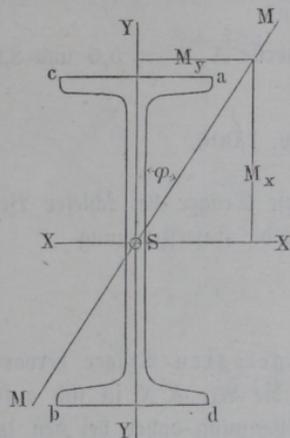


Schiefe Belastung. Die in dem Vorhergehenden zur Anwendung §. 46. gebrachte Formel $M = s \frac{W}{e}$ beruht auf der stillschweigenden Voraus-

setzung, daß die eine Schwerpunkthauptaxe des Querschnittes, etwa die Y Axc, Fig. 178, in die Ebene der wirkenden Belastungen hineinfällt. Denkt man sich dagegen, daß die Belastungsebene MM gegen die Y Axc etwa um den Winkel φ geneigt sei, so kann man das wirkende Moment M in zwei Componenten

Fig. 178.



zerlegt denken, von denen das Moment M_y eine Biegung um die Y Axc und M_x eine Biegung um die X Axc aufstrebt. In Folge dieser beiden Beanspruchungen werden sich die Spannungen in den äußersten Fasern bezw. zu

$$M_y = M \sin \varphi \text{ und } M_x = M \cos \varphi$$

$$s_y = \frac{M \sin \varphi}{W_y} \text{ und } s_x = \frac{M \cos \varphi}{W_x}$$

bestimmen. Wie man aus der Figur erkennt, werden diese beiden Spannungen in der Kante a als Zugspannungen sich zu dem größten Werthe $s = s_y + s_x$ addiren, und ebenso wird in b die größte Druckspannung von demselben Betrage sich einstellen, während in den Ecken c und d die entgegengesetzt gerichteten Spannungen s_y und s_x totale Anstrengungen gleich $\pm (s_y - s_x)$ hervorrufen. Es ist von Interesse, zu untersuchen, in welchem Falle die am meisten gefährdeten Fasern in a und b der größten zulässigen Spannung ausgesetzt sind. Zu dem Ende hat man

$$s = s_y + s_x = \frac{M \sin \varphi}{W_y} + \frac{M \cos \varphi}{W_x}$$

oder, wenn man das Verhältniß $\frac{W_x}{W_y} = v$, also $W_y = \frac{W_x}{v}$ einführt:

$$s = \frac{M}{W_x} (v \sin \varphi + \cos \varphi).$$

Diese Spannung wird zu einem Maximum für $\frac{\partial s}{\partial \varphi} = 0$, d. h. für $v \cos \varphi = \sin \varphi$ oder $\operatorname{tg} \varphi = v$, und zwar erhält man mit diesem Werthe von φ die absolut größte Faser Spannung in a oder b :

$$s_{\max} = \frac{M}{W_x} (\operatorname{tg} \varphi \sin \varphi + \cos \varphi) = \frac{M}{W_x \cos \varphi} = \frac{M}{W_y v \cos \varphi}$$

Setzt man noch

$$\frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \sqrt{1 + v^2},$$

so kann man auch schreiben:

$$s_{max} = \frac{M}{W_y} \sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}.$$

Mit den äußersten Werthen von v aus der Tabelle A, $v = 5,6$ und $8,9$ erhält man

$$\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}} = 1,015 \text{ und bezw. } 1,006.$$

Die größte Faserspannung wird daher für diese Träger bei schiefer Belastung nur um 1,5 bezw. 0,6 Proc. größer, als die Faserspannung

$$s = \frac{M}{W_y},$$

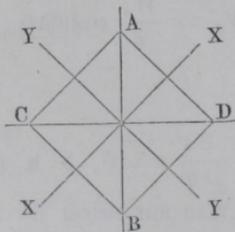
welche durch das Moment M in dem flach gelegten Träger hervorgerufen wird, d. h. wenn die Belastungsebene die Axc. XX in sich aufnimmt. Man wird diese Vergrößerung der Spannung daher bei den in Tabelle A enthaltenen Γ Trägern vernachlässigen dürfen.

