Soll nun der gewalzte Träger eine Höhe $h = 300$ mm erhalten, und sieht man von der Tragfähigkeit der Mittelrippe ab, so kann man, unter b die Breite und unter d die Dicke jedes der beiden Flanschen verstanden, $\frac{T}{e} = h\,b\,d$ setzen (s. weiter unten §. 45), und man erhält mit $s = 8$ kg aus

$$8 \,.\, 300 \,.\, b\,d = 5000 \,.\, 1000$$

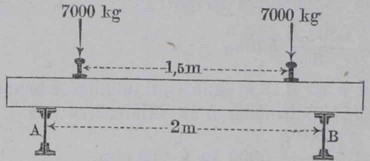
den Flanschenquerschnitt $b\,d = 2083$ qmm. Setzt man eine Dicke der Flanschen $d = 16$ mm voraus, so erhält man daher die erforderliche Breite

$$b = \frac{2083}{16} = 130 \text{ mm}$$

(s. über gewalzte I-Träger auch §. 45).

4. Wenn auf einer Brücke die Eisenbahnschwellen auf sogenannten Schwellenträgern A, B, Fig. 134, aufruhen, deren Abstand 2 m beträgt, wie stark wird man die 0,25 m breiten eichenen Schwellen zu machen haben, wenn die größte Belastung einer Schwelle durch darüber stehende Triebräder einer Locomotive von je 7000 kg Gewicht ausgeübt wird, und die Entfernung der Schienen von Mitte zu Mitte 1,5 m beträgt? Hier hat man, entsprechend der unter (9) angegebenen Belastungsart $l_1 = 1,5$ und $l_2 = 0,25$ m, daher

Fig. 134.



$$M_{max} = K\,l_2 = 7000 \,.\, 0,25 = 1750 \text{ mkg},$$

somit folgt bei einer zulässigen Spannung $s = 0,8$ kg die gesuchte Höhe h aus $0,8\,\frac{1}{6}\,250\,h^2 = 1750 \,.\, 1000$ zu

$$h = \sqrt{\frac{6 \,.\, 1750\,000}{0,8 \,.\, 250}} = \sqrt{52\,500} = 229 \text{ mm} = rot\ 230 \text{ mm}.$$

Mit einem Elasticitätsmodul $E = 1200$ erhält man die Durchbiegung in der Mitte der Schwelle

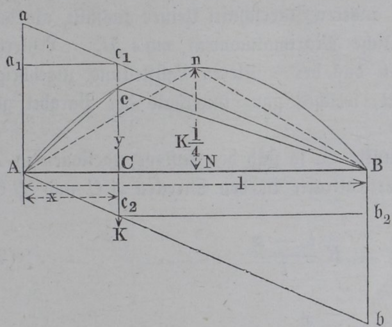
$$f = \frac{K\,l_2}{T\,E}\left(\frac{l_1^2}{8} + \frac{l_1\,l_2}{2} + \frac{l_2^2}{3}\right) = \frac{7000 \,.\, 250}{\frac{1}{12}\,250 \,.\, 230^3 \,.\, 1200}\left(\frac{1500^2}{8} + \frac{1500 \,.\, 250}{2} + \frac{250^2}{3}\right)$$

$$= \frac{0,07}{23^3}\,489\,580 = 2,8 \text{ mm}.$$

§. 36. **Bewegliche Belastung.** Die vorstehend gemachten Angaben über die Größe der Momente und Schubkräfte von Balken beruhen auf der Annahme einer *ruhenden* Belastung. Bei sehr vielen Ausführungen, so insbesondere bei allen Brückenträgern, kommt indessen der Fall vor, daß gewisse Belastungen über den Balken in seiner Längsrichtung *verschoben* werden, und es ist leicht ersichtlich, daß mit einer solchen Verschiebung der Belastung die Größe der Biegungsmomente sowie der Scheerkräfte für jeden Punkt des

Balkens einer Veränderung unterworfen sein muß. Es ist daher, behufs der Herstellung einer stabilen Construction erforderlich, für jeden Querschnitt des Balkens diejenige Laststellung zu kennen, welche für diesen Querschnitt die ungünstigste Beanspruchung, d. h. den größtmöglichen Werth des Momentes M und der Schubkraft V hervorruft.

Fig. 135.



