Belastung Eins (1 kg oder 1 Tonne für 1 m Länge) zu entwerfen, indem man dann nur nöthig hat, für jede Belastung durch p oder k die betreffende Ordinate mit der Maßzahl von p oder k zu multipliciren.

Es würde im vorliegenden Falle zu weit führen, die vorstehenden Untersuchungen auch auf die Fälle auszudehnen, in denen die einzelnen Stützen nicht in derselben Höhe liegen, oder die Trägheitsmomente des Trägers für verschiedene Querschnitte von verschiedener Größe sind, es muß in dieser Hinsicht auf die hier zu Grunde gelegte Arbeit von Mohr*) verwiesen werden.

§. 44. **Trägheitsmomente der Querschnitte.** Wenn nach dem Vorstehenden für einen Balken die größten Biegungsmomente M und die größten verticalen Scheerkräfte V in jedem Querschnitte ermittelt sind, so kommt es darauf an, die Dimensionen der einzelnen Querschnitte derartig zu bemessen, daß das Material mit genügender Sicherheit den einwirkenden Kräften zu widerstehen vermag. Man hat zu dem Ende die Anordnung so zu treffen, daß die größte in einem Querschnitte auftretende Spannung pro Flächeneinheit (1 qmm) einen erfahrungsmäßig zulässigen Werth s nicht übersteige. Da die Biegungsspannungen in irgend einem Punkte eines beliebigen Querschnittes im geraden Verhältnisse mit dem Abstande dieses Punktes von der neutralen Axe des Querschnittes stehen, so wird die größte Spannung in den am weitesten von der neutralen Axe entfernten Punkten des Querschnittes auftreten. Erreicht daher die Spannung in diesen Punkten, deren Entfernung von der neutralen Axe fernerhin mit e bezeichnet werden soll, den zulässigen Werth s, so hat man im Abstande gleich Eins von der neutralen Axe die Spannung $\frac{s}{e}$. Es ist nun bereits in Thl. I gezeigt, wie das in irgend einem Querschnitte des Balkens durch die äußeren Kräfte hervorgerufene Biegungsmoment M durch das Moment der Spannungen aller Querschnittselemente, bezogen auf die neutrale Axe, im Gleichgewichte gehalten werden muß, und es wurde daselbst die Formel

$$M = \frac{s}{e} W$$

angegeben, unter W eine an obiger Stelle ebenfalls als Biegungsmoment bezeichnete gewisse Function des Querschnittes verstanden. Diese Function W stellt sich dar als die Summe aller derjenigen Producte, welche aus den einzelnen Flächenelementen ∂F des Querschnittes F in die Quadrate y^2 ihrer Abstände von der neutralen Axe gebildet werden. Wegen der Analogie dieses Werthes mit den in Thl. I, Abschn. V, Cap. 2 besprochenen

*) Zeitschr. d. Hannov. Archit. u. Ing.-Ver. 1868.

Trägheitsmomenten der Körper, hat man jene gedachte Summe $\int \partial F \, . \, y^2$ meistens gleichfalls als das Trägheitsmoment des Querschnittes bezeichnet und es soll in der Folge diese Benennung hier beibehalten und dafür die Bezeichnung T gewählt werden. Was die Uebereinstimmung der vorgedachten Querschnittsfunction mit dem Trägheitsmomente eines Körpers hinsichtlich des analytischen Ausdruckes betrifft, so hat man nur anstatt der Massentheilchen ∂m des Körpers die Flächenelemente ∂F des Querschnittes einzuführen, und es gelten die in Thl. I, Abschn. V über die Trägheitsmomente materieller Körper gefundenen Beziehungen auch für die hier in Betracht kommenden Trägheitsmomente der Querschnitte. Es ist auch in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 2 gezeigt worden, in welcher Weise man aus den Dimensionen einer Querschnittsfläche von bestimmter Form das zugehörige Trägheitsmoment zu berechnen hat, und es ist daselbst diese Rechnung für eine Anzahl häufig vorkommender Querschnittsformen durchgeführt worden. Hinsichtlich dieser Berechnung, welche hier nicht wiederholt werden soll, ist auf Thl. I zu verweisen, und es möge nur in der Tabelle am Schlusse dieses Paragraphen eine Zusammenstellung der Ausdrücke für die Trägheitsmomente einiger der häufiger vorkommenden Balkenquerschnitte angeführt werden.

