Linie in demselben Punkte unter einem Winkel α gegen den Horizont geneigt sein, für welchen man hat

$$tg\,\alpha = \nu\, tg\,\alpha',$$

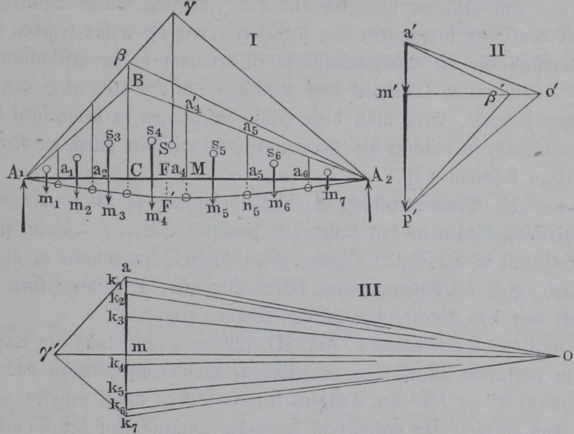
wofür man bei der Kleinheit von α in den meisten Fällen $\alpha = \nu\alpha'$ wird setzen können.

Wenn man es mit einem Balken von überall gleichem Querschnitte zu thun hat, für welchen also das Trägheitsmoment $T = Fr^2$ überall dieselbe Größe hat, so kann man die Ordinaten der Belastungsfläche auch einfach proportional der Größe des Momentes M und die Horizontalkraft einfach gleich dem Elasticitätsmodul E annehmen, da diese Annahme, welche $T = 1$ voraussetzt, nur auf die Einheit des für die Horizontalkraft H angewendeten Maßstabes, also auf das oben mit ν bezeichnete Verhältniß, nicht aber auf das gegenseitige Verhältniß der Kräfte von Einfluß ist. Wenn dagegen der Querschnitt des Balkens an verschiedenen Stellen verschieden ist, so kann man die Untersuchung in zweifacher Weise führen. Nach der einen Methode setzt man in dem Ausdrucke $T = Fr^2$ die Fläche F gleich der Einheit (1 qm) voraus, bestimmt mit Rücksicht darauf die Trägheitshalbmesser r für die verschiedenen Querschnitte und trägt als Ordinaten der Belastungsfläche in den einzelnen Punkten Strecken auf, welche den jeweiligen Werthen von $\frac{M}{r^2}$ entsprechen. Andererseits kann man aber auch einen überall constanten Trägheitshalbmesser r gleich der Einheit zu Grunde legen, so daß man die Belastungsordinaten den Momenten direct proportional aufträgt, hat aber dann zur Verzeichnung der einzelnen Seiten des Seilpolygons für jeden Punkt eine veränderte Horizontalkraft anzuwenden, welche durch $F.E$ ausgedrückt ist, wenn F überall die aus der Beziehung $T = F.1^2$ sich ergebende Fläche bedeutet. Mit anderen Worten, man verändert dem Werthe des Trägheitsmomentes entsprechend im Kräftepolygone die Poldistanz, mit Hülfe deren die entsprechende Seite des Seilpolygons gezeichnet wird. Es kann, je nach den Umständen bald das eine, bald das andere dieser beiden Verfahren bequemer in der Anwendung sein. Daß beide zu demselben Resultate führen müssen, ist leicht zu erkennen, wenn man bedenkt, daß ganz allgemein die $n$fach vergrößerte Annahme von F also auch von der Horizontalkraft H ebenfalls eine $n$fache Vergrößerung der Belastungsordinaten $\frac{M}{r^2} = M\frac{F}{T}$, also nur eine Veränderung in der Einheit des Kräftemaßstabes zur Folge hat.

