kehrslast der Brücke von 5000 kg, also für jeden Träger $k = 2500$ kg voraus, so erhält man nach dem Vorstehenden folgende Resultate:

Das absolut größte Moment, welches sich in der Mitte des Trägers bei dessen voller Belastung einstellt, ist

$$M_{max} = (p + k)\,\frac{l^2}{8} = (0{,}9 + 2{,}5)\,\frac{32^2}{8} = 435{,}2 \text{ Metertonnen,}$$

und die größte Scheerkraft beträgt in diesem Falle über den Stützen

$$V_{max} = \pm\,(p + k)\,\frac{l}{2} = 3{,}4\,.\,16 = 54{,}4 \text{ Tonnen.}$$

Die Entfernung o, bis auf welche sich das Maximalmoment beiderseits den Stützen in Folge der Lastbewegung nähert, beträgt nach (8^a):

$$o = 32\left[-\frac{0{,}9}{2{,}5} + \sqrt{\left(\frac{0{,}9}{2{,}5}\right)^2 + \frac{0{,}9}{2{,}5}}\right] = 10{,}85 \text{ m.}$$

Die Verschiebung des größten Momentes beträgt daher nach jeder Seite von der Mitte

$$\frac{l}{2} - o = 16 - 10{,}85 = 5{,}15 \text{ m.}$$

Ist die Last um die Länge $o = 10{,}85$ m über ein Auflager vorgerückt, so hat das Moment in dem Querschnitte an dieser Stelle nach (9^a) den Werth:

$$M_0 = \frac{p}{2}(l\,o - o^2) + k\,\frac{o^2}{2\,l}(l - o) = 0{,}45\,(32\,.\,10{,}85 - 10{,}85^2) + 2{,}5\,\frac{10{,}85^2}{64}\,21{,}15$$
$$= 103{,}275 + 97{,}237 = 200{,}5 \text{ Metertonnen.}$$

Dieser Werth ist natürlich kleiner als das dem Punkte O zukommende Maximalmoment bei voller Belastung des Trägers

$$max\ M_0 = \frac{p + k}{2}\,(l\,o - o^2) = 1{,}7\,(32.10{,}85 - 10{,}85^2)$$
$$= 390 \text{ Metertonnen.}$$

Die Schubkraft des Trägers in der Mitte, welche bei voller Belastung zu Null wird, nimmt dagegen für den Fall, daß die Last um die Größe o über eine Stütze vorgerückt ist, den Werth

$$V = \pm\,k\,\frac{o^2}{2\,l} = 2{,}5\,\frac{10{,}85^2}{64} = 4{,}6 \text{ Tonnen}$$

an. Die größte Schubkraft dagegen wird in der Mitte eintreten, wenn eine Hälfte der Brücke mit der Last bedeckt ist, und man hat hierfür nach (4):

$$V_{max} = \frac{k\,l}{8} = 2{,}5\,.\,4 = 10 \text{ Tonnen u. s. w.}$$

Balken auf mehreren Stützen. Wenn ein Balken auf mehr als zwei Stützen ruht, so sind die Auflagerreactionen in den einzelnen Stützpunkten aus den Bedingungen des Gleichgewichtes nicht ohne Weiteres zu ermitteln, denn diese beiden Bedingungen für ein System paralleler Kräfte $\Sigma P = 0$ und $\Sigma M = 0$ gestatten nur die Ermittelung von zwei unbekannten Größen, genügen also zur Bestimmung der Auflagerreactionen §. 37.

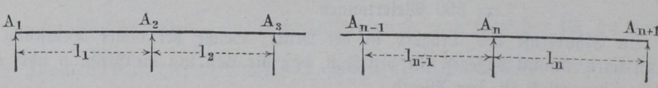
nur bei Balken auf zwei Stützen. Es sind daher bei beliebig vielen, etwa n Stützen, zu jenen beiden Gleichgewichtsbedingungen noch $n - 2$ Gleichungen erforderlich, wenn alle Auflagerreactionen und damit die Momente für alle Balkenquerschnitte bestimmt werden sollen. Diese Gleichungen lassen sich nur angeben, wenn man auf die Elasticitätsverhältnisse des Balkens, also auf dessen Biegung Rücksicht nimmt, während es unmöglich sein würde, die Auflagerdrücke für einen vollkommen starren, mehrfach gestützten Balken zu bestimmen. Man bedient sich zur Aufstellung der erforderlichen Bestimmungsgleichungen der von Navier aufgestellten Formel II[a] in §. 35:

$$M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

indem man durch zweimalige Integration dieser Gleichung für jede der $n - 2$ Zwischenstützen zu ebenso vielen Bestimmungsgleichungen gelangt, welche mit den beiden allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittelung der n unbekannten Reactionen dienen. Diese Rechnung, welche in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 2 für mehrere Beispiele durchgeführt worden ist, führt zwar in jedem Falle zum Ziele, doch ist sie für mehrere Stützen ziemlich weitläufig. Man wendet daher mit Vortheil die von Clapeyron*) angegebene Methode der Berechnung an, welche eine directe Beziehung zwischen den Momenten über drei auf einander folgenden Stützen ergiebt.

