wurde, der Verticalkraft V des Querschnitts das Gleichgewicht zu halten, so daß der Ausdruck folgt:

$$V = \int_{-e}^{+e} b z \partial y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Für den rechteckigen Querschnitt z. B. von der Breite b und Höhe $h = 2e$, für welchen, wie oben gezeigt worden, die Begrenzung der Schubkraftordinaten eine Parabel $b m_2 c$ ist, hat man den Inhalt derselben bekanntlich

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \partial y = \frac{2}{3} h \,.\, m_1 m_2 = \frac{2}{3} h \sigma_0,$$

folglich erhält man die Schubkraft σ_0 in der neutralen Axe aus (9) durch

$$V = b \frac{2}{3} h \sigma_0 \text{ zu } \sigma_0 = \frac{3}{2h} \frac{V}{b}$$

übereinstimmend mit dem oben aus (7) ermittelten Werthe.

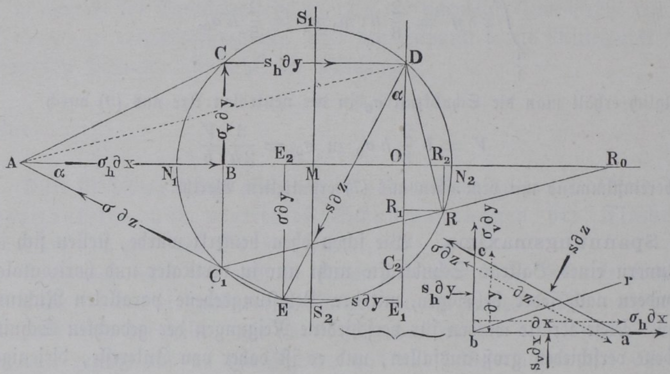
Spannungsmaxima. Wie schon oben bemerkt wurde, stellen sich im §. 49.
Innern eines Balkens Schubkräfte nicht nur in verticaler und horizontaler, sondern nach jeder beliebigen, mit der Belastungsebene parallelen Richtung ein. Diese Kräfte werden für verschiedene Neigungen der gedachten Schnittebene verschieden groß ausfallen, und es ist daher von Interesse, diejenigen Richtungen kennen zu lernen, nach welchen die Schubspannungen ihre absolut größten Werthe annehmen. Die Ermittelung dieser Spannungsmaxima ist schon in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 3 auf analytischem Wege vorgenommen, es soll hier der Anschaulichkeit halber die Untersuchung graphisch in der von Culmann*) angegebenen Art angeführt werden.

Es sei abc, Fig. 190 (a. f. S.), der Durchschnitt eines kleinen dreiseitigen Prismas von einer Länge senkrecht zur Zeichnung gleich Eins, dessen Basis $ab = \partial x$ horizontal, und dessen Seite $bc = \partial y$ vertical gerichtet sein mag. Die dritte Seite $ac = \partial z$ soll unter dem beliebigen Winkel α gegen die Horizontale ab geneigt sein. Es handelt sich darum, für diese unter dem willkürlich gewählten Winkel α geneigte Schnittfläche ac die normale Spannung s und die Schubspannung σ zu ermitteln. Die beiden anderen Prismaflächen bc und ab sind gewissen Normalspannungen s_h und s_v und ebenso gewissen Schubspannungen σ_v und σ_h ausgesetzt, von welchen s_h aus dem bekannten Biegungsmomente M des Balkens in bc und $\sigma_h = \sigma_v$ aus der gleichfalls bekannten Verticalkraft V nach dem Vorstehenden leicht zu ermitteln sind. Die Spannung s_v dagegen ist nicht

*) Culmann, Die graphische Statik.

bekannt; dieselbe hängt von der Art ab, in welcher die verticale Belastung an dem Trägerquerschnitte angreift, und man kann in den gewöhnlichen Fällen eine solche Anordnung voraussetzen, vermöge deren die Spannung s_v auf ab zu Null wird. Wenn diese Annahme*) gemacht wird, so ist die Aufgabe, aus den drei bekannten Kräften $s\partial y$, $\sigma_h \partial x$ und $\sigma_v \partial y$ die Spannungen s und σ, oder die totalen Kräfte $s\partial z$ und $\sigma\partial z$ zu ermitteln, einfach auf die Verzeichnung des betreffenden Kräftepolygons zurückgeführt.

Fig. 190.



