

Drittes Capitel.

Die Theorie der Holz- und Eisenconstruktionen.

§. 33. Holz- und Eisenconstruktionen. Von den in den vorhergehenden Capiteln besprochenen Bauconstruktionen aus Stein unterscheiden sich diejenigen aus Holz und Eisen zunächst wesentlich dadurch, daß diese Materialien ebensowohl Zugkräften wie Druckkräften zu widerstehen vermögen, während bei den Steinconstruktionen auf die absolute Festigkeit des Mörtels nicht gerechnet werden kann. Dieser Beanspruchung durch Zugkräfte gemäß sind die einzelnen Bestandtheile der hier zu betrachtenden Bauwerke unter sich in solcher Weise durch Zapfen, Bolzen, Nieten &c. zu vereinigen, daß die Verbindungen ebenfalls Zugspannungen auszuüben vermögen. Die bei weitem häufigste Verwendung finden die Holz- und Eisenconstruktionen bei der Ueberdeckung von Räumen oder Oeffnungen, namentlich bei der Ausführung von Decken und Dächern in Gebäuden und bei der Herstellung von Brücken. Diesen Zwecken sowie der Eigenthümlichkeit des Materials entsprechend haben die Hauptbestandtheile der Holz- und Eisenconstruktionen meistens die Gestalt stabförmiger oder prismatischer Stücke von größerer Länge, als man sie den Werkstücken aus Stein geben kann. Was ferner die Querschnitte dieser einzelnen Theile anbetrifft, so ist man bei der Verwendung von Holz nicht nur durch die Stärke der zu benutzenden Baumstämme innerhalb gewisser Grenzen beschränkt, sondern auch fast ausschließlich auf die kreisförmige und rechteckige Querschnittsgestalt angewiesen. Bei der Verwendung von Eisen dagegen kann man leicht gerippte oder sonst geeignete Querschnitte von solcher Form zur Anwendung bringen, daß das Material in möglichst vortheilhafter Weise zur Wirkung kommt. Die Anwendung solcher gerippter Querschnitte empfiehlt sich für hölzerne Construktionstheile aus dem einfachen Grunde nicht, weil dieselben

nur durch Ausarbeitung aus vollen Holzstücken herzustellen wären, womit eine beträchtliche Materialvergeudung verbunden sein würde. Die Haupttheile einer Construktion haben entweder eine horizontale Lage wie die Schwellen, Balken, Träger *z.*, oder sie stehen vertical wie die Pfosten, Stiele und Säulen, oder sie haben, wie die Sparren, eine gegen den Horizont geneigte Stellung, in welchem Falle sie Streben oder Bänder heißen, je nachdem sie einer Zusammendrückung oder einer Ausdehnung zu widerstehen haben. Auch bei den verticalen Stielen oder Säulen, welche zur Unterstützung horizontaler Balken dienen, macht man den Unterschied zwischen Standsäulen, die den Balken von unten stützen, und Hängesäulen, d. h. solchen, welche den unterhalb angehängten Balken zu tragen haben, die also auf Zug beansprucht werden, während die Standsäulen durch die Last der auf ihnen ruhenden Balken zusammengedrückt werden.

Um die Stabilität einer Construktion zu untersuchen, handelt es sich zunächst um die Ermittlung der äußeren Kräfte, welche darauf wirken. Diese Kräfte bestehen der Hauptsache nach immer aus den Gewichten der Construktionstheile selbst und der von ihnen zu tragenden Lasten; in einzelnen Fällen kommen auch noch besondere horizontale Kräfte in Betracht, z. B. bei Dächern und Brücken der Druck des Windes. Das Eigengewicht der einzelnen Construktionstheile ist in jedem Falle aus den Dimensionen und spezifischen Gewichten der betreffenden Theile zu bestimmen, während man die außerdem zu tragenden, sogenannten zufälligen Belastungen nach bestimmten Erfahrungsregeln anzunehmen hat, welche weiter unten für die meist vorkommenden Fälle angegeben sind. Während das Eigengewicht der Construktion eine stets vorhandene constante Belastung darstellt, ist die zufällige Belastung, z. B. die eines Speichers durch Waaren, einer Brücke durch einen Eisenbahnzug u. s. w. eine veränderliche, welche bald in größerem bald in geringerem Betrage auftritt. Wenn es nun auch selbstredend erforderlich ist, daß das Bauwerk für denjenigen Fall die genügende Stabilität besitze, für welchen die zufällige Last in ihrem größten Betrage vorhanden ist, so findet doch in vielen Fällen die ungünstigste Beanspruchung einzelner Theile bei einer nur theilweisen Belastung statt, und es muß daher immer durch eine besondere Untersuchung der für jeden Theil ungünstigste Belastungszustand ermittelt werden.

Es ist ebenfalls selbstverständlich, daß ebensowohl die Haupttheile, wie auch sämtliche Verbindungen den auf sie einwirkenden Kräften vermöge ihrer Elasticitätswirkungen hinreichenden Widerstand entgegensetzen müssen. Damit dies möglich sei, hat man die Materialstärken oder Querdimensionen der einzelnen Bestandtheile den in Thl. I, Abschn. IV entwickelten Regeln der Festigkeitslehre gemäß zu bestimmen. Hierbei kommt es darauf an, diese

Dimensionen so klein als möglich zu wählen, da mit übermäßig großen Stärken nicht nur eine nutzlose Vergendung des Materials sondern auch eine schädliche Belastung durch die Eigengewichte verbunden ist. Zur Erzielung der möglichsten Ersparniß an Material ist es erforderlich, daß dasselbe bei der ungünstigsten Beanspruchung durch die äußeren Kräfte in allen seinen Theilen mit der höchsten zulässigen Spannung reagire, was nur dann erreichbar ist, wenn, wie bei gezogenen oder gedrückten Stäben, die Spannungen sich gleichmäßig über die ganze Querschnittsfläche vertheilen. Dagegen ist dieser ideale Zustand bei der Biegung der Körper niemals zu erreichen, da die einzelnen Elemente eines auf relative Elasticität beanspruchten Körpers bekanntlich Spannungen ausgesetzt sind, deren absolute Größen mit den Abständen von der neutralen Aze des Querschnitts proportional sind. Wenn daher, wie dies von jeder soliden Construction gefordert werden muß, die von der neutralen Aze entferntesten Fibern höchstens mit der für das Material zulässigen Spannung beansprucht werden, so sind alle der Aze näher liegenden Elemente mit geringeren Spannungen wirksam, als sie es zu sein vermöchten, ja die in der neutralen Aze selbst liegenden Elemente tragen gar nichts zum Widerstande bei. Es geht hieraus hervor, daß bei den auf Biegung beanspruchten Constructionstheilen die Wirksamkeit des Materials niemals so vollkommen ausgenutzt werden kann, wie bei den auf Zug oder Druck beanspruchten, und zwar wird die Ausnutzung um so unvollkommener sein, je mehr das Material in der Nähe der neutralen Faserschicht angehäuft ist. Daraus folgt, daß z. B. bei den hölzernen Balken, deren Querschnitt fast immer ein rechteckiger ist, von vornherein nur eine viel weniger vortheilhafte Verwendung des Materials stattfinden kann, als bei eisernen Trägern, bei denen man, etwa durch I förmige Querschnitte, dafür sorgen kann, daß die Hauptmasse des Materials in thunlichst großem Abstände von der neutralen Aze sich befindet. Wenn man nun auch, vermöge geeigneter Querschnittsformen, sich dem idealen Zustande einer gleichmäßigen Anstrengung aller Fasern nähern kann, so ist doch leicht zu erkennen, daß man diesen Zustand selbst bei gebogenen Körpern niemals in so vollkommener Weise wird erreichen können, wie dies bei den einfach gedrückten oder gezogenen der Fall ist. Es ergiebt sich daher aus dieser Betrachtung ohne Weiteres das bei allen neueren Ausführungen zur Geltung kommende Princip, wonach die Constructionen so anzuordnen sind, daß die einzelnen Theile möglichst nur durch Zug- oder durch Druckkräfte in Anspruch genommen werden, und daß die einer Biegung ausgesetzten Theile auf das unumgänglich nöthige Maß eingeschränkt werden. Den sogenannten Fachwerksystemen, nach welchen in neuerer Zeit alle größeren Brücken- und Dachconstructionen ausgeführt werden, liegt durchweg dieses Princip zu Grunde.

Bei den folgenden Untersuchungen der Holz- und Eisenconstruktionen können die in Thl. I, Abschn. IV entwickelten Gesetze und Regeln der Elasticitätslehre als bekannt vorausgesetzt werden, und es sollen nur diejenigen Verhältnisse einer besonderen Untersuchung unterworfen werden, welche speciell bei den einschlägigen Construktionen in Frage kommen. Bevor die Stabilitätsverhältnisse selbst untersucht werden, möge eine kurze Zusammenstellung der Belastungen angeführt werden, welche erfahrungsmäßig bei den zu betrachtenden Bauwerken in Rechnung zu stellen sind.

Belastungen. Wie schon bemerkt worden, besteht die Belastung der §. 34. Bauconstruktionen aus ihrem Eigengewichte oder der permanenten und aus der zufälligen Last, welche letztere bei Brücken auch wohl Verkehrslast heißt. Wenn auch das Eigengewicht bei einer vorliegenden Construktion immer leicht aus dem Volumen und dem specifischen Gewichte der Bestandtheile ermittelt werden kann, so ist es doch für den Entwurf eines Bauwerkes, dessen Dimensionen erst zu bestimmen sind, bequem, zuvörderst gewisse erfahrungsmäßig ermittelte Durchschnittswerthe für das Gewicht der Construktion der Rechnung zu Grunde zu legen, durch welche die Dimensionen der einzelnen Theile festgesetzt werden. Ist letzteres geschehen, so kann das Eigengewicht aus den gefundenen Dimensionen genauer berechnet und, wenn es sich als nöthig herausstellen sollte, auf Grund dieser genauer bestimmten Eigenlast eine Correction der Dimensionen vorgenommen werden. Die Angaben über die Belastung, sowohl durch das Eigengewicht wie auch durch die zufällige oder Nutzlast, werden in der Regel auf eine Quadratinheit (Quadratmeter) der horizontalen Grundfläche bezogen, welche überdeckt ist. Für Dächer pflegt man die Belastung durch das Eigengewicht, Schnee- und Winddruck auch häufig auf die Quadratinheit der geneigten Dachfläche zu bestimmen, während man für Brücken von bestimmter Breite, z. B. pro Geleis, auch wohl die Belastung für den laufenden Meter angiebt. Wenn Mauern auf einzelnen Construktionstheilen ruhen, so ist die dadurch hervorgerufene Belastung bei einer gegebenen Mauerstärke mit der Größe der verticalen Ansichtsfäche der Mauer, also pro laufenden Meter mit der Höhe der Mauer proportional. Die in solcher Weise im Folgenden angegebenen Werthe gelten für ruhende Lasten, und man kann den etwa stattfindenden Erschütterungen, wie sie z. B. bei Brücken durch die Bewegung der Wagen und in Fabriken durch den Betrieb von Maschinen auftreten, dadurch Rechnung tragen, daß man in jedem solchen Falle entweder eine entsprechend größere Belastung, oder eine geringere zulässige Anstrengung des Materials voraussetzt, da der Einfluß solcher Erschütterungen sich wohl nur in den seltensten Fällen durch die Rechnung feststellen läßt.

Die folgenden Tabellen über die Belastung von Zwischendecken und

Belastungen pro 1qm Fläche in Kilogrammen
für Zwischendecken.

a) in Wohngebäuden oder in Fabriken mit leichten Maschinen
(Spinnereien u.)

