Für Blech- und Fachwerksträger (s. unten) kann man in den meisten Fällen von dieser angenäherten Formel Gebrauch machen.

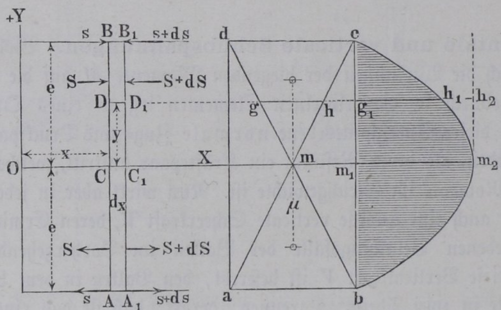
Aus dem Angeführten ergiebt sich auch leicht die Construction, welche dazu dienen kann, für irgend welchen beliebigen Querschnitt, z. B. den einer Eisenbahnschiene abc, Fig. 186, die reducirte Fläche $a d_1 m b_1 c_1 f_1$ zu bestimmen. Man hat dazu nur nöthig, eine genügende Anzahl von Breiten, wie z. B. df in dem Verhältnisse $\frac{y}{e_1}$ zu reduciren, indem man df auf die Horizontale durch a gleich $d'f'$ projicirt und die Geraden md' und mf' zieht, welche die zugehörige reducirte Breite $d_1 f_1$ zwischen sich einschließen. Ebenso macht man wieder $b'c' = bc$ im Abstande e_1 von der neutralen Axe und zieht von m nach b' und c', um $b_1 c_1$ zu erhalten u. s. f.

Horizontale und verticale Schubspannungen. Bisher wurden ausschließlich die Wirkungen der biegenden Momente M auf die Balken betrachtet, wodurch in den einzelnen Elementen irgend eines Querschnittes gewisse auf dieser Querschnittsebene normale Zug- und Druckspannungen s erzeugt werden, als deren Resultat ein Kräftepaar auftritt, welches mit dem biegenden Momente im Gleichgewichte ist. Nun wirkt aber in jedem Balkenquerschnitte auch eine gewisse verticale Scheerkraft V, deren Ermittelung für die verschiedenen Belastungsfälle der Balken im Vorhergehenden gezeigt wurde. Diese Verticalkraft V ist bestrebt, den Balken in dem betreffenden Querschnitte in zwei Theile zu trennen, derart, daß sie das eine Stück an dem anderen entlang der Querschnittsebene vertical zu verschieben trachtet. Einer solchen Trennung widersteht das Material vermöge seiner Cohäsion, und zwar dadurch, daß in den einzelnen Elementen des besagten Querschnittes verticale, also in die Querschnittsebene hineinfallende Reactionen rege werden, welche für jedes der beiden Balkenstücke solche Richtung haben, daß sie der auf dieses Balkenstück einwirkenden Verticalkraft V das Gleichgewicht halten. Die so in dem Querschnitte auf das diesseits desselben gelegene Balkenstück ausgeübten Reactionen sind daher denjenigen genau gleich und entgegengerichtet, welche in denselben Punkten auf das jenseits des Querschnittes befindliche Balkenstück wirken, so daß in jedem Querschnitte diese tangentialen Spannungen als innere Kräfte sich ebenso gegenseitig aufheben, wie dies auch für die auf beide Seiten des Querschnittes wirkenden normalen Zug- und Druckspannungen s gilt. Man nennt diese, in die Schnittfläche hineinfallenden tangentialen Kräfte die Schubspannungen, und es sollen dieselben fernerhin, bezogen auf die Flächeneinheit (1 qmm), mit σ bezeichnet werden, zum Unterschiede von den normalen Schub- und Druckspannungen s. Ebenso soll, dem Früheren entsprechend, eine Schubkraft positiv heißen, wenn sie die Richtung der vertical aufwärts gedachten §. 48.

positiven Y Axe hat, und umgekehrt. Die X Axe soll hier wie früher vom Anfangspunkte nach rechts gerichtet positiv genannt werden.