Trägt man nämlich in $ABCD$ die drei Kräfte $\sigma_h \partial x$, $\sigma_v \partial y$ und $s_h \partial y$ ihrer Richtung und Größe nach an einander an, so erhält man in der Schlußlinie DA die Resultirende aus den beiden die Fläche ac angreifenden Kräften $\sigma\partial z$ und $s\partial z$, und diese Kräfte selbst, wenn man durch A eine Parallele AE mit ac und durch D eine zu AE senkrechte Gerade zieht. Dann ist nach dem gewählten Kräftemaßstabe

$$DE = s\partial z \text{ und } EA = \sigma\partial z.$$

Projicirt man den Punkt E auf AB und auf die Verticale DO durch D nach E_2 und E_1, so ist leicht zu erkennen, daß

*) Diese Voraussetzung trifft, wie eine nähere, hier nicht weiter durchzuführende Untersuchung ergiebt, dann zu, wenn die Belastung den Querschnitt in einer solchen Weise angreift, daß die Vertheilung nach demselben Gesetze erfolgt, welches vorstehend für die Vertheilung der verticalen Schubkraft auf die Querschnittsfläche gefunden wurde. Danach würde bei Blechträgern annähernd eine gleichmäßig auf die Mittelwand vertheilte Uebertragung stattfinden müssen, wie sie der wirklichen Ausführung auch meistens entspricht. S. Ritter, Lehrb. der Ingenieurmechanik.

$$EE_2 = \sigma \partial z . sin \alpha = \sigma \partial y$$

und

$$EE_1 = s \partial z . sin \alpha = s \partial y$$

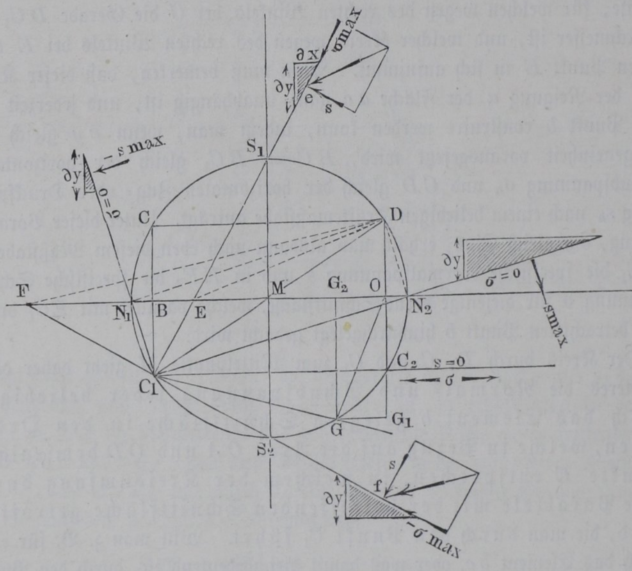
ist. Verbindet man jetzt A mit C, so hat man auch $CAB = \alpha$, denn für diesen Winkel ist wegen der Gleichheit von σ_h und σ_v:

$$tg\ CAB = \frac{\sigma_v \partial y}{\sigma_h \partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = tg\, \alpha.$$

Verlängert man daher CB bis zum Durchschnitte C_1 mit AE, so ist auch $BC = BC_1$. Die drei Punkte D, C und C_1 liegen daher auf einem Kreise, für welchen wegen des rechten Winkels bei C die Gerade DC_1 ein Durchmesser ist, und welcher Kreis wegen des rechten Winkels bei E auch diesen Punkt E in sich aufnimmt. Man muß bemerken, daß dieser Kreis von der Neigung α der Fläche ac ganz unabhängig ist, und jederzeit für den Punkt b construirt werden kann, indem man, wenn ∂y gleich der Längeneinheit vorausgesetzt wird, $BC = BC_1$ gleich der horizontalen Schubspannung σ_h und CD gleich der horizontalen Zug- oder Druckspannung s_h nach einem beliebigen Kräftemaßstabe anträgt. Unter dieser Voraussetzung, ∂y gleich Eins, erhält man alsdann nach eben diesem Maßstabe in EE_1 die specifische Normalspannung s und in EE_2 die specifische Schubspannung σ für diejenige ebene Schnittfläche, welche parallel mit EC_1 durch den betrachteten Punkt b hindurchgelegt gedacht wird.

