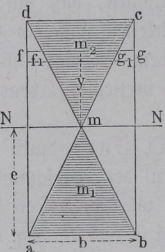
§. 47. **Reducirte Querschnitte.** Ist $abcd$, Fig. 182, ein beliebiger, hier der Einfachheit halber rechteckig vorausgesetzter Querschnitt eines Balkens von der Breite b und Höhe $h = 2e$, so erzeugt ein in diesem Querschnitte wirksames Biegungsmoment M in der äußersten Faserschicht ab oder cd eine specifische Faserspannung s, welche nach dem Vorstehenden durch

Fig. 182.



$$s = \frac{M}{W} = \frac{Me}{T}$$

ausgedrückt ist. Die Spannung in irgend welchem anderen, von der neutralen Axe NN um y entfernten horizontalen Streifen fg ist durch $s_y = s\,\frac{y}{e}$ dargestellt, und daher die daselbst durch einen unendlich schmalen Streifen von der Höhe ∂y geäußerte Kraft durch $s_y b \,\partial y = sb\,\frac{y}{e}\,\partial y$ gegeben. Zieht man die Diagonalen ac und bd in dem Querschnitte, so ist $f_1 g_1 = b\,\frac{y}{e}$, und also hat man die von dem betrachteten Streifen geäußerte Spannkraft auch gleich $s \,.\, f_1 g_1 \,.\, \partial y$, d. h. gleich der Kraft, welche ein Streifen von der Breite $f_1 g_1$ und der Höhe ∂y äußern würde, der gleichmäßig über seine Fläche der Spannung s der äußersten Faser ausgesetzt wäre. Da dies für jeden beliebigen positiven oder negativen Abstand y gilt, so ersieht man hieraus, daß man die Wirkungen der ganzen Querschnittsfläche $abcd$ ersetzt denken kann durch diejenigen der mit der Spannung s gleichmäßig behafteten, in der Figur schraffirten Fläche $abmdc$, und zwar derart, daß die von der oberhalb der neutralen Axe gelegenen Fläche dcm geäußerte Spannung derjenigen entgegengesetzt ist, welche von der unterhalb der neutralen Axe gelegenen Fläche abm ausgeübt wird. Ist $\mu = m_1 m_2$ der Abstand der Schwerpunkte m_1 und m_2 dieser beiden Flächenstücke und f der Inhalt e i n e s j e d e n derselben, so hat man das Moment des durch die beiden gedachten Spannkräfte gebildeten Kräftepaares gleich

$$\mu f s = W = M.$$

Wenn der Balkenquerschnitt, wie hier vorausgesetzt, ein Rechteck ist, hat man

$$\mu = 2\,\frac{2}{3}\,\frac{h}{2} = \frac{2}{3}\,h$$

und

$$f = \frac{1}{2}\,b\,\frac{h}{2} = \frac{bh}{4},$$

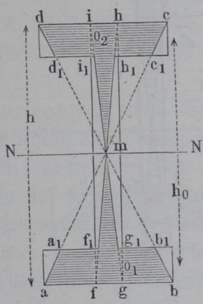
folglich das gedachte Moment

$$\frac{2}{3}\,h\,\frac{b\,h}{4}\,s = \frac{b\,h^2}{6}\,s,$$

entsprechend dem Widerstandsmomente des rechteckigen Querschnittes $W = \frac{b\,h^2}{6}$ (s. §. 45).