Es sei im Folgenden ein auf beliebig vielen Stützen $A_1, A_2, A_3 \ldots$, Fig. 139, frei aufliegender Balken vorausgesetzt, und es seien mit $l_1, l_2, l_3 \ldots$

Fig. 139.



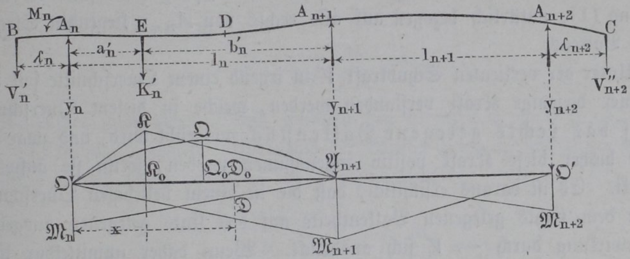
die horizontalen Entfernungen dieser Stützen von einander bezeichnet. Die verticalen Ordinaten dieser zunächst allgemein als in beliebiger Höhe liegend angenommenen Stützpunkte seien, auf eine willkürliche Horizontale bezogen, mit $y_1, y_2\ y_3 \ldots$ bezeichnet. Jede der Strecken soll einer gleichmäßig vertheilten Belastung ausgesetzt sein, welche pro Längeneinheit bezw. $q_1, q_2, q_3 \ldots$ betragen möge, so daß also die $n$te Strecke zwischen A_n und A_{n+1} von der Länge l_n einer gleichmäßig vertheilten Belastung $Q_n = q_n l_n$ unterworfen ist. Außerdem möge der Balken noch einer beliebigen Anzahl concentrirter Belastungen K unterworfen sein, welche mit $K_1, K_2, K_3 \ldots$ u. s. w. bezeichnet werden, so daß z. B. die $n$te Strecke durch die Kräfte $K_n', K_n'' \ldots$

*) S. Comptes rendus, Dec. 1857.

angegriffen werden möge, deren Angriffspunkte bezw. um a_n', a_n'' . . . von der Stütze A_n entfernt sind.

Dies vorausgeschickt, sei nun das Stück $A_n A_{n+1} A_{n+2}$, Fig. 140, des Balkens ins Auge gefaßt, welches die beiden Strecken l_n und l_{n+1} enthält.

Fig. 140.



Durch den Einfluß der links von A_n befindlichen Balkenstrecken und ihrer Belastungen wird in dem Querschnitte des Balkens, welcher unmittelbar vor der Stütze A_n in einem verschwindend kleinen Abstande ∂l gelegen ist, eine zweifache Wirkung hervorgerufen; es wird nämlich daselbst auf das Balkenstück A_n eine verticale Schubkraft und ein Drehungsmoment ausgeübt, welches etwa in der Richtung des Pfeiles auf das Balkenende A_n wirken möge. Bezeichnet man dieses Moment, welches wegen der unendlich kleinen Entfernung ∂l auch mit dem Momente über A_n übereinstimmt, mit M_n, und die verticale Schubkraft mit V_n', so kann man sich die Schubkraft V_n' und das Moment M_n zu einer Resultirenden V_n' vereinigt denken, welche in B in solchem Abstande λ_n von A_n wirkt, daß man

$$V_n' \lambda_n = M_n$$

hat. Es ist daher klar, daß man den links von A_n befindlichen Theil des Balkens ganz beseitigt denken kann, ohne an dem Gleichgewichtszustande etwas zu ändern, vorausgesetzt nur, daß man den beseitigten Balkentheil durch die betreffende Verticalkraft V_n' im Abstande λ_n von A_n ersetzt. Die Größe dieser Kraft V_n' wird gefunden, wenn man die sämmtlichen Belastungen aller beseitigten Balkenstrecken $l_1, l_2, l_3 \ldots l_{n-1}$ addirt und die Summe aller Reactionen davon abzieht, mit welchen die Stützen $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$ gegen den Balken aufwärts wirken. Bezeichnet man diese Reactionen mit $R_1, R_2, R_3 \ldots$, so hat man also für die Schubkraft V_n' den Ausdruck:

$$V_n' = l_1 q_1 + \Sigma K_1 + l_2 q_2 + \Sigma K_2 \ldots l_{n-1} q_{n-1} + \Sigma K_{n-1}$$
$$- (R_1 + R_2 \ldots R_{n-1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In derselben Weise kann man auch den rechts von A_{n+2} gelegenen Balkentheil fortgeschnitten denken, wenn man denselben ersetzt durch die in einem solchen Abstande $A_{n+2}C = \lambda_{n+2}$ wirkende Schubkraft V''_{n+2}, daß $V''_{n+2}\lambda_{n+2} = M_{n+2}$ ist, wenn unter M_{n+2} das Moment verstanden ist, welches durch den beseitigten Balkentheil in dem Querschnitte durch A_{n+2} erzeugt wird. Für die Größe der Schubkraft V''_{n+2} gilt ebenfalls die Gleichung (1), natürlich bezogen auf alle rechts von A_{n+2} liegenden Strecken des Balkens.