Art der Construction	Eigen- last	Nutz- last	Total- last
Gewölbte Decke, $\frac{1}{4}$ Stein stark, zwischen eisernen Trägern für 1 bis 1,5 m Spannweite, incl. Puz und Fußboden	300	200	500
Gewölbte Decke wie oben, $\frac{1}{2}$ Stein stark	400	200	600
Gewölbte Decke wie oben, 1 Stein stark, für 2 bis 3 m Spannweite	500	200	700
Decke aus Wellblech, Buckelplatten oder Barreneisen mit 13 cm dicker Betonschicht zwischen Trägern . . .	250	200	450
Holzbalkendecke mit einfachem Fußboden	80	200	280
Holzbalkendecke mit doppeltem Fußboden oder mit einfachem Fußboden und Deckenpuz	100	200	300
Holzbalkendecke mit halbem Windelboden, Fußboden und Deckenpuz	300	200	500
Holzbalkendecke mit ganzem Windelboden, Fußboden und Deckenpuz	400	200	600

b) in Fabriken mit schweren Maschinen, in Speichern und Tanzlocalen

Holzbalkendecke mit halbem Windelboden, für Tanzlocale, Heu- und Fruchtböden	350	350	700
Holzbalkenlage mit Bohlenbelag in Salzspeichern . . .	200	600	800
Holzbalkenlage mit Bohlenbelag in Kaufmannsspeichern	250	750	1000
Gewölbte Decke, $\frac{1}{2}$ Stein stark, zwischen eisernen Trägern, 1 bis 1,5 m Spannweite, in Fabriken oder Lagerräumen	450	500	950
Gewölbte Decke, 1 Stein stark, für 2 bis 3 m Spannweite, sonst wie vor.	650	500	1150
Decke aus Wellblech, Buckelplatten oder Barreneisen mit 20 cm dicker Betonschicht, sonst wie vor.	350	500	850

Das Gewicht von Mauern beträgt pro 1 qm Ansehfläche und 1 Stein (0,25 m) Stärke für Mauern aus:

Ziegelsteinen	Poröfen oder Hohlziegeln	Kalkstein oder Granit	Sandstein
220 kg	135 kg	330—350 kg	280—300 kg

Belastungen incl. Schnee und Winddruck für 1qm Grundrißfläche in Kilogrammen für Dächer.

Art der Construction	Neigungsverhältniß $\frac{h}{2w}$									
	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Einfaches Ziegeldach	—	—	—	—	—	—	220	230	260	
Doppel- und Kronziegeldach	—	—	—	—	—	—	240	260	290	
Gewöhnliches Schieferdach .	—	—	—	—	—	—	180	190	210	240
Dorn'iges Dach	—	—	175	—	175	—	180	190	210	240
Asphaltdach mit Lehmunterlage (mit Fliesenunterlage 10 Proc. mehr)	—	—	175	—	175	—	180	190	210	240
Stroh- und Rohrdach	—	—	—	—	—	—	—	200	230	
Dach aus Zin- oder Eisenblech	—	—	135	—	140	—	150	160	170	200
Theerpappdach	—	—	135	—	140	—	150	160	170	200
Holzementdach auf Holzbalkenlage	350	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Holzementdach auf leichten Rappen oder Wellblech zc. zwischen eisernen Trägern	450	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Dächern sind einem Werke von D. Inge*) entnommen und bedürfen keiner näheren Erläuterung.

Hinsichtlich des Schneedrucks kann bemerkt werden, daß die größte Höhe der Schneeschicht in Deutschland zu etwa 0,6 m angenommen werden kann, so daß man, unter Annahme einer Dichte des Schnees von $\frac{1}{8} = 0,125$ von der des Wassers, den Schneedruck für jeden Quadratmeter der Horizontalprojection einer Fläche zu $0,125 \cdot 0,6 \cdot 1000 = 75$ kg veranschlagen kann.

Die Belastung der Dachflächen durch den Winddruck läßt sich nach den in Thl. I, Abschn. VII über den Stoß der Flüssigkeiten angegebenen Regeln bestimmen. Danach wird der Druck W , den eine mit der Geschwindigkeit c bewegte Flüssigkeit von der Dichte γ normal zu einer Fläche f ausübt,

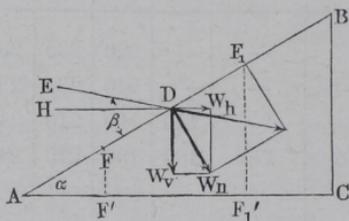
*) Tabellen und Beispiele für die rationelle Verwendung des Eisens von D. Inge, 1878; s. auch Müller, Festigkeitslehre.

welche unter dem Winkel β gegen die Richtung des Luftstroms geneigt ist, ausgedrückt durch

$$W = Q \gamma \frac{c}{g} \sin \beta = f \gamma \frac{c^2}{g} \sin^2 \beta,$$

worin $Q = f c \sin \beta$ das in jeder Secunde gegen die Fläche f treffende Luftvolumen ist. Der herrschende Wind hat nun meistens gegen den Horizont eine Neigung von $EDH = 10^\circ$, Fig. 112, und daher bestimmt sich der Neigungswinkel β , unter welchem die unter α geneigte Dachfläche BAC getroffen wird, zu

Fig. 112.



$$\beta = EDA = \alpha + 10^\circ.$$

Mit diesem Werthe erhält man daher den auf eine beliebig große Fläche FF_1 = f normalen Winddruck zu

$$W_n = f \gamma \frac{c^2}{g} \sin^2 (\alpha + 10^\circ),$$

also folgt für die Flächeneinheit (1 qm) der specifische Winddruck senkrecht zur Dachfläche zu

$$w_n = \frac{W_n}{f} = \gamma \frac{c^2}{g} \sin^2 (\alpha + 10^\circ).$$

Ebenso groß ist auch der verticale Druck für jede Flächeneinheit der Horizontalprojection, sowie auch der horizontale specifische Druck für die Verticalprojection, denn eine Zerlegung des normal zur Fläche FF_1 wirkenden Winddruckes W_n giebt die verticale Componente

$$W_v = W_n \cos \alpha,$$

und da dieselbe auf eine Fläche $F'F_1' = f \cos \alpha$ sich vertheilt, so wird der lothrechte Winddruck für jede Einheit der horizontalen Projection ebenfalls durch

$$w_v = \frac{W \cos \alpha}{f \cos \alpha} = \frac{W}{f} = \gamma \frac{c^2}{g} \sin^2 (\alpha + 10^\circ) = w_n$$

ausgedrückt. Dasselbe gilt für den Druck des Windes gegen die Verticalprojection BC der Dachfläche.

Setzt man zur Bestimmung des Winddruckes das specifische Gewicht der Luft $\gamma = 1,25$ kg und die größte vorkommende Geschwindigkeit des Windes $c = 25$ m, so erhält man den normalen Windstoß pro 1 qm Fläche zu

$$w = 1,25 \frac{25^2}{9,81} \sin^2 (\alpha + 10^\circ) = 80 \sin^2 (\alpha + 10^\circ).$$

Man würde z. B. für ein Dach, dessen Höhe gleich der halben Weite ist, also mit $\alpha = 45^\circ$, den Winddruck zu

$$w = 80 \cdot \sin^2 (45^\circ + 10^\circ) = 53,6 \text{ kg};$$

dagegen für eine Neigung von $1/3$, oder $\alpha = 18^\circ 30'$ einen Werth

$$w = 80 \cdot \sin^2 (28^\circ 30') = 18,2 \text{ kg}$$

erhalten.

Nun wird zwar der hier vorausgesetzte ungünstigste Winddruck immer nur auf die eine, der Windrichtung zugekehrte Dachfläche wirken, während die dem Winde abgewendete gar nicht oder doch viel weniger gedrückt wird, in dessen pflegt man der Sicherheit wegen bei der Construction in der Regel anzunehmen, daß die ganze Dachfläche einem gleichmäßig vertheilten verticalen Winddrucke ausgesetzt sei, und zwar soll man nach Brandt für jeden Quadratmeter der Horizontalfläche eine durch Schnee und Wind erzeugte Verticalbelastung zwischen 100 und 125 kg annehmen, eine Angabe, welche mit den oben gefundenen Werthen ($75 + 53,6 = 128,6$ und $75 + 18,2 = 93,2$) annähernd übereinstimmt.

Dem horizontalen Winddrucke, welcher eine Verschiebung bezw. ein Umkippen des Daches anstrebt, wird man durch entsprechende Befestigung des Daches, sowie durch einen geeigneten Quer- und Längsverband begegnen müssen. Die oben für den Winddruck angegebenen Formeln gelten auch für die verticalen Flächen von Mauern, Brückenträgern zc., wenn man $\alpha = 90^\circ$ darin einführt.

Die Belastung der Brücken durch ihr Eigengewicht setzt sich zusammen aus dem Gewichte der Fahrbahn mit Einschluß der dieselbe unterstützenden Querträger, Schwellen zc., und dem Gewichte der Hauptträger. Das Gewicht der Fahrbahn für Straßenbrücken kann man pro 1 qm zu

250 kg bei einer Schotterdecke von 0,1 bis 0,15 m Dicke,

360 kg für Steinpflaster von 0,15 m Dicke,

100 kg für die zugehörige Sandunterlage von 0,06 m Dicke

annehmen *).

In Betreff der eisernen Straßenbrücken von der Spannweite l und einer Breite der Fahrbahn von 7,5 m incl. der beiden je 1 m breiten Banketts, kann man pro 1 qm Grundrißfläche für vorläufige Ueberschlagsrechnungen das Eigengewicht zu

$$p = (42 l + 3600) \text{ kg}$$

bei Anwendung einer 0,2 m dicken Beschotterung, und zu

$$p = (28 l + 1300) \text{ kg}$$

*) Siehe E. Holzhey, Vorträge über Baumechanik.

bei doppelter eichener Bedielung annehmen. Nach Winkler berechnet sich ferner für eiserne Straßenbrücken, deren Spannweite l und Breite b Meter beträgt, für jeden laufenden Meter der Länge l das gesammte Brückengewicht, einschließlich der Hauptträger, zu

$$p = \frac{120 + 300 b + 3,3 b l}{1 - 0,0038 l} \text{ kg.}$$

Für Eisenbahnbrücken (eingleisige) beträgt nach Schwedler das totale Gewicht für den laufenden Meter der Spannweite l in Kilogrammen

$$p = 30 l + 800$$

für Brücken schwerster Construction von 10 bis 100 m Spannweite. Das Gewicht der Fahrbahn kann durchschnittlich zu 750 kg pro laufenden Meter veranschlagt werden.

Für das Gewicht der Hauptträger hölzerner Brücken giebt Winkler die folgende Tabelle an:

Gewicht (kg) der Hauptträger hölzerner Brücken von l Meter Spannweite.

Unterstützung durch:	Straßenbrücken	Eisenbahnbrücken (ein Geleise)	
	pro 1 qm Fahrbahn	a) provisorische pro laufenden Meter	b) definitive pro laufenden Meter
Einfache Balken	11 l	67 l	84 l
Einfache durch Sattelhölzer verstärkte Balken	10 l	62 l	79 l
Verdübelte Balken	10 l	55 l	70 l
Gitterbalken	8,3 l	45 l	51 l

Wie schon oben bemerkt, können die vorstehend angeführten Zahlen nur als ungefähre Ueberschlagswerthe bei der Projectirung gelten, und man hat in jedem Falle nachträglich das genaue Eigengewicht der Construction aus den für die Bestandtheile festgesetzten Dimensionen zu ermitteln.

Für die zufällige oder Verkehrsbelastung der Brücken sind nach dem Deutschen Bauhandbuche die folgenden Angaben zu Grunde zu legen:

Zufällige Belastung von Straßenbrücken, Fußsteigen und Aquädukten.

Art der		Belastung in Kilogrammen pro 1 qm Fahrbahn	kg
Brücken	Belastung		
Straßen- und Pferdeisenbahn brücken	Menschen= gedränge	1) Annahme in Amerika	150
		2) Annahme in Frankreich	200
		3) Annahme in Deutschland	280
		4) Genügende Annahme	400
Fußsteige und Ziehwege	Menschen, Thiere und Fuhrwerke	1) Stege für öffentlichen Verkehr . .	400
		2) Stege für Privatverkehr	200
		3) Ziehwege in Städten	400
		4) Ziehwege für leichtes Fuhrwerk .	150
Aquädukte und Canalbrücken	Wasser und Schiffe	Für jeden Meter Wasserstandshöhe beim Passiren der Schiffe	1000

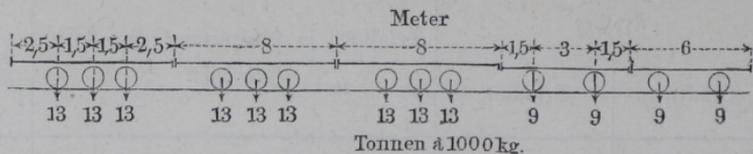
In Betreff der Größe und Vertheilung der Belastung von Straßenbrücken durch Fuhrwerke und Zugthiere können die folgenden Skizzen einen Anhalt geben:

Gewichte und Gewichtsvertheilung für Fuhrwerke in Kilogrammen und Metern.