Es sei zu dem Ende wieder AB, Fig. 135, ein auf zwei Stützen A und B frei aufruhender Balken, auf welchen in C, im Abstande x von A, die concentrirte Last K einwirkt. Dieselbe erzeugt in C das Biegungsmoment

$$M_c = K\frac{AC.BC}{AB}$$

$$= K\frac{x(l-x)}{l}, \quad (1)$$

und man erhält, wenn man diese Größe gleich Cc aufträgt, in dem Dreiecke AcB die Momentenfläche des Balkens für diese Belastung. Es ist klar, daß für diese Belastung das größte Moment in der Verticalebene durch C auftritt, in welcher die Kraft wirkt, und da die getroffene Wahl des Kraftangriffes C beliebig ist, so wird die obige Bemerkung für jede Lage der Kraft K gelten, d. h. es wird bei einer Verschiebung der Belastung K das größte zugehörige Biegungsmoment immer in demjenigen Querschnitte auftreten, in welchem die Kraft angreift. Selbstredend ist der Werth dieses größten Momentes

$$M = K\frac{x(l-x)}{l}$$

mit der Verschiebung der Last veränderlich, und man erkennt aus der vorstehenden Gleichung

$$M = y = Kx - \frac{K}{l}x^2,$$

daß bei der Verschiebung der Last von A nach B der Endpunkt c der das Moment darstellenden Ordinate Cc eine Parabel AcB beschreibt, deren Scheitel in der Mitte N zwischen A und B, also für $x = \frac{l}{2}$ die Ordinate

$$M_n = K\frac{l}{4} \text{ hat.}$$

Zeichnet man diese Parabel AnB, so erhält man für jeden beliebigen Punkt C mit der Abscisse x in der Ordinate y das Maß für das größtmögliche durch K in C hervorgerufene Moment, welches mit $max\,M_x$ bezeichnet sein mag. Es folgt auch, daß in der Mitte N das absolut größte Moment $max\,M$ eintritt, welches die Last K überhaupt in dem Balken erzeugt, und zwar bei ihrer mittleren Stellung, bei welcher Stellung jedoch das Biegungsmoment für jeden anderen Querschnitt kleiner ausfällt, als das diesem Querschnitte eigenthümliche Maximalmoment $max\,M_x$. Letzteres erkennt man sofort, wenn man das der mittleren Laststellung zugehörige Momentendreieck $A\,n\,B$ zeichnet, welches ganz innerhalb der Parabel gelegen ist.

Wirkt die Last K in dem Punkte C, so sind die Auflagerreactionen in A und B und daher auch die Verticalkräfte in den Strecken $A\,C$ und $B\,C$, bezw. durch

$$R_a = A\,\mathfrak{a}_1 = K\,\frac{l - x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und

$$R_b = B\,\mathfrak{b}_2 = K\,\frac{x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

gegeben. Trägt man daher in A und B die Strecken $A\,\mathfrak{a}$ und $B\,\mathfrak{b}$ nach dem Kräftemaßstabe gleich K auf, und vervollständigt das Parallelogramm $A\,\mathfrak{a}\,B\,\mathfrak{b}$, so erhält man für irgend eine Stellung der Kraft K in C durch die beiden Abschnitte $C\,\mathfrak{c}_1$ und $C\,\mathfrak{c}_2$ der Kraftrichtung zwischen der Axe $A\,B$ und den beiden geneigten Parallelogrammseiten die Größen der Schubkräfte für die Balkenstrecken beiderseits von K, denn es ist alsdann:

$$C\,\mathfrak{c}_1 = K\,\frac{l - x}{l} = R_a$$

und

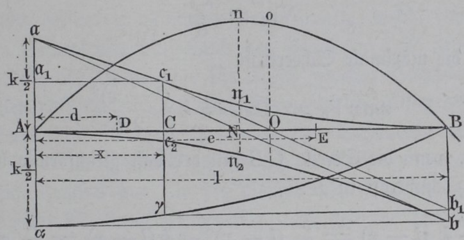
$$-\,C\,\mathfrak{c}_2 = K\,\frac{x}{l} = R_b.$$

Die beiden Geraden $A\,\mathfrak{b}$ und $B\,\mathfrak{a}$ geben daher über die Schubkraft im Balken für jede beliebige Stellung der Last Aufschluß.