Wie sich aus dem Folgenden ergeben wird, stellen sich nicht nur die zum Gleichgewichte mit V erforderlichen verticalen Schubkräfte in den Querschnittsflächen ein, sondern auch in horizontalen sowie in schräg geneigten Schnitten des Balkens treten Schubkräfte auf, so daß man in irgend welchem Punkte im Innern eines Balkens Schubspannungen nach allen möglichen Richtungen parallel mit der Belastungsebene des Balkens anzunehmen hat. Senkrecht zu dieser Belastungsebene kommen keinerlei Spannungen vor, wenn, wie hier immer stillschweigend geschehen soll, in diese Belastungsebene

Fig. 187.



Schwerpunktshauptaxen der Querschnitte hineinfallen. Es sollen im Folgenden speciell die verticalen Schubspannungen mit σ_v bezeichnet werden, während der Buchstabe σ_h für die horizontalen, also die mit der geraden Balkenaxe parallelen Schubspannungen gewählt werden mag. Zur Ermittelung der einzelnen Schubspannungen kann folgende Betrachtung dienen.

In dem Querschnitte AB eines Balkens, Fig. 187, im Abstande x vom Anfangspunkte, für welchen die reducirte Querschnittsfläche durch $abmcd$ gegeben sein mag, findet, unter M das Biegungsmoment für den Querschnitt AB verstanden, in den äußersten Fasern bei A und B die Spannung

$$s = \frac{M}{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

statt, wenn $W = \frac{T}{e}$ das Widerstandsmoment des Querschnittes ist. Wenn ferner f die reducirte Fläche $abm = cdm$ zu jeder Seite der neutralen Axe ist, so kann man nach dem vorigen Paragraphen die ganze auf eine Hälfte des Querschnittes zu jeder Seite der neutralen Axe wirkende normale Spannkraft

$$S = fs = \frac{f}{W} M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

setzen.

Dieselben Gleichungen gelten für den um ∂x entfernten Querschnitt $A_1 B_1$, für welchen f und W dieselben Werthe haben, für welchen jedoch das von x abhängige Moment der biegenden Kräfte durch $M + \partial M$ ausgedrückt ist. Also hat man für diesen Querschnitt $A_1 B_1$:

$$s + \partial s = \frac{M + \partial M}{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und

$$S + \partial S = f(s + \partial s) = \frac{f}{W}(M + \partial M) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Aus (4) und (2) erhält man durch Subtraction den Ueberschuß der auf den Querschnitt $A_1 B_1$ zu jeder Seite der neutralen Axe wirkenden Zug- oder Druckspannung:

$$\partial S = f \partial s = \frac{f}{W} \partial M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dieser Ueberschuß ∂S strebt die obere Hälfte CB_1 des betrachteten unendlich kleinen Balkenstückes von der Länge ∂x auf der neutralen Faserschicht $C_1 C$ von rechts nach links zu verschieben, und es muß, damit diese Verschiebung nicht eintrete, der untere Balkentheil in der Berührungsfläche CC_1 eine gleiche, von links nach rechts gerichtete Reaction auf den oberen Balkentheil ausüben, d. h. es müssen in CC_1 Schubspannungen erregt werden, welche auf den oberen Balkentheil von C nach C_1 gerichtet sind. Selbstredend gilt die gleiche Betrachtung in Hinsicht auf eine Verschiebung des unteren Balkentheiles, dessen von links nach rechts angestrebte Verschiebung durch eine von dem oberen Balkentheile geäußerte Schubspannung im Sinne von C_1 nach C und im Betrage ∂S verhindert werden muß. Hieraus geht hervor, daß in der horizontalen Fläche CC_1 eine Schubkraft im Betrage ∂S erregt wird. Die Größe dieser Anhaftungsfläche CC_1 ist bei einer Breite des Balkens $= b$ durch $b \partial x$ gegeben, und daher hat man, wenn σ die Spannung in CC_1 pro Flächeneinheit bezeichnet, den ganzen Betrag der Schubkraft gleich $\sigma b \partial x$ zu setzen, woraus

$$\partial S = \sigma b \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

folgt. Aus (5) und (6) ergiebt sich nun einfach

$$\sigma b \partial x = \frac{f}{W} \partial M,$$

und da bekanntlich

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V \text{ und } W = \mu f$$

ist, so erhält man

$$\sigma b = \frac{f}{W} V = \frac{V}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

