groß ausfallen und außer von der Größe und Vertheilung der concentrirten Lasten des Eisenbahnzuges wesentlich noch von der Spannweite l der Träger abhängig sind. Hinsichtlich der weiteren Ausführung dieser Untersuchungen muß auf die speciellen Werke über Brückenbau verwiesen werden, hier mögen nur die Näherungsformeln angeführt werden, welche von Winkler*) in Bezug auf einen Eisenbahnzug aufgestellt sind, welcher sich zusammensetzt aus drei hinter einander folgenden Locomotiven von je 39 Tonnen Gewicht, deren Tender je 27 Tonnen wiegen, und auf welche Lastwaggons von je 16 Tonnen folgen:

Tabelle der gleichförmig vertheilten Belastungen in Tonnen für 1 laufenden Meter eines Geleises.

für l = 10 bis 50 m	für l = 50 bis 100 m	für l = 100 bis 150 m
$k_g = 3{,}98 + \frac{22}{l}$ Tonn.	$k_g = 3{,}07 + \frac{67}{l}$ Tonn.	$k_g = 2{,}67 + \frac{107}{l}$ Tonn.
$k_f = 4{,}30 + \frac{31}{l}$ Tonn.	$k_f = 3{,}47 + \frac{72}{l}$ Tonn.	$k_f = 3{,}27 + \frac{92}{l}$ Tonn.

Der Balken. Zu den in der Bautechnik am häufigsten angewendeten Constructionstheilen gehört der an zwei Stellen unterstützte oder befestigte horizontale Balken, welcher zum Tragen auf ihm ruhender Lasten bestimmt ist. Durch die letzteren sowie durch sein Eigengewicht wird der Balken auf Biegung in Anspruch genommen, und außerdem werden in allen Punkten im Innern desselben gewisse horizontale und verticale scheerende Kräfte hervorgerufen, denen das Material mit entsprechenden Schubspannungen entgegenwirken muß. Die Größe und Richtung dieser Anstrengungen an verschiedenen Stellen ist außer von der Größe und Vertheilung der Lasten wesentlich von der Art der Unterstützung abhängig, da in jedem Falle von den Festpunkten Reactionen ausgeübt werden müssen, die mit den belastenden Einwirkungen im Gleichgewichte stehen. In Thl. I sind diese Einwirkungen auf den Balken näher untersucht worden, und es genügt daher hier, die verschiedenen in der Praxis vorkommenden Fälle der Uebersichtlichkeit wegen zusammenzustellen. In Bezug auf die Biegungsverhältnisse wurde in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 2 gefunden, daß in irgend §. 35.

*) Winkler, Theorie der Brücken, Heft I, Wien 1873.

einem Querschnitte des Balkens, für welchen das Moment der äußeren Kräfte durch M ausgedrückt ist, Biegungsspannungen eintreten, welche durch die Beziehung

$$M = s\frac{T}{e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I}$$

gegeben sind, wenn unter T das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die neutrale Axe desselben und unter s die Spannung verstanden wird, welcher die äußerste in der Entfernung e von der neutralen Axe befindliche Faserschicht pro Flächeneinheit ausgesetzt ist. Diese für jeden gebogenen Balken ganz allgemein geltende Gleichung soll auch im Folgenden zu Grunde gelegt werden, und zwar derart, daß unter der größten Spannung s der für das Material des Balkens höchstens zulässige Betrag der specifischen Faserspannung verstanden wird. Dabei wird zunächst, der Eigenschaft des Holzes und Schmiedeeisens entsprechend, dieser Betrag s für Druck- und Zugwirkungen als gleich groß vorausgesetzt, indem das hiervon abweichende Verhalten des Gußeisens, welches gegen Druckkräfte größeren Widerstand auszuüben vermag als gegen Zug, besonders besprochen werden soll.

Jede Biegung eines Balkens ist gleichbedeutend mit einer Formänderung der ursprünglichen, zunächst als gerade Linie vorausgesetzten geometrischen Axe des Balkens, welche letztere bei der Biegung in die sogenannte elastische Linie übergeht. In Bezug auf diese Linie wurde in Thl. I, §. 220 das ebenfalls ganz allgemein gültige Gesetz aufgestellt, welches durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{TE}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{II}$$

ausgedrückt ist, worin E den Elasticitätsmodul des Materials und ϱ den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie an der Stelle bedeutet, für welche das Moment der äußeren Kräfte gleich M ist. Diese Gleichung läßt sich auch für rechtwinkelige Coordinaten x, y der elastischen Linie, wenn annähernd $\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ gesetzt wird, durch

$$M = TE\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{II^a}$$

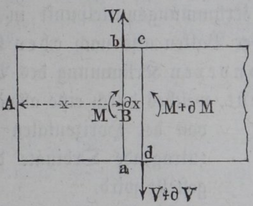
wiedergeben.