§. 41. **Beispiele.** Zur Erläuterung der vorstehend angegebenen Beziehungen möge die Anwendung des darauf beruhenden graphischen Verfahrens an einigen Beispielen gezeigt werden. Es sei $A_1 A_2$, in Fig. 154, I, ein etwa im Maßstabe 1 : 100 gezeichneter horizontaler Träger auf zwei Stützen, dessen Länge $l = 5$ m ist, und welcher im Abstande $A_1 C = a = 1{,}5$ m von A_1 durch ein concentrirtes Gewicht von $P = 5000$ kg belastet sein soll. Wenn zunächst von der Belastung durch das Eigengewicht abgesehen wird, so findet man das in C auf den Balken wirkende Moment bekanntlich zu

$$M = P\,\frac{a\,(l - a)}{l} = 5000\,\frac{1{,}5\,.\,3{,}5}{5} = 5250\,\mathrm{mkg},$$

Fig. 154.



und wenn man diese Größe nach einem beliebigen Maßstabe, d. h. für eine beliebige Basis b gleich CB anträgt, so giebt die Dreiecksfläche $A_1 B A_2$ die Momentenfläche des Trägers. Man kann dieselbe übrigens ohne jegliche Rechnung graphisch bestimmen, wenn man nach dem für die Kräfte angenommenen Maßstabe (in der Figur 1 mm = 200 kg) auf einer Verticallinie in II die Strecke $a'p' = P$ anträgt und durch a' und p' zwei Parallelen mit den beiden Geraden βA_2 und βA_1 legt, welche man von einem beliebigen Punkte β der Richtung P nach den Stützpunkten A_2 und A_1 gezogen hat. Zieht man durch den Durchschnitt β' dieser Linien eine Horizontale $\beta' m'$, so theilt diese bekanntlich die Kraft $a'p'$ in m' in zwei Abschnitte, welche den Auflagerdrucken R_1 in A_1 und R_2 in A_2 entsprechen. Man hat also, um das Seilpolygon $A_1 B A_2$ für die Momente mit einer horizontalen Schlußlinie $A_1 A_2$ zu erhalten, auf der durch m' gelegten Horizontalen nur die Länge $m'o'$ gleich der für den Momentenmaßstab gewählten

Basis b anzutragen (in der Figur II ist $b = m'o' = 20$ mm, entsprechend einer Länge von 2 m). Zieht man dann durch A_1 eine Parallele mit $o'p'$ und durch A_2 eine Parallele mit $o'a'$, so müssen sich diese nach der Construction in einem Punkte B der Kraftrichtung schneiden, und man hat das Moment in C in Meterkilogrammen durch das Product

$$CB \text{ Kilogramm} \times m'o' \text{ Meter}$$

gefunden. In der Figur ergiebt sich $CB = 13{,}2$ mm, entsprechend 2640 kg, also hat man graphisch das Moment zu

$$CB \times m'o' = 2640 \,.\, 2 = 5280 \text{ mkg}$$

gefunden. Ein größerer Maßstab für die Zeichnung würde natürlich das Resultat dem oben berechneten von 5250 entsprechend näher ergeben haben. Der Maßstab für die Momentenfläche ist demnach so zu bestimmen, daß danach 1 mm einem Momente von 200 kg . 2 m = 400 mkg entspricht. Wie schon bemerkt, wird man diese Hülfsconstruction in denjenigen Fällen nicht ausführen, in welchen die Momentenfläche wie hier durch die Rechnung einfacher zu bestimmen ist.

Ist nun die Momentenfläche $A_1 B A_2$ bestimmt, so kann man dieselbe durch verticale Linien in den beliebigen Punkten $a_1\, a_2 \ldots$ in eine größere Anzahl (sieben in der Figur) Theile theilen, deren Schwerpunkte $s_1, s_2, s_3 \ldots$ bestimmen, und die Flächeninhalte dieser Elemente, d. h. die Höhen der in Rechtecke von 1 m Breite verwandelten Flächen ermitteln.