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man, daß alle diese Trägheitsmomente unter der Form:

$$T = r^2 F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

erscheinen, unter F die Querschnittsfläche und unter r eine gewisse von der Form des Querschnittes abhängige Größe verstanden. Diese Größe r ist für verschieden geformte Querschnitte verschieden, aber für alle unter sich ähnlichen Querschnitte durch einen und denselben aliquoten Theil einer und derselben Querschnittsdimension ausgedrückt. Man hat z. B. für die kreisförmige Fläche vom Durchmesser d:

$$T = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{d^2}{16} F,$$

folglich ist hier

$$r = \frac{d}{4},$$

während für ein Rechteck von der Höhe h und Breite b, letztere in der Richtung der neutralen Axe gemessen,

$$T = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{h^2}{12} F,$$

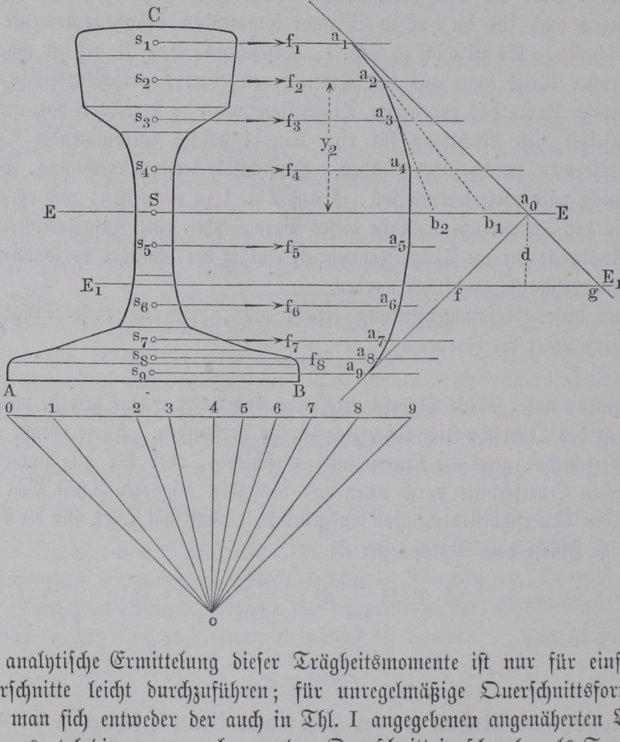
also

$$r = \frac{h}{6} \sqrt{3} = 0{,}289 \; h$$

ist. Man nennt diesen Halbmesser auch wohl, wie bei den Trägheitsmomenten materieller Körper, den Schwungradius oder den Trägheitshalbmesser des Querschnittes.

Die neutrale Axe des Querschnittes eines auf einfache Biegung beanspruchten Balkens geht nach den Ermittelungen in Thl. I durch den Schwerpunkt des Querschnittes und dementsprechend sind die daselbst ermittelten und in der nachstehend angeführten Tabelle enthaltenen Trägheitsmomente auf neutrale Axen bezogen, welche durch den Schwerpunkt gehen.

Fig. 170.