Was die verticale Schubkraft V für irgend eine Stelle des Balkens betrifft, so ist dieselbe immer gleich der algebraischen Summe aller der Verticalkräfte, die Stützreactionen inbegriffen, welche auf den Balken von einem Ende bis zu der betrachteten Stelle einwirken, und es wurde früher ebenfalls gefunden, daß diese Kraft für jede Stelle durch die Beziehung

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{III}$$

gegeben ist, vorausgesetzt, daß die horizontale Mittellinie des Balkens als X-Axe angenommen wird. Man überzeugt sich hiervon auch leicht durch Fig. 116, wenn man im Abstande $AB = x$ von dem Coordinatenanfange ein Balkenelement $abcd$ herausgeschnitten denkt, dessen Länge $ad = bc = \partial x$ ist. Auf dieses Element wirken in den beiden Schnittflächen ab und cd die Drehungsmomente M und $M + \partial M$, sowie die Schubkräfte V und bezw. $V + \partial V$, und man hat für das Gleichgewicht dieses Elementes daher die Gleichung:

Fig. 116.



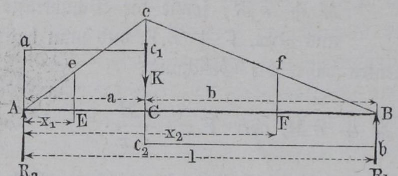
$$M + V \partial x = M + \partial M, \text{ oder } V = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Daraus geht hervor, daß in denjenigen Querschnitten, für welche die Schubkraft V gleich Null wird, das Moment M ein Maximum ist, eine Beziehung, welche häufig zur schnellen Ermittelung derjenigen Stelle benutzt werden kann, für welche das Biegungsmoment seinen größten Werth annimmt.

Die vorstehenden Gleichungen I bis III bilden die Grundlage der folgenden Ermittelungen, welche die Bestimmung der Festigkeit von Balken ꝛc., d. h. die Feststellung der denselben zu gebenden Dimensionen, zum Zwecke haben. Kennt man nämlich für einen Balken aus bestimmtem Materiale, für welches die Größen E und s erfahrungsgemäß feststehen, für irgend welche Stelle das Moment M und die Schubkraft V, so lassen sich hieraus, wie aus dem Folgenden sich ergeben wird, die erforderlichen Querschnittsdimensionen des Balkens an der betrachteten Stelle ermitteln.

Es ist daher für die folgenden Entwickelungen zunächst von Wichtigkeit, für jeden Punkt eines Balkens, der unter der Einwirkung bekannter Kräfte steht, das Biegungsmoment M sowie die verticale Scheerkraft V zu kennen. Hierzu eignet sich der Anschaulichkeit wegen insbesondere die graphische Darstellung dieser Größen durch Diagramme, welche in folgender Weise entworfen werden können. Ueber der ursprünglich geraden Balkenaxe als X-Axe sollen die Momente M sowie die Verticalkräfte V als Ordinaten y aufgetragen werden, derart, daß die Curve, welche die Endpunkte der Ordinaten verbindet, von der Größe und Veränderlichkeit der Momente bezw. Verticalkräfte ein Bild giebt. Als positive Richtung der X- und Y-Axe sollen, wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird, die Richtungen von links nach rechts und von unten nach oben vorausgesetzt werden, und es sollen die aufwärts wirkenden Schubkräfte positive heißen, also von der X=Axe nach oben angetragen werden. Ebenso sollen Momente als positive betrachtet werden und ihre Ordinaten nach oben hin angetragen werden, wenn sie dem Balken eine positive Krümmung, d. h. eine solche zu ertheilen bestrebt sind, zufolge deren der Krümmungsmittelpunkt in der Richtung der positiven Y=Axe gelegen ist, der Balken also nach oben hin concav gebogen wird. Einer nach oben convexen Krümmung des Balkens entspricht daher ein negatives Moment, welches durch eine abwärts von der Horizontalen anzutragende Ordinate dargestellt wird.

Fig. 117.



Die Verzeichnung dieser Diagramme verursacht in dem einfachen Falle eines Balkens auf zwei Stützen A und B, Fig. 117, keine Schwierigkeit.

Ist der Balken von der Länge $AB = l$ in C, im Abstande a von A und b von B durch eine Kraft K belastet, so sind die Auflagerreactionen in A und B bezw. durch

$$R_a = K\frac{b}{l} \text{ und } R_b = K\frac{a}{l}$$

gegeben, und man hat für das Moment in C den Werth

$$M_c = R_a\,a = R_b\,b = K\frac{a\,b}{l},$$

während in irgend einem Punkte E oder F im Abstande x_1 bezw. x_2 von A das Moment durch

$$M_e = R_a\,x_1 = K\frac{b}{l}\,x_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und

$$M_f = R_a\,x_2 - K(x_2 - a) = K\frac{a}{l}(l - x_2) \quad . \quad . \quad (2)$$

ausgedrückt ist. Ueberall ist das Moment positiv, und wenn man daher nach einem beliebig zu wählenden Maßstabe für die Momente (1 Millimeter $= \mu$ Meterkilogramm) $Cc = M_c = K\frac{a\,b}{l}$ macht, so geben die geraden Linien Ac und Bc für jeden Punkt wie E und F in den Ordinaten Ee und Ff das Moment M_e bezw. M_f an.