Beträchtlicher stellt sich diese durch schiefe Belastung hervorgerufene Vergrößerung der Kantenspannung bei einem geringeren Werthe von v heraus, z. B. erhält man für das erste \square Eisenprofil der Tabelle B mit $v = 1,54$, die größte Kantenspannung

$$s_{max} = \frac{M}{W_y} \sqrt{1 + \frac{1}{1,54^2}} = 1,192 \frac{M}{W_y},$$

und zwar stellt sich diese Spannung ein, wenn die Belastungsebene um $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1,54 = 57^\circ$ von der Y Axc abweicht. Man hätte daher für eine derartige schiefe Belastung die Dimensionen aus der Formel $1,192 M = s W_y$ zu bestimmen.

Fig. 179.



Am bedeutendsten wird die Spannungsvergrößerung für $v = 1$, d. h. für einen quadratischen Querschnitt, für denselben wird

$$\varphi = 45^\circ$$

und

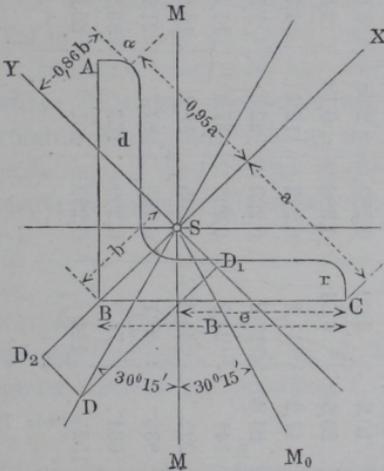
$$s_{max} = \frac{M}{W} \sqrt{2} = 1,414 \frac{M}{W},$$

d. h. es findet die ungünstigste Belastung bei der in Fig. 179 dargestellten Lage statt, wenn die Belastungsebene mit der Diagonalebene AB zusammenfällt.

Eine besondere Berücksichtigung verdient die schiefe Belastung bei der Anwendung der Winkelisen. Ein Auszug aus der für gleichschenkelige Winkelisen in den Normalprofilen angegebenen Tabelle ist in der folgenden mit C bezeichneten Zusammenstellung gegeben.

Wenn die Winkelisen gleichschenkelig sind, so halbirt die eine Schwerpunktschwerachse XX den rechten Winkel ABC , Fig. 180. Ist daher der

Fig. 180.



eine Schenkel BC horizontal gelagert und wirkt die Belastung in der verticalen Ebene MM , so zerlegt sich das Moment M in die beiden gleichen Seitenmomente

$$M \sin 45^\circ = M \cos 45^\circ \\ = 0,707 M.$$

Setzt man die Abrundung der Ecke und der Schenkel so voraus, wie die Normalprofile bestimmen, d. h. nimmt man $R = d$ und

$$r = \frac{R}{2},$$

so findet die größte Faserspannung bei A nicht in der Kante, sondern etwa in der Mitte der Abrundung in einem Punkte

α statt, welcher von der X Achse den Abstand $0,95 a$ und von der Y Achse denjenigen $0,86 b$ hat. Es bestimmt sich daher die größte Faserspannung in diesem Punkte vermöge der beiden Seitenmomente $0,707 M$ zu

$$s_{max} = 0,707 \left(\frac{M}{T_x} 0,95 a + \frac{M}{T_y} 0,86 b \right) \\ = 0,707 \left(\frac{0,95 M}{W_x} + \frac{0,86 M}{W_y} \right),$$

oder, wenn wieder $v = \frac{W_x}{W_y}$ eingeführt wird, zu

$$s_{max} = 0,707 \frac{M}{W_x} (0,95 + 0,86 v).$$

Für die Ecke B hat man dagegen, da hierfür das um die X Achse biegende Moment eine Spannung nicht erzeugt, die Spannung

$$s = 0,707 \frac{M}{W_y} = 0,707 v \frac{M}{W_x}.$$

Nimmt man beispielsweise aus der Tabelle für das Winkelisen von 80 mm Schenkellänge und 10 mm Stärke den Werth

C. Normalprofile für gleichschenkelige L-Eisen (Fig. 180).

 $d = 0,1 B$ für $B < 100$ mm;

 $R = d$; $r = \frac{d}{2}$;

 $d = \frac{1}{11} B$ für $B > 100$ mm;