Unter der verticalen Schubkraft V in irgend einem Querschnitte soll hier immer diejenige Kraft verstanden werden, welche in diesem Querschnitte auf das rechts gelegene Balkenstück ausgeübt wird, und zwar soll wie bisher diese Kraft positiv angenommen werden, wenn sie aufwärts wirkt. Es ist daraus ersichtlich, daß die in einem beliebigen Querschnitte von dem rechts gelegenen Balkentheile auf den links gelegenen ausgeübte Einwirkung durch $-V$ sich ausdrückt. Wenn daher unmittelbar links neben einer Stütze A_n die Schubkraft durch V_n' und unmittelbar rechts davon durch V_n'' ausgedrückt ist, so ergiebt sich die Reaction R_n, mit welcher diese Stütze gegen den Balken wirkt, wegen des Gleichgewichts zwischen den drei Kräften V_n', R_n und $-V_n''$ durch die Gleichung

$$R_n + V_n' - V_n'' = 0$$

allgemein zu

$$R_n = V_n'' - V_n' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

in welcher Gleichung für V_n' und V_n'' in dem oben gedachten Sinne je nach der Richtung der Schubkraft ein positiver oder negativer Werth anzunehmen ist.

Man nehme nun eine Horizontale OO' als Abscissenaxe für ein rechtwinkeliges Coordinatensystem an, dessen Y-Axe durch A_n hindurchgeht, und bezeichne mit α den Winkel, welchen die elastische Linie des belasteten Balkens in irgend einem Punkte mit dem Horizonte bildet, so hat man für die elastische Linie allgemein:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,\alpha = \alpha,$$

oder

$$\partial y = \alpha\,\partial x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wenn man wegen der Kleinheit dieses Winkels α für $tg\,\alpha$ setzt. Mit Rücksicht hierauf schreibt sich nun die Navier'sche Gleichung:

$$M = TE\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = TE\frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

oder

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{M}{TE} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Gleichung (3) giebt nach der bekannten Methode der theilweisen Integration, wonach

$$\int u \partial v = uv - \int v \partial u \text{ ist,}$$

$$y = \alpha x - \int x \partial \alpha = \alpha x - \int x \frac{\partial \alpha}{\partial x} \partial x,$$

oder mit Rücksicht auf (4)

$$y = \alpha x - \int \frac{M}{TE} x \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Berechnet man diesen Werth zwischen den Grenzen $x = 0$ in A_n und $x = l_n$ in A_{n+1}, wofür entsprechend der Winkel $\alpha = \alpha_n$ und $\alpha = \alpha_{n+1}$ sowie $y = y_n$ und $y = y_{n+1}$ ist, so erhält man:

$$y_{n+1} - y_n = \alpha_{n+1} l_n - \int_0^{l_n} \frac{M}{TE} x \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Man denke sich nun ebenfalls für die $n + 1$ te Strecke $A_{n+1} A_{n+2}$ die Y-Axe durch A_{n+2} gelegt, so gilt auch hierfür die allgemeine Gleichung (5) und man hat für A_{n+2} die Werthe $x = 0$, $\alpha = \alpha_{n+2}$, und $y = y_{n+2}$, sowie für A_{n+1} ebenso $x = l_{n+1}$, $\alpha = - \alpha_{n+1}$ und $y = y_{n+1}$; daher erhält man zwischen diesen Grenzen aus (5):

$$y_{n+1} - y_{n+2} = - \alpha_{n+1} l_{n+1} - \int_0^{l_{n+1}} \frac{M}{TE} x \partial x \quad . \quad . \quad (7)$$

Setzt man das Trägheitsmoment T für alle Querschnitte des Balkens als constant voraus, so erhält man aus (6) und (7) durch Addition nach vorheriger Reducirung mit l_n und l_{n+1}:

$$TE \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_{n+2}}{l_{n+1}} \right)$$
$$= - \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} M x \partial x - \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} M x \partial x \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die Werthe der beiden Integrale sind nun leicht geometrisch zu deuten. Denkt man sich für jeden beliebigen Punkt des Balkens nämlich das daselbst wirkende Kraftmoment M ermittelt und in der oben besprochenen Weise nach einem beliebigen Momentenmaßstabe als Ordinate über der Abscissenaxe OO' aufgetragen, so erhält man, wie früher schon angegeben, die sogenannte Momentenfläche. Es ist dann $M \partial x$ der Flächeninhalt des unendlich kleinen Streifens von der Breite ∂x, welchen die beiden Ordinaten im

Abstande x und $x + \partial x$ vom Anfangspunkte O bezw. O', aus der Momentenfläche herausschneiden. Folglich ist $x M \partial x$ das statische Moment dieses Streifens, bezogen auf den Anfang der Coordinaten und daher drückt

$$\int_0^{l_n} M x \partial x$$

das statische Moment der über der Strecke $A_n A_{n+1}$ construirten Momentenfläche in Bezug auf A_n aus, und ebenso stellt

$$\int_0^{l_{n+1}} M x \partial x$$

das statische Moment der Momentenfläche über der Strecke $A_{n+1} A_{n+2}$ in Bezug auf A_{n+2} vor. Bezeichnet daher F den Inhalt einer solchen Momentenfläche und f den horizontalen Abstand ihres Schwerpunktes von dem betreffenden Stützpunkte A_n oder A_{n+2}, so kann man das Product Ff als den Werth des zugehörigen Integrals in (8) ansehen. Es kommt daher nur darauf an, die Momentenflächen für die beiden Strecken l_n und l_{n+1} zu bestimmen, und deren Schwerpunkte zu ermitteln. Das letztere kann ebensowohl durch Rechnung wie mit Hülfe der Zeichnung geschehen.