Die Schubkraft in A ist gleich $R_a = K\,\frac{b}{l}$ und bleibt constant für die Strecke AC, wie auch aus (1) folgt, woraus

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} = K\,\frac{b}{l}$$

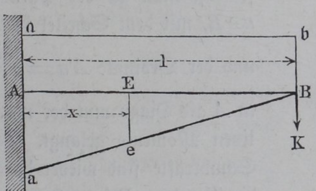
sich ergiebt. In C dagegen verändert sich V plötzlich um die abwärts gerichtete Kraft $-K$, folglich ist unmittelbar rechts neben C die Schubkraft

$$V = R_a - K = K\left(\frac{b}{l} - 1\right) = -\,K\,\frac{a}{l},$$

und sie behält diese Größe für die Strecke CB bei. Macht man daher nach einem gleichfalls beliebigen Maßstabe für die Schubkräfte (1 Millimeter $= \nu$ Kilogramm) $A\mathrm{a} = R_a = K\,\frac{b}{l}$, zieht $\mathrm{a\,c_1}$ horizontal, macht ferner $\mathrm{c_1\,c_2} = K$ und zieht $\mathrm{c_2\,b}$ horizontal, so erhält man in $A\,\mathrm{a\,c_1\,c_2\,b}$ das Diagramm für die Schubkräfte.

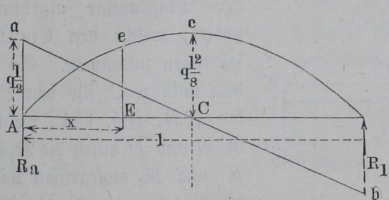
Denkt man sich den Balkentheil links der Kraft K fest eingemauert, und das Ende B, Fig. 118, durch die Kraft K belastet, so ergiebt sich ohne Weiteres das Moment in A zu $M_a = K\,l$, während es für den Punkt E im Abstande x von A durch $M_e = K\,(l - x)$ gegeben ist. Da hier der Balken convex nach oben gebogen wird, sind die Momente negativ, und man hat daher die Größe $A\,a = M_a$ nach abwärts anzutragen, um in $a\,B$ die Begrenzung der Momente zu erhalten. Die Schubkraft ist hier offenbar für jeden Querschnitt gleich K und nach oben gerichtet, daher die im Abstande $A\,\mathrm{a} = K$ von der Axe gezogene Horizontale $\mathrm{a\,b}$ das Diagramm für die Schubkräfte ergiebt.

Fig. 118.



Wenn dagegen der Balken AB, von der Länge l, Fig. 119, eine gleichmäßig über seine Länge verbreitete Last $Q = q\,l$ zu tragen hat, so sind die Reactionen der beiden Stützpunkte

Fig. 119.



$$R_a = R_b = q\,\frac{l}{2}$$

und für irgend einen Punkt E im Abstande x von A ist das Moment

$$M_x = q\,\frac{l}{2}\,x - q\,\frac{x^2}{2} = \frac{q}{2}\,(l\,x - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Man erhält daher die Darstellung der Momente durch die Parabel AcB, deren Scheitelhöhe in der Mitte C

$$M_c = Cc = q\,\frac{l^2}{8} \text{ ist.}$$

Die Schubkraft ist in A gleich $q\,\frac{l}{2}$ und in B gleich $-\,q\,\frac{l}{2}$, in der Mitte gleich Null, und die Gerade aCb giebt das Diagramm der Schubkräfte, denn aus (3) erhält man

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{q}{2}\,(l - 2\,x)$$

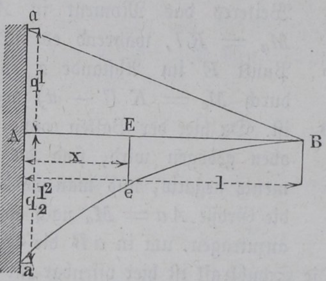
die Gleichung einer geraden Linie vom Neigungscoefficienten q.

Ebenso erhält man für ein Consol AB, Fig. 120, welches durch die gleichmäßig vertheilte Last $Q = q\,l$ angegriffen wird, in E das Moment

$$M_x = q\,\frac{(l - x)^2}{2},$$

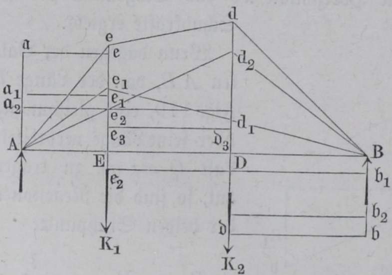
so daß man zu der Parabel aeB, mit dem Scheitel in B und der Ordinate $Aa = q\,\frac{l^2}{2}$ in A als Diagramm der negativen Momente gelangt. Die Schubkräfte sind wieder durch die Gerade aB dargestellt.

Fig. 120.