Um nun das Kräftepolygon, Fig. III, für die Ermittelung der elastischen Linie in passenden Maßstäben zu zeichnen, muß man zunächst das Trägheitsmoment $T = Fr^2$ des Trägers kennen. Man findet dasselbe, vorausgesetzt, daß es nicht von vornherein durch die Dimensionen des Trägers gegeben ist, mit Rücksicht auf die Festigkeitsformel

$$M_{max} = s\,\frac{T}{e}$$

zu

$$T = \frac{M_{max}}{s}\,e,$$

unter s die höchstens zulässige Faserspannung und unter e den Abstand der äußersten Faser von der neutralen Axe verstanden. Setzt man $s = 6$ kg pro Quadratmillimeter, und e gleich der halben Trägerhöhe, welche 0,5 betragen mag, also $e = \frac{h}{2} = 0{,}25$ m, so ergiebt sich T, wenn alle Maße in Metern ausgedrückt werden, zu

$$T = \frac{5250}{6000\,000}\,0{,}25 = 0{,}000\,2187.$$

Nimmt man an, die ganze Fläche F des Querschnittes sei in den beiden Gurtungen im Abstande $r = e = 0,25$ m concentrirt, so ergiebt sich

$$F = \frac{T}{r^2} = \frac{0,000\,2187}{0,25\,.\,0,25} = 0,0035 \text{ qm}.$$

Man hat daher den Horizontalzug

$$H = FE = 0,0035\,.\,18\,000\,.\,1000\,.\,1000 = 63\,000\,000 \text{ kg}$$
$$= 63\,000 \text{ Tonnen}$$

anzunehmen, und kann danach einen passenden Maßstab wählen. In der Figur ist dieser Maßstab für die Horizontalkraft so gewählt, daß 1 mm = 1000 Tonnen ist, daher die Poldistanz $m\,O = 63$ mm aufgetragen wurde. Für die Verticalkräfte $a\,k_1,\ k_1\,k_2 \ldots$ ist der Maßstab hundertmal größer genommen, so daß also 1 mm = 10 Tonnen ist, und zwar sind die Strecken $a\,k_1,\ k_1\,k_2 \ldots$ so bestimmt, daß sie nach diesem Maßstabe den Werthen

$$\frac{K}{r^2} = \frac{K}{0,25\,.\,0,25} = 16\,K$$

entsprechen, wenn mit K der Flächeninhalt der einzelnen Elemente der Belastungsfläche $A_1\,B\,A_2$ bezeichnet ist. Man erhält also beispielsweise die Strecke $k_4\,k_5$, wenn man das Trapez $a_4\,a_4'\,a_5'\,a_5$ in ein Rechteck von der Breite 1 m verwandelt. Mißt man die erhaltene Höhe h dieses Rechtecks nach einem Maßstabe, dessen Einheiten in dem Verhältnisse $\frac{1}{r^2}$ kleiner sind, als diejenigen des Momentenmaßstabes, so daß also danach in dem vorliegenden Falle $1 \text{ mm} = \frac{400 \text{ mkg}}{{}^1/_{16} \text{ qm}} = 6400$ kg pro Meter ist, so hat man das so gewonnene Resultat nach dem für die Verticalkräfte gewählten Maßstabe (1 mm = 10 Tonnen) als $k_4\,k_5$ auf $a\,k_7$ abzutragen. In der Figur ist

$$h = \frac{a_4\,a_4' + a_5\,a_5'}{2}\,.\,a_4\,a_5 = 7,2 \text{ mm},$$

daher

$$k_4\,k_5 = h\,\frac{6400}{10\,000} = 4,6 \text{ mm}.$$

Was die Höhenlage des Pols O anbetrifft, so hat man dieselbe so zu wählen, daß die Horizontale durch den Pol die Verticalkraft $a\,k_7$ in einem Punkte m so trifft, daß die Abschnitte $a\,m$ und $m\,k_7$ den Auflagerdrucken gleich sind, welche die Belastungsfläche $A_1\,B\,A_2$ in A_1 und A_2 erzeugt. Um diesen Punkt m zu finden, denkt man sich das Gewicht der Belastung in dem leicht anzugebenden Schwerpunkte S des Dreiecks $A_1\,B\,A_2$ wirkend, und zieht durch irgend welchen Punkt γ der Schwerrichtung zwei

Gerade γA_1 und γA_2 nach den Auflagern. Legt man sodann im Kräftepolygone durch a und h_7 Parallelen $a\gamma'$ und $k_7\gamma'$ zu jenen Linien, so liefert die Projection des Durchschnittspunktes γ' auf $a\,k_7$ in m den gesuchten Theilpunkt, in dessen Horizontallinie der Pol O in der oben ermittelten Poldistanz angenommen werden muß.

