werden. Hinsichtlich der Ausführung dieser Rechnungen muß hier auf die benutzte Quelle*) verwiesen werden.

§. 40. **Die elastische Linie als Seilcurve.** Die Berechnung der continuirlichen Träger führt, wie aus dem Vorstehenden sich ergiebt, zu verwickelten und umständlichen Rechnungen, sobald die Anzahl der Stützen eine größere und die Belastungsart nicht eine sehr einfache ist. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, kann man sich daher auch hier graphischer Methoden bedienen, welche eine für die Praxis genügende Genauigkeit gewähren. Im Folgenden soll die von Mohr**) herrührende, durch ihre Anschaulichkeit und Einfachheit ausgezeichnete Methode näher angegeben werden. Aus der für die elastische Linie geltenden Gleichung

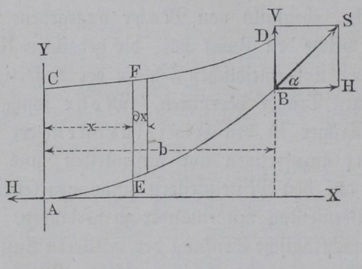
$$M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

oder

$$E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

läßt sich wie folgt nachweisen, daß die elastische Linie zu den sogenannten Seilcurven gehört. Man denke sich zu dem Zwecke in AB, Fig. 151, ein Seilstück, dessen tiefster Punkt A ist, so daß daselbst die Tangente des Seiles horizontal ausfällt, und dessen Belastung in bekannter Weise der Belastungslinie CFD gemäß derart angenommen ist, daß die Ordinate EF in dem beliebigen Punkte E daselbst die specifische Belastung q nach einem gewissen willkürlich gewählten Maßstabe darstellt. In dem Punkte B wirkt auf das Seilstück eine Zugspannung S, deren horizontale Componente gleich dem überall constanten Werthe H ist, während die verticale Componente V übereinstimmt mit der zwischen dem Scheitel A und dem Punkte B angebrachten Belastung. Diese letztere ist nach dem Begriffe der Belastungsfläche durch das Flächenstück $ACDB$ dargestellt.

Fig. 151.



Nimmt man den Scheitel A der Seilcurve zum Anfang rechtwinkeliger Coordinaten an, deren X-Axe horizontal gerichtet ist, und ist α der Winkel

*) S. Zeitschr. d. Archit.- u. Ing.-Ver. für Hannover, 1860.
**) S. Zeitschr. d. Archit.- u. Ing.-Ver. für Hannover, 1868.

des Seiles in B gegen die Horizontale, so hat man dem Vorstehenden gemäß

$$S \cos \alpha = H,$$

$$S \sin \alpha = V = \int_0^b q \, \partial x,$$

folglich durch Division:

$$tang\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\int_0^b q \, \partial x}{H},$$

woraus durch Differentiation:

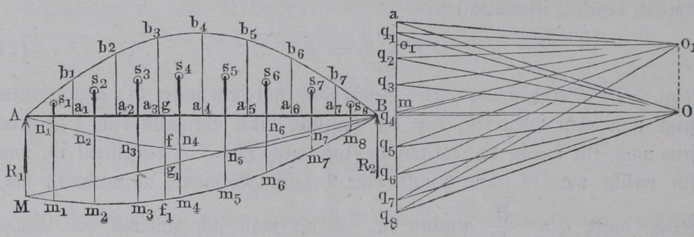
$$H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

folgt. Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem unter (1) angegebenen zeigt nun ohne Weiteres, daß die elastische Linie ebenfalls eine Seilcurve sein muß, für welche der horizontale Zug durch $H = E$ dargestellt ist, und für welche man in jedem Punkte eine Belastungsordinate anzunehmen hat, welche durch $q = \frac{M}{T}$ gegeben ist. Denkt man sich zunächst das Trägheitsmoment des Balkens für alle Punkte desselben von derselben Größe, so kann man auch $q = M$ setzen, und es ergiebt sich aus dem Vorstehenden die folgende Construction der elastischen Linie.