Wenn ein Balken durch mehrere Belastungen beansprucht wird, so erhält man das Diagramm, wenn man in jedem Punkte die Ordinaten der Diagramme algebraisch addirt, welche den Einzelbelastungen zukommen. So erhält man z. B. für den Balken AB, Fig. 121, welcher in E und D durch die Kräfte K_1 und K_2 angegriffen wird, die Begrenzung für die Momente in $AedB$, wenn man

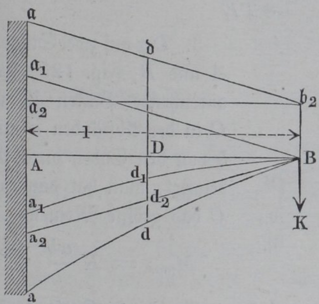
Fig. 121.



$Ee = Ee_1 + Ee_2$ und $Dd = Dd_1 + Dd_2$ macht, während die gebrochene Linie $A a e e_3 d_3 d b$ das Diagramm für die Schubkräfte ergiebt, sobald man $Aa = Aa_1 + Aa_2$, $Ee_3 = Aa_2 - Ee_2$ und $Bb = Bb_1 + Bb_2$ macht, und ae, $e_3 d_3$ sowie bd horizontal zieht.

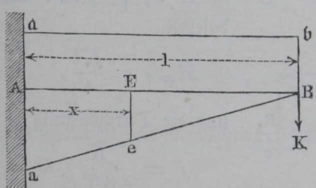
Ebenso erhält man für den Consolträger AB, Fig. 122, welcher der gleichmäßig vertheilten Belastung $Q = ql$ und der Kraft K in B unterworfen ist, in adB die resultirende Momentencurve, wenn man für jeden Punkt wie D die Ordinate Dd gleich der Summe der Ordinaten Dd_1 der Parabel und Dd_2 der geraden Linie $a_2 B$ macht, durch welche bezw. die Momente der Last Q und der Kraft K allein dargestellt sind. Ferner hat man durch b_2 eine Parallele $a b_2$ mit $a_1 B$ zu ziehen, um die Größe der Schubkraft für jeden Punkt, z. B. D in Dd, zu erhalten.

Fig. 122.



Der Uebersichtlichkeit wegen sollen im Folgenden die hauptsächlichen in der Praxis vorkommenden Belastungsarten des einfachen Balkens, wie solche in Thl. I näher besprochen sind, hier zusammengestellt, und die Größen der maximalen Biegungsmomente M_{max}, sowie der größten Durchbiegungen f dafür angegeben werden.

Fig. 123.



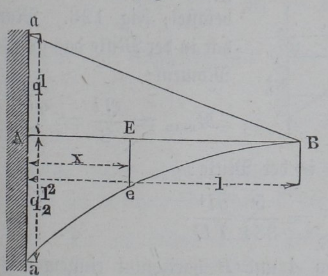
1. Der Balken ist an einem Ende A, Fig. 123, horizontal und unwandelbar befestigt, am anderen Ende B durch das Gewicht K belastet. Man hat für den Bruchquerschnitt bei A

$$M_{max} = Kl,$$

und für die Durchbiegung am freien Ende bei B:

$$f = \frac{K}{3\,TE}\, l^3.$$

Fig. 124.



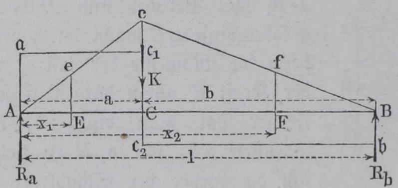
2. Derselbe Balken ist durch die gleichmäßig vertheilte Belastung $Q = ql$, Fig. 124 (a. v. S.), angegriffen. Der Bruchquerschnitt liegt auch hier an der Befestigungsstelle A, und hierfür ist

$$M_{max} = \frac{Ql}{2} = \frac{ql^2}{2},$$

während die größte Durchbiegung bei B sich bestimmt durch

$$f = \frac{Q}{8\,TE}\,l^3 = \frac{ql^4}{8\,TE}.$$

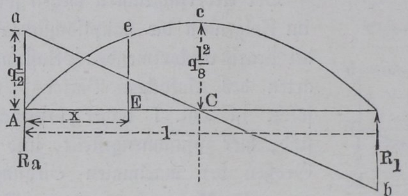
Fig. 125.



3. Der auf zwei Stützen A und B, Fig. 125, frei aufruhende Balken ist in C in den Abständen a und b von den Enden durch K belastet, man hat dann in C das größte Moment:

$$M_{max} = K\,\frac{ab}{l}.$$

Fig. 126.



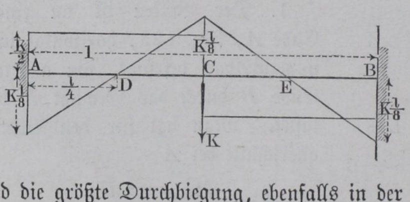
Greift die Kraft K in der Mitte an, ist also $a = b$, so erhält man daselbst

$$M_{max} = \frac{Kl}{4},$$

und die Durchbiegung:

$$f = \frac{K}{48\,TE}\,l^3.$$

Fig. 127.