In dieser Formel bedeutet σb die Schubspannung für eine Längeneinheit in der Richtung der Axe, und man ersieht daraus, daß diese Spannung, also auch die specifische Schubspannung σ in der neutralen Axe des Balkens proportional mit der verticalen Scheerkraft V, proportional mit der Größe der reducirten Querschnittsfläche f, und umgekehrt proportional mit dem Widerstandsmomente $W = \frac{T}{e}$ des Querschnittes ist.

Beispielsweise hat man für den rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h

$$f = \frac{1}{2} b \frac{h}{2} = \frac{bh}{4} \text{ und } W = \frac{b h^2}{6},$$

daher ist für denselben die Schubkraft in der neutralen Axe pro Längeneinheit des Balkens

$$\sigma b = \frac{f}{W} V = \frac{3}{2 h} V.$$

Es ist leicht ersichtlich, daß die horizontale Schubkraft σ_y in einem Längenschnitte $D D_1$, welcher nach der einen oder anderen Seite von der neutralen Axe um $CD = y$ entfernt ist, durch dieselbe Formel (7) ausgedrückt ist, wenn man nur darin unter f den Querschnitt desjenigen Stückes $ghcd$ der reducirten Fläche versteht, welcher auf der einen Seite des betreffenden Längenschnittes gelegen ist. Wenn man nämlich für diesen Längenschnitt dieselbe Betrachtung anstellt, wie hier für den Schnitt $C C_1$ in der neutralen Axe geschehen, so findet sich, daß der einzige Unterschied darin besteht, daß nunmehr die Spannkraft S des einerseits der Schnittfläche gelegenen Theiles, gleichviel ob DB oder DA, durch $S = s . dcgh$ ausgedrückt ist. Man kann daher den Ausdruck (7) ganz allgemein für die horizontale Schubspannung in irgend welchem Längenschnitte anwenden, wenn man unter f denjenigen Theil der algebraisch gedachten reducirten Querschnittsfläche versteht, welcher einerseits von dem Längenschnitte gelegen ist.

Aus (7) ergiebt sich daher, daß die horizontale Schubkraft zu Null wird nicht nur für alle Punkte desjenigen Querschnittes, in welchem $V = 0$, also M ein Maximum ist, sondern auch für die äußersten Punkte aller Querschnitte, weil für dieselben f, in dem gedachten Sinne genommen, verschwindet.

Man erhält ein anschauliches Bild von der Vertheilung der horizontalen Schubkräfte, wenn man in der Figur senkrecht zu bc in allen Punkten

Ordinaten aufgetragen denkt, welche nach einem beliebig gewählten Maßstabe die horizontalen Schubspannungen darstellen, die in der Höhe dieser Punkte auftreten. Dadurch erhält man als Begrenzung der in der Figur schraffirten Fläche eine Curve $c m_2 b$, welche für den rechteckigen Querschnitt eine Parabel mit dem Scheitel in m_2 ist. Hiervon überzeugt man sich leicht dadurch, daß, wenn $m_1 m_2$ die Schubkraft in m und $g_1 h_1$ diejenige in $g h$ darstellt, man nach (7)

$$m_1 m_2 : g_1 h_1 = d c m : d c h g,$$

also

$$m_1 m_2 : h_1 h_2 = d c m : g h m = e^2 : y^2$$

hat. Ganz in derselben Weise erkennt man, daß das Diagramm der Schubspannungen für einen I förmigen Querschnitt $a b c d$, Fig. 188, sich aus

Fig. 188.

