

$\frac{l_1}{3}$  von  $U_2$  und  $\frac{l_2}{3}$  von  $Z_2$ . Verlängert man daher  $A_1 z_2$  bis zum Durchschnitte  $n_2$  mit  $N_2$ , so ergibt sich aus  $n_2 u_2$  die Richtung der folgenden Polygonseite, welche die Kraft  $Z_3$  in  $z_3$  schneidet. Die weitere Verzeichnung des Seilpolygons erfolgt in gleicher Art; indem man von  $z_3$  durch  $A_3$  zieht, erhält man den Durchschnitt  $u_3$  in der Kraft  $U_3$  und hat von  $u_3$  aus die folgende Polygonseite so zu ziehen, daß dieselbe durch den Schnittpunkt  $n_3$  der verlängerten Polygonseite  $u_2 z_3$  mit der Mittelkraft  $N_3$  aus  $Z_3$  und  $U_3$  hindurchgeht. Hierbei ist die Lage dieser Mittelkraft  $N_3$  wieder so zu bestimmen, daß ihr Abstand von  $U_3$  gleich  $\frac{l_2}{3}$ , und derjenige von  $Z_3$  gleich  $\frac{l_3}{3}$  anzunehmen ist. Von der Ecke  $z_4$  des Polygons zieht man ferner durch  $A_4$  bis zum Durchschnitte  $u_4$  mit  $U_4$  und fügt die folgende  $u_4 q$  wiederum in solcher Richtung an, daß  $q u_4$  verlängert durch den Schnittpunkt  $n_4$  des Seiles  $u_3 z_4$  mit der Mittelkraft  $N_4$  aus  $Z_4$  und  $U_4$  hindurchgeht. Für diese Mittelkraft  $N_4$  gilt dieselbe Beziehung, wie für  $N_3$  und  $N_2$ , ihre Abstände von  $U_4$  und  $Z_4$  sind deren Größen umgekehrt proportional und daher bezw.  $\frac{l_3}{3}$  und  $\frac{l_4}{3}$ .

Auf diese Weise wäre das Seilpolygon  $A_1 z_2 u_2 z_3 u_3 z_4 u_4 q$  gefunden, und man würde durch Polstrahlen im Kräftepolygone, die parallel mit den Seilpolygonseiten sind, die Größen  $U$  und  $Z$  erhalten, wenn eine von diesen Größen, etwa  $Z_2 = a z_2$ , oder auch wenn  $Z_4$  bekannt wäre, welche letztere Größe im Kräftepolygone offenbar durch die Strecke  $u_3 z_4$  dargestellt ist, welche die mit den Seiten  $z_4 u_3$  und  $z_4 u_4$  parallelen Polstrahlen zwischen sich einschließen. Um die Aufgabe als gelöst zu betrachten, ist es also nur nöthig, die noch unbekannte Größe  $Z_4$ , d. h. das Moment  $M_4$  in  $A_4$  aus der bekannten Belastung  $Q$  der Strecke  $A_4 A_5$  zu bestimmen, da alsdann das Kräftepolygon die übrigen Größen  $U$  und  $Z$ , d. h. die Momente  $M_3$  und  $M_2$  ergibt. Um nun  $Z_4$  aus  $Q$  zu bestimmen, kann man zunächst betreffs des Seilpolygons die folgende Betrachtung anstellen.

**Fortsetzung.** Die vorstehend mit Hülfe der Mittelkräfte  $N_2, N_3$  und §. 43.  $N_4$  festgesetzten Seilrichtungen ergeben in der Horizontalen  $A_1 A_5$  gewisse Schnittpunkte  $J_2, J_3$  und  $J_4$ , welche für die Untersuchung der continuirlichen Träger von besonderer Wichtigkeit sind. Es ist zunächst leicht zu erkennen, daß diese Punkte ganz bestimmte **Festpunkte** sind, zu denen man immer gelangen wird, wenn man auch ein anderes Seilpolygon, d. h. eine andere Horizontalkraft  $o m$  zu Grunde legen würde. Dies erkennt man, wenn man die Bedeutung jedes dieser Punkte  $J$  ins Auge faßt, als Angriffspunkt einer Mittelkraft von zwei verticalen Kräften, welche ein constantes

Verhältniß zu einander haben. Man ersieht nämlich aus dem Kräftepolygon, daß  $J_2$  der Angriffspunkt derjenigen Mittelkraft ist, welche aus der Verticalkraft  $U_2 = z_2 u_2$  und dem Auflagerdrucke  $m_{z_2} = \frac{2}{3} Z_2$  resultirt, den die Momentenfläche  $Z_2$  auf  $A_2$  ausübt. Denn mit den Polstrahlen  $o m$ ,  $o_{z_2}$  und  $o u_2$  sind offenbar die drei Seile  $A_2 J_2$ ,  $A_2 u_2$  und  $z_2 u_2$  parallel, folglich geht durch den Schnittpunkt  $J_2$  der Endseile  $A_2 J_2$  und  $z_2 u_2$  die Mittelkraft der beiden genannten Kräfte  $U_2$  und  $\frac{2}{3} Z_2$ . Diese Kräfte drücken sich nun durch

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{M_2}{r^2} l_2$$

und

$$\frac{2}{3} Z_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{M_2}{r^2} l_1$$

aus, folglich haben sie ein festes, nur von den Oeffnungsweiten  $l_1$  und  $l_2$  abhängiges Verhältniß

$$\frac{U_2}{\frac{2}{3} Z_2} = \frac{3 l_2}{2 l_1}.$$

Daraus folgt aber, daß auch der Punkt  $J_2$  eine ganz bestimmte Lage im ersten Drittel der Länge  $l_2$  von  $A_2$  aus haben muß, welche Lage nicht von der Größe des Momentes  $M_2$ , d. h. nicht von der Größe der Belastung  $Q$  abhängig ist.