Die analytische Ermittelung dieser Trägheitsmomente ist nur für einfache Querschnitte leicht durchzuführen; für unregelmäßige Querschnittsformen wird man sich entweder der auch in Thl. I angegebenen angenäherten Verfahrungsart bedienen, wonach man den Querschnitt in schmale, als Trapeze zu betrachtende Streifen parallel der neutralen Axe zerlegt, oder man kann zu dem Behufe auch eine graphische Methode anwenden. Zur Erläuterung der letzteren sei ABC, Fig. 170, ein beliebig geformter Querschnitt, dessen Schwerpunkt in S gelegen sei. Soll das Trägheitsmoment für eine durch S gelegte Axe EE bestimmt werden, so theilt man den Quer=

schnitt zu jeder Seite dieser Axe in eine größere Anzahl Streifen parallel zu EE von genügend geringer Breite, um diese Streifen als Trapeze betrachten zu können, und nimmt in den Schwerpunkten $s_1, s_2 \ldots s_9$ dieser Streifen Kräfte parallel zu EE an, deren Größen mit den Flächeninhalten dieser Flächenstreifen proportional sind. Es mögen nach einem beliebig angenommenen Kräftemaßstabe diese Kräfte als die Strecken $0\,1$, $1\,2$, $2\,3 \ldots 8\,9$ auf der mit EE parallelen Kräftelinie angetragen, und der Pol o in einer Entfernung $4\,o = P$ von der Kräftelinie so gewählt werden, daß die beiden Strecken $0\,4$ und $4\,9$ bezw. den Flächenstücken CS und ABS zu beiden Seiten der Axe EE gleich sind. Zeichnet man nun in bekannter Weise das Seilpolygon $a_0\,a_1\,a_2\,a_3 \ldots a_9\,a_0$, so muß der gewählten Pollage o zufolge der Schnittpunkt a_0 der äußersten mit $o\,0$ und $o\,9$ parallelen Seile auf der Axe EE liegen. Nach den bekannten Eigenschaften des Seilpolygons ist nun für das Moment irgend eines Flächenstreifens, z. B. f_2, dessen Schwerpunkt in s_2 liegt, in Bezug auf EE derjenige Abschnitt $b_1 b_2$ ein Maß, welchen die beiden die Kraft f_2 einschließenden Seile $a_1\,a_2\,b_1$ und $a_2\,a_3\,b_2$ auf EE abschneiden, und zwar ist, unter y_2 den Abstand der Kraft f_2 von EE verstanden, dieses Moment durch

$$f_2 \cdot y_2 = P \,.\, b_1\, b_2$$

ausgedrückt, wenn P die Poldistanz $4\,o$ bedeutet. Es folgt daher auch das Trägheitsmoment dieses elementaren Streifens durch

$$f_2\, y_2^2 = P \,.\, b_1 b_2 \,.\, y_2 = 2\,P \,.\, \triangle\, a_2\, b_2\, b_1,$$

indem y_2 als Höhe des Dreiecks $a_2\, b_2\, b_1$ zur Grundlinie $b_1\, b_2$ anzusehen ist. Da dieselbe Betrachtung für jedes andere Element in gleicher Weise gilt, so findet man, daß das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes durch das Product aus P und der von dem Seilpolygone $a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_9\, a_0$ umschlossenen Fläche dargestellt ist. Nennt man diese Fläche φ, und ist F die ganze Fläche des betrachteten Querschnittes, so hat man, unter r dessen Trägheitshalbmesser verstanden, daher für den Querschnitt das Trägheitsmoment:

$$T = F r^2 = 2\, P\, \varphi.$$

Wählt man nun die Poldistanz

$$P = 4\,o = \frac{F}{2} = \frac{1}{2}\; 0\,9,$$

so erhält man mit diesem Werthe

$$T = F r^2 = F \varphi, \text{ d. h. } r^2 = \varphi.$$

Wenn man daher die Fläche $a_1\, a_2 \ldots a_9\, a_0$ in ein Quadrat verwandelt, so erhält man in der Seite desselben den Trägheitshalbmesser r in Bezug auf die durch den Schwerpunkt S des Querschnittes gehende neutrale Axe EE.