Der Kreis durch D, C und C_1 zum Mittelpunkte M giebt daher ohne Weiteres die Normal- und Schubspannung jeder beliebigen durch das Element b gelegten Schnittfläche in den Ordinaten, welche in Bezug auf die Axen OA und OD demjenigen Punkte E entsprechen, in welchem der Kreisumfang durch eine Parallele mit der betreffenden Schnittfläche getroffen wird, die man durch den Punkt C_1 führt. Will man z. B. für eine durch das Element bc, oder was damit gleichbedeutend ist, durch den Punkt b gelegte Schnittfläche br die Spannungen finden, so legt man durch C_1 eine mit br parallele Gerade, welche den Kreis in R schneidet, und erhält in den Ordinaten $RR_1 = s_r$ und $RR_2 = \sigma_r$ die specifischen Spannungen für die Schnittfläche br. Man erkennt auch, daß die Normalspannung RR_1 dieser Schnittfläche und diejenige EE_1 der Fläche ac auf entgegengesetzten Seiten der Axe DO gelegen sind, wodurch ein entgegengesetzter Sinn der Spannungen angedeutet ist. Während nämlich die Normalspannung auf die Fläche ac eine in das Prisma abc hinein gerichtete, durch DE angezeigte Pressung ist, wird die Fläche br durch eine von dem Prisma bcr fort gerichtete, durch DR angegebene Zugspannung angegriffen. In welcher Richtung eine Spannung überhaupt wirkt, davon kann man in jedem Falle sich Rechenschaft geben, wenn man aus dem Kräftepolygone die Resultirende der beiden Spannkräfte aufsucht. Diese Resultirende ist z. B. für die Fläche $a\,c$ der Richtung und Größe nach durch $D\,A$ gegeben, daher müssen die Einwirkungen, welche auf die Fläche $a\,c$ von der äußeren Umgebung ausgeübt werden, in dem durch die Pfeile angedeuteten Sinne in den Richtungen von D nach E und von E nach A erfolgen. Ebenso erhält man für die Fläche $b\,r$, welche als Begrenzung des Prismas $b\,c\,r$ zu denken ist, die auf dieselbe von den sie begrenzenden Körpertheilchen aus-

Fig. 191.



geübte Einwirkung durch $D\,R_0$ dargestellt, d. h. die beiden Spannungen wirken in der Richtung von D nach R und von R nach R_0 u. s. f.

Man erkennt auch aus der Figur, daß den zwei Endpunkten N_1 und N_2 des horizontalen Durchmessers bezw. die größte und kleinste horizontale Ordinate $O\,N_1$ und $O\,N_2$ zugehören, woraus man schließt, daß der Richtung der Fläche $C_1\,N_1$ das Maximum der normalen Spannung $s_{max} = O\,N_1$ und der Fläche $C_1\,N_2$ das Minimum $s_{min} = O\,N_2$ zukommt. Ebenso gehören den Flächen $C_1\,S_1$ und $C_1\,S_2$ die absolut größten Schubspannungen $\sigma_{max} = \sigma_{min} = M\,S_1 = M\,S_2$ an. In Fig. 191 sind diese vier dem betrachteten Punkte im Balken zugehörigen charakteristischen

Flächen $C_1 N_1$, $C_1 N_2$, $C_1 S_1$ und $C_1 S_2$ besonders dargestellt. Man ersieht hieraus zunächst, da der Radius des Kreises durch

$$MN_1 = MC = \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

ausgedrückt ist, daß der Fläche $C_1 N_1$ eine Normalspannung (negative)

$$- s_{max} = O N_1 = - N_1 O = - \frac{s}{2} - \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

und der Fläche $C_1 N_2$ eine solche von

$$+ s_{max} = O N_2 = M N_2 - M O = - \frac{s}{2} + \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \cdot (2)$$

zukommt, während für beide Flächen die Schubspannung gleich Null ist. Da die beiden Geraden $C_1 N_1$ und $C_1 N_2$ auf einander senkrecht stehen, so giebt jede derselben die Richtung der gesammten Druckkraft für die der anderen entsprechende Schnittfläche an.

Ebenso hat man die absolut größten den Flächen $C_1 S_1$ und $C_1 S_2$ entsprechenden Schubkräfte durch die Längen $M S_1$ und $M S_2$ dargestellt, so daß man allgemein schreiben kann:

$$\sigma_{max} = \pm \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

Die Richtungen dieser Schubkräfte ergeben sich nach dem Obigen mit Rücksicht darauf, daß die gesammte Spannung für die Schnittfläche $C_1 S_1$ durch die Richtung von D nach E und für die Schnittfläche $C S_2$ durch die Richtung von D nach F dargestellt ist, woraus die in der Figur bei e und f durch Pfeile angedeuteten Spannungsrichtungen unzweifelhaft sich ergeben. Die Figur zeigt übrigens, daß die Flächen für die größten Schubspannungen $C_1 S_1$ und $C_2 S_2$ ebenfalls auf einander senkrecht stehen, und die rechten Winkel halbiren, welche von den Flächen $C_1 N_1$ und $C_1 N_2$ der größten positiven und negativen Normalspannungen gebildet werden.