4. Derselbe Balken ist gleichmäßig durch $Q = ql$ belastet, Fig. 126. Man hat in der Mitte das größte Moment:

$$M_{max} = \frac{Ql}{8} = \frac{ql^2}{8},$$

und die größte Durchbiegung, ebenfalls in der Mitte:

$$f = \frac{5}{8}\,\frac{Q}{48\,TE}\,l^3 = \frac{5}{384}\,\frac{ql^4}{TE}.$$

5. Der Balken ist an beiden Enden A und B horizontal eingemauert, Fig. 127, und in der Mitte C durch ein Gewicht K belastet. Hier werden

durch die Einmauerung an den Enden A und B negative Momente von gleicher Größe mit dem positiven Maximalmomente in der Mitte C hervorgerufen, und man hat für jeden der drei Punkte A, B und C die absolute Größe des Biegungsmomentes:

$$M_{max} = \frac{K l}{8}.$$

Die größte Durchbiegung tritt in der Mitte im Betrage ein:

$$f = \frac{1}{4} \frac{K}{48\, TE} l^3 = \frac{1}{192} \frac{K}{TE} l^3.$$

Die Schubkraft ist überall constant gleich $\pm \frac{K}{2}$. In D und E, in den Abständen $\frac{l}{4}$ von den Enden ist das Moment gleich Null, also nach Gleichung II der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie unendlich groß, d. h. diese Linie ändert in diesen Punkten (Wendepunkten) ihre Krümmung aus der positiven in die negative.

Wenn hierbei die Kraft K nicht in der Mitte des Balkens, sondern in den Abständen a von A und b von B angreift, so sind die Reactionen in A und B

$$R_a = K b^2 \frac{b + 3\, a}{l^3}$$

und

$$R_b = K a^2 \frac{a + 3\, b}{l^3};$$

und die negativen Momente daselbst:

$$M_a = K \frac{a\, b^2}{l^2}$$

und

$$M_b = K \frac{b\, a^2}{l^2},$$

während im Angriffspunkte c der Kraft ein positives Moment von der Größe

$$M_c = K \frac{2\, a^2 b^2}{l^3}$$

auftritt. Das absolut größte Biegungsmoment gehört demjenigen Stützpunkte an, welchem die Kraft K am nächsten liegt.

6. Der an beiden Enden horizontal befestigte Balken wird durch eine gleichmäßig vertheilte Belastung $Q = q\, l$ angegriffen, Fig. 128 (a. f. S.). Für die Mitte C hat man das Biegungsmoment:

$$M_c = \frac{Q\,l}{24} = \frac{q\,l^2}{24},$$

während an den Enden negative Momente von der doppelten Größe

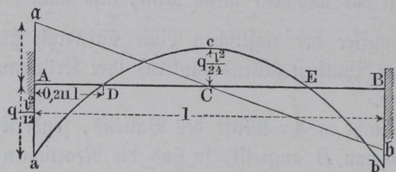
$$M_a = M_b = \frac{Q\,l}{12} = \frac{q\,l^2}{12}$$

auftreten. Die größte Durchsenkung in der Mitte beträgt

$$f = \frac{1}{8}\,\frac{Q}{48\,TE}\,l^3 = \frac{1}{384}\,\frac{q\,l^4}{TE}.$$

Die Wendepunkte D und E stehen von den Endpunkten A und B um $AD = BE = 0{,}2113\ l$ ab.

Fig. 128.

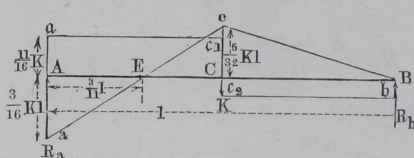


7. Der Balken AB, Fig. 129, ist einerseits in A horizontal eingeklemmt, andererseits in B frei unterstützt, und in der Mitte C durch K belastet. Hier sind die Reactionen in A und B:

$$R_a = \frac{11}{16}\,K;$$

$$R_b = \frac{5}{16}\,K.$$

Fig. 129.



Das größte (negative) Moment findet sich in A zu

$$M_a = M_{max} = \frac{3}{16}\,Kl,$$

während das Moment in der Mitte nur

$$M_c = \frac{5}{32}\,Kl$$

beträgt.

Der Inflexionspunkt E hat von A und B die bezw. Abstände

$$AE = \frac{3}{11}\,l \text{ und } BE = \frac{8}{11}\,l,$$

und die Durchsenkung in der Mitte beträgt

$$f = \frac{5}{8}\,\frac{K}{48\,TE}\,l^3 = \frac{5}{384}\,\frac{K}{TE}\,l^3.$$

Sollen die Momente in A und C ihrer absoluten Größe nach gleich werden, so hat man den Stützpunkt A um die Größe $\frac{1}{144}\,\frac{K}{TE}\,l^3$ unter die Horizontale durch B zu legen, in welchem Falle

$$M_a = M_c = \frac{1}{6}\,Kl$$

wird.