1) Schwerstes Fuhrwerk . . .	18 000	<p>Fig. 113.</p> <p>19m.</p> <p>2 4 2 2 4 4 1</p> <p>9000 9000 600 600 600 kg.</p>
Bespannung 6 Pferde . . .	1 800	
2) Schweres Landfuhrwerk . .	10 000	<p>Fig. 114.</p> <p>14.5m.</p> <p>2 3.5 2 2 4 1</p> <p>5000 5000 600 600 kg.</p>
Bespannung 4 Pferde . . .	1 200	

Für Eisenbahnbrücken pflegt man als die der Rechnung zu Grunde zu legende Belastung einen Zug aus mehreren der schwersten, die Bahn befahrenden Locomotiven voranzusetzen, in welcher Hinsicht beispielsweise Mohr einen durch Fig. 115 dargestellten Eisenbahnzug von drei hinter

Fig. 115.



einander stehenden dreiartigen Tenderlocomotiven von je 39 Tonnen mit darauf folgenden zweiartigen Güterwagen von je 18 Tonnen annimmt. Um die Rechnung hierbei zu erleichtern, ist es gebräuchlich, statt der durch einen solchen Zug in einzelnen Punkten ausgeübten concentrirten Lasten eine über die ganze Brücke gleichmäßig vertheilte Belastung einzuführen. Man hat diese Belastung so zu bemessen, daß durch dieselbe eine ebenso große Anstrengung der Constructionstheile hervorgerufen wird, wie dies durch die Reihe concentrirter Lasten geschieht, wenn die letzteren in derjenigen Stellung sich befinden, in welcher sie die größte Anstrengung in den Constructionsgliedern hervorrufen. Dieser ungünstigste Belastungszustand ist nun aber verschieden für die verschiedenen Constructionsglieder des Trägers. Während nämlich die äußeren, den Träger oben und unten einfassenden Längsbänder oder Gurtungen (s. unten) in irgend welchem Querschnitte proportional mit der Größe des biegenden Momentes M der äußeren Kräfte angestrengt werden, stehen die Spannungen der zwischen den Gurtungen befindlichen Füllungsglieder im directen Verhältnisse mit der verticalen Scheerkraft V des betreffenden Querschnittes. Um daher diejenige gleichförmige Belastung des Trägers zu finden, welche die wirkliche, in einzelnen Punkten concentrirte Belastung durch den Eisenbahnzug ersetzen kann, hat man die Untersuchung ebensowohl für die Gurtungen wie für die Füllungsglieder gesondert vorzunehmen. Zu dem Behufe denkt man sich den betreffenden Lastenzug über die Brücke bewegt und diejenige Stellung bestimmt, für welche das Biegemoment M_{max} an der ungünstigsten Stelle den größten Werth annimmt, und ermittelt diejenige gleichförmige Belastung k_g pro Längeneinheit, welche denselben Werth von M_{max} hervorruft. Diese gleichförmige Belastung k_g legt man dann der Berechnung der Gurtungen zu Grunde. Eine ähnliche Untersuchung hinsichtlich der verticalen Schubkraft V_{max} giebt in gleicher Weise die für die Berechnung der Füllungstheile zu Grunde zu legende gleichförmige Belastung k_f pro Längeneinheit. Die Untersuchung führt dazu, daß diese beiden Werthe k_g und k_f verschieden

groß ausfallen und außer von der Größe und Vertheilung der concentrirten Lasten des Eisenbahnzuges wesentlich noch von der Spannweite l der Träger abhängig sind. Hinsichtlich der weiteren Ausführung dieser Untersuchungen muß auf die speciellen Werke über Brückenbau verwiesen werden, hier mögen nur die Näherungsformeln angeführt werden, welche von Winkler*) in Bezug auf einen Eisenbahnzug aufgestellt sind, welcher sich zusammensetzt aus drei hinter einander folgenden Locomotiven von je 39 Tonnen Gewicht, deren Tender je 27 Tonnen wiegen, und auf welche Lastwaggons von je 16 Tonnen folgen:

Tabelle der gleichförmig vertheilten Belastungen in Tonnen für 1 laufenden Meter eines Geleises.

für $l = 10$ bis 50 m	für $l = 50$ bis 100 m	für $l = 100$ bis 150 m
$k_g = 3,98 + \frac{22}{l}$ Tonn.	$k_g = 3,07 + \frac{67}{l}$ Tonn.	$k_g = 2,67 + \frac{107}{l}$ Tonn.
$k_f = 4,30 + \frac{31}{l}$ Tonn.	$k_f = 3,47 + \frac{72}{l}$ Tonn.	$k_f = 3,27 + \frac{92}{l}$ Tonn.

Der Balken. Zu den in der Bautechnik am häufigsten angewendeten §. 35. Constructionstheilen gehört der an zwei Stellen unterstützte oder befestigte horizontale Balken, welcher zum Tragen auf ihm ruhender Lasten bestimmt ist. Durch die letzteren sowie durch sein Eigengewicht wird der Balken auf Biegung in Anspruch genommen, und außerdem werden in allen Punkten im Innern desselben gewisse horizontale und verticale scheinende Kräfte hervorgerufen, denen das Material mit entsprechenden Schubspannungen entgegenwirken muß. Die Größe und Richtung dieser Anstrengungen an verschiedenen Stellen ist außer von der Größe und Vertheilung der Lasten wesentlich von der Art der Unterstützung abhängig, da in jedem Falle von den Festpunkten Reactionen ausgeübt werden müssen, die mit den belastenden Einwirkungen im Gleichgewichte stehen. In Thl. I sind diese Einwirkungen auf den Balken näher untersucht worden, und es genügt daher hier, die verschiedenen in der Praxis vorkommenden Fälle der Uebersichtlichkeit wegen zusammenzustellen. In Bezug auf die Biegungsverhältnisse wurde in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 2 gefunden, daß in irgend

*) Winkler, Theorie der Brücken, Heft I, Wien 1873.

einem Querschnitte des Balkens, für welchen das Moment der äußeren Kräfte durch M ausgedrückt ist, Biegungsspannungen eintreten, welche durch die Beziehung

$$M = s \frac{T}{e} \dots \dots \dots \text{I}$$

gegeben sind, wenn unter T das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die neutrale Ase desselben und unter s die Spannung verstanden wird, welcher die äußerste in der Entfernung e von der neutralen Ase befindliche Faserschicht pro Flächeneinheit ausgesetzt ist. Diese für jeden gebogenen Balken ganz allgemein geltende Gleichung soll auch im Folgenden zu Grunde gelegt werden, und zwar derart, daß unter der größten Spannung s der für das Material des Balkens höchstens zulässige Betrag der specifischen Faserspannung verstanden wird. Dabei wird zunächst, der Eigenschaft des Holzes und Schmiedeeisens entsprechend, dieser Betrag s für Druck- und Zugwirkungen als gleich groß vorausgesetzt, indem das hiervon abweichende Verhalten des Gußeisens, welches gegen Druckkräfte größeren Widerstand auszuüben vermag als gegen Zug, besonders besprochen werden soll.

Jede Biegung eines Balkens ist gleichbedeutend mit einer Formänderung der ursprünglichen, zunächst als gerade Linie vorausgesetzten geometrischen Ase des Balkens, welche letztere bei der Biegung in die sogenannte elastische Linie übergeht. In Bezug auf diese Linie wurde in Thl. I, §. 220 das ebenfalls ganz allgemein gültige Gesetz aufgestellt, welches durch die Gleichung

$$\rho = \frac{TE}{M} \dots \dots \dots \text{II}$$

ausgedrückt ist, worin E den Elasticitätsmodul des Materials und ρ den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie an der Stelle bedeutet, für welche das Moment der äußeren Kräfte gleich M ist. Diese Gleichung läßt sich auch für rechtwinkelige Coordinaten x, y der elastischen Linie, wenn annähernd $\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ gesetzt wird, durch

$$M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \dots \dots \dots \text{II}^a$$

wiedergeben.

Was die verticale Schubkraft V für irgend eine Stelle des Balkens betrifft, so ist dieselbe immer gleich der algebraischen Summe aller der Verticalkräfte, die Stützreactionen inbegriffen, welche auf den Balken von einem Ende bis zu der betrachteten Stelle einwirken, und es wurde früher ebenfalls gefunden, daß diese Kraft für jede Stelle durch die Beziehung

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \dots \dots \dots \text{III}$$

gegeben ist, vorausgesetzt, daß die horizontale Mittellinie des Balkens als X-Axe angenommen wird. Man überzeugt sich hiervon auch leicht durch

Fig. 116.

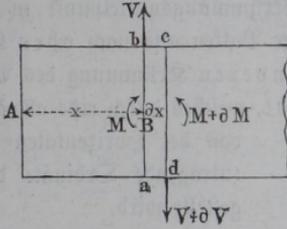


Fig. 116, wenn man im Abstände $AB = x$ von dem Koordinatenanfange ein Balkenelement $abcd$ herausgeschnitten denkt, dessen Länge $ad = bc = \partial x$ ist. Auf dieses Element wirken in den beiden Schnittflächen ab und cd die Drehungsmomente M und $M + \partial M$, sowie die Schubkräfte V und bezw. $V + \partial V$, und man hat für

das Gleichgewicht dieses Elementes daher die Gleichung:

$$M + V\partial x = M + \partial M, \text{ oder } V = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

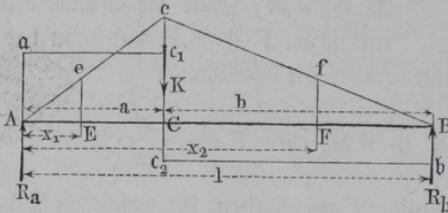
Daraus geht hervor, daß in denjenigen Querschnitten, für welche die Schubkraft V gleich Null wird, das Moment M ein Maximum ist, eine Beziehung, welche häufig zur schnellen Ermittlung derjenigen Stelle benutzt werden kann, für welche das Biegemoment seinen größten Werth annimmt.

Die vorstehenden Gleichungen I bis III bilden die Grundlage der folgenden Ermittlungen, welche die Bestimmung der Festigkeit von Balken zc., d. h. die Feststellung der denselben zu gebenden Dimensionen, zum Zwecke haben. Kennt man nämlich für einen Balken aus bestimmtem Materiale, für welches die Größen E und s erfahrungsgemäß feststehen, für irgend welche Stelle das Moment M und die Schubkraft V , so lassen sich hieraus, wie aus dem Folgenden sich ergeben wird, die erforderlichen Querschnittsdimensionen des Balkens an der betrachteten Stelle ermitteln.

Es ist daher für die folgenden Entwicklungen zunächst von Wichtigkeit, für jeden Punkt eines Balkens, der unter der Einwirkung bekannter Kräfte steht, das Biegemoment M sowie die verticale Schwerkraft V zu kennen. Hierzu eignet sich der Anschaulichkeit wegen insbesondere die graphische Darstellung dieser Größen durch Diagramme, welche in folgender Weise entworfen werden können. Ueber der ursprünglich geraden Balkenaxe als X-Axe sollen die Momente M sowie die Verticalkräfte V als Ordinaten y aufgetragen werden, derart, daß die Curve, welche die Endpunkte der Ordinaten verbindet, von der Größe und Veränderlichkeit der Momente bezw. Verticalkräfte ein Bild giebt. Als positive Richtung der X- und Y-Axe

sollen, wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird, die Richtungen von links nach rechts und von unten nach oben vorausgesetzt werden, und es sollen die aufwärts wirkenden Schubkräfte positive heißen, also von der X-Axe nach oben angetragen werden. Ebenso sollen Momente als positive betrachtet werden und ihre Ordinaten nach oben hin angetragen werden, wenn sie dem Balken eine positive Krümmung, d. h. eine solche zu ertheilen bestrebt sind, zufolge deren der Krümmungsmittelpunkt in der Richtung der positiven Y-Axe gelegen ist, der Balken also nach oben hin concav gebogen wird. Einer nach oben convexen Krümmung des Balkens entspricht daher ein negatives Moment, welches durch eine abwärts

Fig. 117.



von der Horizontalen anzutragende Ordinate dargestellt wird.

Die Verzeichnung dieser Diagramme verursacht in dem einfachen Falle eines Balkens auf zwei Stützen A und B, Fig. 117, keine Schwierigkeit.