Ebenso erkennt man, daß  $J_3$  der Angriffspunkt der Mittelkraft ist aus der Kraft  $U_3 = z_3 u_3$  und aus  $m_{z_3}$ , d. h. dem von  $Z_3$  bei einer Zerlegung nach  $A_3$  und  $J_2$  auf  $A_3$  ausgeübten Drucke, denn die drei Seile  $A_3 J_3$ ,  $A_3 u_3$  und  $z_3 u_3$  sind mit den Polstrahlen  $o m$ ,  $o_{z_3}$  und  $o u_3$  bezw. parallel, folglich muß durch den Schnittpunkt  $J_3$  die Mittelkraft der genannten beiden Seitenkräfte gehen. Da nun auch  $U_3$  und  $Z_3$  ein constantes nur von  $l_3$  und  $l_2$  abhängiges Verhältniß haben, und  $J_2$  als ein fester Punkt erkannt wurde, so findet sich ähnlich wie für  $J_2$  auch, daß  $J_3$  ein fester von der Belastung unabhängiger Punkt sein muß. Gleiches gilt von  $J_4$ , durch welchen die Mittelkraft von  $U_4 = z_4 u_4$  und dem von  $Z_4$  bei einer Zerlegung nach  $A_4$  und  $J_3$  auf  $A_4$  ausgeübten Auflagerdrucke  $m_{z_4}$  hindurchgeht.

Diese festen Punkte  $J$ , welche wegen der später ersichtlichen, ihnen anhaftenden Eigenschaft Inflexions- oder Wendepunkte genannt werden, haben nun die merkwürdige Eigenschaft, daß durch die beiden Abschnitte, in welche ein solcher Punkt die Oeffnungsweite, in welcher er liegt, theilt, gleichzeitig das Verhältniß der beiderseitigen Stützmente gegeben ist. Es ist also z. B. für  $J_3$  die Gleichung gültig:

$$J_3 A_3 : J_3 A_4 = M_3 : M_4.$$

Diese Beziehung läßt sich leicht aus dem Seilpolygone erkennen. Bekanntlich ist nach den Eigenschaften der Seilcurven das Moment einer Kraft wie  $U_3$  in Bezug auf irgend einen Punkt wie  $A_3$  gleich dem Producte aus dem Horizontalzuge  $H$  in die Ordinate  $A_3\alpha$ , welche auf einer durch  $A_3$  gelegten Verticallinie durch die beiden Seile  $u_3z_3$  und  $u_3z_4$  abgeschnitten wird, zwischen denen die Kraft  $U_3$  enthalten ist\*). Man hat daher

$$H \cdot A_3\alpha = U_3 \frac{l_3}{3}.$$

In derselben Weise erhält man aber auch für die Kraft  $Z_4$  in Bezug auf den Punkt  $A_4$ :

$$H \cdot A_4\beta = Z_4 \frac{l_3}{3},$$

daher durch Division:

$$\frac{A_3\alpha}{A_4\beta} = \frac{U_3}{Z_4} = \frac{M_3}{M_4}.$$

Da nun aber auch

$$A_3\alpha : A_4\beta = J_3 A_3 : J_4 A_4,$$

so folgt die obige Behauptung:

$$\frac{J_3 A_3}{J_4 A_4} = \frac{M_3}{M_4}.$$

Kennt man daher die Inflexionspunkte  $J_2, J_3, J_4$ , so kann man aus einem beliebigen Stützpunkte, wie z. B.  $M_4$  in  $A_4$ , sofort auch die Größe der Momente  $M_3$  in  $A_3$  und  $M_2$  in  $A_2$  bestimmen, ohne das Seilpolygon zeichnen zu müssen. Denn ist  $M_4 = A_4 C_4$  bekannt, so giebt die Gerade  $C_4 J_4$  in  $C_3$  das Moment  $M_3 = A_3 C_3$ , und die durch  $C_3$  und  $J_2$  gelegte Gerade schneidet ebenso auf der Verticalen durch  $A_2$  in  $C_2$  eine Strecke  $A_2 C_2$  ab, welche nach dem angenommenen Maßstabe das Moment  $M_2$  dafelbst vorstellt.

Die Ermittlung der Inflexionspunkte  $J$  verursacht nach dem Vorhergegangenen keine Schwierigkeit. Um diese letzteren Punkte festzustellen, zieht man durch einen beliebigen Punkt  $z_2$  der Verticallinie  $Z_2$  im Abstände  $\frac{l_3}{3}$  von  $A_2$  zwei Gerade durch  $A_2$  und  $A_1$ , und verbindet deren bezügliche

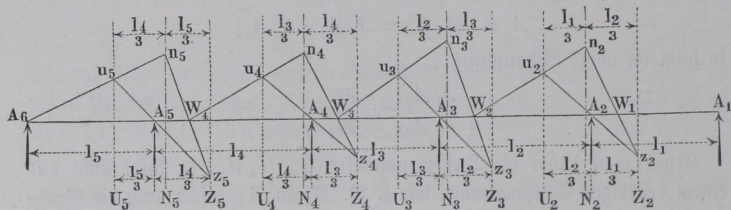
\*) Man erkennt die Richtigkeit hiervon sogleich, wenn man die Spannung  $S_3$  des Seiles  $u_3 n_3$  in  $\alpha$  in ihre horizontale Componente  $H$  und ihre verticale Componente  $V$  zerlegt, welche letztere für  $A_3$  ein Moment gleich Null hat, so daß für  $A_3$  die Momentengleichung gilt:

$$U_3 \cdot \frac{l_3}{3} = H \cdot A_3\alpha.$$

Durchgangspunkte  $u_2$  durch die Verticallinie  $U_2$  im Abstände  $\frac{l_2}{3}$  von  $A_2$  und  $n_2$  durch die Mittelkraft  $N_2$  von  $Z_2$  und  $U_2$  mit einander durch die Gerade  $u_2 n_2$ , welche in der Horizontalen  $A_1 A_5$  den Inflexionspunkt  $J_2$  liefert. Ist  $J_2$  gefunden, so zieht man ebenso durch einen beliebigen Punkt  $z_3$  von  $Z_3$  die beiden Strahlen durch  $A_3$  und  $J_2$ , und verbindet den Durchschnitt  $u_3$  von  $U_3$  und  $z_3 A_3$  mit demjenigen  $n_3$ , in welchem  $z_3 J_2$  die Mittelkraft  $N_3$  von  $U_3$  und  $Z_3$  schneidet, um in dem Durchschnitte der Verbindungslinie  $u_3 n_3$  mit der Horizontalen  $A_1 A_5$  den Inflexionspunkt  $J_3$  zu finden, und sofort findet man  $J_4$  und  $J_5$ .

Wenn man die vorstehend angegebene Construction der Fig. 161 in entsprechender Art nochmals in der entgegengesetzten Richtung, d. h. von  $A_6$  nach  $A_1$  fortschreitend vornimmt, so gelangt man in derselben Weise zu einer zweiten Reihe von Wendepunkten  $W_4, W_3, W_2$  und  $W_1$  rechts neben den Zwischenstützen, für welche die Art der Construction aus Fig. 162 ersichtlich

Fig. 162.



und nach dem Vorangegangenen leicht verständlich ist. Man zieht, um diese Wendepunkte  $W$  zu erhalten, durch einen beliebigen Punkt  $u_5$  von  $U_5$  zwei Strahlen durch  $A_6$  und  $A_5$  und verbindet deren Schnittpunkte mit  $N_5$  und bezw.  $Z_5$  durch die Gerade  $n_5 z_5$ , welche in der Axe  $A_6 A_1$  den Punkt  $W_4$  ergibt. Durch  $W_4$  und  $A_4$  zieht man dann wieder von einem beliebigen Punkte  $u_4$  der Verticalen  $U_4$  zwei Strahlen, deren Schnittpunkte  $n_4$  mit  $N_4$  und  $z_4$  mit  $Z_4$  in ihrer Verbindung  $n_4 z_4$  den folgenden Wendepunkt  $W_3$  ergeben u. s. w. Für diese Wendepunkte  $W$  gelten die nämlichen Beziehungen, welche vorstehend für die Wendepunkte  $J$  gefunden wurden, d. h. wenn nur eine einzige Deffnung des Trägers belastet ist, so werden die links von dieser Deffnung gelegenen Strecken durch die Wendepunkte  $W$  in demselben Verhältnisse getheilt, wie dasjenige der Stützmente über den beiden die betreffende Strecke einschließenden Auslagern ist.

Um nun die durch die Belastung einer Strecke wie  $A_4 A_5$ , Fig. 163, hervorgerufenen Momente  $M_4$  und  $M_5$  in den beiden Auslagern  $A_4$  und  $A_5$  zu bestimmen, dient ebenfalls die im Vorstehenden gefundene Eigenschaft der Wendepunkte  $W$  und  $J$  in folgender Art. Es sei die Strecke  $A_4 A_5$  in

irgend einem Punkte  $E_5$  durch eine beliebige Belastung  $K$  angegriffen, welche daselbst das Moment

$$E_5 B_5 = K \frac{A_4 E_5 \cdot A_5 E_5}{A_4 A_5} = K \frac{ab}{l_4} = k$$

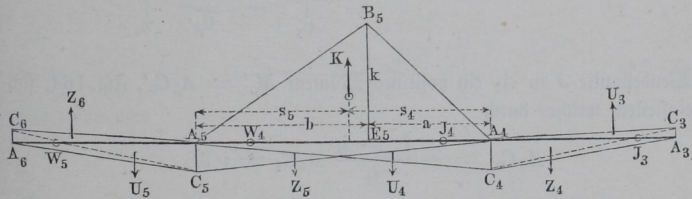
hervorruft, so ist die Belastung der elastischen Linie durch die Dreiecksfläche  $A_4 B_5 A_5$  von dem Inhalte  $F = k \frac{l_4}{2}$  dargestellt. Sind nun  $s_4$  und  $s_5$  die horizontalen Abstände des Schwerpunktes  $S$  dieser Dreiecksfläche von  $A_4$  und  $A_5$ , so erhält man die von dieser Momentenfläche auf die Stützen ausgeübten Auflagerdrucke zu

$$k \frac{l_4}{2} \cdot \frac{s_5}{l_4} = k \frac{s_5}{2} \text{ in } A_4$$

und

$$k \frac{s_4}{2} \text{ in } A_5.$$

Fig. 163.



Bezeichnet man nun wieder mit  $M_4 = A_4 C_4$  und  $M_5 = A_5 C_5$  die noch unbekanntenen in  $A_4$  und  $A_5$  erzeugten negativen Momente, und ebenso mit  $M_3 = A_3 C_3$  und  $M_6 = A_6 C_6$ \*) die positiven Momente der nächst benachbarten Stützen, so sind die beiden Stützen  $A_4$  und  $A_5$  außerdem noch durch die zugehörigen Dreiecke

$$\begin{aligned} + A_4 A_3 C_3 &= U_3, & - A_4 A_3 C_4 &= Z_4, \\ - A_4 A_5 C_4 &= U_4, & - A_4 A_5 C_5 &= Z_5, \\ - A_5 A_6 C_5 &= U_5 \text{ und } + A_5 A_6 C_6 &= Z_6 \end{aligned}$$

belastet, welche mit  $\frac{1}{3}$  bzw.  $\frac{2}{3}$  ihres Betrages auf die Stützpunkte drücken. Man findet daher die auf  $A_4$  und  $A_5$  ausgeübten gesammten Auflagerdrucke, welche nach dem oben erkannten Gesetze gleich Null sein müssen, zu:

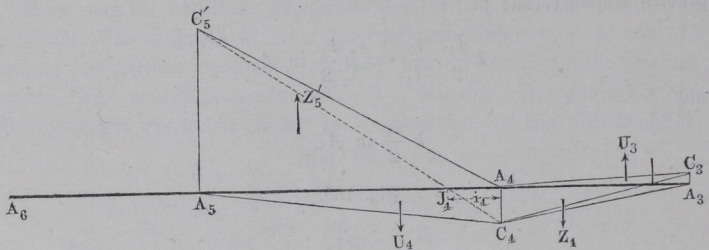
\*) Wenn  $A_6$  eine Endstütze ist, wie in Fig. 161, so fällt  $M_6 = 0$  aus.

$$A_4 = k \frac{s_5}{2} - \frac{Z_5}{3} - 2 \frac{U_4 + Z_4}{3} + \frac{U_3}{3} = 0 \dots (1)$$

$$A_5 = k \frac{s_4}{2} - \frac{U_4}{3} - 2 \frac{Z_5 + U_5}{3} + \frac{Z_6}{3} = 0 \dots (2)$$

Denkt man sich jetzt die Belastung durch die Kraft  $K$  beseitigt, und statt deren auf den links von  $A_5$  befindlichen Trägertheil äußere Kräfte in solcher Art wirksam, daß in  $A_4$  dasselbe Moment  $A_4 C_4 = M_4$  auftritt, welches durch die Belastung  $K$  hervorgerufen wird, so muß nach der Eigenschaft der

Fig. 164.



Wendepunkte  $J$  in  $A_5$  ein positives Moment  $M_5' = A_5 C_5'$ , Fig. 164, sich einstellen, welches durch

$$A_5 C_5' = - \frac{l_4 - i_4}{i_4} A_4 C_4 = \nu M_4$$

ausgedrückt ist, wenn  $i_4 = A_4 J_4$  den Abstand des Inflexionspunktes  $J_4$  von  $A_4$  und  $\nu = - \frac{l_4 - i_4}{i_4}$  das Verhältniß der beiden Abschnitte  $\frac{A_5 J_4}{A_4 J_4}$  bedeutet, in welche die Strecke  $l_4$  durch den Inflexionspunkt  $J_4$  getheilt wird. Die Stütze  $A_4$  ist daher in diesem Falle durch die aus der Fig. 164 ersichtlichen Weise belastet, und man findet nunmehr den dadurch in  $A_4$  hervorgerufenen Auflagerdruck, welcher auch jetzt gleich Null sein muß, zu

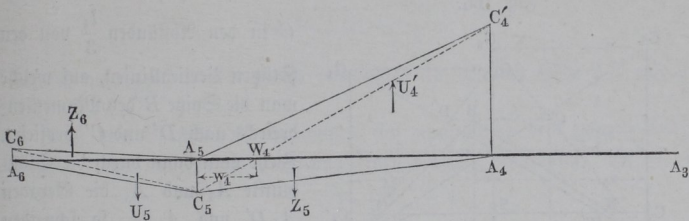
$$A_4 = \frac{Z_5'}{3} - 2 \frac{U_4 + Z_4}{3} + \frac{U_3}{3} = 0 \dots (1^a)$$

Wenn man eine ganz übereinstimmende Betrachtung in Betreff der Stütze  $A_5$  anstellt, d. h. wenn man sich die Belastung  $K$  ersetzt denkt durch eine Einwirkung äußerer Kräfte auf das rechts von  $A_4$  gelegene Balkenstück von solcher Art, daß in  $A_5$  das Moment  $M_5$  unverändert wird, so muß für diesen Fall in  $A_4$  ein positives Moment, Fig. 165,  $M_4' = A_4 C_4' = \mu M_5$  sich einstellen, wenn man mit  $\mu = - \frac{A_4 W_4}{A_5 W_4} = - \frac{l_4 - w_4}{w_4}$  das Verhältniß

der Abschnitte bezeichnet, in welches die Strecke  $l_4$  durch den linken Wendepunkt getheilt wird. Es findet sich nunmehr der Auflagerdruck in  $A_5$  zu

$$A_5 = \frac{U_4'}{3} - 2 \frac{Z_5 + U_5}{3} + \frac{Z_6}{3} = 0 \dots \dots \dots (2^a)$$

Fig. 165.



Die Vergleichung von (1) und (2) mit (1<sup>a</sup>) und (2<sup>a</sup>) ergibt nun:

$$k \frac{s_5}{2} = \frac{Z_5' + Z_5}{3} \dots \dots \dots (3)$$

und

$$k \frac{s_4}{2} = \frac{U_4' + U_4}{3} \dots \dots \dots (4)$$

oder wenn man

$$Z_5' = \nu U_4 = \nu M_4 \frac{l_4}{2}$$

und

$$U_4' = \mu Z_5 = \mu M_5 \frac{l_4}{2}$$

einführt,

$$k \frac{s_5}{2} = \frac{1}{3} (M_5 + \nu M_4) \frac{l_4}{2} \dots \dots \dots (5)$$

und

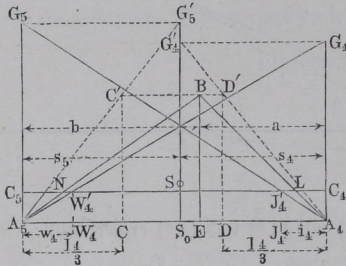
$$k \frac{s_4}{2} = \frac{1}{3} (M_4 + \mu M_5) \frac{l_4}{2} \dots \dots \dots (6)$$

