die Schubkraft V'_{n+1} um das (negative) Stück ff_2 größer geworden, welches nach der Construction sich zu

$$l_1 l_2 - e_1 e = K - K\frac{b}{l} = K\frac{a}{l}$$

ergiebt, wie es dem Gesetze des Hebels auch entspricht.

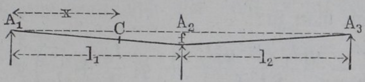
Trägt man ferner in L_0 die Ordinate $L_0 L = K\frac{a\,b}{l_n}$ auf, so erhält man in dem Dreiecke $A_n L A_{n+1}$ bekanntlich die Momentenfläche, welche der Belastung durch K allein entspricht, und es ist dann leicht, durch algebraische Summirung der Ordinaten der Parabel ECF und des Dreiecks $A_n L A_{n+1}$ die resultirende Momentenfläche EC_1F zu erhalten. Es ergiebt sich aus dem Vorhergegangenen, daß dem Scheitel C_1 dieser resultirenden Curve dieselbe Abscisse $A_n G_1$ zukommen muß, wie dem Punkte g_1, in welchem die Axe $a_n a_{n+1}$ von der Begrenzung $e_1 l_1 l_2 f_2$ getroffen wird, d. h. in welchem die Schubkraft zu Null wird. Hieraus folgt auch, daß es ganz von der Größe der Kraft K abhängen wird, ob das Maximalmoment $[M]$ zwischen den Stützen in dem Angriffspunkte L_0 der Kraft K, oder zwischen L_0 und G auftreten wird. Den in der Figur zu Grunde gelegten Verhältnissen gemäß findet sich dieses Maximum von M in dem Punkte g_1 zwischen g und l_0, es ist aber deutlich, daß bei einem vergrößerten K, welchem etwa das Schubkraftdiagramm $a_n e' l' l'' f'' a_{n+1}$ entspricht, das größte oder Bruchmoment der Strecke mit dem Angriffspunkte L_0 der concentrirten Last zusammenfällt.

Die Wirkung einer concentrirten Belastung K veranlaßt also, ebenso wie die Reaction einer Stütze eine plötzliche Veränderung der Scheerkraft, und man kann daher einen durch concentrirte Belastungen angegriffenen Balken auch wie einen Träger auffassen, für welchen diese Belastungen als Stützpunkte betrachtet werden, die den Balken von oben nach unten mit den Reactionskräften K angreifen. Man hat dann die allgemeine Formel (19) anzuwenden, indem man für die Reactionen in den Kraftangriffen diese Kräfte K einführt und die Größen $y_{n+1} - y_n$ 2c. mit Rücksicht auf die erzeugten Durchbiegungen in Rechnung stellt.

Um die Anwendung der vorstehend entwickelten Formeln zu zeigen, sollen in den folgenden Paragraphen einige der am häufigsten vorkommenden Unterstützungsarten von Trägern näher untersucht werden.

§. 38. **Balken auf drei Stützen.** Der Balken liege auf den drei Stützen A_1, A_2 und A_3, Fig. 142, frei auf und sei über der Länge $A_1 A_2 = l_1$ mit q_1 und über der Länge $A_2 A_3 = l_2$ mit q_2 pro Längeneinheit belastet. Concentrirte Lasten sollen zunächst nicht angenommen werden, und es möge vorausgesetzt werden, daß die Endstützen A_1 und A_3 in gleicher Höhe liegen, wie dies in der Praxis wohl fast immer der Fall sein wird. Die mittlere Stütze A_2 jedoch soll der Allgemeinheit wegen um die Größe f tiefer liegend angenommen werden, als die beiden Endauflager. Es soll ferner von der Breite der Auflagerflächen abgesehen und vorausgesetzt werden, daß der Auflagerdruck sich in einem Punkte, etwa in der Mitte der Auflagerbreite concentrire, wobei bemerkt werden kann, daß der durch diese Annahme veranlaßte Fehler um so geringer sein wird, je größer die lichten Oeffnungen sind.

Fig. 142.