Die so erhaltene Fläche $d\,b\,m\,d\,c$ nennt man die reducirte Fläche des Querschnittes, und es ist leicht ersichtlich, wie man für jede beliebige andere Form des Balkenquerschnittes zu der reducirten Fläche desselben einfach dadurch gelangt, daß man die horizontale Breite an jeder um y von der neutralen Axe entfernten Querschicht in dem Verhältnisse $\frac{y}{e}$ verringert, unter e den Abstand derjenigen äußersten Faser von der neutralen Axe verstanden, für welche die specifische Spannung gleich s angenommen ist. Hieraus ergiebt sich z. B. für den symmetrischen $\mathtt{I}$ förmigen Querschnitt $a\,b\,c\,d$, Fig. 183, die reducirte Querschnittsfläche, wenn man durch die Mitte m sowohl die Diagonalen $a\,c$ und $b\,d$ sowie auch diejenigen $f\,h$ und $g\,i$ zieht, indem dann $a\,b\,b_1\,a_1$ und $c\,d\,d_1\,c_1$ den beiden Flanschen zugehören, während $f_1\,g_1\,m\,h_1\,i_1$ für die Mittelrippe gilt.

Fig. 183.



Ist der $\mathtt{I}$ förmige Querschnitt, wie dies bei gußeisernen Balken zu sein pflegt, unsymmetrisch, Fig. 184 und 185 (a. f. S.), derart, daß die Abstände der äußersten Fasern e_1 und e_2 sind, und daher die Spannungen daselbst s_1 und s_2 in dem Verhältnisse $\frac{s_1}{s_2} = \frac{e_1}{e_2}$ stehen, so kann man die Reduction der Querschnittsfläche ebensowohl auf die Faserspannung s_1 wie auf diejenige s_2 vornehmen. Im ersteren Falle macht man $a'\,b' = a\,b$ im Abstande e_1 von NN, Fig. 184, und zieht von m nach a', b', f' und g' gerade Linien, während man, wenn der Reduction die Spannung s_2 in $a\,b$, Fig. 185, zu Grunde gelegt werden soll, $d'\,c' = d\,c$ im Abstande e_2 von NN zu machen, und von m durch d', c', h' und i' zu ziehen hat. Die reducirten Flächen sind in beiden Figuren durch Schraffirung hervorgehoben.

Aus diesen Figuren ersieht man, daß bei Balken mit $\mathtt{I}$ förmigen Querschnitten, wie Fig. 183, die mittlere Wand viel weniger ausgenutzt wird, als die von der neutralen Axe entfernteren Flanschen. Es wird daher vortheilhaft sein, das zur Ausführung des Trägers zu verwendende Material möglichst an den günstigeren Stellen, d. h. zur Bildung der Flanschen anzubringen, und der Mittelwand nur die durchaus erforderliche Dicke d zu geben. In welcher Weise diese Dicke zu bestimmen ist, wird sich aus den folgenden Paragraphen ergeben.

Fig. 184.

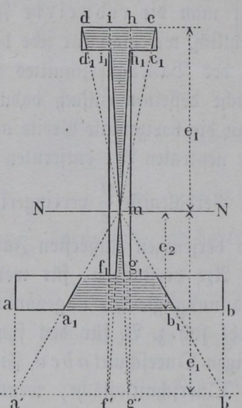
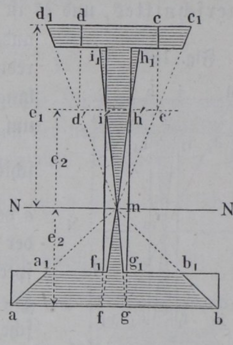
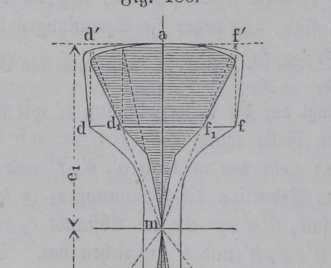


Fig. 185.