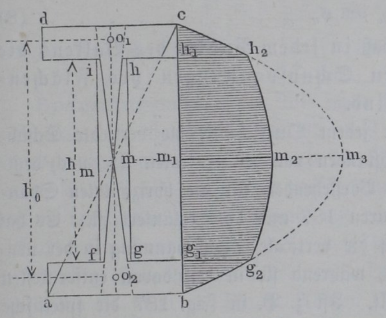
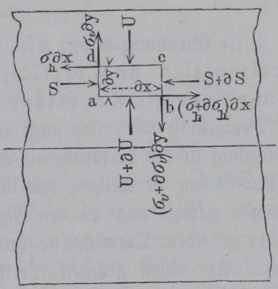


Fig. 189.



den beiden Parabeln $b m_3 c$ und $g_2 m_2 h_2$ zusammensetzt, welche den Rechtecken $a b c d$ und bezw. $f g h i$ entsprechen. Man ersieht auch, daß der mittlere Parabelbogen $g_2 m_2 h_2$ um so flacher ausfällt, je dünner die Mittelwand $g h$ ist, so daß man bei den Blechträgern mit genügender Genauigkeit die Schubkraft für alle Punkte der Mittelwand gleich dem größten Werthe $m_1 m_2$ in der neutralen Axe annehmen darf.

Denkt man sich, Fig. 189, im Innern eines Balkens an beliebiger Stelle ein unendlich kleines Parallelepiped von der Grundfläche $a b c d$ mit der horizontalen Seite ∂x und der verticalen Höhe ∂y und von der Länge senkrecht zur Bildebene gleich Eins, so muß dasselbe unter dem Einflusse sämmtlicher auf dasselbe wirkenden Kräfte im Gleichgewichte stehen. Diese Kräfte sind zunächst die auf die vier Seitenflächen wirkenden Normalkräfte und die in diesen vier Flächen thätigen horizontalen und verticalen Schubkräfte. Die Normalkräfte S und $S + \partial S$ auf die Flächen $a d$ und $b c$ heben sich gegenseitig auf, da sie nur um die gegen S verschwindend kleine Größe ∂S

verschieden sind, und dasselbe gilt für die beiden auf cd und ab wirkenden verticalen Spannungen U und $U + \partial U$.

Bezeichnet man nun mit σ_h die horizontale Schubspannung pro Flächeneinheit der Flächen dc, und mit σ_v die verticale specifische Schubspannung in ad, so sind die totalen Tangentialspannungen in diesen Flächen durch $\sigma_h \partial x$ und bezw. $\sigma_v \partial y$ dargestellt. Die entsprechenden Spannungen in den zusammenstoßenden Flächen ab und bc werden sich dann durch $(\sigma_h + \partial \sigma_h) \partial x$ und $(\sigma_v + \partial \sigma_v) \partial y$ ausdrücken lassen. Diese vier Schubspannungen müssen nun unter sich ebenfalls im Gleichgewichte sein, da das Eigengewicht des Parallelepipeds $\gamma \partial x \partial y$ als unendlich kleine Größe zweiter Ordnung zu vernachlässigen ist. Für den Eckpunkt b als Mittelpunkt der statischen Momente gilt daher die Gleichung

$$\sigma_h \partial x . \partial y = \sigma_v \partial y . \partial x,$$

oder

$$\sigma_h = \sigma_v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Diese Gleichung besagt also, daß in jedem Punkte des Balkens die horizontalen und verticalen Schubspannungen pro Flächeneinheit von gleicher Größe sind.