Setzt man ferner voraus, daß die bewegliche Last nicht in einem Punkte concentrirt, sondern der Länge nach gleichmäßig vertheilt und pro Längeneinheit gleich k sei, wie dies etwa für einen Eisenbahnzug angenommen werden kann, welcher über eine Brücke fährt, so ist leicht zu ersehen, daß das größte Biegungsmoment für irgend welchen Querschnitt C, Fig. 136, sich dann einstellt, wenn der Träger seiner ganzen Länge l nach mit der gleichmäßigen Last bedeckt ist. Denn wo man sich auch ein Belastungselement $k\,\partial x$ denken mag, in D oder E, immer wird dasselbe, wie jede isolirte Belastung, in dem Querschnitte C ein positives

Biegungsmoment hervorrufen, und daher wird das größte Moment in C sowie in jedem anderen Querschnitte erzeugt werden, sobald sämmtliche Balkenelemente belastet sind. Daher ergiebt die Parabel AnB mit der Scheitelordinate $Nn = k\frac{l^2}{8}$ in der Mitte, welche als Momentenfläche für eine ruhende gleichmäßig vertheilte Last kl gilt, in allen ihren Ordi-

Fig. 136.



naten auch das Maximum der Momente, die in den zugehörigen Querschnitten durch die bewegliche Belastung k erzeugt werden können.

Anders verhält es sich mit den größten Werthen der Scheerkraft. Man erkennt nämlich, daß in Betreff irgend eines Punktes, wie C, jede Belastung eines Elementes zwischen C und B, z. B. in E, einen Zuwachs der Reaction R_a und somit der Scheerkraft in C hervorbringt, während die Belastung eines Elementes, wie D, zwischen C und A die Schubkraft in C vermindert. Durch eine derartige elementare Belastung $k\partial x$ in E wird nämlich die Reaction R_a, also auch die Scheerkraft in C um

$$k\partial x\frac{l-e}{l},$$

also um eine positive Größe vermehrt, während diese Belastung in D einen Beitrag zur Scheerkraft in C von

$$k\partial x\frac{l-d}{l} - k\partial x = -k\partial x\frac{d}{l},$$

also eine negative Größe liefert. Daraus geht hervor, daß man in C die größte positive Schubkraft $max\,V_c$ erhält, wenn die Strecke $l - x$ von C bis B mit der Last bedeckt ist. Die Größe dieses Maximums ergiebt sich dann zu

$$R_a = k(l-x)\frac{l-x}{2l} = \frac{k}{2l}(l-x)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Denkt man sich diese Werthe für alle Querschnitte berechnet und nach dem Kräftemaßstabe als Ordinaten, wie $C\mathfrak{c}_1$, in C aufgetragen, so erhält man für die Maxima der positiven Scheerkräfte als Begrenzungslinie die Parabel $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}_1 B$ mit verticaler Axe, deren Scheitel in B liegt, und deren Ordinate in A für $x = 0$ zu

$$V_a = \frac{k\,l}{2}$$

sich bestimmt. Die Schubkraft in der Mitte ist

$$N\mathfrak{n}_1 = \frac{k\,l}{8}.$$

Wenn in C die maximale Scheerkraft

$$max\,V_c = C\mathfrak{c}_1 = k\,\frac{(l-x)^2}{2\,l}$$

auftritt, d. h. wenn die Strecke CB mit der Last gleichförmig bedeckt ist, so hat man die Schubkraft in B:

$$R_b = R_a - k\,(l-x) = \frac{k}{2l}\,(l-x)^2 - k\,(l-x) = \frac{k}{2l}\,x^2 - \frac{kl}{2} \cdot (5)$$

Wenn man daher diese (negative) Größe in B abwärts gleich $B\mathfrak{b}_1$ anträgt, $\mathfrak{b}_1$ mit $\mathfrak{c}_1$ durch eine Gerade verbindet, und durch $\mathfrak{c}_1$ die Horizontale $\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1$ zieht, so erhält man, wie leicht ersichtlich ist, in der Fläche $A\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{c}_1\,O\,\mathfrak{b}_1\,B$ das Diagramm für die Scheerkräfte des Balkens in dem betrachteten Zustande einer Belastung der Strecke $B\,C$. Der Schnittpunkt O, in welchem hierbei die Schubkraft gleich Null ist, legt dann den Querschnitt fest, in welchem, gleichfalls bei der gedachten Belastung, das größte Biegungsmoment auftritt, welches letztere jedoch nach dem Vorstehenden denjenigen Werth $O\,o$ noch nicht erreicht hat, den das Biegungsmoment in O im ungünstigsten Falle, d. h. bei voller Belastung des Balkens erreichen kann.