Für den hier vorausgesetzten Fall hat man nach den Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphen die Momente über den freien Auflagern in A_1 und A_3

$$M_1 = M_3 = 0,$$

ebenso

$$V_1' = 0 \text{ und } V_3'' = 0.$$

Ferner ist

$$y_2 - y_1 = y_2 - y_3 = -f,$$

und daher findet sich das Moment M_2 über der Zwischenstütze A_2 nach (19) des vorigen Paragraphen aus

$$0 + 2\,M_2\,(l_1 + l_2) + 0 = 6\,TE\left(\frac{f}{l_1} + \frac{f}{l_2}\right) - q_1\,\frac{l_1^3}{4} - q_2\,\frac{l_2^3}{4}$$

zu

$$M_2 = -\frac{1}{8}\,\frac{q_1\,l_1^3 + q_2\,l_2^2}{l_1 + l_2} + 3\,TE\,\frac{f}{l_1 + l_2}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$$

$$= -\frac{q_1\,l_1^3 + q_2\,l_2^3}{8\,L} + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn $l_1 + l_2 = L$ und $3\,TE\,\frac{f}{l_1 + l_2}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) = \varepsilon$ gesetzt wird. Ferner ist nach (22) des vorigen Paragraphen

$$M_2 = 0 + (R_1 + 0)\,l_1 - q_1\,\frac{l_1^2}{2};$$

folglich erhält man hieraus und aus (1) die Auflagerreaction in A_1 zu

$$R_1 = -\frac{q_1\,l_1^3 + q_2\,l_2^3}{8\,l_1\,L} + q_1\,\frac{l_1}{2} + \frac{\varepsilon}{l_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und analog durch Vertauschung von l_1 und l_2 für die andere Endstütze A_3:

$$R_3 = -\frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 l_2 L} + q_2 \frac{l_2}{2} + \frac{\varepsilon}{l_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und daher den Druck der Mittelstütze:

$$R_2 = q_1 l_1 + q_2 l_2 - (R_1 + R_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Das Moment M für irgend einen Punkt C der Strecke $A_1 A_2$ im Abstande $A_1 C = x$ von A_1 erhält man zu:

$$M = R_1 x - q_1 \frac{x^2}{2} = \left(-\frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 l_1 L} + q_1 \frac{l_1}{2} + \frac{\varepsilon}{l_1}\right) x$$

$$- q_1 \frac{x^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Den größten Werth von M findet man nach (24) für die Abscisse

$$x_0 = \frac{l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1 q_1} = \frac{l_1}{2} - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 L l_1 q_1} + \frac{\varepsilon}{l_1 q_1} \quad . \quad . \quad (6)$$

und zwar wird dieses Maximum nach (25) gleich

$$[M_1] = \frac{q_1}{2}\left(\frac{l_1}{2} - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 L l_1 q_1} + \frac{\varepsilon}{l_1 q_1}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Gleichungen (5) bis (7) gelten natürlich auch für die Strecke $A_3 A_2$, wenn man darin l_1 mit l_2 und q_1 mit q_2 vertauscht und x von A_3 nach A_2 hin rechnet.

Für gleiche Weite und Belastungen, also für $l_1 = l_2 = \frac{L}{2}$ und $q_1 = q_2 = q$, und für gleiche Höhenlage aller Stützen, also mit $f = \varepsilon = 0$, erhält man die schon in Thl. I angegebenen Werthe:

$$M_2 = -\frac{1}{32} q L^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1^a)$$

$$R_1 = \frac{3}{16} q L = R_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2^a)$$

$$R_2 = \frac{5}{8} q L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4^a)$$

$$M = \frac{3}{16} q L x - q \frac{x^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5^a)$$

$$x_0 = \frac{3}{16} L = \frac{3}{8} l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6^a)$$

$$[M] = -\frac{9}{32.16} q L^2 = \frac{9}{512} q L^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7^a)$$

Diese Belastungsart ist offenbar übereinstimmend mit der in §. 35 unter (8) angegebenen, denn man kann sich denken, der Träger sei hier zur Hälfte

$A_1 A_2$ horizontal eingemauert, man erhält daher die in §. 35 angegebenen Formeln, wenn man hier $2l$ für L einsetzt.

Die hier gefundenen Gleichungen können auch für Brückenträger gebraucht werden, welche über zwei Oeffnungen gelegt sind, also auf drei Stützpunkten frei aufruhen, da man die Belastung derselben in der Regel als eine gleichmäßig über die Länge vertheilte ansehen darf.

