\frac{4}{2} = 144 \text{ Tonnen} = O_4 = U_5,$$

$$O_7 = U_8 = 12\,.\,7\,\frac{3}{2} = 126 \text{ Tonnen} = O_3 = U_4,$$

$$O_8 = U_9 = 12\,.\,8\,\frac{2}{2} = 96 \text{ Tonnen} = O_2 = U_3,$$

$$O_9 = U_{10} = 12\,.\,9\,\frac{1}{2} = 54 \text{ Tonnen} = O_1 = U_3,$$

Die Spannungen U_1 und O_{10} sind Null. Die äußersten Spannungen der Diagonalen finden sich aus den nach (12) und (13) zu ermittelnden Werthen von V_{max} und V_{min}.

Es möge entsprechend wie früher hinsichtlich der Schubkraft das positive Zeichen einer aufwärts gerichteten Kraft, also bei den Diagonalen in der Figur einer Zugkraft gegeben werden, so daß ein negatives Resultat eine Druckkraft andeutet. Man erhält, da hier

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707$$

ist, dann die Strebenkräfte

$$T = \frac{V}{\sin\alpha} = V\sqrt{2} = 1{,}414\, V.$$

Nimmt man ferner eine Belastung der unteren Gurtungen an, so folgt für das erste Feld mit $\nu = 1$:

$$V_{1max} = \frac{n-2\nu+1}{2}p + \frac{n-\nu}{n}\,\frac{n-\nu+1}{2}k = \frac{9}{2}3 + \frac{9}{10}\,\frac{10}{2}9 = +54\,\mathrm{t} = P_{max};$$

$$T_{1max} = 1{,}414 . 54 = +76{,}36\ \mathrm{t}.$$

$$V_{1min} = \frac{n-2\nu+1}{2}p - \nu\,\frac{\nu-1}{2n}k = \frac{9}{2}3 - 0 = +13{,}5 = P_{min};$$

$$T_{1min} = 1{,}414 . 13{,}5 = +19{,}09\ \mathrm{t}.$$

Ebenso für die übrigen Felder

$$V_{2max} = \frac{7}{2}3 + \frac{8}{10}\,\frac{9}{2}9 = +42{,}9 = P_{1max}; \qquad T_{2max} = +60{,}66\ \mathrm{t}.$$

$$V_{2min} = \frac{7}{2}3 - 2\,\frac{1}{20}9 = +9{,}6 = P_{1min}; \qquad T_{2min} = +13{,}57\ \mathrm{t}.$$

$$V_{3max} = \frac{5}{2}3 + \frac{7}{10}\,\frac{8}{2}9 = +32{,}7 = P_{2max}; \qquad T_{3max} = +46{,}24\ \mathrm{t}.$$

$$V_{3min} = \frac{5}{2}3 - 3\,\frac{2}{20}9 = +4{,}8 = P_{2min}; \qquad T_{3min} = +6{,}79\ \mathrm{t}.$$

$$V_{4max} = \frac{3}{2}3 + \frac{6}{10}\,\frac{7}{2}9 = +23{,}4 = P_{3max}; \qquad T_{4max} = +33{,}08\ \mathrm{t}.$$

$$V_{4min} = \frac{3}{2}3 - 4\,\frac{3}{20}9 = -0{,}9 = P_{3min}; \qquad T_{4min} = -1{,}27\ \mathrm{t}.$$

$$V_{5max} = \frac{1}{2}3 + \frac{5}{10}\,\frac{6}{2}9 = +15 = P_{4max}; \qquad T_{5max} = +21{,}21\ \mathrm{t}.$$

$$V_{5min} = \frac{1}{2}3 - 5\,\frac{4}{20}9 = -7{,}5 = P_{4min}; \qquad T_{5min} = -10{,}60\ \mathrm{t}.$$

$$V_{6max} = -\frac{1}{2}3 + \frac{4}{10}\,\frac{5}{2}9 = +7{,}5 = P_{5max}; \qquad T_{6max} = +10{,}60\ \mathrm{t}.$$

$$V_{6min} = -\frac{1}{2}3 - 6\,\frac{5}{20}9 = -15 = P_{5min}; \qquad T_{6min} = -21{,}21\ \mathrm{t}.$$

$$V_{7max} = -\frac{3}{2}3 + \frac{3}{10}\,\frac{4}{2}9 = +0{,}9 = P_{6max}; \qquad T_{7max} = +1{,}27\ \mathrm{t}.$$

$$V_{7min} = -\frac{3}{2}3 - 7\,\frac{6}{20}9 = -23{,}4 = P_{6min}; \qquad T_{7min} = -33{,}08\ \mathrm{t}.$$

$$V_{8max} = -\frac{5}{2}3 + \frac{2}{10}\frac{3}{2}9 = -4{,}8 = P_{7max}; \quad T_{8max} = -6{,}79 \text{ t.}$$

$$V_{8min} = -\frac{5}{2}3 - 8\frac{7}{20}9 = -32{,}7 = P_{7min}; \quad T_{8min} = -46{,}24 \text{ t.}$$

$$V_{9max} = -\frac{7}{2}3 + \frac{1}{10}\frac{2}{2}9 = -9{,}6 = P_{8max}; \quad T_{9max} = -13{,}57 \text{ t.}$$

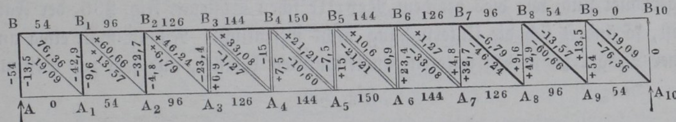
$$V_{9min} = -\frac{7}{2}3 - 9\frac{8}{20}9 = -42{,}9 = P_{8min}; \quad T_{9min} = -60{,}66 \text{ t.}$$

$$V_{10max} = -\frac{9}{2}3 + 0 = -13{,}5 = P_{9max}; \quad T_{10max} = -19{,}09 \text{ t.}$$

$$V_{10min} = -\frac{9}{2}3 + 10\frac{9}{20}9 = -54 = P_{9min}; \quad T_{10min} = -76{,}36 \text{ t.}$$