Ist der Balken von der Länge $AB = l$ in C, im Abstände a von A und b von B durch eine Kraft K belastet, so sind die Auflagerreactionen in A und B bezw. durch

$$R_a = K \frac{b}{l} \text{ und } R_b = K \frac{a}{l}$$

gegeben, und man hat für das Moment in C den Werth

$$M_c = R_a a = R_b b = K \frac{ab}{l},$$

während in irgend einem Punkte E oder F im Abstände x_1 bezw. x_2 von A das Moment durch

$$M_e = R_a x_1 = K \frac{b}{l} x_1 \dots \dots \dots (1)$$

und

$$M_f = R_a x_2 - K (x_2 - a) = K \frac{a}{l} (l - x_2) \dots \dots (2)$$

ausgedrückt ist. Ueberall ist das Moment positiv, und wenn man daher nach einem beliebig zu wählenden Maßstabe für die Momente (1 Millimeter = μ Meterkilogramm) $Cc = M_c = K \frac{ab}{l}$ macht, so geben die geraden Linien Ae und Bc für jeden Punkt wie E und F in den Ordinaten Ee und Ff das Moment M_e bezw. M_f an.

Die Schubkraft in A ist gleich $R_a = K \frac{b}{l}$ und bleibt constant für die Strecke AC , wie auch aus (1) folgt, woraus

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} = K \frac{b}{l}$$

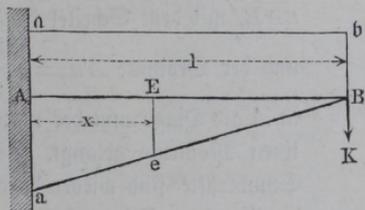
sich ergibt. In C dagegen verändert sich V plötzlich um die abwärts gerichtete Kraft $-K$, folglich ist unmittelbar rechts neben C die Schubkraft

$$V = R_a - K = K \left(\frac{b}{l} - 1 \right) = -K \frac{a}{l},$$

und sie behält diese Größe für die Strecke CB bei. Macht man daher nach einem gleichfalls beliebigen Maßstabe für die Schubkräfte (1 Millimeter = v Kilogramm) $Aa = R_a = K \frac{b}{l}$, zieht a_1 horizontal, macht ferner $c_1 c_2 = K$ und zieht $c_2 b$ horizontal, so erhält man in $A a_1 c_1 c_2 b$ das Diagramm für die Schubkräfte.

Denkt man sich den Balkentheil links der Kraft K fest eingemauert, und das Ende B , Fig. 118, durch die Kraft K belastet, so ergibt sich ohne

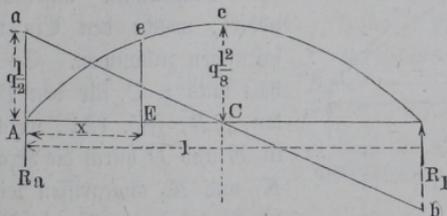
Fig. 118.



Weiteres das Moment in A zu $M_a = Kl$, während es für den Punkt E im Abstände x von A durch $M_e = K(l - x)$ gegeben ist. Da hier der Balken convex oben gebogen wird, sind die Momente negativ, und man hat daher die Größe $Aa = M_a$ nach abwärts anzutragen, um in aB die Begrenzung der Momente zu erhalten.

Die Schubkraft ist hier offenbar für jeden Querschnitt gleich K und nach oben gerichtet, daher die im Abstände $Aa = K$ von der Axe gezogene Horizontale ab das Diagramm für die Schubkräfte ergibt.

Fig. 119.



Wenn dagegen der Balken AB , von der Länge l , Fig. 119, eine gleichmäßig über seine Länge verbreitete Last $Q = ql$ zu tragen hat, so sind die Reactionen der beiden Stützpunkte

$$R_a = R_b = q \frac{l}{2}$$

und für irgend einen Punkt E im Abstände x von A ist das Moment

$$M_x = q \frac{l}{2} x - q \frac{x^2}{2} = \frac{q}{2} (lx - x^2) \dots (3)$$

Man erhält daher die Darstellung der Momente durch die Parabel AeB , deren Scheitelhöhe in der Mitte C

$$M_c = Cc = q \frac{l^2}{8} \text{ ist.}$$

Die Schubkraft ist in A gleich $q \frac{l}{2}$ und in B gleich $-q \frac{l}{2}$, in der Mitte gleich Null, und die Gerade aCb giebt das Diagramm der Schubkräfte, denn aus (3) erhält man

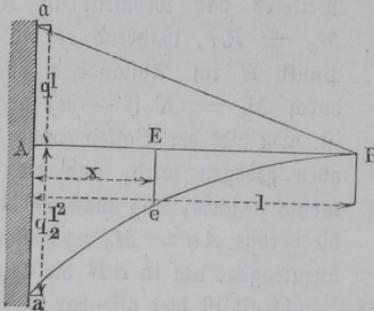
$$V = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{q}{2} (l - 2x)$$

die Gleichung einer geraden Linie vom Neigungscoefficienten q .

Ebenso erhält man für ein Consol AB , Fig. 120, welches durch die gleichmäßig vertheilte Last $Q = ql$ angegriffen wird, in E das Moment

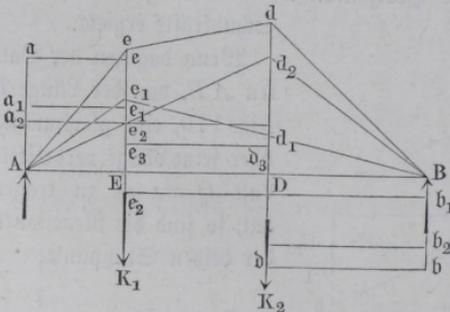
Fig. 120.

$$M_x = q \frac{(l-x)^2}{2},$$



so daß man zu der Parabel $a e B$, mit dem Scheitel in B und der Ordinate $Aa = q \frac{l^2}{2}$ in A als Diagramm der negativen Momente gelangt. Die Schubkräfte sind wieder durch die Gerade $a B$ dargestellt.

Fig. 121.



Wenn ein Balken durch mehrere Belastungen beansprucht wird, so erhält man das Diagramm, wenn man in jedem Punkte die Ordinaten der Diagramme algebraisch addirt, welche den Einzelbelastungen zukommen. So erhält man z. B. für den Balken AB , Fig. 121, welcher in E und D durch die Kräfte K_1 und K_2 angegriffen wird, die Begrenzung für die Momente in $AedB$, wenn man

$Ee = Ee_1 + Ee_2$ und $Dd = Dd_1 + Dd_2$ macht, während die gebrochene Linie $Aace_3d_3db$ das Diagramm für die Schubkräfte ergibt, sobald man $Aa = Aa_1 + Aa_2$, $Ee_3 = Aa_2 - Ee_2$ und $Bb = Bb_1 + Bb_2$ macht, und a_1e , e_3d_3 sowie b_1d horizontal zieht.

Ebenso erhält man für den Consolträger AB , Fig. 122, welcher der gleichmäßig vertheilten Belastung $Q = ql$ und der Kraft K in B unterworfen ist, in adb die resultirende Momentencurve, wenn man für jeden Punkt wie D die Ordinate Dd gleich der Summe der Ordinaten Dd_1 der Parabel und Dd_2 der geraden Linie a_2B macht, durch welche bezw. die Momente der Last Q und der Kraft K allein dargestellt sind. Ferner hat man durch b_2 eine Parallele a_1b_2 mit a_1B zu ziehen, um die Größe der Schubkraft für jeden Punkt, z. B. D in Dd , zu erhalten.

Fig. 122.

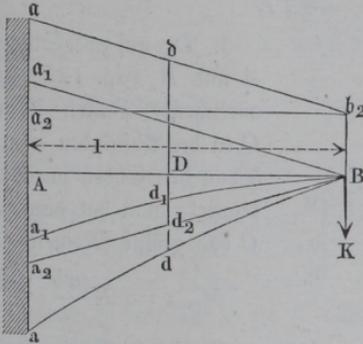


Fig. 123.

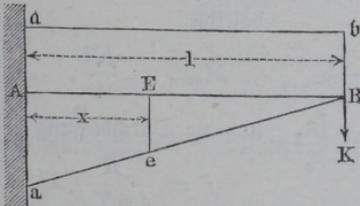
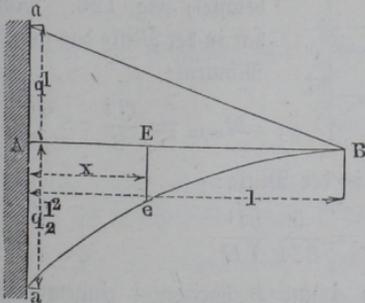


Fig. 124.



Der Uebersichtlichkeit wegen sollen im Folgenden die hauptsächlichsten in der Praxis vorkommenden Belastungsarten des einfachen Balkens, wie solche in Thl. I näher besprochen sind, hier zusammengestellt, und die Größen der maximalen Biegemomente M_{max} , sowie der größten Durchbiegungen f dafür angegeben werden.

1. Der Balken ist an einem Ende A , Fig. 123, horizontal und unwandelbar befestigt, am anderen Ende B durch das Gewicht K belastet. Man hat für den Bruchquerschnitt bei A

$$M_{max} = Kl,$$

und für die Durchbiegung am freien Ende bei B :

$$f = \frac{K}{3TE} l^3.$$

2. Derselbe Balken ist durch die gleichmäßig vertheilte Belastung $Q = ql$, Fig. 124 (a. v. S.), angegriffen. Der Bruchquerschnitt liegt auch hier an der Befestigungsstelle A , und hierfür ist

$$M_{max} = \frac{Ql}{2} = \frac{ql^2}{2},$$

während die größte Durchbiegung bei B sich bestimmt durch

$$f = \frac{Q}{8TE} l^3 = \frac{ql^4}{8TE}.$$

Fig. 125.

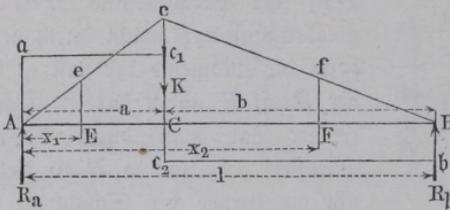


Fig. 126.

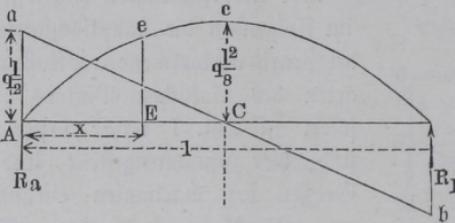
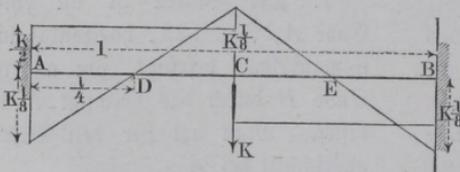


Fig. 127.



3. Der auf zwei Stützen A und B , Fig. 125, frei aufliegende Balken ist in C in den Abständen a und b von den Enden durch K belastet, man hat dann in C das größte Moment:

$$M_{max} = K \frac{ab}{l}.$$

Greift die Kraft K in der Mitte an, ist also $a = b$, so erhält man daselbst

$$M_{max} = \frac{Kl}{4},$$

und die Durchbiegung:

$$f = \frac{K}{48TE} l^3.$$

4. Derselbe Balken ist gleichmäßig durch $Q = ql$ belastet, Fig. 126. Man hat in der Mitte das größte Moment:

$$M_{max} = \frac{Ql}{8} = \frac{ql^2}{8},$$

und die größte Durchbiegung, ebenfalls in der Mitte:

$$f = \frac{5}{8} \frac{Q}{48TE} l^3 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{TE}.$$

5. Der Balken ist an beiden Enden A und B horizontal eingemauert, Fig. 127, und in der Mitte C durch ein Gewicht K belastet. Hier werden

durch die Einmauerung an den Enden A und B negative Momente von gleicher Größe mit dem positiven Maximalmomente in der Mitte C hervorgerufen, und man hat für jeden der drei Punkte A , B und C die absolute Größe des Biegemomentes:

$$M_{max} = \frac{Kl}{8}.$$

Die größte Durchbiegung tritt in der Mitte im Betrage ein:

$$f = \frac{1}{4} \frac{K}{48 TE} l^3 = \frac{1}{192} \frac{K}{TE} l^3.$$

Die Schubkraft ist überall constant gleich $\pm \frac{K}{2}$. In D und E , in den Abständen $\frac{l}{4}$ von den Enden ist das Moment gleich Null, also nach Gleichung II der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie unendlich groß, d. h. diese Linie ändert in diesen Punkten (Wendepunkten) ihre Krümmung aus der positiven in die negative.