Setzt man für die Fläche ac eine verticale Lage voraus, so erhält man selbstredend in CD die Spannung s und in CB die Schubkraft σ, während für eine horizontale Schnittfläche die Spannungen durch die Ordinaten des Punktes C_2, also $s = 0$ und $\sigma = O C_2$ gefunden werden. Diese letztere Spannung ist in der Figur durch einen Doppelpfeil $\longleftarrow \sigma \longrightarrow$ bezeichnet, um anzudeuten, daß die Spannungen in den beiden Balkentheilen, welche sich in dieser horizontalen Fläche berühren, nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, wie dies auch die Figur ergiebt, denn bei der geringsten Neigung der Horizontalen $C_1 C_2$ in dem einen oder anderen Sinne rückt der Durchschnitt dieser Geraden mit der Axe $N_1 N_2$ auf der linken oder rechten Seite aus der Unendlichkeit in endliche Entfernung heran, dadurch andeutend, daß die resultirende Wirkung auf diese Schnittfläche von D aus nach links oder nach rechts hin gerichtet ist.

Eine zweite Schnittfläche, für welche ebenfalls die Normalspannung s zu Null wird, erhält man in der Richtung des Durchmessers $C_1 D$, und es bilden daher, wie schon bemerkt, die Flächen $C_1 D$ und $C_1 C_2$ die Grenzen für die positiven und negativen Werthe von s, indem für jede in den Winkel $D C_1 C_2$ fallende Richtung s eine Zugspannung, für jede in den Nebenwinkel $D C_1 F$ fallende s eine Druckspannung bedeutet.

Wenn man für irgend eine Fläche, z. B. $C_1 G$, deren normale Spannung $s = G G_1$ mit ihrer Schubspannung $\sigma = G G_2$ zu einer Mittelkraft zusammensetzt, so erhält man in dem von O aus nach dem Schnittpunkte G gezogenen Radiusvector $O G$ die totale Anstrengung t der Fläche pro Flächeneinheit. Es ist nun aus der Figur ersichtlich, daß dieser Radius seinen größten Werth in $O N_1$ übereinstimmend mit s_{max} erreicht, man wird daher bei der Bestimmung der Querschnittsdimensionen diese größte Normalspannung zu Grunde zu legen haben, welche nach (1) und (2) für jeden Punkt allgemein durch

$$s_{max} = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \cdots\cdots\cdots (4)$$

ausgedrückt werden kann. Hierin bedeutet s die Zug- oder Druckspannung und σ die Schubspannung des betreffenden Punktes, welche beide jederzeit leicht aus M und V ermittelt werden können. Von den beiden durch (4) gelieferten Werthen hat man den absolut größeren der Querschnittsbestimmung zu Grunde zu legen, indem man diesen Werth gleich dem für das Material höchstens zulässigen Spannungscoefficienten setzt.

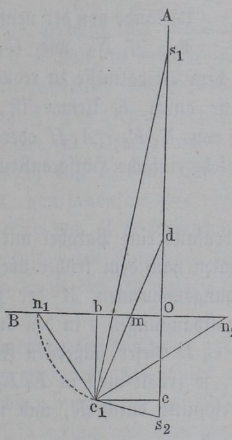
Es kann bemerkt werden, daß dieser **größte Werth der Spannung normal zu der Fläche** gerichtet ist, da die Schubspannungen für die Richtungen $C N_1$ und $C N_2$ gleich Null sind.

Man erhält von der Art, wie die Spannungen im Innern eines Balkens wirken, eine anschauliche Darstellung durch die Verzeichnung der sogenannten **Spannungstrajectorien**, das sind Linien, welche die Richtungen derjenigen Flächen in jedem Punkte angeben, die den größten Werthen der Spannungen ausgesetzt sind. Denkt man sich, um eine solche durch irgend einen Punkt a in dem Querschnitte f eines Balkens gehende Linie zu zeichnen, für diesen Punkt die Richtung der Fläche, in welcher s ein Maximum wird, nach Anweisung der Fig. 191 gefunden, und bestimmt man in derselben Art für denjenigen Punkt a_1, in welchem die gefundene Richtung einen benachbarten Querschnitt f_1 trifft, wiederum die Richtung der Fläche für s_{max}, und fährt so fort, so erhält man ein Polygon $a\, a_1 \ldots$, welches bei sehr geringen Abständen der Querschnittsflächen $f f_1$ in eine Curve, die gesuchte Spannungstrajectorie für s_{max} übergeht. In den zur Richtung der Fläche für s_{max} Senkrechten ist auch nach dem Vorigen die Richtung der Flächen für s_{min} gefunden, während die Winkelhalbirenden zugleich die Richtungen der Schubkraftmaxima ergeben.