Wenn die Last K nicht in der Mitte, sondern im Abstande a von A und b von B wirkt, so hat man die Stützreaction in B:

$$R_b = K\,\frac{3\,l - a}{2\,l^3}\,a^2$$

und das Biegungsmoment in der Verticalebene der Kraft:

$$M_c = K\,\frac{3\,l - a}{2\,l^3}\,a^2\,b,$$

während in A ein negatives Moment

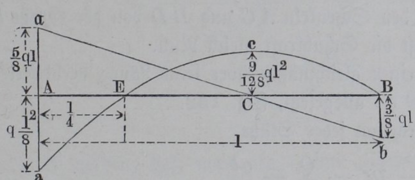
$$M_a = K\,\frac{2\,l^2 - 3\,a\,l + a^2}{2\,l^2}\,a$$

zur Wirkung kommt.

8. Derselbe Balken wird durch das gleichmäßig vertheilte Gewicht $Q = q\,l$ belastet, Fig. 130. Hier ist die Reaction auf die Stütze B durch

$$R_b = \frac{3}{8}\,Q = \frac{3}{8}\,q\,l$$

Fig. 130.



und das negative Moment an der Befestigungsstelle durch

$$M_a = \frac{1}{8}\,Q\,l = \frac{1}{8}\,q\,l^2$$

dargestellt. Der Wendepunkt E hat von A einen Abstand $AE = \frac{l}{4}$ und in der Mitte C von BE findet sich das größte positive Moment

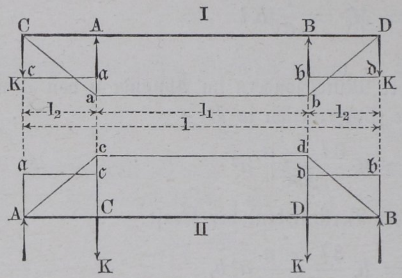
$$M_c = \frac{9}{128}\,Q\,l = \frac{9}{128}\,q\,l^2.$$

9. Der auf zwei Stützen A und B frei aufruhende Balken wird durch zwei gleiche Kräfte K in gleichen Abständen $AC = BD = l_2$ von den Stützen angegriffen, Fig. 131, I und II, a. f. S. Die Reaction jeder Stütze ist hier

$$R_a = R_b = K,$$

das Moment ist zwischen den Stützen, Fig. I, und zwischen den Kraftangriffen, Fig. II, also für das mittlere Stück von der Länge $l_1 = l - 2l_2$ von der constanten Größe Kl_2, während für jedes Ende AC und BD die unter (1.) angegebenen Formeln gelten. Für das mittlere Stück ist wegen des constanten Momentes der Krümmungshalbmesser ϱ überall von gleicher Größe

Fig. 131.



$$\varrho = \frac{TE}{Kl_2},$$

d. h. die elastische Linie dieses Stückes ist ein Kreisbogen, dessen Bogenhöhe in der Mitte durch

$$f = \frac{l_1^2}{8\varrho} = \frac{Kl_2 l_1^2}{8TE}$$

ausgedrückt ist.

Um diese Größe f erhebt sich in Fig. I die Mitte des Balkens über die Horizontale AB, während in Fig. II eine Senkung der Mitte um

$$f = \frac{Kl_2}{TE}\left(\frac{l_1^2}{8} + \frac{l_1 l_2}{2} + \frac{l_2^2}{3}\right)$$

eintritt.

Schubkräfte treten nur in den Schenkeln AC und BD von der Größe K auf, für das mittlere Stück ist die Schubkraft gleich Null.

10. Derselbe Balken ist einer gleichmäßig über seine Länge verbreiteten Last $Q = q(l_1 + 2l_2) = ql$ ausgesetzt, Fig. 132.

In diesem Falle ist die Reaction jeder Stütze

$$R_a = R_b = \frac{Q}{2} = \frac{ql}{2},$$

und das Moment über einer Stütze

$$M_a = M_b = \frac{q\,l_2^2}{2},$$

während in der Mitte E das Moment

$$M_e = q\,\frac{l_1^2 - 4\,l_2^2}{8} \text{ ist.}$$

Das Moment M_a über den Stützen wird gleich demjenigen M_e für die Mitte, wenn

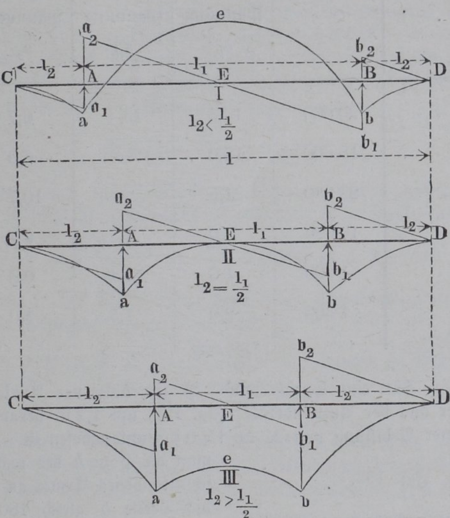
$$l_2 = l_1 \sqrt{\frac{1}{8}} = 0{,}3536\ l_1$$

ist. Die Diagramme I, II und III der Figur 132 entsprechen bezw. den Verhältnissen

$$l_2 \lesseqqgtr \frac{l_1}{2}.$$

In Betreff des Elasticitätsmoduls der verschiedenen Baumaterialien muß auf die in Thl. I enthaltenen Angaben verwiesen werden; es möge hier nur