Die Bestimmung der Momentenflächen oder des Momentes M für jeden Balkenquerschnitt ist leicht vorzunehmen, wie die folgende Betrachtung lehrt. Das Moment M in irgend welchem Punkte D der Strecke $A_n A_{n+1}$ entspringt aus drei Wirkungen, nämlich aus denjenigen

1) der concentrirten Lasten K_n,
2) der gleichmäßig vertheilten Last $Q_n = q_n l_n$ und
3) der Momente M_n und M_{n+1}, welche in den Stützen A_n und A_{n+1} durch die daselbst sich anschließenden Balkentheile hervorgerufen werden. Nach dem Vorstehenden können diese Momente so angesehen werden, als ob sie durch die Schubkraft V_n' und bezw. $- V''_{n+1}$ erzeugt werden, welche in den betreffenden Abständen λ_n und λ_{n+1} von A_n und A_{n+1} angreifen.

Man hat also die Momentenfläche für die Strecke $A_n A_{n+1}$ genau so zu bestimmen, wie für einen Balken, der in A_n und A_{n+1} frei aufliegt, und durch die Kräfte K_n, Q_n, V_n' und $- V''_{n+1}$ angegriffen wird. Dies geschieht nach dem in §. 35 Gesagten wie folgt:

1. Eine Kraft K_n' in E im Abstande a_n' von A_n und b_n' von A_{n+1} veranlaßt (s. Fig. 125) in E ein Moment von der Größe

$$\mathfrak{K}\,\mathfrak{K}_0 = K_n \frac{a_n' \, b_n'}{l_n},$$

und das Dreieck $\mathfrak{O}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{A}_{n+1}$ stellt danach die Momentenfläche vor. Der Inhalt derselben ist

$$F_n' = \frac{1}{2}\,\mathfrak{O}\,\mathfrak{A}_{n+1} \times \mathfrak{K}\,\mathfrak{K}_0 = \frac{1}{2}\,l_n\,\frac{a_n'\,b_n'}{l_n}\,K_n' = \frac{a_n'\,b_n'}{2}\,K_n'.$$

Der Schwerpunkt dieser Fläche hat, wie man aus der Figur leicht findet, von A_n den Abstand

$$f_n' = \frac{l_n}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{l_n}{2} - a_n'\right) = \frac{l_n + a_n'}{3},$$

folglich hat man für diese Momentenfläche das statische Moment in Bezug auf A_n

$$F_n' f_n' = a_n'\,b_n'\,\frac{l_n + a_n'}{6}\,K_n'.$$

Denkt man sich diesen Ausdruck für alle concentrirten Kräfte $K_n', K_n'' \ldots$ der Strecke l_n gebildet, und dies einfach durch das Summenzeichen Σ angedeutet, so ist

$$\Sigma\, a_n\,b_n\,\frac{l_n + a_n}{6}\,K_n = \mathfrak{K}_n \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

derjenige Theil des Integrals $\int_0^{l_n} M\,x\,\partial x$ der Gleichung (8), welcher von den concentrirten Belastungen der Strecke l_n herrührt. Ebenso würde

$$\Sigma\, a_{n+1}\,b_{n+1}\,\frac{l_{n+1} + b_{n+1}}{6}\,K_{n+1} = \mathfrak{K}_{n+1} \quad \ldots \quad (10)$$

dieselbe Bedeutung für die Strecke l_{n+1} in Bezug auf den Stützpunkt A_{n+2}, d. h. für das Integral $\int_0^{l_{n+1}} M\,x\,\partial x$ haben.

2. Der gleichförmig vertheilten Belastung $Q_n = q_n\,l_n$ entspricht nach §. 35 und Fig. 126 die Parabelfläche $\mathfrak{O}\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{A}_{n+1}$, deren Scheitelordinate $\mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}_0 = q_n\,\frac{l_n^2}{8}$ ist. Für diese Fläche hat man

$$F_n = \frac{2}{3}\,\mathfrak{O}\,\mathfrak{A}_{n+1} \times \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}_0 = \frac{2}{3}\,l_n\,q_n\,\frac{l_n^2}{8} = q_n\,\frac{l_n^3}{12},$$

und da der Schwerpunkt in der Mitte liegt, ist hierfür

$$F f = q_n\,\frac{l_n^4}{24} = \mathfrak{Q}_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

derjenige Theil des Ausdrucks $\int_0^{l_n} M\,x\,\partial x$, welcher von der gleichförmig vertheilten Belastung der Strecke l_n herrührt. Für die Strecke $A_{n+1} A_{n+2}$ hat man ebenso

$$q_{n+1} \frac{l_{n+1}{}^4}{24} = \mathfrak{Q}_{n+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