Für irgend einen Balken, welcher etwa auf zwei Stützen frei aufliegend angenommen werden möge, kann man, wenn die Belastung gegeben ist, das auf Biegung wirkende Moment M in der mehrfach gezeigten Weise bestimmen, sei es durch Rechnung oder vermöge eines Seilpolygons, wie dies in Thl. I, Anhang 2 angegeben und an mehreren Beispielen durchgeführt worden ist. Ist dies geschehen, so kann man in jedem Punkte des Balkens eine Ordinate aufgetragen denken, welche nach einem beliebig anzunehmenden Maßstabe die Größe des in diesem Punkte angreifenden Momentes darstellt, mit anderen Worten, man kann die Momentenfläche des Balkens in der vorstehend mehrfach angegebenen Art construiren. Entwirft man nun mit Hülfe eines Kräftepolygons, dessen Polabstand oder Horizontalzug man nach demselben Maßstabe wie die Belastungen gleich dem Elasticitätsmodul E annimmt, diejenige Seilcurve, welche man erhält, wenn man die gedachte Momentenfläche als Belastungsfläche ansieht, so erhält man in derselben die elastische Linie des Balkens, und also in den verticalen Ordinaten ihrer verschiedenen Punkte die Durchbiegungen dieser Punkte.

Um dieses Verfahren, welches zwar bei früheren Gelegenheiten mehrfach zur Anwendung gekommen ist, des Zusammenhanges wegen hier zu erläutern, diene Fig. 152. Es sei für den Balken AB die Belastungslinie durch die krumme oder gebrochene Linie $A\,b_1\,b_2\,b_3 \ldots B$ gegeben, und durch die verticalen Theilungslinien $a\,b$ sei die Belastungsfläche beliebig in Lamellen getheilt, deren Gewichte $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ in den Schwerpunkten s der Flächenstreifen wirkend gedacht werden. Die Größen dieser den betreffenden Streifen der Belastungsfläche proportionalen Kräfte seien nach einem gewissen Maßstabe im Kräftepolygone als die Strecken $a\,q_1$, $q_1\,q_2$, $q_2\,q_3 \ldots$ der Reihe nach angetragen. Wählt man den Pol O_1 des Kräfte-

Fig. 152.



polygons beliebig, und construirt in bekannter Weise durch Parallellinien mit den Polstrahlen $O_1\,a$, $O_1\,q_1$, $O_1\,q_2 \ldots$ das Seilpolygon $M\,m_1\,m_2 \ldots B$, so erhält man bekanntlich in der Schlußlinie BM die Richtung desjenigen Polstrahles $O\,m$, welcher die Gesammtbelastung $a\,q_8$ so theilt, daß die beiden Theile $a\,m$ und $m\,q_8$ die Auflagerdrucke R_1 und R_2 in A und B angeben. Wenn man daher den Pol in einer durch diesen Punkt m gehenden Horizontallinie in O angenommen hätte, so würde man mit diesem Pole das Seilpolygon $A\,n_1\,n_2\,n_3 \ldots B$ mit horizontaler Schlußlinie AB erhalten haben. Es ist ferner bekannt, daß ein solches Seilpolygon für jeden seiner Punkte wie f in der verticalen Ordinate $y = fg$ ein Maß für das daselbst stattfindende Moment abgiebt, dergestalt, daß dieses Moment durch $M = Hy$ ausgedrückt ist, wenn H diejenige Kraft bedeutet, welche durch die Poldistanz $m\,O$ nach dem Kräftemaßstabe dargestellt ist, während y nach dem Längenmaßstabe zu messen ist, in welchem die Zeichnung ausgeführt ist. Werden beispielsweise die Belastungen durch Kilogramme und die Längen durch Meter gemessen, so erhält man das Moment für den Punkt f des Balkens zu $M = Hy$ Meterkilogramm. Es geht hieraus auch hervor, daß die beiden mit den Polen O und O_1 gezeichneten Seilpolygone $A\,n$ und $M\,m$ für jeden Punkt g des Balkens gleich große verticale Ordinaten $fg = f_1 g_1$ haben müssen, sobald für beide Pole O und O_1 derselbe Abstand von der Kraftlinie $a\,q_8$ angenommen wurde. Wäre dagegen der Abstand $O_1\,o_1$ des