Es mag bemerkt werden, daß, wenn man die Größe der Schubkraft in B

$$B\,\mathfrak{b}_1 = \frac{k}{2l}\,x^2 - \frac{kl}{2}$$

in C abwärts gleich $C\gamma$ anträgt, und diese Construction für alle Querschnitte ausgeführt denkt, die so erhaltenen Punkte γ eine Parabel $\alpha\gamma B$ mit verticaler Axe festlegen, deren Scheitel α um $\frac{kl}{2}$ unter A gelegen ist, und welche Parabel dazu dienen kann, das Schubkraftdiagramm für irgend welche Belastung des Balkens zu zeichnen.

Eine ganz analoge Betrachtung, wie sie vorstehend zur Ermittelung der größten positiven, d. h. aufwärts gerichteten Scheerkraft angestellt worden ist, gilt auch hinsichtlich der größten negativen (abwärts wirkenden) Schubkraft, und man erhält dieselbe offenbar für irgend einen Querschnitt C in demjenigen Belastungszustande, in welchem die Strecke zwischen C und A mit der Belastung kx bedeckt ist. Es bedarf keines näheren Beweises, daß man durch eine derartige Betrachtung zu einer Parabel $A\,\mathrm{n}_2\,\mathrm{b}$ gelangt, welche für jeden Punkt C in ihrer Ordinate $C\,\mathrm{c}_2$ das Maximum der negativen Schubkraft des Querschnittes C ergiebt. Diese Parabel, deren Axe ebenfalls vertical ist, hat in A ihren Scheitel und ihre Ordinate in B ist gleich $B\,\mathrm{b} = k\,\frac{l}{2}$. Für diese Linie, sowie für die Verzeichnung der Schubkraftdiagramme gelten die nämlichen Bemerkungen, welche für die Maxima der positiven Scheerkräfte hinsichtlich der Parabel $\mathrm{a}\,\mathrm{n}_1\,B$ gemacht wurden. Es ist auch klar, daß, wenn man für irgend welchen Querschnitt C einmal die der größten positiven Schubkraft zukommende Belastung der Strecke BC und ein anderes Mal die der größten negativen Scheerkraft angehörige Belastung der Strecke AC voraussetzt, und die beiden Diagramme mit einander vereinigt, als Resultat das für die gleichförmig über den ganzen Balken vertheilte ruhende Belastung kl der Fig. 126 geltende Diagramm erhalten wird.

In Wirklichkeit sind die Brückenträger sowohl einer ruhenden oder permanenten Belastung durch das Eigengewicht der Construction, als auch einer beweglichen oder Verkehrsbelastung ausgesetzt. Es handelt sich daher darum, für jeden Querschnitt die ungünstigste Anstrengung zu ermitteln, welche aus diesen beiden Belastungen resultirt. Hierbei kann man in der Regel die permanente Belastung als eine gleichmäßig über die Länge vertheilte ansehen, und es möge dieselbe im Folgenden gleich p Kilogramm per Längeneinheit (1 m) angenommen werden. Die bewegliche Belastung kann entweder eine in einem Punkte concentrirte Last K sein, wie dies etwa bei einem über eine Brücke fahrenden Frachtwagen angenommen werden darf, dessen Gewicht man in seinem Schwerpunkte concentrirt denkt, oder die bewegliche Last ist ebenfalls als gleichmäßig vertheilt zu denken. Die letztere Annahme; welche z. B. für die Belastung durch ein Menschengedränge zutrifft, wird meistens auch dann zu Grunde gelegt, wenn die Verkehrslast aus einer Reihe auf einander folgender Einzellasten besteht, wie dies beispielsweise bei einem Eisenbahnzuge der Fall ist, dessen einzelne Axen ebenso vielen concentrirten Kräften entsprechen. Für diesen Fall pflegt man meistens mit Rücksicht auf das in §. 34 hierüber Gesagte die wirkliche Belastung durch den Eisenbahnzug durch eine entsprechende gleichmäßig vertheilte Last zu ersetzen, eine Annahme, die um so mehr zulässig ist, je länger der Träger in Bezug auf die Entfernung der Axen von einander ist.