3. Die Kraft V_n', welche als Ersatz des linken Trägertheiles in A_n ein Moment $M_n = V_n' \lambda_n = \mathfrak{O}\mathfrak{M}_n$ erzeugt, ruft in D im Abstande x von A_n ein Moment

$$\mathfrak{D}_0 \mathfrak{D} = \frac{l_n - x}{l_n} \mathfrak{O}\mathfrak{M}_n = \frac{l_n - x}{l_n} M_n$$

hervor, wie man sich ohne Weiteres überzeugt, wenn man sich $B A_n A_{n+1}$ als einen doppelarmigen Hebel vorstellt, an welchem die in B wirkende Kraft V_n' einen Gegendruck in A_{n+1} von der Größe

$$\frac{V_n' \lambda_n}{l_n} = \frac{M_n}{l_n}$$

hervorruft, der in D ein Moment

$$M_n \frac{l_n - x}{l_n}$$

erzeugt. Die von dem Momente M_n für die Strecke l_n veranlaßten Momente sind daher durch das Dreieck $\mathfrak{O}\mathfrak{M}_n \mathfrak{A}_{n+1}$ dargestellt, dessen statisches Moment in Bezug auf A_n durch

$$\mathfrak{M}_n'' = \frac{1}{2} \mathfrak{O}\mathfrak{M}_n . l_n . \frac{1}{3} l_n = \frac{1}{6} M_n l_n^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

ausgedrückt ist. In gleicher Weise stellt das Dreieck $\mathfrak{O}' \mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{M}_{n+2}$ die Momentenfläche dar, welche den Einfluß des in A_{n+2} durch den rechtsseitigen Balkentheil ausgeübten Momentes M_{n+2} auf die Strecke l_{n+1} ergiebt, und man erhält das statische Moment dieser Fläche in Bezug auf A_{n+2} zu

$$\mathfrak{M}_{n+2}' = \frac{1}{2} \mathfrak{O}' \mathfrak{M}_{n+2} . l_{n+1} . \frac{1}{3} l_{n+1} = \frac{1}{6} M_{n+2} . l_{n+1}{}^2 \quad . \quad . \quad (14)$$

Wenn man ferner nach dem gewählten Momentenmaßstabe $\mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{M}_{n+1} = M_{n+1}$ macht, so sind die beiden Dreiecke $\mathfrak{O} \mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{M}_{n+1}$ und $\mathfrak{O}' \mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{M}_{n+1}$ die Flächen für diejenigen Momente, welche durch das Moment M_{n+1} der Stütze A_{n+1} in den Strecken l_n und bezw. l_{n+1} hervorgerufen werden. Nun hat das Dreieck $\mathfrak{O} \mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{M}_{n+1}$ in Bezug auf A_n das statische Moment

$$\mathfrak{M}_{n+1}' = \frac{1}{2} M_{n+1} . \frac{2}{3} l_n^2 = \frac{1}{3} M_{n+1} l_n^2 \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

während das Dreieck $\mathfrak{O}' \mathfrak{A}_{n+1} \mathfrak{M}_{n+1}$ in Bezug auf A_{n+2} das statische Moment

$$\mathfrak{M}''_{n+1} = \frac{1}{2} M_{n+1} \cdot \frac{2}{3} l_{n+1}{}^2 = \frac{1}{3} M_{n+1} l_{n+1}{}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

hat. Man erhält daher aus (13) und (15) die Größe

$$\mathfrak{U}_n = \mathfrak{M}_n'' + \mathfrak{M}'_{n+1} = \frac{l_n{}^2}{6} (M_n + 2 M_{n+1}), \quad . \quad . \quad (17)$$

welche den von den Momenten in A_n und A_{n+1} herrührenden Theil des Integrals $\int\limits_0^{l_n} M x \partial x$ vorstellt, wie ebenso die Summe von (14) und (16)

$$\mathfrak{U}_{n+1} = \mathfrak{M}''_{n+1} + \mathfrak{M}'_{n+2} = \frac{l_{n+1}{}^2}{6} (2 M_{n+1} + M_{n+2}) \quad . \quad (18)$$

den von den Stützmomenten M_{n+1} und M_{n+2} herrührenden Theil des Integrals $\int\limits_0^{l_{n+1}} M x \partial x$ ergiebt.