Nimmt man auch hier, wie es in der Wirklichkeit meistens zutreffen wird, die Oeffnungen von gleicher Weite, also $l_1 = l_2 = \frac{L}{2}$ an, so erhält man nach (1) das Moment über der Zwischenstütze

$$M_2 = -\frac{q_1 L^3 + q_2 L^3}{8 . 8 L} + \varepsilon = -\frac{L^2}{64}(q_1 + q_2) + \varepsilon \; . \quad (1^b)$$

und die Auflagerreaction in A_1 nach (2) zu

$$R_1 = \frac{L}{32}(7 q_1 - q_2) + \frac{2\varepsilon}{L} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2^b)$$

und in A_3 entsprechend

$$R_3 = \frac{L}{32}(7 q_2 - q_1) + \frac{2\varepsilon}{L} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3^b)$$

Daher ist der Druck der mittleren Stütze gegen den Balken:

$$R_2 = \frac{L}{2}(q_1 + q_2) - R_1 - R_3 = \frac{L}{16}(5 q_1 + 5 q_2) - \frac{4\varepsilon}{L} \quad (4^b)$$

Das größte Moment zwischen A_1 und B_1 findet sich nach (6) in einem Abstande x_0 von A_1

$$x_0 = \frac{L}{4} + \frac{2 M_2}{L q_1} = \frac{L}{32}\,\frac{7 q_1 - q_2}{q_1} + \frac{2\varepsilon}{L q_1}$$

$$= \frac{L}{32}\left(\frac{7 q_1 - q_2}{q_1} + 2\,\frac{32\,\varepsilon}{L^2 q_1}\right), \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6^b)$$

und zwar ist dieses Moment nach (7):

$$[M_1] = \frac{q_1}{2}\left[\frac{L}{32}\left(\frac{7 q_1 - q_2}{q_1} + 2\,\frac{32\,\varepsilon}{L^2 q_1}\right)\right]^2$$

$$= \frac{L^2}{2 . 32 . 32\, q_1}\left(7 q_1 - q_2 + 2\,\frac{32\,\varepsilon}{L^2}\right)^2 \; . \; . \; . \; . \quad (7^b)$$

Man erkennt aus (1^b), daß das Moment M_2 über der Zwischenstütze sowohl mit einer Vergrößerung von q_1 wie q_2 an Größe zunimmt, und man erhält daher den größten Werth dieses Momentes, wenn beide Oeffnungen mit der größten Belastung beschwert sind. Die Belastung einer Brücke besteht nun aus deren Eigengewichte p und der zufälligen oder Verkehrslast k, und es möge die Summe beider Belastungen pro Längeneinheit durch $q = p + k$ ausgedrückt sein. Man erhält alsdann das größte Moment über der Mittelstütze, wenn beide Oeffnungen mit der zufälligen Belastung k bedeckt sind, also für $q_1 = q_2 = q$, zu

$$M_{2\,max} = -\frac{L^2}{32}q + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Das größe Moment $[M_1]$ dagegen zwischen A_1 und A_2 wächst, wie aus (7^b) folgt, zwar ebenfalls mit q_1, nimmt aber mit zunehmendem q_2 ab, woraus man schließt, daß $[M_1]$ seinen Maximalwerth annimmt, wenn die Oeffnung $A_1 A_2$ mit der möglich größten Belastung $k + p = q$ und die jenseitige Oeffnung $A_2 A_3$ mit der thunlich kleinsten Belastung, d. h. nur mit dem Eigengewichte p beschwert ist. Danach erhält man also

$$[M_1]_{max} = \frac{L^2}{2\,.\,32\,.\,32\,q}\left(7q - p + 2\,\frac{32\,\varepsilon}{L^2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Vergleicht man diese beiden Werthe von $M_{2\,max}$ und $[M_1]_{max}$, welche den ungünstigsten Belastungen entsprechen, so erkennt man, daß die Größe ε also die Senkung f der mittleren Stütze auf beide Momente in entgegengesetzter Weise wirkt, indem nämlich eine Vergrößerung dieser Senkung f oder des Werthes

$$\varepsilon = 3\,TE\,\frac{f}{L}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) = 12\,TE\,\frac{f}{L^2}$$

das (negative) Moment M_2 über der Mittelstütze dem absoluten Werthe nach verringert, dagegen dasjenige $[M_1]$ in der Oeffnung vergrößert.