Nachdem das Kräftepolygon in dieser Weise festgestellt ist, kann die Zeichnung des Seilpolygons in der bekannten Art geschehen, indem man, von A_1 aus beginnend, Parallelen $A_1 m_1$, $m_1 m_2$, $m_2 m_3$ . . . mit den Polstrahlen Oa, Ok_1, Ok_2 . . . zieht, dann muß der gewählten Lage von O entsprechend die durch m_7 mit dem letzten Polstrahle $O\,k_7$ gezogene Parallele durch den Punkt A_2 gehen, indem die Schlußlinie des Seilpolygons $A_1 m_1 m_2$ . . . A_2 mit der horizontalen Balkenaxe $A_1 A_2$ zusammentreffen muß.

Das erhaltene Seilpolygon hüllt die dem Balken zugehörige Seilcurve ein, welche man erhalten würde, wenn die Theilung der Belastungsfläche in unendlich viele unendlich schmale Streifen vorgenommen werden könnte. Jede Seite des Polygons ist eine Tangente an die Seilcurve, und es ist ersichtlich, daß irgend eine Polygonseite, wie z. B. $m_5 m_6$, die Seilcurve in dem Punkte n_5 berührt, durch welchen die verticale Theilungslinie $a_5 a_5'$ hindurchgeht. Dementsprechend ist die erste Polygonseite $A_1 m_1$ eine Tangente in A_1 und die letzte Seite $m_2 A_2$ eine Berührungslinie in A_2 an die Seilcurve. Es ist mit Bezug hierauf leicht, die Seilcurve mit genügender Sicherheit in das Polygon einzuzeichnen, wenn die Anzahl der Elemente, in welche die Belastungsfläche getheilt wurde, nicht zu klein angenommen ist. In der Figur I sind die Punkte, wie n_5, in welchen die Seilcurve die Polygonseiten berührt, durch kleine Kreise angedeutet.

Die so erhaltene Curve giebt nach dem Vorstehenden eine Darstellung der elastischen Durchbiegungen des Balkens an jeder Stelle, und zwar ist im vorliegenden Falle, in welchem das Verhältniß der Kräftemaßstäbe für H und K gleich dem Verjüngungsverhältnisse der Abscissen in I (1 : 100) gewählt wurde, an jeder Stelle die Durchbiegung durch die Ordinate der Seilcurve daselbst unmittelbar in natürlicher Größe gegeben. Die größte Durchbiegung $f = FF'$ des Balkens erhält man offenbar für denjenigen Punkt F, in welchem die Seilcurve eine mit der Schlußlinie $A_1 A_2$ parallele Tangente hat, diese Durchbiegung bestimmt sich nach der Figur zu nahezu 3 mm und zwar findet sie sich hier nicht im Angriffspunkte C der Kraft P, auch nicht in der Mitte M, sondern in einem Punkte F, welcher zwischen C und M gelegen ist. Nur wenn die Kraft P in der Mitte des Balkens angreift, tritt auch in der Mitte die größte Durchbiegung ein. Diese Durchbiegung würde im vorliegenden Falle rechnerisch zufolge §. 35. 3, zu

$$f = \frac{5000 \,.\, 5^3}{48 \,.\, 0{,}000\,2187 \,.\, 18\,000 \,.\, 1000^2} = 0{,}0033 \text{ m} = 3{,}3 \text{ mm}$$

sich ergeben.