Wenn hierbei die Kraft K nicht in der Mitte des Balkens, sondern in den Abständen a von A und b von B angreift, so sind die Reactionen in A und B

$$R_a = Kb^2 \frac{b + 3a}{l^3}$$

und

$$R_b = Ka^2 \frac{a + 3b}{l^3};$$

und die negativen Momente daselbst:

$$M_a = K \frac{ab^2}{l^2}$$

und

$$M_b = K \frac{ba^2}{l^2},$$

während im Angriffspunkte c der Kraft ein positives Moment von der Größe

$$M_c = K \frac{2a^2b^2}{l^3}$$

auftritt. Das absolut größte Biegemoment gehört demjenigen Stützpunkte an, welchem die Kraft K am nächsten liegt.

6. Der an beiden Enden horizontal befestigte Balken wird durch eine gleichmäßig vertheilte Belastung $Q = ql$ angegriffen, Fig. 128 (a. f. S.). Für die Mitte C hat man das Biegemoment:

$$M_c = \frac{Ql}{24} = \frac{ql^2}{24},$$

während an den Enden negative Momente von der doppelten Größe

$$M_a = M_b = \frac{Ql}{12} = \frac{ql^2}{12}$$

auftreten. Die größte Durchsenkung in der Mitte beträgt

$$f = \frac{1}{8} \frac{Q}{48 TE} l^3 = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{TE}.$$

Die Wendepunkte D und E stehen von den Endpunkten A und B um $AD = BE = 0,2113 l$ ab.

Fig. 128.

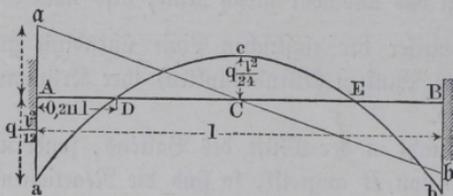
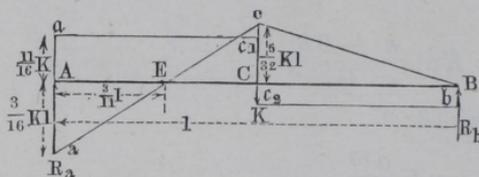


Fig. 129.



7. Der Balken AB , Fig. 129, ist einerseits in A horizontal eingeklemmt, andererseits in B frei unterstützt, und in der Mitte C durch K belastet. Hier sind die Reaktionen in A und B :

$$R_a = \frac{11}{16} K;$$

$$R_b = \frac{5}{16} K.$$

Das größte (negative) Moment findet sich in A zu

$$M_a = M_{max} = \frac{3}{16} Kl,$$

während das Moment in der Mitte nur

$$M_c = \frac{5}{32} Kl$$

beträgt.

Der Inflexionspunkt E hat von A und B die bezw. Abstände

$$AE = \frac{3}{11} l \text{ und } BE = \frac{8}{11} l,$$

und die Durchsenkung in der Mitte beträgt

$$f = \frac{5}{8} \frac{K}{48 TE} l^3 = \frac{5}{384} \frac{K}{TE} l^3.$$

Sollen die Momente in A und C ihrer absoluten Größe nach gleich

werden, so hat man den Stützpunkt A um die Größe $\frac{1}{144} \frac{K}{TE} l^3$ unter die Horizontale durch B zu legen, in welchem Falle

$$M_a = M_c = \frac{1}{6} Kl$$

wird.

Wenn die Last K nicht in der Mitte, sondern im Abstände a von A und b von B wirkt, so hat man die Stützreaction in B :

$$R_b = K \frac{3l - a}{2l^3} a^2$$

und das Biegemoment in der Verticalebene der Kraft:

$$M_c = K \frac{3l - a}{2l^3} a^2 b,$$

während in A ein negatives Moment

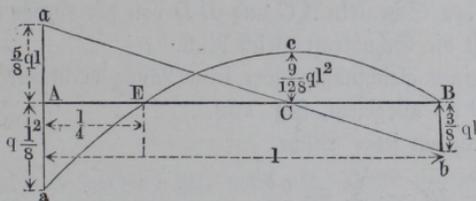
$$M_a = K \frac{2l^2 - 3al + a^2}{2l^2} a$$

zur Wirkung kommt.

8. Derselbe Balken wird durch das gleichmäßig verteilte Gewicht $Q = ql$ belastet, Fig. 130. Hier ist die Reaction auf die Stütze B durch

$$R_b = \frac{3}{8} Q = \frac{3}{8} ql$$

Fig. 130.



und das negative Moment an der Befestigungsstelle durch

$$M_a = \frac{1}{8} Ql = \frac{1}{8} ql^2$$

dargestellt. Der Wendepunkt E hat von A einen Abstand $AE = \frac{l}{4}$ und

in der Mitte C von BE findet sich das größte positive Moment

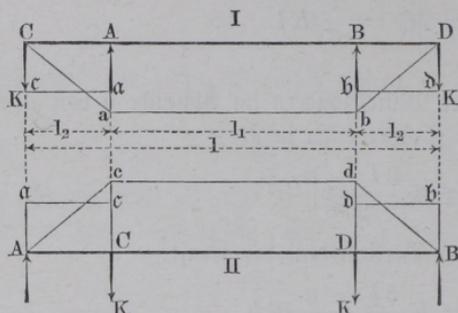
$$M_c = \frac{9}{128} Ql = \frac{9}{128} ql^2.$$

9. Der auf zwei Stützen A und B frei aufliegende Balken wird durch zwei gleiche Kräfte K in gleichen Abständen $AC = BD = l_2$ von den Stützen angegriffen, Fig. 131, I und II, a. f. S. Die Reaction jeder Stütze ist hier

$$R_a = R_b = K,$$

das Moment ist zwischen den Stützen, Fig. I, und zwischen den Kraftangriffen, Fig. II, also für das mittlere Stück von der Länge $l_1 = l - 2l_2$

Fig. 131.



von der constanten Größe Kl_2 , während für jedes Ende AC und BD die unter (1.) angegebenen Formeln gelten. Für das mittlere Stück ist wegen des constanten Momentes der Krümmungshalbmesser ρ überall von gleicher Größe

$$\rho = \frac{TE}{Kl_2},$$

d. h. die elastische Linie dieses Stückes ist ein Kreisbogen, dessen Bogenhöhe in der Mitte durch

$$f = \frac{l_1^2}{8\rho} = \frac{Kl_2 l_1^2}{8TE}$$

ausgedrückt ist.

Um diese Größe f erhebt sich in Fig. I die Mitte des Balkens über die Horizontale AB, während in Fig. II eine Senkung der Mitte um

$$f = \frac{Kl_2}{TE} \left(\frac{l_1^2}{8} + \frac{l_1 l_2}{2} + \frac{l_2^2}{3} \right)$$

eintritt.

Schubkräfte treten nur in den Schenkeln AC und BD von der Größe K auf, für das mittlere Stück ist die Schubkraft gleich Null.

10. Derselbe Balken ist einer gleichmäßig über seine Länge verbreiteten Last $Q = q(l_1 + 2l_2) = ql$ ausgesetzt, Fig. 132.

In diesem Falle ist die Reaction jeder Stütze

$$R_a = R_b = \frac{Q}{2} = \frac{ql}{2},$$

und das Moment über einer Stütze

$$M_a = M_b = \frac{ql_2^2}{2},$$

während in der Mitte E das Moment

$$M_e = q \frac{l_1^2 - 4l_2^2}{8} \text{ ist.}$$

Das Moment M_a über den Stützen wird gleich demjenigen M_e für die Mitte, wenn

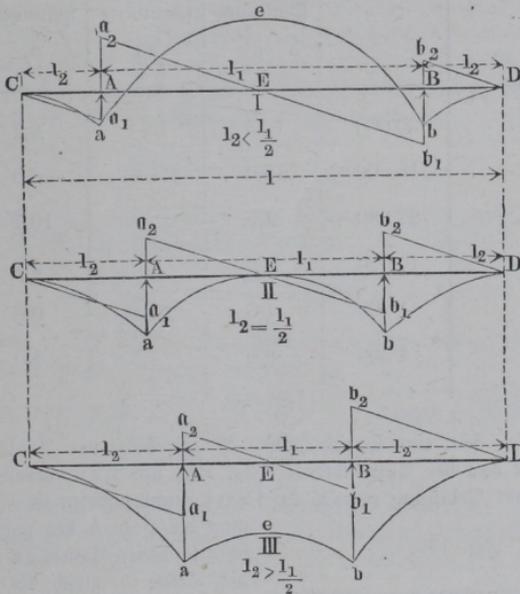
$$l_2 = l_1 \sqrt{\frac{1}{8}} = 0,3536 l_1$$

ist. Die Diagramme I, II und III der Figur 132 entsprechen bezw. den Verhältnissen

$$l_2 \begin{cases} \leq \\ \equiv \\ \geq \end{cases} \frac{l_1}{2}.$$

In Betreff des Elasticitätsmoduls der verschiedenen Baumaterialien muß auf die in Thl. I enthaltenen Angaben verwiesen werden; es möge hier nur

Fig. 132.



bemerkt werden, daß man als höchste zulässige Zugspannung s_z und Druckspannung s_d für die verschiedenen hauptsächlich verwendeten Materialien etwa die folgenden Werthe*) annehmen kann:

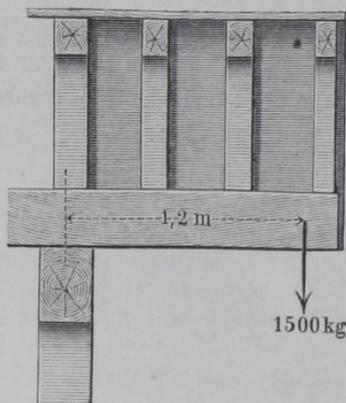
*) Vergl. Deutsches Bauhandbuch. Berlin 1874, S. 235.

Höchstens zulässige Spannung pro Quadratmillimeter
in Kilogrammen.

Baumaterial	Elasticitäts- modul E	Construction mit wenig Erschütte- rungen (Dächer)		Constructionen mit bedeutenden Erschütte- rungen (Brücken)	
		Zug- spannung s_z	Druck- spannung s_d	Zug- spannung s_z	Druck- spannung s_d
		Schmiedeeisen . . .	20 000	13,4	13,4
Eisenblech	18 000	12,0	—	6,0	—
Eisendraht	22 000	21,5	—	10,7	—
Gusseisen	10 000	4,0	7	2,7	4,8
Eichenholz	1 200	1,6	1,4	0,8	0,8
Nadelholz	1 300	2,0	1,5	1,0	0,75

Beispiele: Für eine Speicherwinde ist ein hölzerner Auslegerarm anzuordnen, welcher aus der Aufwindelule, Fig. 133, um 1,2 m herausragt und am freien Ende einer Belastung von $K = 1500$ kg unterworfen ist. Wie hoch hat man die Höhe h des rechteckigen Querschnitts dieses Armes zu machen, wenn die Breite b gleich 180 mm gewählt wird, und die spezifische Faserspannung den Werth 0,8 kg nicht überschreiten soll?

Fig. 133.



Hier hat man, dem Fall (1) entsprechend:

$M_{max} = Kl = 1500 \cdot 1200$ mmkg,
und da für den rechteckigen Querschnitt das Trägheitsmoment

$$T = \frac{bh^3}{12} \text{ und } \frac{T}{e} = \frac{bh^2}{6}$$

ist, so folgt mit $s = 0,8$ nach der Gleichung I

$$1500 \cdot 1200 = 0,8 \frac{180h^2}{6},$$

woraus

$$h = \sqrt{\frac{60\,000}{0,8}} = \sqrt{75\,000} = 274,$$

wofür rund 280 mm genommen werden kann. Nimmt man den Elastizitätsmodul des verwendeten Eichenholzes zu $E = 1200$, so erhält man die elastische Durchbiegung des Armes an seinem Ende zu

$$f = \frac{K}{3TE} l^3 = \frac{1500}{3 \frac{1}{12} 180 \cdot 280^3 \cdot 1200} 1200^3 = \frac{6000 \cdot 144}{18 \cdot 28^3} = 2,2 \text{ mm.}$$

2. Wie stark sind die hölzernen Stagenbalken für den Boden eines Speichers zu machen, dessen Nutzlast zu 600 kg und dessen Eigengewicht zu 250 kg pro Quadratmeter anzunehmen ist, wenn die einzelnen Balken 0,8 m von Mitte zu Mitte entfernt sind, und eine freie Länge von 5 m haben?