Es ist daraus ersichtlich, daß es eine gewisse Senkung s der mittleren Stütze unterhalb der äußeren Auflager geben wird, bei welcher die beiden Momente $M_{2\,max}$ und $[M_1]_{max}$ von gleicher absoluter Größe sind, und eine solche Anordnung wird die vortheilhafteste sein, insofern, als dann das größte vorkommende Moment den kleinstmöglichen Werth annimmt. Um diese Senkung s zu ermitteln, hat man nur die beiden absoluten Werthe von $M_{2\,max}$ und $[M_1]_{max}$ einander gleich zu setzen und erhält also:

$$\frac{L^2}{32}q - \varepsilon = \frac{L^2}{2\,.\,32\,.\,32\,q}\left(7q - p + 2\,\frac{32\,\varepsilon}{L^2}\right)^2.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\frac{L^2}{32}q$ und setzt der Kürze wegen das Verhältniß der Belastungen

$$\frac{p}{q} = v \text{ und } u = \frac{32\,\varepsilon}{L^2 q} = \frac{32\,.\,12\,TEf}{L^4 q}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

so erhält man

$$1 - u = \frac{1}{64}(7 - v + 2u)^2,$$

woraus

$$u^2 + (23 - v)\,u = \frac{15 - v^2 + 14\,v}{4}$$

oder

$$u = \frac{v - 23 + \sqrt{544 - 32\,v}}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

folgt.

Da $u = \frac{384\,TE}{L^4 q} f$ gesetzt war, so ergiebt sich die nöthige Senkung f der Mittelstütze für den Fall gleicher Momentenmaxima zu

$$f_0 = \frac{L^4 q}{384\,TE}\,u = \frac{L^4 q}{768\,TE}\left(v - 23 + \sqrt{544 - 32\,v}\right), \quad (12)$$

und zwar ist das Moment in diesem Falle sowohl über der Mittelstütze bei ganzer Belastung als in der einen Oeffnung, wenn nur diese belastet ist, nach (8):

$$- M_{2\,max} = [M_1]_{max} = \frac{L^2 q}{32} - \varepsilon = \frac{L^2 q}{32}\,(1 - u) \; . \; . \; (13)$$

Da das Maximalmoment M_2 ohne Senkung der Mittelstütze $\frac{L^2 q}{32}$ ist, so giebt also der Werth u zugleich an, um welchen Procentsatz das Maximalmoment M_2 durch die Senkung vermindert wird.

Die Größe u hängt nach (11) wesentlich von dem Verhältnisse $v = \frac{p}{q}$ der specifischen Belastungen ab, und ist nach (11) die folgende kleine Tabelle berechnet worden.

$v = \frac{p}{q}$	0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,75	1
$u =$	0,162	0,177	0,193	0,208	0,239	0,277	0,314

Der Werth $u = 0{,}162$, entsprechend dem Verhältnisse $v = 0$, würde danach für Träger gelten, deren Eigengewicht p gegen die zufällige Belastung verschwindet, also für kleine Spannweiten, während der Werth von $u = 0{,}314$ für $v = 1$ solchen Trägern zukommt, gegen deren Eigengewicht die zufällige Last unerheblich ist, welche also stets über der ganzen Länge von der gleichen Belastung $p = q$ angegriffen werden. Diese Zahl stimmt mit der in Thl. I, §. 241 für einen Balken mit gleichmäßig vertheilter Belastung gefundenen überein.

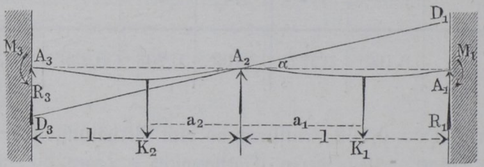
Der Vortheil, welcher mit einer Senkung der Mittelstütze verbunden ist, wurde zuerst von Köpcke*), Grashof**) und Scheffler***) gezeigt, die hier gegebene Darstellung schließt sich wesentlich an die Arbeit von Mohr†) an, welcher zuerst darauf aufmerksam gemacht hat, daß bei der Vergleichung der Maximalmomente M_2 und $[M_1]$ die denselben zugehörigen ungünstigsten Belastungen des ganzen Trägers und bezw. nur der einen Oeffnung in Betracht kommen müssen.