Diese Zahlen, welche in die Fig. 233 eingetragen sind, zeigen, daß bei der dieser Figur entsprechenden Anordnung der Diagonalen die letzteren in den linken drei Endfeldern $A - A_3$ nur gezogen, in den rechtsliegenden drei Feldern $A_7 - A_{10}$ nur gedrückt und in den Mittelfeldern abwechselnd gedrückt

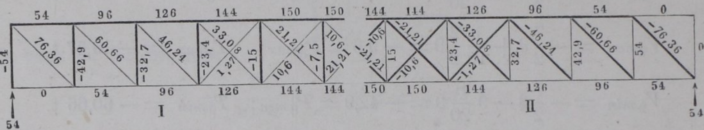
Fig. 233.



und gezogen werden, wie dies in der Figur durch schwache, starke und doppelte Linien angedeutet ist. Demgemäß werden auch die vier mittleren Stiele A_3, A_4, A_5, A_6 sowohl auf Druck wie auf Zug in Anspruch genommen, während die Stiele links A, A_1, A_2 nur gedrückt, diejenigen rechts A_7, A_8, A_9 nur gezogen werden. Will man daher den Träger so ausführen, daß die Diagonalen nur gezogen werden, so hat man dieselben von der Mitte aus zu beiden Seiten nach den Auflagern hin ansteigen zu lassen, also der linken Trägerhälfte Diagonalen, wie in Fig. 233 gerichtet, zu geben, dagegen für die rechte Hälfte des Trägers die Diagonalen nach der Richtung $A_5 B_6$, $A_6 B_7$ u. s. w. zu stellen. Es ist dann leicht ersichtlich, daß die Spannungszahlen der Fig. 233 in den drei Feldern rechts mit umgekehrten Zeichen für die so angeordneten Diagonalen gültig sein werden, z. B. wird die in dem neunten Felde angebrachte Diagonale $A_8 B_9$ die entgegengesetzten Spannungen von denjenigen in $A_9 B_8$, d. h. also genau dieselben Spannungen auszuüben haben, wie die Diagonale $A_2 B_1$ im zweiten Felde, wie dies auch schon aus der Symmetrie der nunmehr angewandten Trägerform sich ergiebt. In den mittleren Feldern wird man dann gekreuzte Diagonalen anordnen, und es ist ebenfalls klar, daß z. B. die im fünften Felde in der Richtung $A_4 B_5$ angebrachte Gegenstrebe diejenige Zugkraft 10,60 Tonn. ausüben wird, welche ohne diese Gegenstrebe von der einfachen Strebe $A_5 B_4$ als Druckkraft geäußert werden müßte. In Folge einer solchen Anordnung des Trägers, von welchem in Fig. 234 I (a. f. S.) eine Hälfte gezeichnet ist, werden die Diagonalen in allen Feldern nur durch Zugkräfte in Anspruch genommen, und es ist klar, daß in Folge dessen die Stiele nur gedrückt, niemals gezogen werden können. Letzteres erkennt man sofort, wenn man den Kopf eines Stieles,

d. h. den oberen Knotenpunkt ins Auge faßt, auf welchen durch die Diagonalen nur **abwärts** gerichtete Kräfte ausgeübt werden.

Fig. 234.

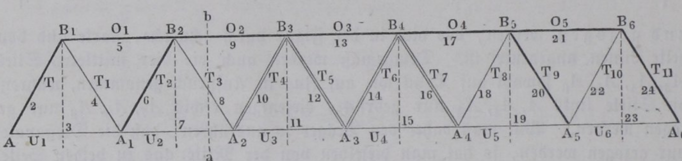


In gleicher Weise stellt Fig. 234 II die Anordnung von der Hälfte eines Trägers vor, in welchem die Diagonalen nur gegen Druckkräfte widerstandsfähig sind, in Folge dessen daselbst also die Stiele nur gezogen werden können. Die in Fig. 234 eingetragenen Spannungszahlen lassen sich ohne Weiteres aus Fig. 233 entnehmen.

§. 55. **Zusammengesetzte Fachwerksträger.**

Wenn die Füllungsglieder zwischen den Gurtungen des Fachwerksträgers nicht nach rechtwinkeligen, sondern nach anderen, etwa nach gleichschenkeligen Dreiecken angeordnet sind, wie dies bei dem **Neville**'schen Systeme, Fig. 235, der Fall ist, so ändert sich die Untersuchung nicht wesentlich. Nimmt man etwa an, der Träger sei in den unteren Knotenpunkten belastet, und setzt zur Bestim-

Fig. 235.



mung der Spannungen in den Gurtungen die ganze Länge l des Trägers belastet voraus, so erhält man für irgend einen Schnitt ab die Spannung in der oberen Gurtung, wenn man A_2 als Mittelpunkt für die Momente annimmt, zu

$$O_2 = \frac{1}{h}\,(R\,.\,2\,a - q\,a),$$

und ebenso für den Mittelpunkt B_2 die Spannung der unteren Gurtung zwischen A_1 und A_2 zu:

$$U_2 = \frac{1}{h}\left(R_1\,\frac{3}{2}\,a - q\,\frac{a}{2}\right),$$

also allgemein die Spannung in einem Gurtungsstücke

$$S = \frac{1}{h}\,M, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn M das Moment der äußeren Kräfte für den dem betreffenden Stücke