Setzt man nunmehr die Werthe aus (9) bis (12), sowie (17) und (18) für die beiden Integrale der Gleichung (8) ein, so geht dieselbe über in:

$$TE \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_{n+2}}{l_{n+1}}\right) = - \frac{1}{l_n} (\mathfrak{K}_n + \mathfrak{Q}_n + \mathfrak{U}_n)$$
$$- \frac{1}{l_{n+1}} (\mathfrak{K}_{n+1} + \mathfrak{Q}_{n+1} + \mathfrak{U}_{n+1}) = - \left(\Sigma a_n b_n \frac{l_n + a_n}{6 l_n} K_n + q_n \frac{l_n{}^3}{24}\right.$$
$$\left. + \Sigma a_{n+1} b_{n+1} \frac{l_{n+1} + a_{n+1}}{6 l_{n+1}} K_{n+1} + q_{n+1} \frac{l_{n+1}{}^3}{24}\right)$$
$$- \frac{l_n}{6} (M_n + 2 M_{n+1}) - \frac{l_{n+1}}{6} (2 M_{n+1} + M_n);$$

welche Gleichung sich auch schreiben läßt:

$$M_n l_n + 2 M_{n+1} (l_n + l_{n+1}) + M_{n+2} l_{n+1} =$$
$$- 6 TE \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_{n+2}}{l_{n+1}}\right) - \Sigma a_n b_n \frac{l_n + a_n}{l_n} K_n$$
$$- \Sigma a_{n+1} b_{n+1} \frac{l_{n+1} + a_{n+1}}{l_{n+1}} K_{n+1} - q_n \frac{l_n{}^3}{4} - q_{n+1} \frac{l_{n+1}{}^3}{4} \quad . \quad (19)$$

Wenn man in dieser Gleichung die concentrirten Lasten K wegläßt und ferner voraussetzt, daß sämmtliche Stützpunkte in einer Horizontalen liegen, d. h. daß $y_n = y_{n+1} = y_{n+2}$ ist, so erhält man die zuerst von Clapeyron aufgestellte Gleichung:

$$M_n l_n + 2 M_{n+1} (l_n + l_{n+1}) + M_{n+2} l_{n+1} = - \frac{q_n l_n{}^3 + q_{n+1} l_{n+1}{}^3}{4} \quad (20)$$

Die Gleichung (19) oder (20) gilt für jede Zwischenstütze eines auf beliebig vielen Stützen liegenden Trägers, man erhält daher bei n Stützen, also bei $n - 2$ Zwischenstützen, $n - 2$ Bedingungsgleichungen, welche zusammen mit den zwei allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen genügen, um die Momente $M_1, M_2 \ldots M_n$ für die Stützpunkte zu berechnen.

Aus den so gefundenen Werthen der Momente in den Stützpunkten läßt sich dann auch das Biegungsmoment für jede beliebige Stelle des Trägers bestimmen, wie sich aus Folgendem ergiebt. Um für den beliebigen Punkt D im Abstande x von A_n das Moment M zu bestimmen, denkt man wieder den links von A_n befindlichen Balkentheil durch die Verticalkraft V_n' in solchem Abstande λ_n von A_n ersetzt, daß

$$V_n' \lambda_n = M_n$$

ist. Nimmt man zunächst an, daß in der Strecke l_n concentrirte Lasten K nicht vorhanden sind, so hat man für den Punkt D das Moment

$$M = V_n' (\lambda_n + x) + R_n x - q_n \frac{x^2}{2} = M_n + (R_n + V_n') x - q_n \frac{x^2}{2} \cdot \quad (21)$$

Für $x = l_n$ nimmt M den Werth M_{n+1} des Momentes über der Stütze A_{n+1} an, folglich hat man hierfür

$$M_{n+1} = M_n + (R_n + V_n') l_n - q_n \frac{l_n^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Aus (21) und (22) folgt durch Gleichsetzung der Werthe von $R_n + V_n'$ für das Moment M in dem beliebigen Abstande x von A_n:

$$M = M_n + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} x + \frac{q_n}{2} (l_n x - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Betrachtet man M als die Ordinate zur Abscisse x, so entspricht die Gleichung (23) einer Parabel mit verticaler Y-Axe, deren Scheitelabscisse x_0 sich dadurch bestimmt, daß für den Scheitel die Tangente horizontal ausfällt, also $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$ ist. Hiernach erhält man aus (23) diese Abscisse x_0 durch

$$0 = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} + q_n \frac{l_n}{2} - q_n x_0$$

zu

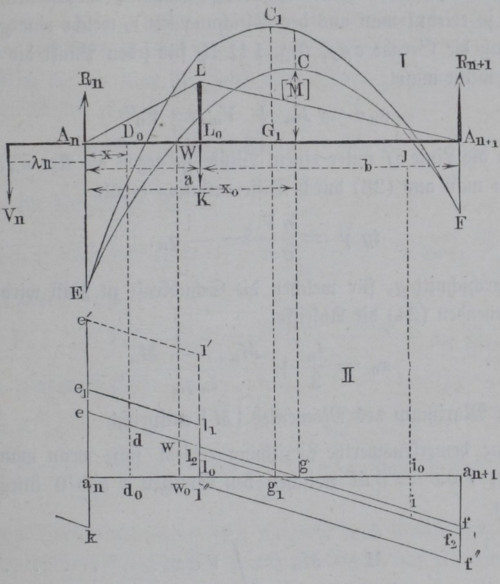
$$x_0 = \frac{l_n}{2} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n q_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Setzt man diesen Werth von x_0 in (23) ein, so ergiebt sich das größte Moment zwischen den Stützen A_n und A_{n+1}, welches durch $[M_n]$ bezeichnet werden soll, zu:

$$[M_n] = M_n + \frac{q_n}{2}\left(\frac{l_n}{2} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n q_n}\right)^2 = M_n + q_n \frac{x_0{}^2}{2} \ . \ . \ . \ (25)$$