Eine besondere Betrachtung verdient der bei Hochbauconstructionen häufiger vorkommende Fall, in welchem ein in der Mitte durch eine Säule unterstützter Träger oder Unterzug an den Enden nicht frei aufliegt, sondern eingemauert ist, so daß man eine horizontale Richtung der elastischen Linie an diesen Enden voraussetzen darf. Wenn hierbei der Balken zu beiden Seiten der Mittelstütze symmetrisch belastet ist, so muß auch über dieser mittleren Stütze die elastische Linie horizontal sein, und es kommt die Belastungsweise auf die in §. 35 unter (5) und (6) besprochene hinaus. Man kann nämlich dann jede Hälfte des Balkens als einen an beiden Enden horizontal eingeklemmten Balken ansehen, und auf jede dieser Hälften die in §. 35 angeführten Formeln anwenden.

Wenn indessen die Belastungen nicht symmetrisch zur Mittelstütze vertheilt sind, wie es z. B. bei den Unterzügen unter Fabrikräumen oft vorkommt, wo die Gewichte der einzelnen Arbeitsmaschinen als isolirte Lasten auftreten, welche nicht nothwendig symmetrisch zur Mittelstütze angebracht sind, so wird über der letzteren die elastische Linie des Balkens auch nicht horizontal bleiben, und es möge dieser Fall einer besonderen Untersuchung unterworfen werden.

Es sei $A_1 A_3$, Fig. 143, ein solcher, bei A_1 und A_3 horizontal eingemauerter Träger von der Länge $2l$, welcher in der Mitte auf einer Säule

Fig. 143.



ruht, deren Stützlager A_2 in gleicher Höhe mit den Endauflagern A_1 und A_3 angenommen werden soll. Der Träger soll einer gleichmäßig ver-

---

*) Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. f. Hannover, Bd. II, 1856.

**) Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 1857.

***) Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. eisernen Brücken. 1857.

†) Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. f. Hannover. 1860.

theilten Belastung ausgesetzt sein, welche zwar in der Wirklichkeit meist für beide Strecken von gleichem Betrage pro Längeneinheit sein wird, hier aber der Allgemeinheit wegen mit q_1 und q_2 für jeden Meter Länge angenommen werden soll. Von den isolirten Kräften K ist in der Figur in jeder Strecke nur eine Kraft K_1 und bezw. K_2 angedeutet, und es soll auch für diese nur die Rechnung geführt werden, wodurch die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird, denn bei einer beliebig großen Anzahl concentrirter Belastungen in einer Strecke hat man diese Kräfte sämmtlich in übereinstimmender Art in die Rechnung einzuführen. Die Kräfte K_1 und K_2 mögen die Abstände a_1 und a_2 von dem mittleren Stützpunkte A_2 haben, welcher letztere als der Anfang rechtwinkeliger Coordinaten mit der horizontalen X-Axe $A_1 A_2 A_3$ angesehen wird. Der Unterschied zwischen diesem Falle und dem in Fig. 142 dargestellten eines auf drei Stützen frei aufliegenden Balkens besteht darin, daß die Momente über den Endstützen A_1 und A_3 hier nicht mehr gleich Null sind, sondern gewisse von vornherein noch unbekannte Werthe M_1 und M_3 haben. Es mögen R_1 und R_3 wieder die Auflagerreactionen in A_1 und A_3 sein, so hat man diese und die besagten Momente M_1 und M_3 mit Rücksicht darauf zu ermitteln, daß die elastische Linie in A_1 und A_3 horizontal gerichtet ist, und daß die Stützpunkte A_1 und A_3 mit A_2 in gleicher Höhe liegen.

Bezeichnet man daher mit α den Winkel, unter welchem die elastische Linie in A_2 gegen den Horizont geneigt ist, so müssen die auf jede Hälfte $A_2 A_1$ und $A_2 A_3$ wirkenden Kräfte eine Biegung an den Enden im Winkelbetrage ebenfalls von α hervorbringen, da diese Enden horizontal gerichtet sind. Außerdem müssen aber die Enden aus der Richtung $D_1 D_3$ der Tangente in A_2 um die Größe $D_1 A_1 = D_3 A_3 = l\alpha$ gesenkt resp. gehoben werden. Um diese Bedingungen durch Gleichungen auszudrücken, hat man nur zu beachten, daß die Neigung β und die Senkung f eines Balkens von der Länge l an seinem Ende bezw. ausgedrückt ist durch:

$$1)\quad TE.\beta = q\frac{l^3}{6} \text{ und } TE.f = q\frac{l^4}{8},$$

bei Vorhandensein einer gleichmäßig vertheilten Belastung ql;

$$2)\quad TE.\beta = Ml \text{ und } TE.f = M\frac{l^2}{2},$$

bei Einwirkung eines Kräftepaares vom Momente M, und

$$3)\quad TE.\beta = K\frac{a^2}{2}, \text{ bezw.}$$

$$TE.f = K\frac{a^3}{3} + K\frac{a^2}{2}(l-a) = Ka^2\frac{3l-a}{6},$$

bei der Wirkung einer concentrirten Kraft K am Hebelarme a (vergl. Thl. I, §. 236 bis §. 239).