Zur Bestimmung dieser Richtungen für irgend einen Punkt ist es nach Fig. 191 erforderlich, die in diesem Punkte zur Wirkung kommende horizontale Zug- oder Druckspannung s und die Schubkraft σ zu kennen, in welchem Falle die folgende einfache Construction zum Ziele führt, deren Richtigkeit aus dem Vorhergehenden sich leicht ergiebt.

Man trägt auf einem rechtwinkeligen Axenkreuze $A\,O\,B$, Fig. 192, auf der verticalen Axe $O\,A$ nach beiden Seiten $O\,d = O\,c = \sigma$, und horizontal $O\,b = s$ an, und verbindet d mit dem durch die Ordinaten $O\,b$ und $O\,c$ gegebenen Punkte c_1, um im Durchschnittspunkte m den Mittelpunkt des in Betracht kommenden Kreises vom Halbmesser $m\,c_1$ zu finden. Es ist nicht nöthig, diesen Kreis selbst zu zeichnen, sondern es genügt, $m\,n_1 = m\,c_1$ zu machen, um in $c_1\,n_1$ die Flächenneigung für $-\,s_{max}$, und in der dazu Senkrechten $c_1 n_2$ diejenige für $+\,s_{max}$ sowie in den Winkelhalbirenden $c_1\,s_1$ und $c_1\,s_2$ die Richtungen der größten Schubspannungen σ_{max} zu erhalten. Hierbei ist es nicht nöthig, die Spannungen s und σ für jeden Punkt immer von Neuem zu berechnen, vielmehr genügt es, diese Größen nur für einen Punkt zu bestimmen, indem man sich dann mit Vortheil für die übrigen Punkte des Diagramms für die Momente M und die verticalen Scheerkräfte V bedienen kann, wie an einem Beispiele hier gezeigt werden mag.

Fig. 192.



Es sei $A\,B$, Fig. 193 (a. f. S.), ein bei A und B frei aufruhender, gleichmäßig über seine Länge l mit dem Gewichte $q\,l$ belasteter Balken von rechteckigem Querschnitte mit der Höhe h und Breite b, so findet man die größte Zug- oder Druckspannung in der Mitte $C\,C_1$ zu

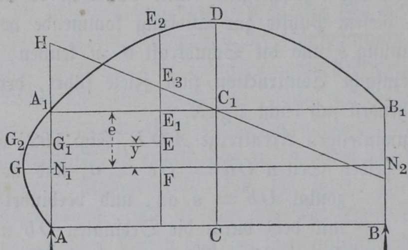
$$s = \frac{M}{W} = \frac{\frac{1}{8}\,q\,l^2}{\frac{1}{6}\,b\,h^2} = \frac{3}{4}\,\frac{q\,l^2}{b\,h^2},$$

und die Schubspannung an den Enden bei N_1 oder N_2 nach §. 48 (7) zu

$$\sigma = \frac{f}{bW} V = \frac{1/_4\, b\, h}{b\, 1/_6\, b\, h^2}\, q\, \frac{l}{2} = {}^3/_4\, \frac{q\, l}{b\, h}.$$

Denkt man sich nun nach einem beliebigen Kräftemaßstabe diese Größen $s = C_1 D$ und $\sigma = N_1 G$ aufgetragen, und construirt durch A, G und A_1 einen Parabelbogen mit dem Scheitel in G, so ist nach dem vorigen Paragraphen die Schubspannung in irgend einem Punkte G_1 des Endquerschnittes durch $G_1 G_2$ gegeben. Will man daher für irgend einen Punkt wie E in demselben Abstande von der neutralen Axe $N_1 N_2$ wie G_1 die Schubkraft finden, so hat man nur $G_1 G_2$ in dem Verhältnisse zu reduciren, in welchem die Verticalkraft im Querschnitte durch E kleiner ist, als diejenige in A, d. h. also im Verhältnisse von $E_1 E_3 : A_1 H$ oder von $C_1 E_1 : C_1 A_1$, welche Reduction durch eine sehr einfache Hülfsconstruction jederzeit leicht ausführbar ist.