Fig. 132.



bemerkt werden, daß man als höchste zulässige Zugspannung s_z und Druckspannung s_d für die verschiedenen hauptsächlich verwendeten Materialien etwa die folgenden Werthe*) annehmen kann:

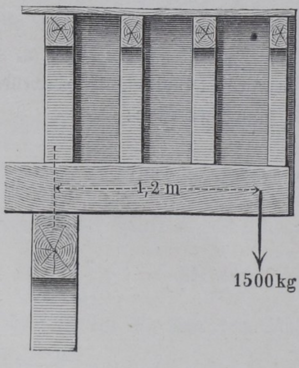
*) Vergl. Deutsches Bauhandbuch. Berlin 1874, S. 235.

Höchstens zulässige Spannung pro Quadratmillimeter in Kilogrammen.

Baumaterial	Elasticitäts-modul E	Construction mit wenig Erschütterungen (Dächer)		Constructionen mit bedeutenden Erschütterungen (Brücken)	
		Zugspannung s_z	Druckspannung s_d	Zugspannung s_z	Druckspannung s_d
Schmiedeeisen . . .	20 000	13,4	13,4	6,7	5
Eisenblech	18 000	12,0	—	6,0	—
Eisendraht	22 000	21,5	—	10,7	—
Gußeisen	10 000	4,0	7	2,7	4,8
Eichenholz . . .	1 200	1,6	1,4	0,8	0,8
Nadelholz	1 300	2,0	1,5	1,0	0,75

Beispiele: Für eine Speicherwinde ist ein hölzerner Auslegerarm anzuordnen, welcher aus der Aufwindeluke, Fig. 133, um 1,2 m herausragt und am freien Ende einer Belastung von $K = 1500$ kg unterworfen ist. Wie hoch hat man die Höhe h des rechteckigen Querschnitts dieses Armes zu machen, wenn die Breite b gleich 180 mm gewählt wird, und die specifische Faserspannung den Werth 0,8 kg nicht überschreiten soll?

Fig. 133.



Hier hat man, dem Fall (1) entsprechend:

$$M_{max} = Kl = 1500 \,.\, 1200 \text{ mmkg},$$

und da für den rechteckigen Querschnitt das Trägheitsmoment

$$T = \frac{b\,h^3}{12} \text{ und } \frac{T}{e} = \frac{b\,h^2}{6}$$

ist, so folgt mit $s = 0{,}8$ nach der Gleichung I

$$1500 \,.\, 1200 = 0{,}8\,\frac{180\,h^2}{6},$$

woraus

$$h = \sqrt{\frac{60\,000}{0,8}} = \sqrt{75\,000} = 274,$$

wofür rund 280 mm genommen werden kann. Nimmt man den Elasticitätsmodul des verwendeten Eichenholzes zu $E = 1200$, so erhält man die elastische Durchbiegung des Armes an seinem Ende zu

$$f = \frac{K}{3\,TE}\,l^3 = \frac{1500}{3\,\frac{1}{12}\,180\,.\,280^3\,.\,1200}\,1200^3 = \frac{6000\,.\,144}{18\,.\,28^3} = 2{,}2\,\mathrm{mm}.$$

2. Wie stark sind die hölzernen Etagenbalken für den Boden eines Speichers zu machen, dessen Nutzlast zu 600 kg und dessen Eigengewicht zu 250 kg pro Quadratmeter anzunehmen ist, wenn die einzelnen Balken 0,8 m von Mitte zu Mitte entfernt sind, und eine freie Länge von 5 m haben?

Die Belastung beträgt hier pro laufenden Meter $q = 0{,}8\,(250 + 600) = 680$ kg, daher hat man das größte Biegungsmoment in der Mitte, wenn die Balken an den Enden frei aufruhend angenommen werden:

$$M_{max} = \frac{680\,.\,5}{8}\,5\,\mathrm{mkg}.$$

Nimmt man eine Breite der Balken $b = 0{,}18$ m und eine zulässige Spannung $s = 1$ kg an, so folgt die erforderliche Balkenhöhe h in Millimetern aus

$$s\,\frac{b\,h^2}{6} = 1\,\frac{180}{6}\,h^2 = \frac{680\,.\,5}{8}\,5000 \text{ zu } h\ 265\,\mathrm{mm}.$$

Die Durchsenkung in der Mitte erhält man unter Zugrundelegung eines Elasticitätsmoduls für Tannenholz von $E = 1300$ zu

$$f = \frac{5}{8}\,\frac{Q}{48\,TE}\,l^3 = \frac{5}{8}\,\frac{680\,.\,5}{48\,\frac{1}{12}\,180\,.\,265^3\,.\,1300}\,5000^3 = 15{,}3\,\mathrm{mm}.$$