Mit Rücksicht hierauf hat man nun für die Hälfte $A_2 A_1$ die beiden Bedingungen:

$$TE.\alpha = q_1 \frac{l^3}{6} + K_1 \frac{a_1^2}{2} + M_1 l - R_1 \frac{l^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

und

$$TE.l\alpha = q_1 \frac{l^4}{8} + K_1 a_1^2 \frac{3l - a_1}{6} + M_1 \frac{l^2}{2} - R_1 \frac{l^3}{3} \quad . \quad . \quad (15)$$

Wenn man daher die Gleichung (15) nach vorheriger Division durch l von (14) subtrahirt, wird

$$q_1 \frac{l^3}{24} + K_1 \frac{a_1^3}{6l} + M_1 \frac{l}{2} - R_1 \frac{l^2}{6} = 0,$$

oder

$$R_1 = q_1 \frac{l}{4} + K_1 \frac{a_1^3}{l^3} + 3 \frac{M_1}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Ganz in derselben Weise erhält man für die andere Balkenstrecke $A_2 A_3$, wenn man $-\alpha$ für α einführt:

$$-TE.\alpha = q_2 \frac{l^3}{6} + K_2 \frac{a_2^2}{2} + M_3 l - R_3 \frac{l^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14^a)$$

$$-TE.l\alpha = q_2 \frac{l^4}{8} + K_1 a_2^2 \frac{3l - a_2}{6} + M_3 \frac{l^2}{2} - R_3 \frac{l^3}{3} \quad . \quad (15^a)$$

$$R_3 = q_2 \frac{l}{4} + K_2 \frac{a_2^3}{l^3} + 3 \frac{M_3}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16^a)$$

Durch Addition von (14) und (14^a) erhält man nun, wenn man aus (16) und (16^a) die Werthe von R_1 und R_3 einführt:

$$\frac{q_1 + q_2}{6} l^3 + K_1 \frac{a_1^2}{2} + K_2 \frac{a_2^2}{2} + (M_1 + M_3) l = (R_1 + R_3) \frac{l^2}{2}$$

$$= \frac{q_1 + q_2}{8} l^3 + K_1 \frac{a_1^3}{2l} + K_2 \frac{a_2^3}{2l} + 3 \frac{M_1 + M_3}{2} l,$$

woraus sich

$$M_1 + M_3 = \frac{q_1 + q_2}{12} l^2 + K_1 a_1^2 \frac{l - a_1}{l^2} + K_2 a_2^2 \frac{l - a_2}{l^2} \quad . \quad . \quad (17)$$

ergiebt.

Eine zweite Beziehung zwischen M_1 und M_3 findet sich aus der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung, wonach die Momentensumme aller Kräfte der einen Hälfte in Bezug auf A_2 gleich derjenigen für die andere Balkenhälfte und zwar gleich dem Momente M_2 über der mittleren Stütze sein muß. Demgemäß ist

$$q_1 \frac{l^2}{2} + K_1 a_1 + M_1 - R_1 l = M_2 = q_2 \frac{l^2}{2} + K_2 a_2$$
$$+ M_3 - R_3 l, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

woraus man, wenn für R_1 und R_3 die Werthe aus (16) gesetzt werden:

$$q_1 \frac{l^2}{4} + K_1 a_1 \frac{l^2 - a_1^2}{l^2} - 2 M_1 = q_2 \frac{l^2}{4} + K_2 a_2 \frac{l^2 - a_2^2}{l^2} - 2 M_3$$

folgt, so daß man nun erhält:

$$M_1 - M_3 = \frac{q_1 - q_2}{8} l^2 + K_1 a_1 \frac{l^2 - a_1^2}{2 l^2} - K_2 a_2 \frac{l^2 - a_2^2}{2 l^2} \; . \; . \; (19)$$