Ist $E_1 E_1$ eine andere, im Abstande d zu EE parallele Axe, so erhält man durch dieselbe Betrachtung in der Fläche $a_1 a_2 \ldots a_9 f g a_1$ das Maß für das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf diese Axe $E_1 E_1$. Wird diese Fläche mit φ_1 bezeichnet, so hat man nach der Figur

$$\varphi_1 = \varphi + a_0 f g = \varphi + \frac{d}{2} \cdot f g.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $a_0 f g$ und $o\,0\,9$ folgt nun

$$f g : d = 0\,9 : 4\,o = F : \frac{F}{2},$$

oder

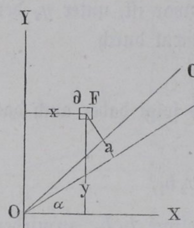
$$f g = 2\,d,$$

so daß man den Inhalt des Dreiecks $a_0 f g = d^2$ und das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf $E_1 E_1$ zu

$$T_1 = F\,(r^2 + d^2) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

erhält. Dieser Satz ist auch in anderer Art schon in Thl. I gefunden worden.

Fig. 171.



Kennt man die Trägheitsmomente T_x und T_y eines Querschnittes in Bezug auf zwei zu einander senkrechte, sonst beliebige Axen OX und OY, Fig. 171, so erhält man das Trägheitsmoment T_α für eine durch O gehende, mit der X Axe den beliebigen Winkel α bildende Axe OA nach der Figur zu

$$T_a = \int \partial F \,.\, a^2 = \int \partial F\,[x^2 + y^2 - (x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2],$$

oder

$$T_a = \int \partial F x^2 \sin^2\alpha + \int \partial F y^2 \cos^2\alpha - \int \partial F \,.\, 2\,x\,y \cos\alpha \sin\alpha,$$

d. h.

$$T_a = T_y \sin^2\alpha + T_x \cos^2\alpha - \sin 2\,\alpha \int x\,y \,.\, \partial F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Dieser Werth wird zu einem Maximum oder Minimum für solche Größen von α, welche sich aus $\frac{\partial T_a}{\partial \alpha} = 0$ ergeben, also aus

$$2 \sin\alpha \cos\alpha\, T_y - 2 \cos\alpha \sin\alpha\, T_x = 2 \cos 2\,\alpha \int x\,y \,.\, \partial F \text{ zu}$$

$$tg\, 2\,\alpha = \frac{2 \int x\,y \,.\, \partial F}{T_y - T_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Um die Größe $\int x\,y\,\partial F$ zu entfernen, denke man noch das Trägheitsmoment T_c für eine unter 45^0 gegen die Coordinatenaxen geneigte Axe OC eingeführt, welches Moment nach (3) zu

$$T_c = \frac{1}{2} T_y + \frac{1}{2} T_x - \int x\,y\,\partial F$$

folgt, so daß man

$$2 \int x\,y\,\partial F = T_y + T_x - 2\,T_c$$

setzen kann, womit die Gleichung (4) übergeht in:

$$tg\,2\,\alpha = \frac{T_y + T_x - 2\,T_c}{T_y - T_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4^a)$$

Dieser Ausdruck liefert in jedem Falle zwei Werthe für $2\,\alpha$, welche sich um 180^0 unterscheiden, und von welchen der eine einem Maximum, der andere einem Minimum entspricht, wie sich daraus ergiebt, daß

$$\frac{\partial^2 T_a}{\partial\,\alpha^2} = 2\cos 2\,\alpha\,(T_y - T_x) + 4\sin 2\,\alpha \int x\,y\,\partial F$$

mit den Werthen $2\,\alpha$ und $2\,\alpha + 180^0$ entgegengesetzte Vorzeichen annimmt. Diese Werthe T_{max} und T_{min} erhält man, wenn man den aus (4) gefundenen Werth von α in (3) einführt.