Zeichnet man diese Parabel ECF, Fig. 141, für welche man außer den durch (24) und (25) bestimmten Ordinaten x_0 und $[M]$ des Scheitels C noch die beiden Punkte E und F durch ihre Ordinaten $A_n E = M_n$ und $A_{n+1} F = M_{n+1}$ kennt, so erhält man in der Fläche $A_n E C F A_{n+1}$ ein

Fig. 141.



deutliches Bild von der Inanspruchnahme der Strecke l_n durch biegende Momente. In W und J ist das Moment gleich Null, so daß die elastische Linie daselbst Wendepunkte zeigt, zu deren beiden Seiten der Balken nach den entgegengesetzten Richtungen gebogen wird.

Auch die Größe der Vertical- oder Scheerkraft ist leicht für jeden Punkt des Trägers zu bestimmen, wenn man mit Hülfe der Clapeyron'schen Formel (20) oder (19) die Momente über den Stützen gefunden hat. Für den beliebigen Punkt D_0 im Abstande $A_n D_0 = x$ von der Stütze A_n ist nach der Figur die verticale Schubkraft V gegeben durch die Gleichung:

$$V = V_n'' - q_n x = R_n + V_n' - q x \ . \ \ . \ \ . \ \ . \ (26)$$

Zu demselben Ausdrucke gelangt man auch durch Differentiation der Gleichung (21), wodurch man erhält

$$\frac{\partial M}{\partial x} = R_n + V_n' - q_n x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

entsprechend der schon früher angegebenen allgemeinen Beziehung:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Betrachtet man, um auch die Schubkraft graphisch darzustellen, V als die Ordinate, so erkennt man aus der Gleichung (26), welche eine gerade Linie darstellt, daß die Gerade egf, Fig. 141 II, für jeden Punkt die Größe von V ergiebt, wenn man

$$a_n e = R_n + V_n' = V_n''$$

macht, und die Linie ef unter einem Winkel γ gegen die Axe $a_n a_{n+1}$ zieht, für welchen man aus (26) durch Differentiation erhält

$$tg\, \gamma = \frac{\partial V}{\partial x} = - q_n . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Der Durchschnitt g, für welchen die Schubkraft zu Null wird, hat nach dem Vorstehenden (24) die Absciſſe

$$x_0 = \frac{l_n}{2} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n q_n},$$

welche dem Maximum des Momentes $[M]$ entspricht.

Noch eine bemerkenswerthe Beziehung ergiebt sich, wenn man die Gleichung (28), $V \partial x = \partial M$ zwischen den Grenzen x und 0 integrirt; man erhält dann

$$M - M_n = \int_0^x V \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Da das Integral die Fläche $a_n e d d_0$ des Schubkraftdiagramms zwischen $x = 0$ für A_n und $x = A_n D_0$ bedeutet, so folgt hieraus, daß das Stück dieser Fläche zwischen irgend zwei Ordinaten als Maß für die Zunahme des Momentes M zwischen denselben Ordinaten angesehen werden kann. Es stellt daher beispielsweise das Trapez $a_n w_0 w e$ nach demselben Maßstabe das Moment M_n über der Stütze A_n vor, nach welchem das Moment $[M]$ in G durch das Dreieck $g w_0 w$ oder das ebenso große $g i_0 i$ ausgedrückt ist, und nach welchem das Trapez $a_{n+1} i_0 i f$ die Größe des Momentes M_{n+1} über der Stütze A_{n+1} ergiebt.

Man erkennt aus der Figur auch die plötzliche Veränderung der Schubkraft V in den Stützpunkten. Während unmittelbar links von der Stütze

A_n, in unmeßbar kleinem Abstande davon, die auf das rechte Balkenstück abwärts gerichtete (negative) Schubkraft durch $V_n' = a_n k$ dargestellt ist, wird durch die Wirkung der in A_n vertical aufwärts wirkenden Auflagerreaction $R_n = ke$ unmittelbar rechts von A_n eine aufwärts wirkende (positive) Schubkraft auf das Balkenstück rechts ausgeübt von der Größe $a_n e = R_n + V_n' = V_n''$ [vergl. (2)]. Da also auch über dem Pfeiler die Schubkraft durch Null geht, so muß auch hier das Moment einen Maximalwerth annehmen, wenigstens so lange, als die Stütze A_n überhaupt einen Druck R_n auf den Balken ausübt, d. h. so lange der Balken daselbst wirklich aufruht und nicht etwa durch die Wirkung der übrigen Strecken ein Abheben des Balkens über dieser Stütze stattfindet.