Aus dem Vorstehenden (3) folgt also, daß der Druck, welchen die Momentenfläche der Belastung  $K$  auf eine der beiden Stützen wie  $A_4$  ausübt, gerade so groß ist, wie derjenige, welchen die beiden Momentendreiecke  $Z_5$  und  $Z_5'$  auf dieselbe Stütze  $A_4$  hervorbringen. Wenn man daher ein bei  $A_5$  rechtwinkeliges Dreieck von der Basis  $A_5A_4 = l_4$  aufsucht, welches in  $A_4$  den Druck  $k \frac{s_5}{2}$  erzeugt, so erhält man nach (5) in der Höhe oder der anderen Kathete desselben in  $A_5$  die Größe für den Werth  $M_5 + \nu M_4$ . In derselben Weise ergibt ein Dreieck zu derselben Basis  $A_5A_4$ , welches bei  $A_4$  rechtwinkelig ist und in

$A_5$  den Druck  $k \frac{s_4}{2}$  ausübt, nach (6) in seiner Höhe bei  $A_4$  den Werth von  $M_4 + \mu M_5$ .

Diese Dreiecke sind leicht zu construiren, und zwar giebt Mohr dazu die folgende Construction an. Ist  $A_4 B A_5$ , Fig. 166, die Momentenfläche der Last  $K$ , so zieht man in  $D$  und

Fig. 166.



$C$  in den Abständen  $\frac{l_4}{3}$  von den

Stützen Verticallinien, auf welche man die Spitze  $B$  des Momentendreiecks nach  $D'$  und  $C'$  projectirt. Zieht man dann durch die Stützpunkte  $A_4$  und  $A_5$  die Geraden  $A_4 D'$  und  $A_5 C'$ , so schneiden diese auf der Verticalen durch den Schwerpunkt  $S$  die gesuchten Höhen  $S_0 G_4' = A_4 G_4$  und

$S_0 G_5' = A_5 G_5$  ab. Die Richtigkeit dieser Construction erkennt man leicht aus der Figur, welche aus

$$S_0 G_4' : D D' = s_4 : \frac{l_4}{3}$$

die Größe

$$S_0 G_4' = 3 \cdot \frac{k s_4}{l_4}$$

ergiebt. Das Dreieck  $A_5 A_4 G_4$  übt daher auf  $A_5$  den Druck

$$\frac{1}{3} \cdot A_4 G_4 \cdot \frac{l_4}{2} = \frac{k s_4}{2},$$

also von derselben Größe, wie das Momentendreieck  $A_4 B A_5$  aus.

Hat man die beiden Dreiecke  $A_4 A_5 G_4$  und  $A_4 A_5 G_5$  gezeichnet, so findet man nach dem Vorstehenden die gesuchten Momente  $M_4$  und  $M_5$  über den Stützen, wenn man durch die Wendepunkte  $W_4$  und  $J_4$  Verticallinien zieht, und die Schnittpunkte  $W_4'$  und  $J_4'$  mit den Hypotenusen der betreffenden Dreiecke durch eine Gerade  $W_4' J_4'$  verbindet. Diese liefert dann in  $C_4 A_4$  und  $C_5 A_5$  die gesuchten Momente  $M_4$  und  $M_5$ .

Es mag hier sogleich bemerkt werden, daß die Spitze  $B$  des Momentendreiecks der Last  $K$  immer oberhalb der beiden Dreiecksseiten  $A_5 G_4$  und  $A_4 G_5$  gelegen sein wird, wo auch die Belastung  $K$  zwischen  $A_4$  und  $A_5$  wirken möge. In Folge dessen werden die Schnittpunkte  $L$  und  $N$  niemals zwischen die Wendepunkte  $J$  und  $W$ , sondern stets zwischen die letzteren und die betreffenden Stützpunkte fallen, eine Eigenschaft, auf welche in der Folge noch Bezug genommen werden wird.



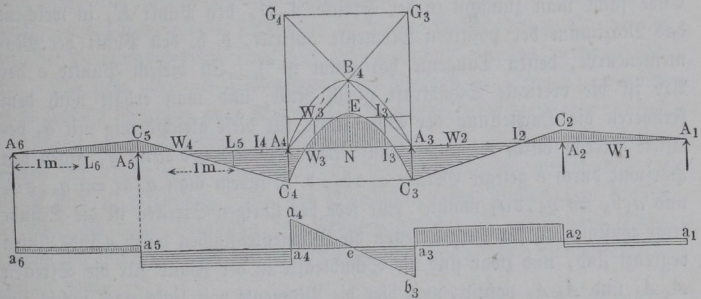
Wenn die Belastung der Oeffnung gleichmäßig über deren Länge vertheilt ist, wie in Fig. 161 vorausgesetzt worden, so ergeben sich die beiden vorerwähnten Höhen  $A_4G_4$  und  $A_5G_5$  gleich groß und zwar ist jede derselben gleich der doppelten Scheitelordinate  $k$  der Parabel, welche die Momentenfläche darstellt, denn der von der Parabel auf jede Stütze ausgeübte Auflagerdruck ist

$$1/2 \cdot 2/3 k l_4 = \frac{k l_4}{3},$$

also eben so groß wie derjenige eines Dreiecks von der Höhe  $2k$  und der Basis  $l_4$ .