Die Belastung beträgt hier pro laufenden Meter $q = 0,8 (250 + 600) = 680$ kg, daher hat man das größte Biegemoment in der Mitte, wenn die Balken an den Enden frei aufliegend angenommen werden:

$$M_{max} = \frac{680 \cdot 5}{8} = 5 \text{ mkg.}$$

Nimmt man eine Breite der Balken $b = 0,18$ m und eine zulässige Spannung $s = 1$ kg an, so folgt die erforderliche Balkenhöhe h in Millimetern aus

$$s \frac{b h^2}{6} = 1 \frac{180}{6} h^2 = \frac{680 \cdot 5}{8} = 5000 \text{ zu } h = 265 \text{ mm.}$$

Die Durchsenkung in der Mitte erhält man unter Zugrundelegung eines Elastizitätsmoduls für Tannenholz von $E = 1300$ zu

$$f = \frac{5}{8} \frac{Q}{48TE} l^3 = \frac{5}{8} \frac{680 \cdot 5}{48 \frac{1}{12} 180 \cdot 265^3 \cdot 1300} 5000^3 = 15,3 \text{ mm.}$$

3. Die 3 m weite Einfahrt eines Wohnhauses soll durch einen schmiedeeisernen I-Träger überdeckt werden, dessen Dimensionen festzustellen sind. Die auf den Träger pro laufenden Meter entfallende Belastung setzt sich zusammen aus:

- 1) dem darauf ruhenden Mauerwerke von 10 m Höhe und durchschnittlich 2 Stein Stärke gleich $2 \cdot 10 \cdot 220 = 4400$ kg;
- 2) dem Gewichte von zwei Zwischenböden von je 2,5 m Länge à 300 kg pro Quadratmeter gleich $2 \cdot 2,5 \cdot 300 = 1500$ kg;
- 3) dem Gewichte der auf den Träger entfallenden Dachfläche mit $2,5 \cdot 250 = 625$ kg.

Die gesammte Belastung pro Meter beträgt $q = 6525$ kg oder für den Träger von 3 m Länge

$$Q = 3 \cdot 6525 = 19\,575 = \text{rot } 20\,000 \text{ kg.}$$

Wenn der Balken an seinen Enden wegen der Einmauerung als un wandelbar befestigt angesehen wird, so erhält man, entsprechend der unter (6) angeführten Belastungsart, das größte Moment an den Einmauerungsstellen:

$$M_{max} = \frac{Ql}{12} = \frac{20\,000 \cdot 3}{12} = 5000 \text{ mkg.}$$

Soll nun der gewalzte Träger eine Höhe $h = 300$ mm erhalten, und sieht man von der Tragfähigkeit der Mittelrippe ab, so kann man, unter b die Breite und unter d die Dicke jedes der beiden Flanschen verstanden, $\frac{T}{e} = h b d$ setzen (s. weiter unten §. 45), und man erhält mit $s = 8$ kg aus

$$8 \cdot 300 \cdot b d = 5000 \cdot 1000$$

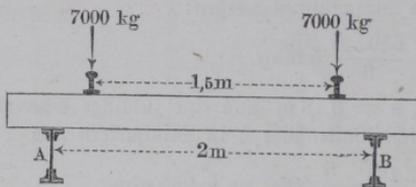
den Flanschenquerschnitt $b d = 2083$ qmm. Setzt man eine Dicke der Flanschen $d = 16$ mm voraus, so erhält man daher die erforderliche Breite

$$b = \frac{2083}{16} = 130 \text{ mm}$$

(s. über gewalzte I-Träger auch §. 45).

4. Wenn auf einer Brücke die Eisenbahnschwellen auf sogenannten Schwellenträgern A, B , Fig. 134, aufrufen, deren Abstand 2 m beträgt, wie stark wird

Fig. 134.



man die 0,25 m breiten eichenen Schwellen zu machen haben, wenn die größte Belastung einer Schwelle durch darüber stehende Triebräder einer Locomotive von je 7000 kg Gewicht ausgeübt wird, und die Entfernung der Schienen von Mitte zu Mitte 1,5 m beträgt? Hier hat man, entsprechend der unter (9) ange-

gebenen Belastungsart $l_1 = 1,5$ und $l_2 = 0,25$ m, daher

$$M_{max} = K l_2 = 7000 \cdot 0,25 = 1750 \text{ mkg},$$

somit folgt bei einer zulässigen Spannung $s = 0,8$ kg die gesuchte Höhe h aus $0,8 \frac{1}{6} 250 h^2 = 1750 \cdot 1000$ zu

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 1750 \cdot 1000}{0,8 \cdot 250}} = \sqrt{52 \cdot 500} = 229 \text{ mm} = \text{rot } 230 \text{ mm}.$$

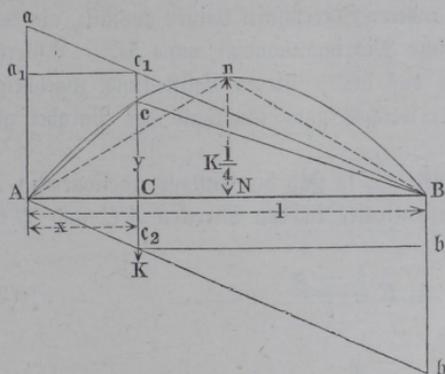
Mit einem Elasticitätsmodul $E = 1200$ erhält man die Durchbiegung in der Mitte der Schwelle

$$f = \frac{K l_2}{T E} \left(\frac{l_1^2}{8} + \frac{l_1 l_2}{2} + \frac{l_2^2}{3} \right) = \frac{7000 \cdot 250}{\frac{1}{12} 250 \cdot 230^3 \cdot 1200} \left(\frac{1500^2}{8} + \frac{1500 \cdot 250}{2} + \frac{250^2}{3} \right) \\ = \frac{0,07}{23^3} 489 \cdot 580 = 2,8 \text{ mm}.$$

§. 36. **Bewegliche Belastung.** Die vorstehend gemachten Angaben über die Größe der Momente und Schubkräfte von Balken beruhen auf der Annahme einer ruhenden Belastung. Bei sehr vielen Ausführungen, so insbesondere bei allen Brückenträgern, kommt indessen der Fall vor, daß gewisse Belastungen über den Balken in seiner Längsrichtung verschoben werden, und es ist leicht ersichtlich, daß mit einer solchen Verschiebung der Belastung die Größe der Biegemomente sowie der Scheerkräfte für jeden Punkt des

Balkens einer Veränderung unterworfen sein muß. Es ist daher, behufs der Herstellung einer stabilen Construction erforderlich, für jeden Querschnitt des Balkens diejenige Laststellung zu kennen, welche für diesen Querschnitt die ungünstigste Beanspruchung, d. h. den größtmöglichen Werth des Momentes M und der Schubkraft V hervorruft.

Fig. 135.



Es sei zu dem Ende wieder AB , Fig. 135, ein auf zwei Stützen A und B frei aufliegender Balken, auf welchem in C , im Abstände x von A , die concentrirte Last K einwirkt. Dieselbe erzeugt in C das Biegemoment

$$\begin{aligned} M_c &= K \frac{AC \cdot BC}{AB} \\ &= K \frac{x(l-x)}{l}, \quad (1) \end{aligned}$$

und man erhält, wenn man diese Größe gleich Ce aufträgt, in dem Dreiecke AeB die Momentenfläche des Balkens für diese Belastung. Es ist klar, daß für diese Belastung das größte Moment in der Verticalebene durch C auftritt, in welcher die Kraft wirkt, und da die getroffene Wahl des Kraftangriffes C beliebig ist, so wird die obige Bemerkung für jede Lage der Kraft K gelten, d. h. es wird bei einer Verschiebung der Belastung K das größte zugehörige Biegemoment immer in demjenigen Querschnitte auftreten, in welchem die Kraft angreift. Selbstredend ist der Werth dieses größten Momentes

$$M = K \frac{x(l-x)}{l}$$

mit der Verschiebung der Last veränderlich, und man erkennt aus der vorstehenden Gleichung

$$M = y = Kx - \frac{K}{l} x^2,$$

daß bei der Verschiebung der Last von A nach B der Endpunkt e der das Moment darstellenden Ordinate Ce eine Parabel AeB beschreibt, deren Scheitel in der Mitte N zwischen A und B , also für $x = \frac{l}{2}$ die Ordinate

$$M_n = K \frac{l}{4} \text{ hat.}$$

Zeichnet man diese Parabel AnB , so erhält man für jeden beliebigen Punkt C mit der Abscisse x in der Ordinate y das Maß für das größtmögliche durch K in C hervorgerufene Moment, welches mit $\max M_x$ bezeichnet sein mag. Es folgt auch, daß in der Mitte N das absolut größte Moment $\max M$ eintritt, welches die Last K überhaupt in dem Balken erzeugt, und zwar bei ihrer mittleren Stellung, bei welcher Stellung jedoch das Biegemoment für jeden anderen Querschnitt kleiner ausfällt, als das diesem Querschnitte eigenthümliche Maximalmoment $\max M_x$. Letzteres erkennt man sofort, wenn man das der mittleren Laststellung zugehörige Momentendreieck AnB zeichnet, welches ganz innerhalb der Parabel gelegen ist.

Wirkt die Last K in dem Punkte C , so sind die Auflagerreactionen in A und B und daher auch die Verticalkräfte in den Strecken AC und BC , bezw. durch

$$R_a = A a_1 = K \frac{l - x}{l} \dots \dots \dots (2)$$

und

$$R_b = B b_2 = K \frac{x}{l} \dots \dots \dots (3)$$

gegeben. Trägt man daher in A und B die Strecken Aa und Bb nach dem Kräftemaßstabe gleich K auf, und vervollständigt das Parallelogramm $AaBb$, so erhält man für irgend eine Stellung der Kraft K in C durch die beiden Abschnitte Cc_1 und Cc_2 der Krafrichtung zwischen der Axe AB und den beiden geneigten Parallelogrammseiten die Größen der Schubkräfte für die Balkenstrecken beiderseits von K , denn es ist alsdann:

$$C c_1 = K \frac{l - x}{l} = R_a$$

und

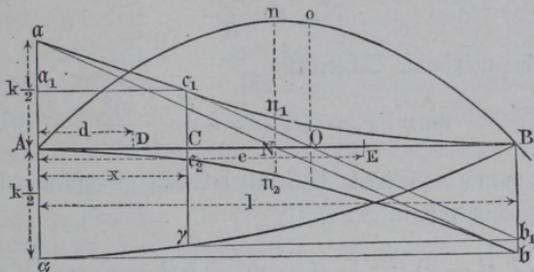
$$- C c_2 = K \frac{x}{l} = R_b.$$

Die beiden Geraden Ab und Ba geben daher über die Schubkraft im Balken für jede beliebige Stellung der Last Aufschluß.

Setzt man ferner voraus, daß die bewegliche Last nicht in einem Punkte concentrirt, sondern der Länge nach gleichmäßig vertheilt und pro Längeneinheit gleich k sei, wie dies etwa für einen Eisenbahnzug angenommen werden kann, welcher über eine Brücke fährt, so ist leicht zu ersehen, daß das größte Biegemoment für irgend welchen Querschnitt C , Fig. 136, sich dann einstellt, wenn der Träger seiner ganzen Länge l nach mit der gleichmäßigen Last bedeckt ist. Denn wo man sich auch ein Belastungselement $k \partial x$ denken mag, in D oder E , immer wird dasselbe, wie jede isolirte Belastung, in dem Querschnitte C ein positives

Biegemoment hervorrufen, und daher wird das größte Moment in *C* sowie in jedem anderen Querschnitte erzeugt werden, sobald sämtliche Balkenelemente belastet sind. Daher ergibt die Parabel *AnB* mit der Scheitelordinate $Nn = k \frac{l^2}{8}$ in der Mitte, welche als Momentenfläche für eine ruhende gleichmäßig vertheilte Last kl gilt, in allen ihren Ord-

Fig. 136.



naten auch das Maximum der Momente, die in den zugehörigen Querschnitten durch die bewegliche Belastung k erzeugt werden können.