Man nennt die beiden, den Trägheitsmomenten T_{max} und T_{min} zugehörigen Axen die Hauptaxen des Querschnittes für den Punkt O, und es ist aus (4) ersichtlich, daß die Axen OX und OY selbst zu diesen Hauptaxen werden, sobald

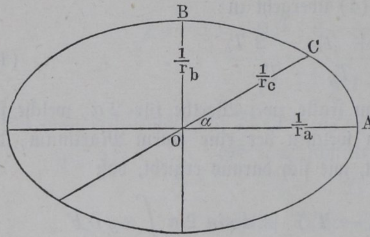
$$\int x\,y\,\partial F = 0$$

wird. Dies ist offenbar für jede Symmetrieaxe eines Querschnittes der Fall, da der Symmetrie wegen jeder positiven Ordinate einerseits dieser Axe eine gleich große negative Ordinate auf der entgegengesetzten Seite entspricht. Hieraus ergiebt sich die auch schon aus dem in Thl. I, Abschn. V, Cap. 2 über die Trägheitsmomente Gesagten folgende Beziehung, daß eine Symmetrieaxe eines Querschnittes für jeden ihrer Punkte eine Trägheitshauptaxe ist. Die zugehörige andere Hauptaxe findet sich dann in der in diesem Punkte zur Symmetrieaxe senkrechten Geraden.

Denkt man sich für alle möglichen durch einen beliebigen Punkt O eines Querschnittes, Fig. 172 (a. f. S.), gehenden Geraden wie OC das Trägheitsmoment $T = F\,r^2$ ermittelt, und auf jeder dieser Axen vom Mittelpunkte O nach jeder Seite ein Stück OC abgetragen, welches nach einem beliebig gewählten Maßstabe der Größe $\frac{1}{r}$ proportional ist, so liegen alle die so erhaltenen Punkte C, wie leicht zu erkennen ist, auf dem Umfange einer Ellipse, deren Mittelpunkt in O liegt, und deren Halbaxen $OA = a$ und $OB = b$ durch die Größen $\frac{1}{r_a}$ und $\frac{1}{r_b}$ dargestellt sind, wenn r_a und r_b die den beiden Hauptaxen zugehörigen Trägheitshalbmesser sind, für welche man also

$$T_{max} = F r_a^2 \text{ und } T_{min} = F r_b^2$$

Fig. 172.



hat. Wählt man, um dies zu erkennen, die Hauptaxen OA und OB zu Coordinatenaxen, so ist für irgend eine Axe OC, welche mit der XAxe den Winkel α bildet, der Construction zufolge

$$OC = c = \frac{1}{r_c},$$

unter r_c den Trägheitshalbmesser des der Axe OC zugehörigen Trägheitsmomentes $T_c = F r_c^2$ verstanden. Nun ist nach (3)

$$T_c = T_y \sin^2\alpha + T_x \cos^2\alpha,$$

da für die Hauptaxen die Größe $\int xy \,.\, \partial F = 0$ wird. Setzt man in obiger Gleichung $T = F r^2$, so folgt

$$r_c^2 = r_b^2 \sin^2\alpha + r_a^2 \cos^2\alpha,$$

oder, wenn man nach der Figur $\sin\alpha = y r_c$ und $\cos\alpha = x r_c$ einführt und durch r_c^2 beiderseits dividirt:

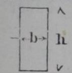
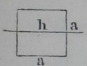
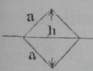
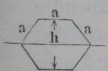
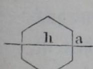
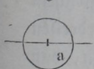
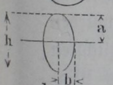
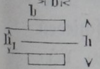
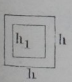
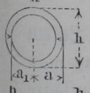
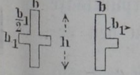
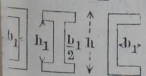
$$1 = r_b^2 y^2 + r_a^2 x^2,$$

welche Gleichung einer Ellipse mit den Halbaxen $\frac{1}{r_a} = a$ und $\frac{1}{r_b} = b$ zukommt.