Demgemäß wird sich auch in jedem Querschnitte die verticale Schubspannung in den verschiedenen Abständen von der neutralen Axe nach demselben Gesetze vertheilen, wie im Vorstehenden für die horizontalen Spannungen gezeigt und an den Figuren 187 und 188 erläutert ist. Es hat daher in jedem Querschnitte auch die verticale Schubspannung in der neutralen Axe einen größten Werth, während sie in den davon entferntesten Faserschichten gleich Null ausfällt. Ist z. B. in Fig. 187 die specifische Schubspannung in der neutralen Axe durch $m_1 m_2$ dargestellt, so ist im Punkte D im Abstande y von der neutralen Axe die verticale Schubspannung ebenso wie die horizontale durch die Ordinate $g_1 h_1$ des Schubkraftdiagramms daselbst gegeben. Ein horizontaler Streifen des Querschnittes an dieser Stelle von der Breite b und Höhe ∂y wird daher eine verticale Kraft äußern von der Größe

$$b \partial y . g_1 h_1 = b z \partial y,$$

wenn mit z die Ordinate $g_1 h_1$ des Schubkraftdiagramms bezeichnet wird. Es ist daraus deutlich, wie bei constanter Breite b die ganze von dem Querschnitte geäußerte verticale Schubkraft

$$\int_{-e}^{+e} b z \partial y$$

durch den Inhalt des Schubkraftdiagramms $b c m_2$ gemessen wird. Diese gesammte verticale Schubkraft des Querschnitts hat nun, wie oben erwähnt wurde, der Verticalkraft V des Querschnitts das Gleichgewicht zu halten, so daß der Ausdruck folgt:

$$V = \int_{-e}^{+e} b z \partial y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Für den rechteckigen Querschnitt z. B. von der Breite b und Höhe $h = 2e$, für welchen, wie oben gezeigt worden, die Begrenzung der Schubkraftordinaten eine Parabel $b m_2 c$ ist, hat man den Inhalt derselben bekanntlich

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \partial y = \frac{2}{3} h \,.\, m_1 m_2 = \frac{2}{3} h \sigma_0,$$

folglich erhält man die Schubkraft σ_0 in der neutralen Axe aus (9) durch

$$V = b \frac{2}{3} h \sigma_0 \text{ zu } \sigma_0 = \frac{3}{2h} \frac{V}{b}$$

übereinstimmend mit dem oben aus (7) ermittelten Werthe.

Spannungsmaxima. Wie schon oben bemerkt wurde, stellen sich im Innern eines Balkens Schubkräfte nicht nur in verticaler und horizontaler, sondern nach jeder beliebigen, mit der Belastungsebene parallelen Richtung ein. Diese Kräfte werden für verschiedene Neigungen der gedachten Schnittebene verschieden groß ausfallen, und es ist daher von Interesse, diejenigen Richtungen kennen zu lernen, nach welchen die Schubspannungen ihre absolut größten Werthe annehmen. Die Ermittelung dieser Spannungsmaxima ist schon in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 3 auf analytischem Wege vorgenommen, es soll hier der Anschaulichkeit halber die Untersuchung graphisch in der von Culmann*) angegebenen Art angeführt werden. §. 49.

Es sei abc, Fig. 190 (a. f. S.), der Durchschnitt eines kleinen dreiseitigen Prismas von einer Länge senkrecht zur Zeichnung gleich Eins, dessen Basis $ab = \partial x$ horizontal, und dessen Seite $bc = \partial y$ vertical gerichtet sein mag. Die dritte Seite $ac = \partial z$ soll unter dem beliebigen Winkel α gegen die Horizontale ab geneigt sein. Es handelt sich darum, für diese unter dem willkürlich gewählten Winkel α geneigte Schnittfläche ac die normale Spannung s und die Schubspannung σ zu ermitteln. Die beiden anderen Prismaflächen bc und ab sind gewissen Normalspannungen s_h und s_v und ebenso gewissen Schubspannungen σ_v und σ_h ausgesetzt, von welchen s_h aus dem bekannten Biegungsmomente M des Balkens in bc und $\sigma_h = \sigma_v$ aus der gleichfalls bekannten Verticalkraft V nach dem Vorstehenden leicht zu ermitteln sind. Die Spannung s_v dagegen ist nicht

*) Culmann, Die graphische Statik.