Anders verhält es sich mit den größten Werthen der Scheerkraft. Man erkennt nämlich, daß in Betreff irgend eines Punktes, wie *C*, jede Belastung eines Elementes zwischen *C* und *B*, z. B. in *E*, einen Zuwachs der Reaction R_a und somit der Scheerkraft in *C* hervorbringt, während die Belastung eines Elementes, wie *D*, zwischen *C* und *A* die Schubkraft in *C* vermindert. Durch eine derartige elementare Belastung $k \partial x$ in *E* wird nämlich die Reaction R_a , also auch die Scheerkraft in *C* um

$$k \partial x \frac{l - e}{l},$$

also um eine positive Größe vermehrt, während diese Belastung in *D* einen Beitrag zur Scheerkraft in *C* von

$$k \partial x \frac{l - d}{l} - k \partial x = - k \partial x \frac{d}{l},$$

also eine negative Größe liefert. Daraus geht hervor, daß man in *C* die größte positive Schubkraft $\max V_c$ erhält, wenn die Strecke $l - x$ von *C* bis *B* mit der Last bedeckt ist. Die Größe dieses Maximums ergibt sich dann zu

$$R_a = k (l - x) \frac{l - x}{2l} = \frac{k}{2l} (l - x)^2 \dots (4)$$

Denkt man sich diese Werthe für alle Querschnitte berechnet und nach

dem Kräftemaßstabe als Ordinaten, wie Cc_1 , in C aufgetragen, so erhält man für die Maxima der positiven Scheerkräfte als Begrenzungslinie die Parabel a_1B mit verticaler Aze, deren Scheitel in B liegt, und deren Ordinate in A für $x = 0$ zu

$$V_a = \frac{k l}{2}$$

sich bestimmt. Die Schubkraft in der Mitte ist

$$Nn_1 = \frac{k l}{8}.$$

Wenn in C die maximale Scheerkraft

$$\max V_c = Cc_1 = k \frac{(l-x)^2}{2 l}$$

auftritt, d. h. wenn die Strecke CB mit der Last gleichförmig bedeckt ist, so hat man die Schubkraft in B :

$$R_b = R_a - k(l-x) = \frac{k}{2l}(l-x)^2 - k(l-x) = \frac{k}{2l}x^2 - \frac{kl}{2}. \quad (5)$$

Wenn man daher diese (negative) Größe in B abwärts gleich Bb_1 anträgt, b_1 mit c_1 durch eine Gerade verbindet, und durch c_1 die Horizontale c_1a_1 zieht, so erhält man, wie leicht ersichtlich ist, in der Fläche $Aa_1c_1Ob_1B$ das Diagramm für die Scheerkräfte des Balkens in dem betrachteten Zustande einer Belastung der Strecke BC . Der Schnittpunkt O , in welchem hierbei die Schubkraft gleich Null ist, legt dann den Querschnitt fest, in welchem, gleichfalls bei der gedachten Belastung, das größte Biegemoment auftritt, welches letztere jedoch nach dem Vorstehenden denjenigen Werth Oo noch nicht erreicht hat, den das Biegemoment in O im ungünstigsten Falle, d. h. bei voller Belastung des Balkens erreichen kann.

Es mag bemerkt werden, daß, wenn man die Größe der Schubkraft in B

$$Bb_1 = \frac{k}{2l}x^2 - \frac{kl}{2}$$

in C abwärts gleich $C\gamma$ anträgt, und diese Construction für alle Querschnitte ausgeführt denkt, die so erhaltenen Punkte γ eine Parabel $\alpha\gamma B$ mit verticaler Aze festlegen, deren Scheitel α um $\frac{kl}{2}$ unter A gelegen ist, und welche Parabel dazu dienen kann, das Schubkraftdiagramm für irgend welche Belastung des Balkens zu zeichnen.

Eine ganz analoge Betrachtung, wie sie vorstehend zur Ermittlung der größten positiven, d. h. aufwärts gerichteten Scheerkraft angestellt worden ist, gilt auch hinsichtlich der größten negativen (abwärts wirkenden) Schubkraft, und man erhält dieselbe offenbar für irgend einen Querschnitt C in

demjenigen Belastungszustande, in welchem die Strecke zwischen C und A mit der Belastung kx bedeckt ist. Es bedarf keines näheren Beweises, daß man durch eine derartige Betrachtung zu einer Parabel An_2b gelangt, welche für jeden Punkt C in ihrer Ordinate Cc_2 das Maximum der negativen Schubkraft des Querschnittes C ergibt. Diese Parabel, deren Axe ebenfalls vertical ist, hat in A ihren Scheitel und ihre Ordinate in B ist gleich $Bb = k \frac{l}{2}$. Für diese Linie, sowie für die Verzeichnung der Schubkraftdiagramme gelten die nämlichen Bemerkungen, welche für die Maxima der positiven Scherkräfte hinsichtlich der Parabel a_nB gemacht wurden. Es ist auch klar, daß, wenn man für irgend welchen Querschnitt C einmal die der größten positiven Schubkraft zukommende Belastung der Strecke BC und ein anderes Mal die der größten negativen Scherkraft angehörige Belastung der Strecke AC voraussetzt, und die beiden Diagramme mit einander vereinigt, als Resultat das für die gleichförmig über den ganzen Balken vertheilte ruhende Belastung kl der Fig. 126 geltende Diagramm erhalten wird.

In Wirklichkeit sind die Brückenträger sowohl einer ruhenden oder permanenten Belastung durch das Eigengewicht der Construction, als auch einer beweglichen oder Verkehrsbelastung ausgesetzt. Es handelt sich daher darum, für jeden Querschnitt die ungünstigste Anstrengung zu ermitteln, welche aus diesen beiden Belastungen resultirt. Hierbei kann man in der Regel die permanente Belastung als eine gleichmäßig über die Länge vertheilte ansehen, und es möge dieselbe im Folgenden gleich p Kilogramm per Längeneinheit (1 m) angenommen werden. Die bewegliche Belastung kann entweder eine in einem Punkte concentrirte Last K sein, wie dies etwa bei einem über eine Brücke fahrenden Frachtwagen angenommen werden darf, dessen Gewicht man in seinem Schwerpunkte concentrirt denkt, oder die bewegliche Last ist ebenfalls als gleichmäßig vertheilt zu denken. Die letztere Annahme, welche z. B. für die Belastung durch ein Menschengebränge zutrifft, wird meistens auch dann zu Grunde gelegt, wenn die Verkehrslast aus einer Reihe auf einander folgender Einzellasten besteht, wie dies beispielsweise bei einem Eisenbahnzuge der Fall ist, dessen einzelne Axen ebenso vielen concentrirten Kräften entsprechen. Für diesen Fall pflegt man meistens mit Rücksicht auf das in §. 34 hierüber Gesagte die wirkliche Belastung durch den Eisenbahnzug durch eine entsprechende gleichmäßig vertheilte Last zu ersetzen, eine Annahme, die um so mehr zulässig ist, je länger der Träger in Bezug auf die Entfernung der Axen von einander ist.

Es sei AB , Fig. 137 (a. f. S.), ein Träger von der Länge l , welcher durch das Eigengewicht der Construction mit dem Betrage pl belastet ist, so stellt nach dem Vorstehenden die Parabel An_1B die Momente und

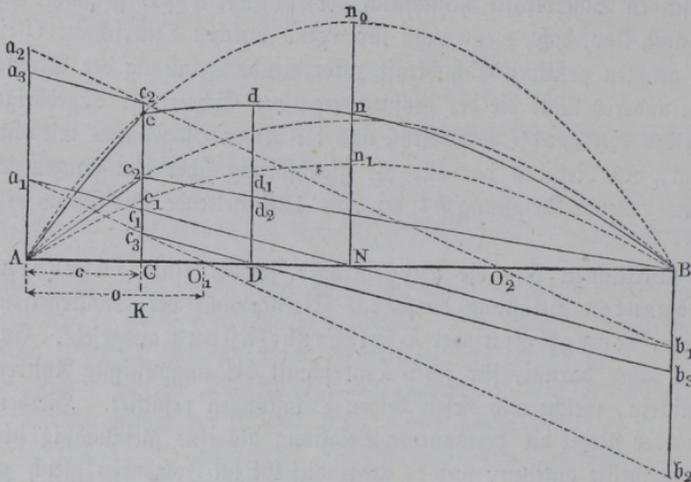
die Gerade $a_1 b_1$ die Schubkräfte für alle Querschnitte des Trägers vor, wenn

$$N n_1 = p \frac{l^2}{8} \text{ und } A a_1 = B b_1 = p \frac{l}{2}$$

ist. Denkt man sich nun die concentrirte Belastung K über A hereintretend, bis C im Abstände $AC = c$ von A bewegt, so erhält man, wenn

$$C c_2 = K \frac{c(l-c)}{l}$$

Fig. 137.



gemacht wird, in dem Dreiecke $A c_2 B$ das Diagramm für die durch K hervorgerufenen Momente in jedem Punkte des Trägers. Wenn man nunmehr die beiden Diagramme $A n_1 B$ und $A c_2 B$ durch Addition ihrer Ordinaten vereinigt, indem man für jeden Punkt wie C

$$C c = C c_1 + C c_2$$

macht, so liefert die entstehende Curve $A c n B$ das Diagramm für das resultierende Moment, welches in jedem Punkte durch die vorausgesetzte Belastung $p l$ und K in C erzeugt wird. Es ist leicht, nach dem Vorhergegangenen zu erkennen, daß diesem Belastungszustande auch das größte Moment $C c$ entspricht, welches bei der Ueberführung der Last in dem Querschnitte C jemals erzeugt werden kann. Wenn man daher durch A, c_2 und B die Parabel für die Maximalmomente von K zeichnet, deren Gleichung (1) nach dem Vorstehenden durch

$$y_2 = K \frac{x(l-x)}{l} = K x - \frac{K}{l} x^2$$

gegeben ist, so erhält man durch die Vereinigung der beiden Parabeln An_1B und Ac_2B eine neue Parabel An_0B , welche für jeden Querschnitt das größtmögliche Moment darstellt, das in demjenigen Augenblicke auftritt, in welchem die bewegliche Last K diesen Querschnitt erreicht hat. Diese Parabel muß daher auch den Punkt c in sich aufnehmen. Da die Ordinaten der Parabel An_1B durch

$$y_1 = p \frac{l}{2} x - p \frac{x^2}{2} = \frac{p}{2} (lx - x^2) \dots (6)$$

ausgedrückt sind, so hat man diejenigen der resultirenden Parabel An_0B gleich

$$y = y_1 + y_2 = \left(\frac{p}{2} + \frac{K}{l} \right) (lx - x^2) \dots (7)$$

Man erkennt hieraus, daß man für die Maximalmomente dieselben Werthe erhält, welche sich für einen Träger ergeben würden, welcher einer gleichmäßig vertheilten Belastung von der Größe

$$q = p + 2 \frac{K}{l}$$

pro Längeneinheit ausgesetzt wäre.

Ebenso findet sich die Schubkraft in C als die algebraische Summe der beiden Schubkraftcomponenten, welche durch die gleichmäßig vertheilte Belastung pl und durch die Einzelkraft K erzeugt werden. Diese Componenten sind bekanntlich durch

$$V_1 = p \left(\frac{l}{2} - c \right) \text{ und } V_2 = K \frac{l - c}{l}$$

ausgedrückt. Macht man daher $Aa_1 = Bb_1 = p \frac{l}{2}$ und zieht a_1b_1 , so erhält man in Cc_1 das Maß für

$$V_1 = p \left(\frac{l}{2} - c \right).$$

Wenn man ferner $a_1a_2 = b_1b_2 = K$ anträgt, und a_2b_1 sowie a_1b_2 zieht, so erhält man in c_1c_2 die Reaction in A oder die Schubkraft

$$V_2 = K \frac{l - c}{l},$$

welche durch K in der Strecke AC erzeugt wird, so daß $Cc_2 = V$ die ganze Scheerkraft in C bedeutet.