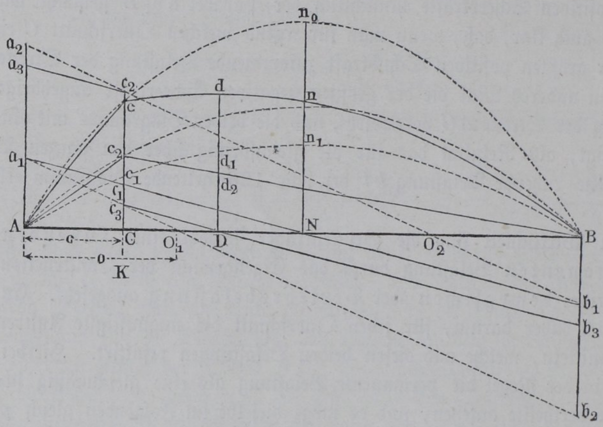
Es sei AB, Fig. 137 (a. f. S.), ein Träger von der Länge l, welcher durch das Eigengewicht der Construction mit dem Betrage pl belastet ist, so stellt nach dem Vorstehenden die Parabel $A\,n_1\,B$ die Momente und die Gerade $a_1 b_1$ die Schubkräfte für alle Querschnitte des Trägers vor, wenn

$$N n_1 = p \frac{l^2}{8} \text{ und } A a_1 = B b_1 = p \frac{l}{2}$$

ist. Denkt man sich nun die concentrirte Belastung K über A hereintretend, bis C im Abstande $AC = c$ von A bewegt, so erhält man, wenn

$$C c_2 = K \frac{c\,(l - c)}{l}$$

Fig. 137.



gemacht wird, in dem Dreiecke $A c_2 B$ das Diagramm für die durch K hervorgerufenen Momente in jedem Punkte des Trägers. Wenn man nunmehr die beiden Diagramme $A n_1 B$ und $A c_2 B$ durch Addition ihrer Ordinaten vereinigt, indem man für jeden Punkt wie C

$$C c = C c_1 + C c_2$$

macht, so liefert die entstehende Curve $A c n B$ das Diagramm für das resultirende Moment, welches in jedem Punkte durch die vorausgesetzte Belastung $p l$ und K in C erzeugt wird. Es ist leicht, nach dem Vorhergegangenen zu erkennen, daß diesem Belastungszustande auch das größte Moment $C c$ entspricht, welches bei der Ueberführung der Last in dem Querschnitte C jemals erzeugt werden kann. Wenn man daher durch A, c_2 und B die Parabel für die Maximalmomente von K zeichnet, deren Gleichung (1) nach dem Vorstehenden durch

$$y_2 = K \frac{x\,(l - x)}{l} = K x - \frac{K}{l} x^2$$

gegeben ist, so erhält man durch die Vereinigung der beiden Parabeln $A n_1 B$ und $A c_2 B$ eine neue Parabel $A n_0 B$, welche **für jeden Querschnitt das größtmögliche Moment darstellt, das in demjenigen Augenblicke auftritt, in welchem die bewegliche Last K diesen Querschnitt erreicht hat.** Diese Parabel muß daher auch den Punkt c in sich aufnehmen. Da die Ordinaten der Parabel $A n_1 B$ durch

$$y_1 = p\,\frac{l}{2}\,x - p\,\frac{x^2}{2} = \frac{p}{2}\,(lx - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ausgedrückt sind, so hat man diejenigen der resultirenden Parabel $A n_0 B$ gleich

$$y = y_1 + y_2 = \left(\frac{p}{2} + \frac{K}{l}\right)(lx - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Man erkennt hieraus, daß man für die Maximalmomente dieselben Werthe erhält, welche sich für einen Träger ergeben würden, welcher einer gleichmäßig vertheilten Belastung von der Größe

$$q = p + 2\,\frac{K}{l}$$

pro Längeneinheit ausgesetzt wäre.

Ebenso findet sich die Schubkraft in C als die algebraische Summe der beiden Schubkraftcomponenten, welche durch die gleichmäßig vertheilte Belastung $p\,l$ und durch die Einzelkraft K erzeugt werden. Diese Componenten sind bekanntlich durch

$$V_1 = p\left(\frac{l}{2} - c\right) \text{ und } V_2 = K\,\frac{l - c}{l}$$

ausgedrückt. Macht man daher $A\mathfrak{a}_1 = B\mathfrak{b}_1 = p\,\frac{l}{2}$ und zieht $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, so erhält man in $C\mathfrak{c}_1$ das Maß für

$$V_1 = p\left(\frac{l}{2} - c\right).$$

Wenn man ferner $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 = K$ anträgt, und $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1$ sowie $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2$ zieht, so erhält man in $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$ die Reaction in A oder die Schubkraft

$$V_2 = K\,\frac{l - c}{l},$$

welche durch K in der Strecke AC erzeugt wird, so daß $C\mathfrak{c}_2 = V$ die ganze Scheerkraft in C bedeutet.