B mm	d mm	F cm	G kg	e mm	a mm	b mm	T _x cm	W _x cm	η _x	T _y cm	W _y cm	η _y	$\frac{W_x}{W_y} = v$
20	4	1,44	1,12	1,35	1,41	0,92	0,792	0,563	0,277	0,209	0,226	0,223	2,49
25	4	1,84	1,44	1,73	1,77	1,09	1,64	0,926	0,284	0,432	0,397	0,243	2,34
30	6	3,24	2,53	2,02	2,12	1,30	4,01	1,89	0,277	1,05	0,755	0,220	2,50
40	6	4,41	3,46	2,77	2,83	1,74	10,2	3,60	0,259	2,68	1,54	0,247	2,34
50	7	6,51	5,1	3,49	3,54	2,14	23,5	6,64	0,288	6,18	2,89	0,251	2,30
60	8	8,96	7,0	4,21	4,24	2,53	47,2	11,1	0,292	12,4	4,90	0,258	2,26
70	9	11,8	9,2	4,92	4,95	2,94	84,8	17,2	0,295	22,3	7,58	0,259	2,26
80	10	15,0	11,7	5,63	5,66	3,35	141	24,9	0,293	37,1	11,1	0,262	2,24
90	11	18,6	14,5	6,35	6,36	3,75	222	34,9	0,295	58,4	15,6	0,264	2,24
100	12	22,6	17,6	7,06	7,07	4,15	333	47,1	0,295	87,7	21,2	0,265	2,22
120	13	29,5	23,0	8,52	8,48	4,93	634	74,9	0,299	167	33,8	0,270	2,21
150	16	45,4	35,4	10,7	10,6	6,14	1525	144	0,299	401	65,3	0,271	2,20

$$v = \frac{24,9}{11,1} = 2,24$$

an, so erhält man für den Punkt α die Spannung

$$s_{max} = 0,707 (0,95 + 0,86 \cdot 2,24) \frac{M}{W_x} = 2,03 \frac{M}{W_x},$$

also mehr als doppelt so groß wie diejenige größte Spannung ist, die dasselbe Moment M hervorrufen würde, wenn es eine Biegung um die X Ase anstreben, d. h. wenn die Belastung die Richtung der Y Ase haben würde.

Es ist auch leicht zu ersehen, daß ein Winkelisen, dessen einer Flansch BC horizontal gelagert ist und welches durch vertical in der Ebene MM wirkende Belastungen angegriffen wird, eine Durchbiegung in einer von der verticalen abweichenden Richtung annehmen muß. Es läßt sich nämlich die Durchbiegung f eines Balkens in einem gewissen Punkte nach den in §. 35 angegebenen Formeln allgemein durch

$$f = k \frac{M}{T}$$

ausdrücken. Hierin bedeutet k eine von der Länge und Unterstüßungsart abhängige Constante, z. B. für die Mitte eines auf zwei Punkten frei aufliegenden Balkens von der Länge l , der in der Mitte durch K belastet ist, hat man

$$f = \frac{K}{48 TE} l^3 = \frac{l^2}{12 E} \frac{Kl}{4T} = \frac{l^2}{12 E} \frac{M}{T},$$

also

$$k = \frac{l^2}{12 E}.$$

Demgemäß wird das erwähnte Winkelisen durch die beiden um die X Ase und Y Ase biegender Seitenmomente

$$M \sin 45^\circ = M \cos 45^\circ = 0,707 M$$

zwei Durchbiegungen nach den zu einander senkrechten Richtungen SY und SX erleiden, für welche man hat

$$f_x = SD_1 = k \frac{0,707 M}{T_x}$$

und

$$f_y = SD_2 = k \frac{0,707 M}{T_y},$$

so daß die aus f_1 und f_2 resultirende Gesamtbiegung

$$f = SD = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

nach einer Richtung SD erfolgt, die mit der Y Ase einen Winkel β , also

mit der Verticalen MM einen Winkel $\beta - 45^\circ$ einschließt, für welchen man hat:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f_y}{f_x} = \frac{T_x}{T_y}.$$

Bei den der Tabelle C zu Grunde gelegten Verhältnissen ergibt sich für alle Querschnitte fast genau

$$\frac{T_x}{T_y} = 3,8,$$

so daß man

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3,8 = 75^\circ 15',$$

also die Abweichung der Biegungsebene dieser Winkeleisen von der Vertical-ebene zu

$$DSM = \beta - 45^\circ = 30^\circ 15'$$

erhält.