Nach dem Vorstehenden bestimmen sich nun die in dem ganzen Träger  $A_1A_6$ , Fig. 167, durch Belastung einer einzigen Oeffnung, wie  $A_3A_4$ ,

Fig. 167.



hervorgerufenen Momente wie folgt. Es seien zunächst nach Anweisung der Figuren 161 und 162 die Wendepunkte  $J$  und  $W$  ermittelt und durch die Parabel  $A_4B_4A_3$ , deren Scheitelhöhe in der Mitte  $N$  der belasteten Oeffnung die Größe  $NB_4 = q_3 \frac{l_3^2}{8}$  hat, sei die Fläche der positiven Momente dieser Strecke dargestellt. Macht man jetzt  $A_4G_4 = A_3G_3 = 2NB_4$ , und zieht  $A_4G_3$  und  $A_3G_4$ , so erhält man in den Verticalen durch  $J_3$  und  $W_3$  die beiden Punkte  $J'_3$  und  $W'_3$ , deren Verbindungslinie auf den Verticalen durch  $A_3$  und  $A_4$  Strecken abschneidet, welche man als  $M_3 = A_3C_3$  und als  $M_4 = A_4C_4$  anzutragen hat. Nachdem dies geschehen, erhält man in bekannter Art mittelst der Wendepunkte  $W$  und  $J$  durch die Linienzüge  $C_3J_2C_2A_1$  und  $C_4W_4C_5A_6$  die Momentenflächen der unbelasteten Strecken zu beiden Seiten. Wenn man noch, um die positiven und negativen Momente der belasteten Strecke  $A_3A_4$  zu addiren, die Ordinate der Parabel  $A_4B_4A_3$  und des Trapezes  $A_4A_3C_3C_4$  algebraisch summiert, so giebt die in der Figur schraffierte Fläche eine Darstellung der Biegemomente, welche

in jedem Punkte durch die gleichmäßige Belastung der Strecke  $A_3 A_4$  mit der Last  $q_3 l_3$  hervorgerufen werden.

Es leuchtet ein, daß, wenn dieselbe Construction für sämtliche Oeffnungen wiederholt wird, durch algebraische Summirung aller so erhaltenen Momentenflächen diejenige Fläche erhalten wird, welche der vollen Belastung des ganzen Trägers in allen Feldern durch die diesen Feldern zukommenden Belastungen ( $q = p + k$ ) entspricht.

Aus den für alle Punkte des Balkens gefundenen Biegemomenten  $M$  läßt sich dann auch mit Hülfe der Gleichung

$$V = \frac{\partial M}{\partial x}$$

die Größe der Schubkraft  $V$  ermitteln, welche in jedem Punkte des Balkens ebenfalls durch die Belastung der Strecke  $A_3 A_4$  erzeugt wird. Zu dem Ende sucht man zunächst in der Strecke  $A_3 A_4$  den Punkt  $E$ , in welchem das Maximum der positiven Momente auftritt, d. h. den Punkt der Momentencurve, dessen Tangente horizontal ist \*). In diesem Punkte  $e$  der Aze ist die verticale Schubkraft gleich Null, und man erhält nach dem Früheren die Darstellung der Schubkräfte für diese gleichförmig mit  $q_3$  belastete Strecke durch die unter dem Neigungswinkel  $\text{arc tang } q_3$  gegen den Horizont durch  $e$  gelegte Gerade  $a_4 e b_3$ , d. h. indem man  $a_4 a_4 = q_3 \cdot e a_4$  und  $a_3 b_3 = q_3 \cdot e a_3$  macht. Für jede der übrigen Strecken ist die Schubkraft constant, da für diese Strecken die Momentenflächen durch gerade Linien begrenzt sind, und zwar sind die Schubkräfte in der Figur für die Strecken  $A_6 A_5$  und  $A_3 A_2$  positiv, weil hier die Momente von links nach rechts zunehmen (algebraisch), während für die Strecken  $A_5 A_4$  und  $A_2 A_1$ , auf welchen die Momente von links nach rechts abnehmen, die Schubkräfte negativ und demgemäß in der Figur unterhalb der Aze  $a_6 a_1$  angetragen sind. Die absolute Größe der Schubkraft für jedes Feld findet man wegen

$$V = \frac{\partial M}{\partial x}$$

aus dem Verhältnisse

$$+ \frac{A_5 C_5}{A_6 A_5} = + \frac{M_5}{l_5},$$

und für die Strecke  $A_5 A_4$  durch

$$- \frac{A_4 C_4}{W_4 A_4}.$$

Da die Größen  $A_5 C_5$ ,  $A_4 C_4$  . . . Momente, d. h. Meterkilogramme (oder

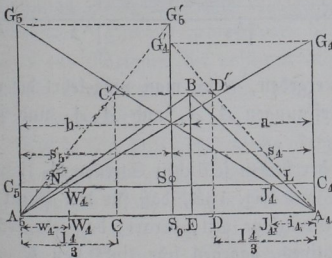
\*) Dieser Punkt  $E$  liegt bei der gleichförmig vertheilten Belastung in Fig. 167 in der Mitte der Oeffnung.

Meter-tonnen) vorstellen, so repräsentiren obige Verhältnisse natürlich Kräfte (Kilogramme oder Tonnen). Hat man daher für die Momente einen Maßstab gewählt, nach welchem 1 mm  $n$  Meter-tonnen beträgt, so erhält man in der Ordinate des Punktes  $L_6$  oder  $L_5$ , welcher nach dem Längenmaßstabe um 1 m von dem Nullpunkte  $A_6$  bzw.  $W_4$  absteht, diejenigen Längen, welche, nach dem Maßstabe für die Momente gemessen, die Schubkraft in Tonnen ergeben. Wenn man auch die Schubkraftdiagramme für die besondere Belastung jeder einzelnen Oeffnung entwirft, so erhält man durch algebraische Summirung derselben ebenfalls das Diagramm für die aus der vollen Belastung des ganzen Trägers resultirenden Schubkräfte.