Offenbar wird auch diese Scheerkraft für C zu einem Maximum, wenn die Kraft K in diesem Querschnitte wirkt. Da diese Betrachtung für jeden anderen Querschnitt ebenso gilt, wie für denjenigen durch C, so kann man das Viereck $A\,a_2\,b_1\,B$ als das Diagramm für die Schubkräfte ansehen, welche bei einer Bewegung der Last K über den Träger in der links von der Last befindlichen Strecke auftreten. Es ist ebenso zu erkennen, daß die Gerade $a_1\,b_2$ in gleicher Art die Schubkraft in dem rechts von K befindlichen Balkentheile angiebt. Zieht man ferner durch c_2 und c_3 zu $a_1\,b_1$ die Parallelen $c_2\,a_3$ und $c_3\,b_3$, so erhält man durch $A\,a_3\,c_2\,c_3\,b_3\,B$ die graphische Darstellung der Schubkräfte in jedem Querschnitte für den Fall, daß die Last K bis zu dem Punkte C vorgerückt ist. Man erkennt hieraus, daß in dem Durchschnittspunkte D dieses Diagramms mit der Axe AB die Schubkraft gleich Null ist, und daß diesem Querschnitte D daher das Maximalmoment Dd zukommt, welches durch die vorausgesetzte Belastung in dem Balken hervorgerufen wird. Eine Betrachtung der Figur lehrt nun ohne Weiteres Folgendes. Wenn die Last K von links kommend den Stützpunkt A erreicht, findet sich das größte Biegungsmoment Nn_1 in der Mitte N des Balkens. Bei weiterem Vorrücken der Last K nach rechts geht der Punkt, in welchem das größte Moment sich einstellt, der Last K entgegen, und ist z. B. nach D gelangt, sobald K nach C getreten ist, bis dieser Punkt mit der Last in O_1 zusammenfällt. Bei weiterer Bewegung der Last nach rechts fällt der Punkt des Maximalmomentes stets mit dem Angriffspunkte von K zusammen, bis beide durch die Mitte N hindurch nach dem Punkte O_2 gelangt sind. Wird die Last noch weiter bewegt, so kehrt der Punkt des Maximalmomentes seine Bewegung um und erreicht die Mitte N, sobald K den jenseitigen Stützpunkt B erreicht hat. Die Aehnlichkeit dieses Vorganges mit dem in §. 26 bei der unsymmetrischen Belastung der Gewölbe untersuchten fällt in die Augen. Es ist auch aus der Figur leicht die Entfernung $A\,O_1 = o$ des Punktes O_1 zu bestimmen, bis zu welchem die Verschiebung des Maximalmomentes nach jeder Seite der Mitte stattfindet, wenn man die beiden Schubkräfte einander gleichsetzt, die in diesem Punkte durch die gleichmäßig vertheilte Belastung $p\,l$ und durch die Einzellast K in O_1 erzeugt werden. Diese Gleichsetzung liefert:

$$p\left(\frac{l}{2} - o\right) = K\,\frac{o}{l},$$

woraus

$$o = \frac{1}{2}\,\frac{p\,l^2}{K + p\,l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

folgt. Dieses Maximalmoment in O ist dann

$$M_0 = \frac{p}{2}\,(l\,o - o^2) + K\,o\,\frac{l - o}{l} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Ebenso findet sich für die Stellung der Kraft K in C der Abstand $AD = d$ für den Querschnitt des Maximalmomentes durch

$$p\left(\frac{l}{2}-d\right)=K\frac{c}{l}$$

zu

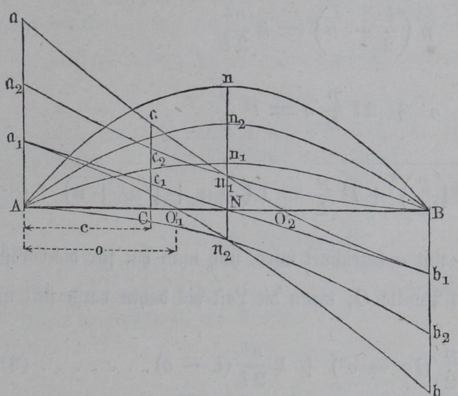
$$d=\frac{l}{2}-\frac{K}{pl}c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