Diejenigen Hauptaxen, welche durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen, nennt man die Schwerpunktshauptaxen, und die zugehörige Ellipse die Centralellipse des Querschnittes (s. auch Thl. I, Abschn. V, Cap. 2).

Die Ermittelung der Schwerpunktshauptaxen und ihrer zugehörigen Trägheitsmomente ist, wie sich aus dem Folgenden (§. 46) ergeben wird, dann erforderlich, wenn die Kraftebene, in welcher der Balken in Angriff genommen wird, nicht eine Symmetrieebene desselben ist.

Trägheitsmomente.

	F	T	W	r^2	$\eta = \dfrac{W}{F\,\frac{h}{2}}$
	$b\,h$	$\frac{1}{12}\,b\,h^3$	$\frac{1}{6}\,b\,h^2$	$\frac{h^2}{12}$	0,333
	a^2	$\frac{1}{12}\,a^4$	$\frac{1}{6}\,a^3$	$\frac{a^2}{12}$	0,333
	a^2	$\frac{1}{12}\,a^4$	$0{,}118\,a^3$	$\frac{a^2}{12}$	0,236
	$2{,}598\,a^2$	$0{,}5413\,a^4$	$\frac{5}{8}\,a^3$	$0{,}209\,a^2$	0,278
	$2{,}598\,a^2$	$0{,}5413\,a^4$	$0{,}5413\,a^3$	$0{,}209\,a^2$	0,209
	$\pi\,a^2$	$\frac{\pi\,a^4}{4}$	$\frac{\pi\,a^3}{4}$	$\frac{a^2}{4}$	0,25
	$\pi\,a\,b$	$\frac{\pi\,a^3\,b}{4}$	$\frac{\pi\,a^2\,b}{4}$	$\frac{a^2}{4}$	0,25
	$b\,(h - h_1)$	$\frac{b}{12}\,(h^3 - h_1^3)$	$\frac{b}{6}\,\frac{h^3 - h_1^3}{h}$	$\frac{h^2 + h\,h_1 + h_1^2}{12}$	$\frac{1}{3}\,\frac{h^2 + h\,h_1 + h_1^2}{h^2}$
	$h^2 - h_1^2$	$\frac{h^4 - h_1^4}{12}$	$\frac{h^4 - h_1^4}{6\,h}$	$\frac{h^2 + h_1^2}{12}$	$\frac{1}{3}\,\frac{h^2 + h_1^2}{h^2}$
	$\pi\,(a^2 - a_1^2)$	$\pi\,\frac{a^4 - a_1^4}{4}$	$\pi\,\frac{a^4 - a_1^4}{4\,a}$	$\frac{a^2 + a_1^2}{4}$	$\frac{1}{4}\,\frac{a^2 + a_1^2}{a^2}$
	$b\,h + b_1\,h_1$	$\frac{b\,h^3 + b_1\,h_1^3}{12}$	$\frac{b\,h^3 + b_1\,h_1^3}{6\,h}$	$\frac{1}{12}\,\frac{b\,h^3 + b_1\,h_1^3}{b\,h + b_1\,h_1}$	$\frac{1}{3\,h^2}\,\frac{b\,h^3 + b_1\,h_1^3}{b\,h + b_1\,h_1}$
	$b\,h - b_1\,h_1$	$\frac{b\,h^3 - b_1\,h_1^3}{12}$	$\frac{b\,h^3 - b_1\,h_1^3}{6\,h}$	$\frac{1}{12}\,\frac{b\,h^3 - b_1\,h_1^3}{b\,h - b_1\,h_1}$	$\frac{1}{3\,h^2}\,\frac{b\,h^3 - b_1\,h_1^3}{b\,h - b_1\,h_1}$