Die volle Belastung des ganzen Trägers durch die gesammte aus dem Eigengewichte  $p$  und der Verkehrslast  $k$  bestehende Totallast  $q$  entspricht jedoch nicht dem ungünstigsten Belastungsfalle des Trägers für jeden Querschnitt, da durch diese volle Belastung in keinem Punkte das größte daselbst mögliche Biegemoment oder die größte Schubspannung hervorgerufen wird. Da nun aber die Dimensionen des Balkens in jedem Querschnitte diesen größten Werthen  $max M$  und  $max V$  gemäß gewählt werden müssen, so erübrigt noch, diejenigen Belastungszustände des Balkens festzustellen, welchen für irgend einen Querschnitt die gedachten absolut größten Werthe von  $M$  und  $V$  zukommen. Da das Eigengewicht der Construction ein für alle Mal als volle Belastung des Trägers auftritt, so wird diese Untersuchung sich nur auf die jeweilige Stellung der beweglichen Verkehrslast zu beziehen haben.

Betrachtet man irgend eine Oeffnung wie  $A_5 A_4$ , Fig. 168, welche in einem beliebigen Punkte  $E$  einer Belastung durch  $K$  ausgesetzt ist, während die sämmtlichen übrigen Oeffnungen, abgesehen vom Eigengewichte, nicht belastet sind, so erhält man nach dem Vorstehenden in dem Linienzuge

Fig. 168.



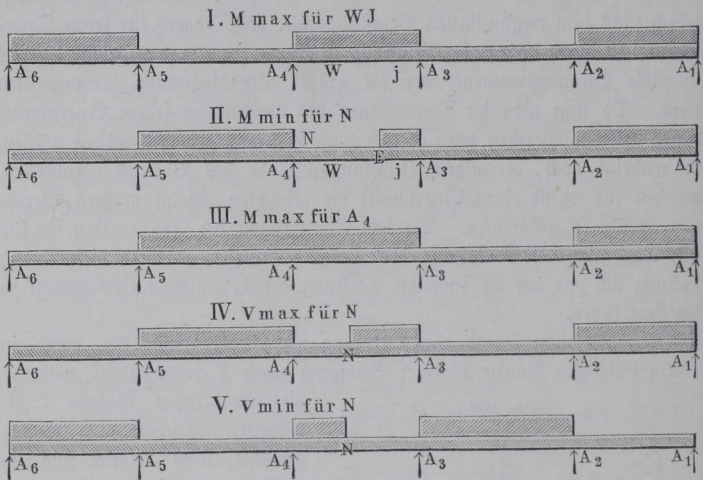
$A_5 C_5 N B L C_4 A_4$

die Begrenzung der Momentenfläche, von welcher das Dreieck  $NBL$  die positiven Momente darstellt. Nun wurde schon oben bemerkt, daß die Nullpunkte  $N$  und  $L$  niemals zwischen die

Wendepunkte  $W$  und  $J$  fallen können, wo auch der Angriffspunkt  $E$  der Kraft  $K$  zwischen  $A_5$  und  $A_4$  gewählt werden möge. Daraus geht also hervor, daß jede Belastung irgend eines Elementes der betrachteten

Deffnung für die zwischen  $W$  und  $J$  gelegene Balkenstrecke einen positiven Zuwachs zu dem Momente in allen Punkten dieser Strecke hervorruft. Man hat daher zu schließen, daß in den Querschnitten dieser mittleren Strecke  $WJ$  das größte positive Moment eintritt, wenn die ganze Deffnung  $A_5 A_4$  von der beweglichen Last  $q_4 l_4$  bedeckt ist. Denkt man jetzt auch die übrigen Deffnungen des Trägers beliebig belastet, so ergibt sich aus dem Früheren und aus Fig. 167, daß jede Belastung der beiden unmittelbar anstoßenden Deffnungen negative, und jede Belastung der darauf folgenden zweitnächsten positive Momente u. s. f. in der Strecke  $WJ$  hervorruft. Daraus folgt, daß man für diese Strecke die größten positiven Momente bei einer Belastung erhält, wie sie durch I, Fig. 169, dargestellt ist.

Fig. 169.



Die kleinsten Momente würden sich ergeben, wenn man umgekehrt die unmittelbar an  $A_4 A_3$  anstoßenden Deffnungen  $A_5 A_4$  und  $A_3 A_2$  und jede zweitfolgende belasten würde.

Anders verhält es sich hinsichtlich der beiden seitlichen Strecken  $A_4 W$  und  $JA_3$  jeder Deffnung. Man ersieht aus Fig. 168, daß für den Punkt  $N$  die Lage einer Kraft  $K$  in  $E$  als Grenzlage gilt, derart, daß jede rechts von  $E$  wirkende Last in  $N$  ein negatives, dagegen jede links von  $E$  wirkende Last in  $N$  ein positives Moment erzeugt. Wenn daher die Strecke  $A_5 E$  von der beweglichen Last bedeckt ist, so wird das größte positive Moment in  $N$  erzeugt, welches aus einer Belastung der Deffnung  $A_4 A_5$  überhaupt resultirt, während eine Belastung der Strecke  $A_4 E$  den größten

negativen Beitrag zu dem Momente in  $N$  ergibt. Ebenso folgt, daß die Belastungen der ersten, dritten u. s. w. Oeffnung links neben  $A_5$ , sowie der zweiten, vierten zc. Oeffnung rechts von  $A_4$  negative Momente für  $A_5 N$  erzeugen. Demgemäß ergibt sich, daß das absolut größte negative Moment, d. h.  $M_{min}$  für einen Punkt  $N$  der Strecke  $A_4 W$ , Fig. 169, durch die in II dieser Figur dargestellte Belastungsart des Balkens hervorgerufen wird. Dabei stellt  $E$  denjenigen Punkt vor, welcher nach Fig. 168 die Belastungsscheide für den in Betracht gezogenen Querschnitt  $N$  abgibt, und welcher in der oben angegebenen Art zu ermitteln ist. Man kann hinsichtlich dieses Punktes  $E$  bemerken, daß derselbe bei einer Verschiebung des zugehörigen Punktes  $N$  von  $A_5$  nach  $W_4$ , Fig. 168, zwischen  $A_5$  und  $A_4$  sich bewegt, derart, daß er gleichzeitig mit  $N$  in  $A_5$  fällt und nach  $A_4$  gelangt, wenn  $N$  nach  $W_4$  gekommen ist. Eine ganz ähnliche Betrachtung wie für die Strecke  $A_5 W_4$  gilt auch für diejenige  $A_4 J_4$ , indem für den Punkt  $L$  derselben ebenfalls  $E$  als Belastungsscheide auftritt, derart, daß links von  $E$  befindliche Lasten negative und rechts von  $E$  gelegene Belastungen positive Momente in  $L$  erzeugen.