welche Gleichung nach dem Vorstehenden nur für eine Größe von c gilt, die kleiner als o ist. Das Moment an dieser Stelle, im Abstande d von A, ist dann ausgedrückt durch

$$M_d=\frac{p}{2}(ld-d^2)+Kc\frac{l-d}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Wenn die bewegliche Last ebenfalls als eine gleichmäßig über die Länge vertheilte von der Größe k pro Längeneinheit anzusehen ist, so folgt aus dem Vorstehenden ohne Weiteres, daß in jedem Querschnitte des Balkens das größte Moment eintritt, sobald die bewegliche Last die ganze Trägerlänge bedeckt. Wenn man daher in Fig. 138 die beiden Parabeln $A n_1 B$ und $A n_2 B$, deren Pfeilhöhen bezw. durch

Fig. 138.



$$N n_1=\frac{p\,l^2}{8}$$

und

$$N n_2=\frac{k\,l^2}{8}$$

gegeben sind, vereinigt, so erhält man in der resultirenden Parabel AnB, deren Pfeilhöhe $Nn=(p+k)\frac{l^2}{8}$ ist, die Curve für das Maximalmoment in jedem Querschnitte. Die größte Schubkraft in irgend einem Querschnitte C wird dagegen wieder stattfinden, wenn die Strecke BC mit der Last $k\,(l-c)$ bedeckt ist, und zwar erhält man die Curve $a\,n_1\,O_2\,b_1$ für die größten Schubkräfte durch Vereinigung der Geraden $a_1\,b_1$, welche dem Eigengewichte $p\,l$ entspricht, mit der Parabel $a_2\,n_1\,B$, welche nach dem Vorstehenden die größten durch die bewegliche Last erzeugten Schubkräfte ergiebt, und deren Scheitel in B liegt, während die Ordinate in A zu

$A\,\mathfrak{a}_2 = k\,\frac{l}{2}$ gefunden wurde. Die Schubkraft in C bestimmt sich nach (4) zu

$$V = C\,\mathfrak{c} = C\,\mathfrak{c}_1 + C\,\mathfrak{c}_2 = p\left(\frac{l}{2} - c\right) + k\,\frac{(l-c)^2}{2\,l} \quad . . (12)$$

In gleicher Weise erhält man für die größten negativen Schubkräfte die Curve $\mathfrak{a}_1\,O_1\,\mathfrak{n}_2\,\mathfrak{b}$ durch Vereinigung der Geraden $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$ mit der Parabel $A\,\mathfrak{n}_2\,\mathfrak{b}_2$.

In Betreff der Lage des Maximalmomentes für eine bestimmte Laststellung und in Bezug auf die Verschiebung desselben aus der Mitte um $N\,O_1 = N\,O_2$, bei einer Ueberführung der Belastung über den Träger gelten ganz ähnliche Betrachtungen, wie sie zuvor für eine Einzellast angeführt worden sind. Die Größe dieser Verschiebung nach jeder Seite $N\,O_1 = N\,O_2 = \frac{l}{2} - o$ bestimmt sich wieder durch Gleichsetzung der betreffenden entgegengesetzten Schubkräfte aus der Gleichung

$$p\left(\frac{l}{2} - o\right) = k\,\frac{o^2}{2\,l}$$

oder

$$o^2 + 2\,l\,\frac{p}{k}\,o = l^2\,\frac{p}{k}$$

zu

$$o = -\,l\,\frac{p}{k} + \sqrt{l^2\left(\frac{p}{k}\right)^2 + l^2\,\frac{p}{k}} = l\left(-n + \sqrt{n^2 + n}\right) \quad . (8^a)$$

wenn das Verhältniß $\frac{p}{k}$ mit n bezeichnet wird, und man hat für die Größe des Momentes in diesem Punkte O, wenn die Last bis dahin vorgerückt ist, ähnlich wie oben:

$$M_0 = \frac{p}{2}\,(l\,o - o^2) + k\,\frac{o^2}{2\,l}\,(l - o) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9^a)$$

Innerhalb der Strecke $O_1\,O_2$, in welcher bei der Bewegung der Last das Maximalmoment in der vorgedachten Art sich verschiebt, fällt die verticale Scheerkraft je nach der Stellung der Last bald positiv bald negativ aus, während in den Querschnitten der Strecke $O_1\,A$ stets nur positive (aufwärts gerichtete) und in denjenigen der Strecke $O_2\,B$ stets nur negative (abwärts wirkende) Schubkräfte auf das rechts von der Querschnittsebene gelegene Balkenstück wirken. In welcher Weise diese Eigenschaft auf die Construction des Balkens innerhalb dieser Strecke $O_1\,O_2$ von Einfluß ist, wird sich später aus der Betrachtung der Fachwerksträger ergeben.