Die Seilcurve ist, wie schon bemerkt wurde, nicht mit der elastischen Linie übereinstimmend oder geometrisch ähnlich, sondern ihre Ordinaten sind in dem Verhältnisse der beiden Kräftemaßstäbe $\left(\frac{1}{\nu} = 100\right)$ vergrößert. Wenn daher die Neigungen der ersten und der letzten Polygonseite gegen den Horizont mit $\alpha_1{}'$ und $\alpha_2{}'$ bezeichnet werden, man also

$$m_1 A_1 A_2 = \alpha_1{}' \text{ und } m_7 A_2 A_1 = \alpha_2{}'$$

hat, so bestimmen sich die Neigungen α_1 und α_2 der elastischen Linie an den Enden in A_1 durch

$$tg\,\alpha_1 = \nu\, tg\,\alpha_1{}' = 0{,}01\, tg\,\alpha_1{}'$$

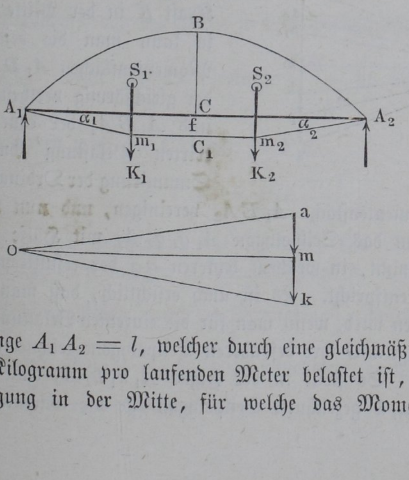
und in A_2 durch

$$tg\,\alpha_2 = \nu\, tg\,\alpha_2{}' = 0{,}01\, tg\,\alpha_2{}' \text{ u. s. w.}$$

Wenn die beiden Auflager A_1 und A_2 nicht, wie hier angenommen wurde, in einer Horizontallinie liegen, so ändert sich die Construction nur in der Beziehung, daß der Pol O des Kräftepolygons nicht in der durch den Punkt m gelegten Horizontallinie, sondern da anzunehmen ist, wo eine durch m mit $A_1 A_2$ gezogene Parallele diejenige Verticallinie schneidet, welche im Abstande gleich der Poldistanz $H = FE$ von der Kräftelinie $a\,k_7$ gezogen ist.

Die hier angeführte Construction giebt Aufschluß über den ganzen Verlauf der elastischen Linie. Wenn es indessen nur darauf ankommt, die größte Durchbiegung f derselben kennen zu lernen, so läßt sich die Zeichnung in allen den Fällen einfacher ausführen, in denen man von vornherein diejenige Stelle kennt, für welche die Durchbiegung ihren größten Werth annimmt. Es sei z. B. $A_1 A_2$, Fig. 155, ein auf zwei in gleicher Höhe befindlichen Stützen ruhender Balken von der Länge $A_1 A_2 = l$, welcher durch eine gleichmäßig vertheilte Belastung von q Kilogramm pro laufenden Meter belastet ist, so liegt die größte Durchbiegung in der Mitte, für welche das Moment seinen Maximalbetrag

Fig. 155.

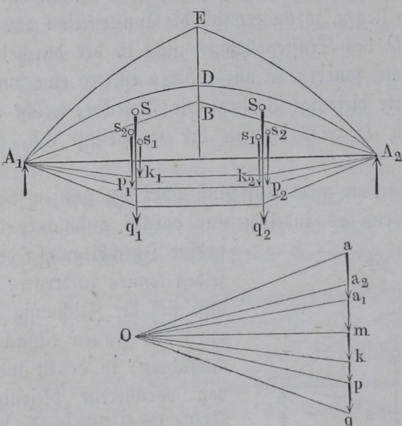


$M = q\,\frac{l^2}{8} = CB$ annimmt. Zeichnet man durch A_1, B und A_2 eine Parabel mit der Axe in BC, also dem Scheitel in B, so erhält man die zugehörige Momentenfläche, deren Inhalt durch $\frac{2}{3}.CB.A_1A_2 = \frac{1}{12}\,q\,l^3$ gegeben ist. Trägt man daher wieder auf der Verticallinie ak nach dem für die Verticalkräfte gewählten Maßstabe die Strecke