Fällt der Punkt  $N$  in einen Stützpunkt  $A_4$ , so ergibt sich, da alsdann auch die zu  $N$  gehörige Belastungsscheide in diesen Stützpunkt hineinfällt, die Belastung des Trägers, welche dem absolut größten Werthe des negativen Stützmomentes in  $A_4$  entspricht, in der durch Fig. 169, III dargestellten Weise.

Um auch die Belastung, welche der größten Verticalkraft  $V$  für einen beliebigen Punkt  $N$ , Fig. 169, IV, entspricht, zu finden, hat man zu bemerken, daß nach §. 36 die Belastung der Strecke  $NA_3$  rechts von  $N$  für diesen Punkt nur positive Scheerkräfte hervorruft, und daß dasselbe für die Belastungen derjenigen Oeffnungen  $A_5 A_4$  und  $A_2 A_1$  gilt, welche in der Oeffnung  $A_4 A_3$  Momente erzeugen, die von links nach rechts abgebräuisch zunehmen. Hieraus geht hervor, daß die in IV dargestellte Belastungsart in  $N$  das Maximum der positiven Scheerkraft erzeugt, während die entgegengesetzte Belastungsart in Fig. 169, V die größte negative Scheerkraft oder  $V_{min}$  hervorruft.

Die in Fig. 169 angedeuteten Belastungsarten lassen erkennen, in welcher Art man für jeden Querschnitt des Trägers die ungünstigsten Beanspruchungen durch Bieugungsmomente und Scheerkräfte zu bestimmen hat, indem man nach Fig. 167 für jede Oeffnung die aus der Belastung derselben durch  $p$  und  $k$  sich ergebenden Diagramme der Momente und Schubkräfte entwirft, und für jeden Querschnitt nur diejenigen Ordinaten in Betracht zieht, welche der entsprechenden Belastungsart gemäß der Fig. 169 zukommen.

Hierbei empfiehlt es sich, diese Diagramme unter Zugrundelegung einer

Belastung Eins (1 kg oder 1 Tonne für 1 m Länge) zu entwerfen, indem man dann nur nöthig hat, für jede Belastung durch  $p$  oder  $k$  die betreffende Ordinate mit der Maßzahl von  $p$  oder  $k$  zu multipliciren.

Es würde im vorliegenden Falle zu weit führen, die vorstehenden Untersuchungen auch auf die Fälle auszudehnen, in denen die einzelnen Stützen nicht in derselben Höhe liegen, oder die Trägheitsmomente des Trägers für verschiedene Querschnitte von verschiedener Größe sind, es muß in dieser Hinsicht auf die hier zu Grunde gelegte Arbeit von Mohr\*) verwiesen werden.

§. 44. **Trägheitsmomente der Querschnitte.** Wenn nach dem Vorstehenden für einen Balken die größten Biegemomente  $M$  und die größten verticalen Scheerkräfte  $V$  in jedem Querschnitte ermittelt sind, so kommt es darauf an, die Dimensionen der einzelnen Querschnitte derartig zu bemessen, daß das Material mit genügender Sicherheit den einwirkenden Kräften zu widerstehen vermag. Man hat zu dem Ende die Anordnung so zu treffen, daß die größte in einem Querschnitte auftretende Spannung pro Flächeneinheit (1 qmm) einen erfahrungsmäßig zulässigen Werth  $s$  nicht übersteige. Da die Biegungsspannungen in irgend einem Punkte eines beliebigen Querschnittes im geraden Verhältnisse mit dem Abstände dieses Punktes von der neutralen Aze des Querschnittes stehen, so wird die größte Spannung in den am weitesten von der neutralen Aze entfernten Punkten des Querschnittes auftreten. Erreicht daher die Spannung in diesen Punkten, deren Entfernung von der neutralen Aze fernerhin mit  $e$  bezeichnet werden soll, den zulässigen Werth  $s$ , so hat man im Abstände gleich Eins von der neutralen Aze die Spannung  $\frac{s}{e}$ . Es ist nun bereits in Thl. I gezeigt, wie das in irgend einem Querschnitte des Balkens durch die äußeren Kräfte hervorgerufene Biegemoment  $M$  durch das Moment der Spannungen aller Querschnittselemente, bezogen auf die neutrale Aze, im Gleichgewichte gehalten werden muß, und es wurde daselbst die Formel

$$M = \frac{s}{e} W$$

angegeben, unter  $W$  eine an obiger Stelle ebenfalls als Biegemoment bezeichnete gewisse Function des Querschnittes verstanden. Diese Function  $W$  stellt sich dar als die Summe aller derjenigen Producte, welche aus den einzelnen Flächenelementen  $\partial F$  des Querschnittes  $F$  in die Quadrate  $y^2$  ihrer Abstände von der neutralen Aze gebildet werden. Wegen der Analogie dieses Werthes mit den in Thl. I, Abschn. V, Cap. 2 besprochenen

\*) Zeitschr. d. Hannov. Archit. u. Ing.-Ver. 1868.