Wenn die Stärke d der Mittelwand nur gering ist, wie dies z. B. bei den später näher zu betrachtenden Blechträgern der Fall ist, so kann man annähernd genug den Theil $f_1\, g_1\, m\, h_1\, i_1$ der reducirten Querschnittsfläche als klein vernachlässigen und für den Fall, daß auch die Dicke d_1 der Flanschen nur unbedeutend ist im Vergleiche zur Höhe h des Querschnittes, darf man den Querschnitt $b\, d_1$ eines Flanschen für die reducirten Querschnittsflächen $a\, b\, b_1\, a_1$ bezw. $c\, d\, d_1\, c_1$, Fig. 183, setzen. Jeder dieser Flanschen äußert demnach eine Spannkraft gleich $s\, b\, d_1$, und da man diese Kräfte in den Mitten der Flanschen, also im Abstande $h_0 = h - d_1$ von einander annehmen darf, so erhält man das Widerstandsmoment für einen solchen Querschnitt zu

Fig. 186.



$$W = s\, b\, d_1\, h_0.$$

Für Blech- und Fachwerksträger (s. unten) kann man in den meisten Fällen von dieser angenäherten Formel Gebrauch machen.

Aus dem Angeführten ergiebt sich auch leicht die Construction, welche dazu dienen kann, für irgend welchen beliebigen Querschnitt, z. B. den einer Eisenbahnschiene abc, Fig. 186, die reducirte Fläche $a d_1 m b_1 c_1 f_1$ zu bestimmen. Man hat dazu nur nöthig, eine genügende Anzahl von Breiten, wie z. B. df in dem Verhältnisse $\frac{y}{e_1}$ zu reduciren, indem man df auf die Horizontale durch a gleich $d'f'$ projicirt und die Geraden md' und mf' zieht, welche die zugehörige reducirte Breite $d_1 f_1$ zwischen sich einschließen. Ebenso macht man wieder $b'c' = bc$ im Abstande e_1 von der neutralen Axe und zieht von m nach b' und c', um $b_1 c_1$ zu erhalten u. s. f.

Horizontale und verticale Schubspannungen. Bisher wurden ausschließlich die Wirkungen der biegenden Momente M auf die Balken betrachtet, wodurch in den einzelnen Elementen irgend eines Querschnittes gewisse auf dieser Querschnittsebene normale Zug- und Druckspannungen s erzeugt werden, als deren Resultat ein Kräftepaar auftritt, welches mit dem biegenden Momente im Gleichgewichte ist. Nun wirkt aber in jedem Balkenquerschnitte auch eine gewisse verticale Scheerkraft V, deren Ermittelung für die verschiedenen Belastungsfälle der Balken im Vorhergehenden gezeigt wurde. Diese Verticalkraft V ist bestrebt, den Balken in dem betreffenden Querschnitte in zwei Theile zu trennen, derart, daß sie das eine Stück an dem anderen entlang der Querschnittsebene vertical zu verschieben trachtet. Einer solchen Trennung widersteht das Material vermöge seiner Cohäsion, und zwar dadurch, daß in den einzelnen Elementen des besagten Querschnittes verticale, also in die Querschnittsebene hineinfallende Reactionen rege werden, welche für jedes der beiden Balkenstücke solche Richtung haben, daß sie der auf dieses Balkenstück einwirkenden Verticalkraft V das Gleichgewicht halten. Die so in dem Querschnitte auf das diesseits desselben gelegene Balkenstück ausgeübten Reactionen sind daher denjenigen genau gleich und entgegengerichtet, welche in denselben Punkten auf das jenseits des Querschnittes befindliche Balkenstück wirken, so daß in jedem Querschnitte diese tangentialen Spannungen als innere Kräfte sich ebenso gegenseitig aufheben, wie dies auch für die auf beide Seiten des Querschnittes wirkenden normalen Zug- und Druckspannungen s gilt. Man nennt diese, in die Schnittfläche hineinfallenden tangentialen Kräfte die Schubspannungen, und es sollen dieselben fernerhin, bezogen auf die Flächeneinheit (1 qmm), mit σ bezeichnet werden, zum Unterschiede von den normalen Schub- und Druckspannungen s. Ebenso soll, dem Früheren entsprechend, eine Schubkraft positiv heißen, wenn sie die Richtung der vertical aufwärts gedachten §. 48.