Poles O_1 größer oder kleiner als derjenige Om gewählt, so daß etwa

$$O_1 o_1 = \mu . Om$$

wäre, so würden an jeder Stelle des Balkens die Ordinaten y und y_1 der beiden zugehörigen Seilpolygone im umgekehrten Verhältnisse zu einander stehen, d. h. man hätte in diesem Falle $y_1 = \frac{1}{\mu} y$, denn für beide Polygone gilt

$$M = Hy = Om . fg = O_1 o_1 . f_1 g_1 .$$

Wendet man diese Betrachtungen auf den vorliegenden Fall an, so hat man zur Verzeichnung der elastischen Linie die Belastungsfläche $A b_1 b_2 \ldots B$ des Balkens so zu bestimmen, daß die Ordinate für jeden Punkt wie g gleich ist dem in g wirkenden Momente, während man die Poldistanz Om, welche den Horizontalzug darstellt, gleich dem Elasticitätsmodul E zu machen hat. Die mit dieser Poldistanz gezeichnete Seilcurve, d. h. die von dem Seilpolygone umhüllte Curve stellt dann nach dem Obigen die elastische Linie des Balkens vor, deren Construction daher nach den bekannten Regeln in jedem Falle leicht zu entwerfen ist, wie im Folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

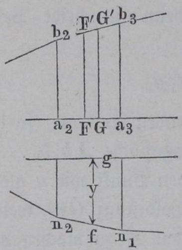
Was den beim Auftragen der Belastungsordinaten anzuwendenden Maßstab anbetrifft, so läßt sich darüber Folgendes bemerken. Setzt man in der allgemeinen Gleichung $M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ der elastischen Linie für das Moment M das Product Pa aus einer Kraft P Kilogramm und einer Länge a Meter, und setzt man für das Trägheitsmoment T des Querschnittes den Ausdruck Fr^2, worin F die Fläche des Querschnittes in Quadratmetern und r den sogenannten Trägheitshalbmesser in Metern bezeichnet, so kann man die obige Gleichung auch schreiben:

$$\frac{Pa}{r^2} = FE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Hierin bedeutet FE eine Kraft in Kilogrammen, welche dem Horizontalzuge H in der Gleichung der Seilcurve (2) $q = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ entspricht. Andererseits ist $\frac{Pa}{r^2}$ eine Kraft dividirt durch eine Länge, d. h. eine specifische Belastung oder eine Belastung für die Längeneinheit gleich 1 m, entsprechend dem Werthe q in der Gleichung (2) der Seilcurve. Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich nunmehr analog der Construction in Fig. 152 das folgende Verfahren.

Man habe bei der Zeichnung des Balkens AB einen Längenmaßstab L angenommen, welcher etwa in dem Verhältnisse λ z. B. $^1/_{200}$ verjüngt ist, so daß also jeder Länge der Abscissen in der Zeichnung von 5 mm eine wirkliche Trägerlänge von 1 m entspricht, und man habe ferner für die Horizontalkraft $H = FE$ einen Kräftemaßstab K so gewählt, daß jedem

Fig. 153.