$$ak = \frac{1}{12}\,\frac{q\,l^3}{r^2}$$

ab, und macht auf der Horizontalen durch die Mitte m von ak die Poldistanz $mO = FE$, wobei r und F aus dem bekannten Trägheitsmomente $T = Fr^2$ zu entnehmen sind, so erhält man, mit Hülfe der in den Schwerpunkten S_1 und S_2 der Segmenthälften anzunehmenden Belastungen K_1 und K_2 das Seilpolygon $A_1\,m_1\,m_2\,A_2$, an welches die Seilcurve in A_1, C_1 und A_2 sich tangential anschließt. Man hat also, wie im vorhergehenden Beispiele, die Durchbiegung f in der Mitte durch CC_1 und die Neigung der elastischen Linie gegen den Horizont in A_1 und A_2 durch $\nu\,\alpha_1'$ und $\nu\,\alpha_2'$ gefunden.

Fig. 156.

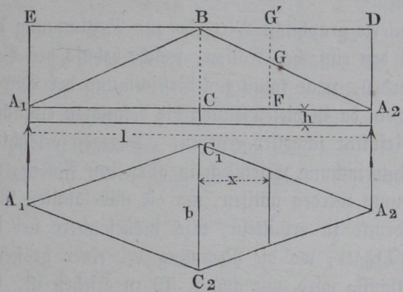


Wenn ein Balken A_1A_2, Fig. 156, durch mehrere Kräfte belastet ist, z. B. durch sein Eigengewicht pl und durch eine concentrirte Kraft K in der Mitte C, so kann man die beiden Momentenflächen $A_1\,D\,A_2$ der gleichförmig vertheilten und $A_1\,B\,A_2$ der concentrirten Belastung durch Summirung der Ordinaten zu einer resultirenden Momentenfläche $A_1\,E\,A_2$ vereinigen, und nun wie oben verfahren, indem man das Seilpolygon $A_1\,q_1\,q_2\,A_2$ mit Hülfe des Kräftepolygons $O\,a\,q$ bestimmt, in welchem letzteren $a\,q$ der resultirenden Momentenfläche $A_1\,E\,A_2$ entspricht. Es ist auch ersichtlich, daß man zu demselben Resultate gelangen wird, wenn man für die einzelnen Belastungen mit demselben Horizontalzuge $m\,O$ ihre besonderen Seilpolygone zeichnet und deren Ordinaten summirt. So stellt in der Figur $A_1\,k_1\,k_2\,A_2$ das mit Hülfe des Kräfteplans $O\,a_1\,k$ gezeichnete Seilpolygon für die concentrirte

Kraft K vor, während $A_1 p_1 p_2 A_2$ der gleichförmigen Belastung durch das Eigengewicht $p l$ entspricht, für welche das Kräftepolygon durch $O a_2 p$ gegeben ist.

Wenn der Querschnitt des Trägers für verschiedene Punkte verschieden ist, wie z. B. bei der Dreiecksfeder, Fig. 157, deren Breite in der Mitte $C_1 C_2 = b$ und deren constante Stärke h ist, so hat man die Werthe $\frac{M}{r^2}$ als Ordinaten der Belastungsfläche aufzutragen. So ist für das Beispiel in Fig. 157 das Trägheitsmoment in der Mitte bei C durch

Fig. 157.