Man erhält dann schließlich aus (17) und (19) durch Addition:

$$M_1 = \frac{5 q_1 - q_2}{48} l^2 + K_1 \frac{a_1 l^2 + 2 a_1^2 l - 3 a_1^3}{4 l^2}$$
$$+ K_2 \frac{2 a_2^2 l - a_2 l^2 - a_2^3}{4 l^2} \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

und durch Subtraction:

$$M_3 = \frac{5 q_2 - q_1}{48} l^2 + K_2 \frac{a_2 l^2 + 2 a_2^2 l - 3 a_2^3}{4 l^2}$$
$$+ K_1 \frac{2 a_1^2 l - a_1 l^2 - a_1^3}{4 l^2} \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

Würde man diese Werthe für M_1 und M_2 in (16), (16[a]) und (18) einsetzen, so erhielte man allgemeine Ausdrücke für die Reactionen R_1 und R_3, sowie für das Moment M_2 über der Mittelstütze. Der Auflagerdruck in der Mitte folgt dann einfach zu

$$R_2 = (q_1 + q_2)\, l + K_1 + K_2 - R_1 - R_3;$$

auch erhält man aus (14) oder (15) die Neigung α der elastischen Linie in A_2 gegen den Horizont, deren Kenntniß indessen für gewöhnlich nicht von praktischem Interesse ist.

Setzt man in den vorstehenden Formeln $q_1 = q_2 = q$ und $K_1 = K_2 = 0$, so erhält man, entsprechend dem unter (6) in §. 35 angeführten Belastungsfalle

$$M_1 = M_3 = M_2 = q \frac{l^2}{12}, \; R_1 = R_3 = q \frac{l}{2}, \text{ und } R_2 = q l.$$

Ebenso erhält man mit $q_1 = q_2 = 0$ und $K_1 = K_2 = K$, sowie $a_1 = a_2 = \frac{l}{2}$, d. h. für den in den Mitten der Strecken belasteten Balken, entsprechend §. 35, (5):

$$M_1 = M_3 = M_2 = K \frac{l}{8}, \; R_1 = R_3 = \frac{K}{2} \text{ und } R_2 = K \text{ u. s. w.}$$

Beispiele: 1. Wie groß ist die Senkung der Mittelstütze eines über zwei gleichen Oeffnungen liegenden Trägers zu machen, damit die Maximalmomente gleich groß werden, wenn die ganze Länge des Trägers $L = 40$ m, die Belastung durch sein Eigengewicht pro Meter $p = 800$ kg und die zufällige Last $k = 2400$ kg beträgt, und wenn die zulässige Faserspannung 6 kg pro Quadratmillimeter und der Elasticitätsmodul 18 000 anzunehmen ist?

Man hat hier

$$v = \frac{p}{q} = \frac{800}{2400 + 800} = 0{,}25,$$

und daher nach (11):

$$u = \frac{0{,}25 - 23 + \sqrt{544 - 32 \,.\, 0{,}25}}{2} = 0{,}201,$$

folglich das Maximalmoment für den Fall der gehörigen Senkung der Mittelstütze nach (13:)

$$M_{1\,max} = \frac{L^2 q}{32}(1 - u) = \frac{40 \,.\, 40 \,.\, 3200}{32} 0{,}799 = 127\,840 \text{ mkg}.$$

Nimmt man die Höhe des Trägers zu $h = 2$ m, also die Entfernung der äußersten Faserschicht von der neutralen Axe zu $e = 1$ m an, so erhält man das Trägheitsmoment T, wenn alle Maße in Metern ausgedrückt werden durch

$$M_{max} = s\,\frac{T}{e} \text{ zu}$$

$$T = \frac{1 \,.\, 127\,840}{6 \,.\, 1000 \,.\, 1000} = 0{,}02131,$$

und daher die erforderliche Senkung der Mittelstütze nach (12):

$$f = \frac{u\,L^4\,q}{384\;T \,.\, E} = \frac{0{,}201 \,.\, 40^4 \,.\, 3200}{384 \,.\, 0{,}02131 \,.\, 18\,000 \,.\, 1000 \,.\, 1000} = 0{,}0112 \text{ m}$$

oder nur wenig mehr als 11 mm.

2. In einer Spinnerei ist ein 8 m langer, an beiden Enden eingemauerter Unterzug angebracht, welcher in der Mitte, Fig. 144, durch eine Säule gestützt ist. Die Anstrengung dieses Unterzuges soll ermittelt werden, wenn derselbe durch das Gewicht des darauf ruhenden Fußbodens pro Meter Länge mit $q = 2000$ kg belastet wird, und außerdem durch aufgestellte Maschinen die eine Oeffnung eine Last von 800 kg in 2,4 m Entfernung von der Mitte, und die andere Oeffnung in 3 m Entfernung von der Säule eine Last von 1000 kg erhält?