Kilogramme etwa eine Länge gleich $\varkappa$ in der Zeichnung zukommt. Wenn man nun nach demselben Kräftemaßstabe K die Größe der specifischen Kraft $\frac{Pa}{r^2}$ an jeder Stelle des Balkens als Belastungsordinate aufträgt, z. B. für den Punkt F, Fig. 153, die Ordinate $FF' = \frac{Pa}{r^2} = \frac{M}{r^2}$ macht, unter M das Moment in F verstanden, so ist es deutlich, daß daselbst der Streifen $FF'G'G$ von der Breite 1 m, also in der Figur von der Breite $FG = 5$ mm, durch seinen Inhalt die Größe der auf 1 m Länge entfallenden Belastung des Trägers in F repräsentirt, genau so, wie es in Fig. 152 der Fall ist, wo die Ordinaten ab der Belastungsfläche den specifischen Belastungen des Trägers entsprechen. Es ergiebt sich daher, daß man zur Auftragung der Kräfte im Kräftepolygone die einzelnen Flächenstücke, wie $a_2 b_2 b_3 a_3$, in Rechtecke von der Basis $FG = 1$ m zu verwandeln und die Höhe der so verwandelten Rechtecke auf der Verticalen des Kräftepolygons ($a\,q_8$ in Fig. 152) aufzutragen hat. Die so erhaltenen Strecken stellen dann offenbar die den Elementen $A a_1$, $a_1 a_2$ ... des Balkens zugehörigen Werthe von $\frac{M}{r^2}$ vor, und wenn man das Seilpolygon nunmehr zeichnet, so erhält man in der zugehörigen Ordinate $y = fg$ eine Länge, für welche die dem Seilpolygone eigenthümliche Beziehung gilt,

$$Hy = \int_0^x q \partial x,$$

oder im vorliegenden Falle

$$FE.y = \int_0^x \frac{M}{r^2} \partial x.$$

In diesem Ausdrucke ist die Ordinate $y = fg$ des Seilpolygons nach dem Maßstabe L der Zeichnung zu messen; es würde also beispielsweise bei dem gewählten Verjüngungsverhältnisse $\lambda = 1/_{200}$ jeder Länge der Ordinate y, welche gleich 5 mm ist, eine Länge von 1 m entsprechen. Man erhält also den Werth

$$FE \, . \, y = \int_0^x \frac{M}{r^2} \, \partial x$$

in Meterkilogrammen, wenn man die Anzahl von Kilogrammen, welche die Poldistanz H nach dem Kräftemaßstabe K darstellt, multiplicirt mit der Anzahl von Metern, welche die Ordinate y nach dem Längenmaßstabe L vorstellt. Würde man in dieser Weise verfahren, so würde bei der außerordentlichen Größe des Elasticitätsmoduls E, also auch der Horizontalkraft FE, gegen welche die Strecken auf der Verticallinie des Kräftepolygons sehr klein sind, der Pol in weite Ferne gerückt, so daß die Polstrahlen nur wenig von einander und von der Horizontalen abweichen würden. In Folge dessen würde die erhaltene Seilcurve, welche die elastische Linie darstellt, sehr flach werden, und von der geraden Balkenaxe nur unmerklich abweichen. Wenn man sich jedoch vorstellt, daß man als den Maßstab, nach welchem man den Horizontalschub $H = FE$ aufträgt, nicht denjenigen K, sondern einen ν fach kleineren annimmt, so daß also für die Horizontalkraft H ein Kilogramm nicht mehr durch $\varkappa$ Millimeter, sondern durch $\nu \varkappa$ Millimeter dargestellt ist, während man für die verticalen Kräfte den Maßstab K beibehält, so ist es nach dem oben über den Einfluß der Poldistanz Gesagten klar, daß nunmehr die Ordinaten der Seilcurve im Verhältnisse von $\frac{1}{\nu}$ vergrößert erscheinen. Gesetzt, man würde $\nu = \lambda = {}^1/_{200}$, also gleich dem für die Längen gewählten Verjüngungsverhältnisse der Zeichnung annehmen, so würde eine Vergrößerung der Ordinaten y in dem Verhältnisse $\frac{1}{\nu} = 200$ eintreten, mit anderen Worten, die Ordinaten der Seilcurve stellen dann die Durchbiegungen des Balkens in natürlicher Größe vor. Hierauf beruht die Möglichkeit, den Verlauf der elastischen Linie und damit die mit der Biegung im Zusammenhange stehenden Kraftverhältnisse des elastischen Balkens graphisch zu behandeln.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß in Folge der nach dem Vorstehenden anzunehmenden Verschiedenheit des Kräftemaßstabes für die verticalen und horizontalen Kräfte die sich ergebende Seilcurve wegen der dadurch hervorgerufenen Verzerrung nun nicht mehr die Copie der elastischen Linie vorstellen kann, und daß die Neigungen der Tangenten beider Curven in entsprechenden Punkten verschieden ausfallen müssen. Es ist aber aus dem Obigen ohne Weiteres der einfache Zusammenhang klar, welcher zwischen diesen beiden Neigungen für jeden Punkt besteht. Wenn nämlich in irgend einem Punkte des Balkens die Richtung der Tangente an die Seilcurve den Winkel α' mit der Horizontalen bildet, so muß die elastische