$$T = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} h^2 b h$$
$$= r^2 F,$$

und im Abstande x von der Mitte, woselbst die Breite $b_1 = b \frac{l - 2x}{l}$ ist, durch

$$T_1 = \frac{1}{12} b \frac{l - 2x}{l} h^3 = \frac{1}{12} \frac{l - 2x}{l} h^2 . b h = r_1^2 F$$

gegeben. Nimmt man $F = b h$ gleich dem Querschnitte in C an, und verwendet für das Seilpolygon den constanten Horizontalzug $F E = b h . E$, so hat man die Ordinate $F G$ der dreieckigen Momentenfläche $A_1 B A_2$ im Abstande x von der Mitte in dem Verhältnisse $\frac{1}{r_1^2}$ zu vergrößern, und man erhält, wenn $C B$ als Ordinate $\frac{M}{\frac{1}{12} h^2}$ für die Belastungsfläche in C angenommen wird, die Ordinate in F zu

$$F G' = F G \frac{l}{l - 2x} = C B,$$

d. h. die Belastungsfläche ist durch das Rechteck $A_1 E D A_2$ dargestellt. Wollte man dagegen die Dreiecksfläche $A_1 B A_2$ der Momente direct als die Belastungsfläche durch die Ordinaten $\frac{M}{r^2}$ ansehen, d. h. r^2 für alle Querschnitte constant gleich $\frac{1}{12} h^2$ annehmen, so hätte man für den Querschnitt durch F einen Horizontalzug

$$H_1 = \frac{l - 2x}{l} b h E$$

zu benutzen. Im vorliegenden Falle wird das erstgedachte Verfahren mit Verwendung eines constanten Horizontalzuges das bequemere sein, in manchen Fällen kann es sich jedoch empfehlen, den Horizontalzug H veränderlich zu machen, indem man die Momentenfläche direct als die für die elastische Linie geltende Belastungsfläche verwendet.

Die im Vorstehenden erläuterte graphische Methode zur Bestimmung der elastischen Linie wird man in den einfachen Fällen, welche behufs der Verdeutlichung hier betrachtet wurden, zwar kaum zur Bestimmung der Durchbiegungen von Trägern benutzen, da in diesen Fällen die bekannten einfachen Formeln in der Regel das Resultat schneller ergeben. Dagegen erleichtert die graphische Methode die Untersuchung wesentlich in allen den Fällen, wo die Elasticitätsverhältnisse benutzt werden müssen, um die unbekannten Biegungsmomente und Auflagerdrucke zu ermitteln, also insbesondere bei der Prüfung der continuirlichen Träger, wo die Rechnung bei einer größeren Anzahl von Stützen sehr weitläufig wird, wie aus §. 39 zu ersehen ist. Es soll daher die hier angegebene graphische Methode noch besonders in ihrer Anwendung auf continuirliche Träger besprochen werden.

§. 42. **Continuirliche Träger.** Die Belastung eines auf zwei Stützen frei aufruhenden Trägers ruft in der Strecke zwischen den Stützen Momente hervor, in Folge deren der Balken eine nach unten hin convexe Krümmung annimmt. Ueber den Stützen treten Momente nicht auf, vielmehr werden sich hier die Enden unter gewissen Neigungen gegen den Horizont einstellen, die von der Art der Belastung abhängen. Wenn der Träger indessen an den Enden in gewisser horizontaler oder geneigter Richtung eingespannt ist, so kann man sich den durch die Einspannung auf den Träger ausgeübten Zwang als die Wirkung von Momenten denken, welche eine derartige Biegung auf die Enden ausüben, daß dieselben in Folge davon aus denjenigen Neigungen, welche die Balkenenden bei *freier Auflagerung* durch die *Belastung* anzunehmen veranlaßt werden, *zurückgebogen* werden in *diejenigen Richtungen*, unter welchen die *Einklemmung* geschehen ist. Diese Momente haben also eine Drehungsrichtung, der zufolge sie den Balken nach oben convex zu biegen streben, welche daher der Drehungsrichtung der Belastungsmomente entgegengesetzt ist.

In ganz gleicher Weise sind die Zwischenstützen der continuirlichen Träger zu beurtheilen, indem auch hier jedes mittlere Feld, d. h. ein von zwei Zwischenstützen begrenztes, wie ein an den Enden eingespannter Balken zu betrachten ist, auf dessen Enden Momente wirken, die hier aber nicht mehr durch Einmauerung, sondern durch die Einwirkung der beiderseits sich an-