Fig. 193.



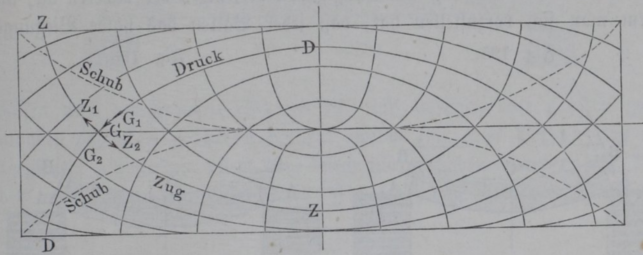
Denkt man ferner durch A_1, D und B_1 ebenfalls eine Parabel mit dem Scheitel in D gezeichnet, so sind deren Ordinaten nach dem früher über die Momentendiagramme Angeführten den Biegungsmomenten M der zugehörigen Querschnitte, folglich auch den Normalspannungen s in den äußersten Fasern daselbst proportional. Da nun $C_1 D$ dieser äußersten Faserspannung in der Mitte gleich gemacht wurde, so erhält man in $E_1 E_2$ die Spannung der äußersten Faser in dem Querschnitte durch E, und in E selbst daher eine in dem Verhältnisse $\frac{FE}{FE_1} = \frac{y}{e}$ verringerte Zugspannung. In dieser Weise sind in Fig. 194 die Trajectorien*) für einen auf zwei Stützen ruhenden, gleichmäßig belasteten Balken von rechteckigem Querschnitte gezeichnet worden. Die beiden Curvensysteme für $\pm\, s_{max}$ schneiden sich nach dem Vorstehenden überall unter rechten Winkeln. Da nun in den Flächen für s_{max} nach dem Obigen die Schubkraft gleich Null ist, so folgt,

---

*) Unter den Spannungstrajectorien werden, wie bereits bemerkt, die Linien verstanden, welche für jeden ihrer Punkte die Richtung der größten Druck-, Zug- oder Schubspannung durch ihre Tangente daselbst angeben.

daß in jeder Curve des einen Systems, wie z. B. derjenigen DGD, in irgend einem Elemente $G_1 G_2$ nur eine normal zu diesem Elemente wirkende Spannung thätig sein kann, d. h. eine Spannung, welche nach der Tangente $Z_1 Z_2$ der durch diesen Punkt G hindurchgehenden Curve ZGZ des anderen

Fig. 194.



Systems gerichtet ist. Man hat sich daher diese beiden Curvensysteme als solche zu denken, in welchen lediglich Spannungen nach der Richtung dieser Curven auftreten, etwa wie bei Seilcurven, wenn, wie in Z diese Spannungen Zugspannungen sind, oder wie bei Gewölben, wenn, wie in der Curve D Druckspannungen auftreten. Beispielsweise mag man sich vorstellen, daß in dem Punkte G drei Kräfte einander das Gleichgewicht halten, von denen die eine, in der Richtung von G_1 nach G_2 wirkende, in den beiden von G ausgehenden Seilstücken GZ_1 und GZ_2 Zugspannungen hervorruft, deren Resultante zusammen mit der in der Richtung $G_1 G_2$ wirkenden Kraft das Element GG_1 comprimirt.

Verzahnte Balken. Bei den gewöhnlichen hölzernen und eisernen Trägern, welche aus einem einzigen Stücke bestehen, ist der Einfluß der Schubspannungen σ im Vergleiche mit den Biegungsspannungen in der Regel so gering, daß man die ersteren unbeachtet lassen darf. Dies ist nicht mehr zulässig, sobald die Träger aus mehreren mit einander verbundenen Theilen zusammengesetzt sind, wie dies bei manchen Holzconstructionen, z. B. den verzahnten Trägern, und bei den aus Blechplatten und Winkeleisen bestehenden Blechträgern der Fall ist. Bei den letzteren erfordert auch die Feststellung der immer nur geringen Dicke der Mittelwand eine Untersuchung, um die Schubspannung in dieser Mittelwand nicht übermäßig groß werden zu lassen. §. 50.

Hölzerne Balken, welche für eine gegebene Tragweite und Belastung nicht in genügender Stärke aus einem Stamme geschnitten werden können, stellt man zuweilen wohl aus mehreren übereinander gelegten Balken von recht-