Linie in demselben Punkte unter einem Winkel α gegen den Horizont geneigt sein, für welchen man hat

$$tg\ \alpha = \nu\ tg\ \alpha',$$

wofür man bei der Kleinheit von α in den meisten Fällen $\alpha = \nu \alpha'$ wird setzen können.

Wenn man es mit einem Balken von überall gleichem Querschnitte zu thun hat, für welchen also das Trägheitsmoment $T = Fr^2$ überall dieselbe Größe hat, so kann man die Ordinaten der Belastungsfläche auch einfach proportional der Größe des Momentes M und die Horizontalkraft einfach gleich dem Elasticitätsmodul E annehmen, da diese Annahme, welche $T = 1$ voraussetzt, nur auf die Einheit des für die Horizontalkraft H angewendeten Maßstabes, also auf das oben mit ν bezeichnete Verhältniß, nicht aber auf das gegenseitige Verhältniß der Kräfte von Einfluß ist. Wenn dagegen der Querschnitt des Balkens an verschiedenen Stellen verschieden ist, so kann man die Untersuchung in zweifacher Weise führen. Nach der einen Methode setzt man in dem Ausdrucke $T = Fr^2$ die Fläche F gleich der Einheit (1 qm) voraus, bestimmt mit Rücksicht darauf die Trägheitshalbmesser r für die verschiedenen Querschnitte und trägt als Ordinaten der Belastungsfläche in den einzelnen Punkten Strecken auf, welche den jeweiligen Werthen von $\frac{M}{r^2}$ entsprechen. Andererseits kann man aber auch einen überall constanten Trägheitshalbmesser r gleich der Einheit zu Grunde legen, so daß man die Belastungsordinaten den Momenten direct proportional aufträgt, hat aber dann zur Verzeichnung der einzelnen Seiten des Seilpolygons für jeden Punkt eine veränderte Horizontalkraft anzuwenden, welche durch $F.E$ ausgedrückt ist, wenn F überall die aus der Beziehung $T = F.1^2$ sich ergebende Fläche bedeutet. Mit anderen Worten, man verändert dem Werthe des Trägheitsmomentes entsprechend im Kräftepolygone die Poldistanz, mit Hülfe deren die entsprechende Seite des Seilpolygons gezeichnet wird. Es kann, je nach den Umständen bald das eine, bald das andere dieser beiden Verfahren bequemer in der Anwendung sein. Daß beide zu demselben Resultate führen müssen, ist leicht zu erkennen, wenn man bedenkt, daß ganz allgemein die $n$fach vergrößerte Annahme von F also auch von der Horizontalkraft H ebenfalls eine $n$fache Vergrößerung der Belastungsordinaten $\frac{M}{r^2} = M\frac{F}{T}$, also nur eine Veränderung in der Einheit des Kräftemaßstabes zur Folge hat.

§. 41. **Beispiele.** Zur Erläuterung der vorstehend angegebenen Beziehungen möge die Anwendung des darauf beruhenden graphischen Verfahrens an