Um endlich die Reaction R irgend einer Stütze zu finden, hat man aus (22) für die Stütze A_n:

$$R_n + V_n' = V_n'' = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} + q_n \frac{l_n}{2},$$

und ebenso für die Stütze A_{n+1}:

$$R_{n+1} + V'_{n+1} = V''_{n+1} = \frac{M_{n+2} - M_{n+1}}{l_{n+1}} + q_{n+1} \frac{l_{n+1}}{2}.$$

Nun ist aber

$$V'_{n+1} = V_n'' - q_n l_n = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} - q_n \frac{l_n}{2},$$

und daher folgt nach (2):

$$R_{n+1} = V''_{n+1} - V'_{n+1}$$
$$= \frac{M_{n+2} - M_{n+1}}{l_{n+1}} - \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} + \frac{q_n l_n + q_{n+1} l_{n+1}}{2} \qquad (31)$$

Nach dem Vorstehenden kann man nunmehr auch den Einfluß beurtheilen, welchen concentrirte Belastungen K auf die Größe des Momentes und der Schubkraft an jeder Stelle ausüben. Es sei etwa in L_0, Fig. 141, im Abstande a von A_n und b von A_{n+1} eine Last K wirkend, so vergrößert dieselbe in A_n den Stützendruck und also auch die Auflagerreaction R_n um $K \frac{b}{l_n}$. Die Schubkraft V_n'' ist daher um diesen Werth $K \frac{b}{l} = e e_1$ größer geworden. Da dieselbe Vergrößerung für alle Punkte zwischen A_n und L_0 gilt, so wird das Diagramm für die Schubkraft durch die Gerade $e_1 l_1$ dargestellt sein, welche durch e_1 parallel zu ef, also unter dem Winkel $\gamma = arc\ tg\ q_n$, gegen die Horizontale gelegt wird. In L_0 ändert sich dann die Schubkraft plötzlich um den Betrag $K = l_1 l_2$, und wenn man durch l_2 eine Parallele $l_2 f_2$ mit ef zieht, so erhält man in deren Ordinaten die Schubkräfte zwischen L und A_{n+1}. In dem letztgenannten Punkte ist die Schubkraft V'_{n+1} um das (negative) Stück ff_2 größer geworden, welches nach der Construction sich zu

$$l_1 l_2 - e_1 e = K - K\frac{b}{l} = K\frac{a}{l}$$

ergiebt, wie es dem Gesetze des Hebels auch entspricht.

Trägt man ferner in L_0 die Ordinate $L_0 L = K\frac{a\,b}{l_n}$ auf, so erhält man in dem Dreiecke $A_n L A_{n+1}$ bekanntlich die Momentenfläche, welche der Belastung durch K allein entspricht, und es ist dann leicht, durch algebraische Summirung der Ordinaten der Parabel ECF und des Dreiecks $A_n L A_{n+1}$ die resultirende Momentenfläche EC_1F zu erhalten. Es ergiebt sich aus dem Vorhergegangenen, daß dem Scheitel C_1 dieser resultirenden Curve dieselbe Abscisse $A_n G_1$ zukommen muß, wie dem Punkte g_1, in welchem die Axe $a_n a_{n+1}$ von der Begrenzung $e_1 l_1 l_2 f_2$ getroffen wird, d. h. in welchem die Schubkraft zu Null wird. Hieraus folgt auch, daß es ganz von der Größe der Kraft K abhängen wird, ob das Maximalmoment $[M]$ zwischen den Stützen in dem Angriffspunkte L_0 der Kraft K, oder zwischen L_0 und G auftreten wird. Den in der Figur zu Grunde gelegten Verhältnissen gemäß findet sich dieses Maximum von M in dem Punkte g_1 zwischen g und l_0, es ist aber deutlich, daß bei einem vergrößerten K, welchem etwa das Schubkraftdiagramm $a_n e' l' l'' f'' a_{n+1}$ entspricht, das größte oder Bruchmoment der Strecke mit dem Angriffspunkte L_0 der concentrirten Last zusammenfällt.

Die Wirkung einer concentrirten Belastung K veranlaßt also, ebenso wie die Reaction einer Stütze eine plötzliche Veränderung der Scheerkraft, und man kann daher einen durch concentrirte Belastungen angegriffenen Balken auch wie einen Träger auffassen, für welchen diese Belastungen als Stützpunkte betrachtet werden, die den Balken von oben nach unten mit den Reactionskräften K angreifen. Man hat dann die allgemeine Formel (19) anzuwenden, indem man für die Reactionen in den Kraftangriffen diese Kräfte K einführt und die Größen $y_{n+1} - y_n$ 2c. mit Rücksicht auf die erzeugten Durchbiegungen in Rechnung stellt.

Um die Anwendung der vorstehend entwickelten Formeln zu zeigen, sollen in den folgenden Paragraphen einige der am häufigsten vorkommenden Unterstützungsarten von Trägern näher untersucht werden.

§. 38. **Balken auf drei Stützen.** Der Balken liege auf den drei Stützen A_1, A_2 und A_3, Fig. 142, frei auf und sei über der Länge $A_1 A_2 = l_1$ mit q_1 und über der Länge $A_2 A_3 = l_2$ mit q_2 pro Längeneinheit belastet. Concentrirte Lasten sollen zunächst nicht angenommen werden, und es möge