Will man eine vertical gerichtete Durchbiegung des mit einem Schenkel horizontal gelagerten Winkeleisens erreichen, so hat man $f_x = f_y$ zu setzen und erhält, wenn jetzt M_x und M_y wieder allgemein die beiden Momente darstellen, welche um die X Achse und bezw. Y Achse zu biegen streben:

$$k \frac{M_x}{T_x} = k \frac{M_y}{T_y},$$

d. h.

$$\frac{M_x}{M_y} = \frac{T_x}{T_y},$$

also für die Winkeleisen der Tabelle C

$$\frac{M_x}{M_y} = 3,8 = \operatorname{tg} 75^\circ 15'.$$

Betrachtet man die beiden Momente M_x und M_y als die Seitenmomente, in welche das Belastungsmoment M bei rechtwinkliger Zerlegung nach den Hauptaxen zerfällt, so folgt, daß dieses Moment in einer Richtung SM_0 wirksam sein müsse, deren Neigung $M_0SY = \varphi$ gegen die Y Achse durch

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{M_x}{M_y} = 3,8 \text{ zu } \varphi = 14^\circ 45'$$

ausgedrückt ist, oder es muß die Ebene, in welcher das Moment M wirksam ist, gegen die Verticale um einen Winkel

$$MSM_0 = 45^\circ - \varphi = 30^\circ 15'$$

geneigt sein, wenn das Winkeleisen in einer verticalen Ebene sich durchbiegen soll. Denkt man sich daher dieses biegende Moment durch eine Kraft K in der Ebene SM_0 dargestellt, so ergibt sich, daß in Folge der Abweichung dieser Kraft K von der Verticalrichtung auf das Winkeleisen ein

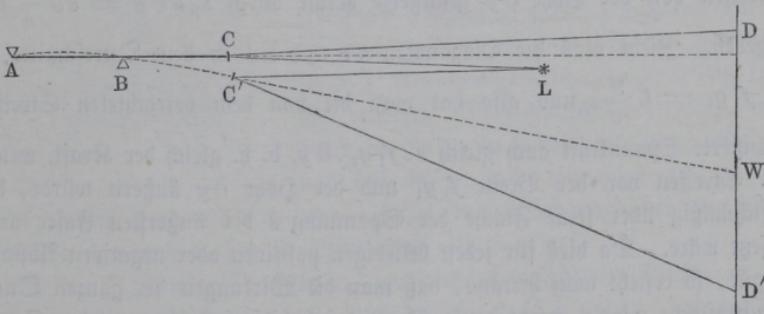
horizontaler Druck H und ein verticaler Druck V ausgeübt wird, für welche man hat

$$H = V \operatorname{tg} 30^{\circ} 15' = 0,58 V.$$

Man kann den Zustand daher auch dadurch kennzeichnen, daß auf das betreffende, durch eine Verticalkraft V belastete Winkelisen noch ein horizontaler Zwang (etwa durch Führungen *z.*) von dem Betrage $0,58 V$ ausgeübt werden muß, wenn die Durchbiegung in verticaler Ebene erfolgen soll.

Die vorstehend angegebenen Resultate sind von D. Inge durch sehr schöne Versuche mit einem sinnreichen Apparate in der Versammlung deutscher Ingenieure zu Stuttgart, 1881, bestätigt worden. Der dazu dienende Apparat bestand im Wesentlichen aus einem bei A und B , Fig. 181, unterstützten Winkelisen AC von 2 m Länge, welches an seinem freien Ende C durch ein Gewicht K belastet wurde. Die hierdurch hervorgerufene

Fig. 181.



Biegung des Stabes, welcher dadurch etwa in die punktirte Lage ABC' gelangt, wurde mit Hilfe eines Spiegels zur Anschauung gebracht, der am freien Ende C des Stabes normal zu dessen Axe befestigt war, und daher an der Neigungsveränderung theil nahm, welche dem freien Stabende in Folge der Durchbiegung mitgetheilt wurde. Ein bei L aufgestelltes Drummond'sches Kalklicht wurde von dem Spiegel nach D und bezw. D' auf eine 14 m entfernte Wand W projectirt, und auf diese Weise nicht nur die lineare Durchbiegung in vergrößertem Maßstabe, sondern auch die Abweichung der Biegungsebene von der Belastungsebene zur Anschauung gebracht, wenn der letzteren verschiedene Richtungen gegeben wurden. Hinsichtlich der näheren Erörterung dieser interessanten Versuche, welche gleichzeitig zur Ermittlung des Elasticitätsmoduls des angewandten Materials benutzt wurden, muß auf die angezeigte *) Quelle verwiesen werden.

*) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ingenieure, 1881, October.