Beispiel. Nimmt man für eine eingeleisige Eisenbahnbrücke von $l = 32$ m das Eigengewicht der Brücke nach Schwedler (s. §. 34) zu $30\,l + 800 = 1760$ kg, also für jeden Träger 880 oder rund 900 kg pro Meter an, und setzt eine Verkehrslast der Brücke von 5000 kg, also für jeden Träger $k = 2500$ kg voraus, so erhält man nach dem Vorstehenden folgende Resultate:

Das absolut größte Moment, welches sich in der Mitte des Trägers bei dessen voller Belastung einstellt, ist

$$M_{max} = (p + k)\,\frac{l^2}{8} = (0{,}9 + 2{,}5)\,\frac{32^2}{8} = 435{,}2 \text{ Metertonnen,}$$

und die größte Scheerkraft beträgt in diesem Falle über den Stützen

$$V_{max} = \pm\,(p + k)\,\frac{l}{2} = 3{,}4\,.\,16 = 54{,}4 \text{ Tonnen.}$$

Die Entfernung o, bis auf welche sich das Maximalmoment beiderseits den Stützen in Folge der Lastbewegung nähert, beträgt nach (8^a):

$$o = 32\left[-\frac{0{,}9}{2{,}5} + \sqrt{\left(\frac{0{,}9}{2{,}5}\right)^2 + \frac{0{,}9}{2{,}5}}\right] = 10{,}85 \text{ m.}$$

Die Verschiebung des größten Momentes beträgt daher nach jeder Seite von der Mitte

$$\frac{l}{2} - o = 16 - 10{,}85 = 5{,}15 \text{ m.}$$

Ist die Last um die Länge $o = 10{,}85$ m über ein Auflager vorgerückt, so hat das Moment in dem Querschnitte an dieser Stelle nach (9^a) den Werth:

$$M_0 = \frac{p}{2}(l\,o - o^2) + k\,\frac{o^2}{2\,l}(l - o) = 0{,}45\,(32\,.\,10{,}85 - 10{,}85^2) + 2{,}5\,\frac{10{,}85^2}{64}\,21{,}15$$
$$= 103{,}275 + 97{,}237 = 200{,}5 \text{ Metertonnen.}$$

Dieser Werth ist natürlich kleiner als das dem Punkte O zukommende Maximalmoment bei voller Belastung des Trägers

$$max\ M_0 = \frac{p + k}{2}\,(l\,o - o^2) = 1{,}7\,(32.10{,}85 - 10{,}85^2)$$
$$= 390 \text{ Metertonnen.}$$

Die Schubkraft des Trägers in der Mitte, welche bei voller Belastung zu Null wird, nimmt dagegen für den Fall, daß die Last um die Größe o über eine Stütze vorgerückt ist, den Werth

$$V = \pm\,k\,\frac{o^2}{2\,l} = 2{,}5\,\frac{10{,}85^2}{64} = 4{,}6 \text{ Tonnen}$$

an. Die größte Schubkraft dagegen wird in der Mitte eintreten, wenn eine Hälfte der Brücke mit der Last bedeckt ist, und man hat hierfür nach (4):

$$V_{max} = \frac{k\,l}{8} = 2{,}5\,.\,4 = 10 \text{ Tonnen u. s. w.}$$

Balken auf mehreren Stützen. Wenn ein Balken auf mehr als zwei Stützen ruht, so sind die Auflagerreactionen in den einzelnen Stützpunkten aus den Bedingungen des Gleichgewichtes nicht ohne Weiteres zu ermitteln, denn diese beiden Bedingungen für ein System paralleler Kräfte $\Sigma P = 0$ und $\Sigma M = 0$ gestatten nur die Ermittelung von zwei unbekannten Größen, genügen also zur Bestimmung der Auflagerreactionen §. 37.