Hier ist $q = 2000$ kg, $K_1 = 800$ kg, $K_2 = 1000$ kg, $a_1 = 2{,}4$, $a_2 = 3$ und $l = 4$ m. Man findet daher (20) das Moment an einem Ende

$$M_1 = 2000\,\frac{16}{12} + 800\,\frac{2{,}4 \,.\, 16 + 2 \,.\, 2{,}4^2 \,.\, 4 - 3 \,.\, 2{,}4^3}{4 \,.\, 16} + 1000\,\frac{2 . 9 . 4 - 3 . 16 - 27}{4 \,.\, 16}$$

$$= 2666{,}7 + 537{,}6 - 46{,}9 = 3157{,}4 \text{ mkg},$$

und das am anderen Ende:

$$M_3 = 2000\,\frac{16}{12} + 1000\,\frac{3 . 16 + 2 . 9 . 4 - 3 . 27}{64} + 800\,\frac{2 . 2{,}4^2 . 4 - 2{,}4 \,.\, 16 - 2{,}4^3}{64}$$

$$= 2666{,}7 + 609{,}4 - 76{,}8 = 3199{,}3 \text{ mkg}.$$

Mit diesen Werthen erhält man aus (16) den Auflagerdruck auf der einen Seite A_1 zu:

$$R_1 = 2000 \frac{4}{4} + 800 \frac{2{,}4^3}{4^3} + 3 \frac{3157{,}4}{4} = 4541 \text{ kg},$$

und aus (16ª) auf der anderen Seite A_3:

$$R_3 = 2000 + 1000 \frac{27}{64} + 3 \frac{3199{,}3}{4} = 4822 \text{ kg},$$

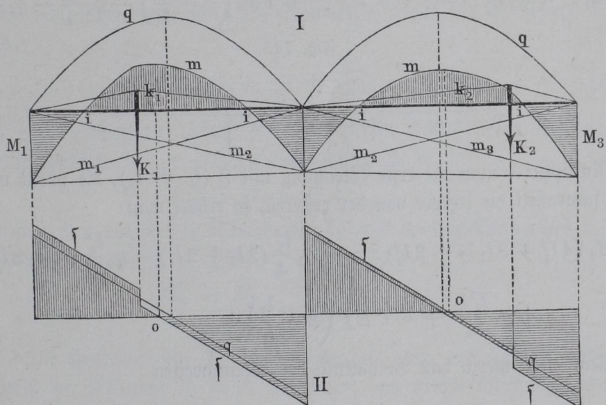
folglich ist der Druck auf die Mittelstütze:

$$R_2 = 2000 \,.\, 8 + 800 + 1000 - 4541 - 4822 = 8437 \text{ kg}.$$

Das Biegungsmoment über der Mittelstütze ergiebt sich endlich aus (18) zu

$$M_2 = 2000 \frac{16}{2} + 800 \,.\, 2{,}4 + 3157{,}4 - 4541 \,.\, 4 = 2912 \text{ mkg}.$$

Fig. 144.



Um das Biegungsmoment und die Scheerkraft an jeder Stelle zu finden, sind in Fig. 144 I und II die Diagramme entworfen, indem die Curven m und ſ für die resultirenden Momente und Schubkräfte durch Vereinigung der Diagramme gezeichnet wurden, welche der gleichförmigen Belastung q, den concentrirten Kräften K und den negativen Stützenmomenten M_1, M_2 und M_3 zukommen, welche Diagramme durch die entsprechenden Bezeichnungen q, q, k und m_1, m_2, m_3 unterschieden sind. Man ersieht daraus die Inflexionspunkte i und die Stellen, wo die Zwischenmomente $[M]$ die größten Werthe haben, d. h. wo die Schubkräfte Null werden.

Balken auf vier Stützen. Es soll ein continuirlicher Brückenträger $A_1 A_4$, Fig. 145 (a. f. S.), über drei Oeffnungen angenommen werden, von welchen jede der äußeren die gleiche Weite $l_1 = l_3$ und die mittlere die Weite l_2 haben soll. Die Endstützen A_1 und A_4 sollen in einer Hori- §. 39.