3. Die 3 m weite Einfahrt eines Wohnhauses soll durch einen schmiedeeisernen I-Träger überdeckt werden, dessen Dimensionen festzustellen sind. Die auf den Träger pro laufenden Meter entfallende Belastung setzt sich zusammen aus:

1) dem darauf ruhenden Mauerwerke von 10 m Höhe und durchschnittlich 2 Stein Stärke gleich 2 . 10 . 220 = 4400 kg;
2) dem Gewichte von zwei Zwischenböden von je 2,5 m Länge à 300 kg pro Quadratmeter gleich 2 . 2,5 . 300 = 1500 kg;
3) dem Gewichte der auf den Träger entfallenden Dachfläche mit 2,5 . 250 = 625 kg.

Die gesammte Belastung pro Meter beträgt $q = 6525$ kg oder für den Träger von 3 m Länge

$$Q = 3\,.\,6525 = 19\,575 = \mathit{rot}\ 20\,000\,\mathrm{kg}.$$

Wenn der Balken an seinen Enden wegen der Einmauerung als unwandelbar befestigt angesehen wird, so erhält man, entsprechend der unter (6) angeführten Belastungsart, das größte Moment an den Einmauerungsstellen:

$$M_{max} = \frac{Q\,l}{12} = \frac{20\,000\,.\,3}{12} = 5000\,\mathrm{mkg}.$$

Soll nun der gewalzte Träger eine Höhe $h = 300$ mm erhalten, und sieht man von der Tragfähigkeit der Mittelrippe ab, so kann man, unter b die Breite und unter d die Dicke jedes der beiden Flanschen verstanden, $\frac{T}{e} = h\,b\,d$ setzen (s. weiter unten §. 45), und man erhält mit $s = 8$ kg aus

$$8 \,.\, 300 \,.\, b\,d = 5000 \,.\, 1000$$

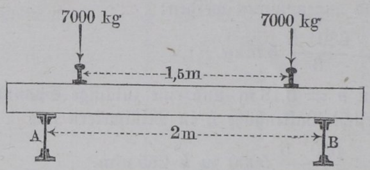
den Flanschenquerschnitt $b\,d = 2083$ qmm. Setzt man eine Dicke der Flanschen $d = 16$ mm voraus, so erhält man daher die erforderliche Breite

$$b = \frac{2083}{16} = 130 \text{ mm}$$

(s. über gewalzte I-Träger auch §. 45).

4. Wenn auf einer Brücke die Eisenbahnschwellen auf sogenannten Schwellenträgern A, B, Fig. 134, aufruhen, deren Abstand 2 m beträgt, wie stark wird man die 0,25 m breiten eichenen Schwellen zu machen haben, wenn die größte Belastung einer Schwelle durch darüber stehende Triebräder einer Locomotive von je 7000 kg Gewicht ausgeübt wird, und die Entfernung der Schienen von Mitte zu Mitte 1,5 m beträgt? Hier hat man, entsprechend der unter (9) angegebenen Belastungsart $l_1 = 1{,}5$ und $l_2 = 0{,}25$ m, daher

Fig. 134.



$$M_{max} = K\,l_2 = 7000 \,.\, 0{,}25 = 1750 \text{ mkg},$$

somit folgt bei einer zulässigen Spannung $s = 0{,}8$ kg die gesuchte Höhe h aus $0{,}8\,\frac{1}{6}\,250\,h^2 = 1750 \,.\, 1000$ zu

$$h = \sqrt{\frac{6 \,.\, 1750\,000}{0{,}8 \,.\, 250}} = \sqrt{52\,500} = 229 \text{ mm} = rot\ 230 \text{ mm}.$$

Mit einem Elasticitätsmodul $E = 1200$ erhält man die Durchbiegung in der Mitte der Schwelle

$$f = \frac{K\,l_2}{T\,E}\left(\frac{l_1^2}{8} + \frac{l_1\,l_2}{2} + \frac{l_2^2}{3}\right) = \frac{7000 \,.\, 250}{\frac{1}{12}\,250 \,.\, 230^3 \,.\, 1200}\left(\frac{1500^2}{8} + \frac{1500 \,.\, 250}{2} + \frac{250^2}{3}\right)$$

$$= \frac{0{,}07}{23^3}\,489\,580 = 2{,}8 \text{ mm}.$$

§. 36. **Bewegliche Belastung.** Die vorstehend gemachten Angaben über die Größe der Momente und Schubkräfte von Balken beruhen auf der Annahme einer ruhenden Belastung. Bei sehr vielen Ausführungen, so insbesondere bei allen Brückenträgern, kommt indessen der Fall vor, daß gewisse Belastungen über den Balken in seiner Längsrichtung verschoben werden, und es ist leicht ersichtlich, daß mit einer solchen Verschiebung der Belastung die Größe der Biegungsmomente sowie der Scheerkräfte für jeden Punkt des