Offenbar wird auch diese Scheerkraft für C zu einem Maximum, wenn die Kraft K in diesem Querschnitte wirkt. Da diese Betrachtung für jeden anderen Querschnitt ebenso gilt, wie für denjenigen durch C , so kann man

das Viereck $A a_2 b_1 B$ als das Diagramm für die Schubkräfte ansehen, welche bei einer Bewegung der Last K über den Träger in der links von der Last befindlichen Strecke auftreten. Es ist ebenso zu erkennen, daß die Gerade $a_1 b_2$ in gleicher Art die Schubkraft in dem rechts von K befindlichen Balkentheile angiebt. Zieht man ferner durch c_2 und c_3 zu $a_1 b_1$ die Parallelen $c_2 a_3$ und $c_3 b_3$, so erhält man durch $A a_3 c_2 c_3 b_3 B$ die graphische Darstellung der Schubkräfte in jedem Querschnitte für den Fall, daß die Last K bis zu dem Punkte C vorgerückt ist. Man erkennt hieraus, daß in dem Durchschnittspunkte D dieses Diagramms mit der Axe AB die Schubkraft gleich Null ist, und daß diesem Querschnitte D daher das Maximalmoment Dd zukommt, welches durch die vorausgesetzte Belastung in dem Balken hervorgerufen wird. Eine Betrachtung der Figur lehrt nun ohne Weiteres Folgendes. Wenn die Last K von links kommend den Stützpunkt A erreicht, findet sich das größte Biegemoment Nn_1 in der Mitte N des Balkens. Bei weiterem Vorrücken der Last K nach rechts geht der Punkt, in welchem das größte Moment sich einstellt, der Last K entgegen, und ist z. B. nach D gelangt, sobald K nach C getreten ist, bis dieser Punkt mit der Last in O_1 zusammenfällt. Bei weiterer Bewegung der Last nach rechts fällt der Punkt des Maximalmomentes stets mit dem Angriffspunkte von K zusammen, bis beide durch die Mitte N hindurch nach dem Punkte O_2 gelangt sind. Wird die Last noch weiter bewegt, so kehrt der Punkt des Maximalmomentes seine Bewegung um und erreicht die Mitte N , sobald K den jenseitigen Stützpunkt B erreicht hat. Die Ähnlichkeit dieses Vorganges mit dem in §. 26 bei der unsymmetrischen Belastung der Gewölbe untersuchten fällt in die Augen. Es ist auch aus der Figur leicht die Entfernung $AO_1 = o$ des Punktes O_1 zu bestimmen, bis zu welchem die Verschiebung des Maximalmomentes nach jeder Seite der Mitte stattfindet, wenn man die beiden Schubkräfte einander gleichsetzt, die in diesem Punkte durch die gleichmäßig vertheilte Belastung pl und durch die Einzellast K in O_1 erzeugt werden. Diese Gleichsetzung liefert:

$$p \left(\frac{l}{2} - o \right) = K \frac{o}{l},$$

woraus

$$o = \frac{1}{2} \frac{p l^2}{K + p l} \dots \dots \dots (8)$$

folgt. Dieses Maximalmoment in O ist dann

$$M_0 = \frac{p}{2} (l o - o^2) + K o \frac{l - o}{l} \dots \dots \dots (9)$$

Ebenso findet sich für die Stellung der Kraft K in C der Abstand $AD = d$ für den Querschnitt des Maximalmomentes durch

$$p \left(\frac{l}{2} - d \right) = K \frac{c}{l}$$

zu

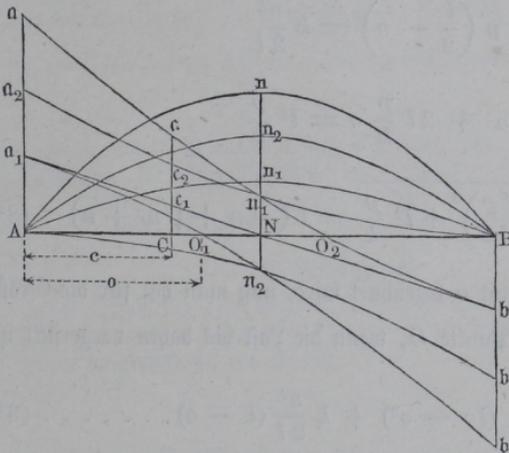
$$d = \frac{l}{2} - \frac{K}{pl} c, \dots \dots \dots (10)$$

welche Gleichung nach dem Vorstehenden nur für eine Größe von c gilt, die kleiner als o ist. Das Moment an dieser Stelle, im Abstände d von A , ist dann ausgedrückt durch

$$M_d = \frac{p}{2} (ld - d^2) + Kc \frac{l - d}{l} \dots \dots \dots (11)$$

Wenn die bewegliche Last ebenfalls als eine gleichmäßig über die Länge vertheilte von der Größe k pro Längeneinheit anzusehen ist, so folgt aus dem Vorstehenden ohne Weiteres, daß in jedem Querschnitte des Balkens

Fig. 138.



das größte Moment eintritt, sobald die bewegliche Last die ganze Trägerlänge bedeckt.

Wenn man daher in Fig. 138 die beiden Parabeln An_1B und An_2B , deren Pfeilhöhen bezw. durch

$$Nn_1 = \frac{pl^2}{8}$$

und

$$Nn_2 = \frac{kl^2}{8}$$

gegeben sind, vereinigt, so erhält man in der resultirenden Parabel

AnB , deren Pfeilhöhe $Nn = (p + k) \frac{l^2}{8}$ ist, die Curve für das Maximummoment in jedem Querschnitte. Die größte Schubkraft in irgend einem Querschnitte C wird dagegen wieder stattfinden, wenn die Strecke BC mit der Last $k(l - c)$ bedeckt ist, und zwar erhält man die Curve $a_n_1O_2b_1$ für die größten Schubkräfte durch Vereinigung der Geraden a_1b_1 , welche dem Eigengewichte pl entspricht, mit der Parabel a_2n_1B , welche nach dem Vorstehenden die größten durch die bewegliche Last erzeugten Schubkräfte ergibt, und deren Scheitel in B liegt, während die Ordinate in A zu

$A a_2 = k \frac{l}{2}$ gefunden wurde. Die Schubkraft in C bestimmt sich nach (4) zu

$$V = C_c = C_{c_1} + C_{c_2} = p \left(\frac{l}{2} - c \right) + k \frac{(l - c)^2}{2l} \dots (12)$$

In gleicher Weise erhält man für die größten negativen Schubkräfte die Curve $a_1 O_1 n_2 b$ durch Vereinigung der Geraden $a_1 b_1$ mit der Parabel $A n_2 b_2$.

In Betreff der Lage des Maximalmomentes für eine bestimmte Laststellung und in Bezug auf die Verschiebung desselben aus der Mitte um $NO_1 = NO_2$, bei einer Ueberführung der Belastung über den Träger gelten ganz ähnliche Betrachtungen, wie sie zuvor für eine Einzellast angeführt worden sind. Die Größe dieser Verschiebung nach jeder Seite $NO_1 = NO_2 = \frac{l}{2} - o$ bestimmt sich wieder durch Gleichsetzung der betreffenden entgegengesetzten Schubkräfte aus der Gleichung

$$p \left(\frac{l}{2} - o \right) = k \frac{o^2}{2l}$$

oder

$$o^2 + 2l \frac{p}{k} o = l^2 \frac{p}{k}$$

zu

$$o = -l \frac{p}{k} + \sqrt{l^2 \left(\frac{p}{k} \right)^2 + l^2 \frac{p}{k}} = l \left(-n + \sqrt{n^2 + n} \right) \dots (8^a)$$

wenn das Verhältniß $\frac{p}{k}$ mit n bezeichnet wird, und man hat für die Größe des Momentes in diesem Punkte O , wenn die Last bis dahin vorgerückt ist, ähnlich wie oben:

$$M_0 = \frac{p}{2} (l o - o^2) + k \frac{o^2}{2l} (l - o) \dots \dots \dots (9^a)$$

Innerhalb der Strecke $O_1 O_2$, in welcher bei der Bewegung der Last das Maximalmoment in der vorgedachten Art sich verschiebt, fällt die verticale Scherkraft je nach der Stellung der Last bald positiv bald negativ aus, während in den Querschnitten der Strecke $O_1 A$ stets nur positive (aufwärts gerichtete) und in denjenigen der Strecke $O_2 B$ stets nur negative (abwärts wirkende) Schubkräfte auf das rechts von der Querschnittsebene gelegene Balkenstück wirken. In welcher Weise diese Eigenschaft auf die Construction des Balkens innerhalb dieser Strecke $O_1 O_2$ von Einfluß ist, wird sich später aus der Betrachtung der Fachwerksträger ergeben.

Beispiel. Nimmt man für eine eingleisige Eisenbahnbrücke von $l = 32$ m das Eigengewicht der Brücke nach Schwedler (s. §. 34) zu $30l + 800 = 1760$ kg, also für jeden Träger 880 oder rund 900 kg pro Meter an, und setzt eine Ver-

Lehrkraft der Brücke von 5000 kg, also für jeden Träger $k = 2500$ kg voraus, so erhält man nach dem Vorstehenden folgende Resultate:

Das absolut größte Moment, welches sich in der Mitte des Trägers bei dessen voller Belastung einstellt, ist

$$M_{max} = (p + k) \frac{l^2}{8} = (0,9 + 2,5) \frac{32^2}{8} = 435,2 \text{ Meter-tonnen,}$$

und die größte Scheerkraft beträgt in diesem Falle über den Stützen

$$V_{max} = \pm (p + k) \frac{l}{2} = 3,4 \cdot 16 = 54,4 \text{ Tonnen.}$$

Die Entfernung o , bis auf welche sich das Maximalmoment beiderseits den Stützen in Folge der Lastbewegung nähert, beträgt nach (8a):

$$o = 32 \left[-\frac{0,9}{2,5} + \sqrt{\left(\frac{0,9}{2,5}\right)^2 + \frac{0,9}{2,5}} \right] = 10,85 \text{ m.}$$

Die Verschiebung des größten Momentes beträgt daher nach jeder Seite von der Mitte

$$\frac{l}{2} - o = 16 - 10,85 = 5,15 \text{ m.}$$

Ist die Last um die Länge $o = 10,85$ m über ein Auflager vorgerückt, so hat das Moment in dem Querschnitte an dieser Stelle nach (9a) den Werth:

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{p}{2} (lo - o^2) + k \frac{o^2}{2l} (l - o) = 0,45 (32 \cdot 10,85 - 10,85^2) + 2,5 \frac{10,85^2}{64} \cdot 21,15 \\ &= 103,275 + 97,237 = 200,5 \text{ Meter-tonnen.} \end{aligned}$$

Dieser Werth ist natürlich kleiner als das dem Punkte O zukommende Maximalmoment bei voller Belastung des Trägers

$$\begin{aligned} \max M_0 &= \frac{p+k}{2} (lo - o^2) = 1,7 (32 \cdot 10,85 - 10,85^2) \\ &= 390 \text{ Meter-tonnen.} \end{aligned}$$

Die Schubkraft des Trägers in der Mitte, welche bei voller Belastung zu Null wird, nimmt dagegen für den Fall, daß die Last um die Größe o über eine Stütze vorgerückt ist, den Werth

$$V = \pm k \frac{o^2}{2l} = 2,5 \frac{10,85^2}{64} = 4,6 \text{ Tonnen}$$

an. Die größte Schubkraft dagegen wird in der Mitte eintreten, wenn eine Hälfte der Brücke mit der Last bedeckt ist, und man hat hierfür nach (4):

$$V_{max} = \frac{k l}{8} = 2,5 \cdot 4 = 10 \text{ Tonnen u. s. w.}$$

Balken auf mehreren Stützen. Wenn ein Balken auf mehr als §. 37. zwei Stützen ruht, so sind die Auflagerreactionen in den einzelnen Stützpunkten aus den Bedingungen des Gleichgewichtes nicht ohne Weiteres zu ermitteln, denn diese beiden Bedingungen für ein System paralleler Kräfte $\Sigma P = 0$ und $\Sigma M = 0$ gestatten nur die Ermittlung von zwei unbekanntem Größen, genügen also zur Bestimmung der Auflagerreactionen

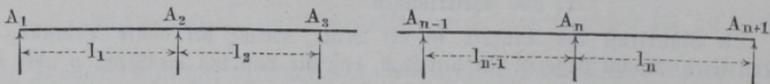
nur bei Balken auf zwei Stützen. Es sind daher bei beliebig vielen, etwa n Stützen, zu jenen beiden Gleichgewichtsbedingungen noch $n - 2$ Gleichungen erforderlich, wenn alle Auflagerreactionen und damit die Momente für alle Balkenquerschnitte bestimmt werden sollen. Diese Gleichungen lassen sich nur angeben, wenn man auf die Elasticitätsverhältnisse des Balkens, also auf dessen Biegung Rücksicht nimmt, während es unmöglich sein würde, die Auflagerdrücke für einen vollkommen starren, mehrfach gestützten Balken zu bestimmen. Man bedient sich zur Aufstellung der erforderlichen Bestimmungsgleichungen der von Navier aufgestellten Formel II^a in §. 35:

$$M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

indem man durch zweimalige Integration dieser Gleichung für jede der $n - 2$ Zwischenstützen zu ebenso vielen Bestimmungsgleichungen gelangt, welche mit den beiden allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittlung der n unbekanntenen Reactionen dienen. Diese Rechnung, welche in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 2 für mehrere Beispiele durchgeführt worden ist, führt zwar in jedem Falle zum Ziele, doch ist sie für mehrere Stützen ziemlich weitläufig. Man wendet daher mit Vortheil die von Clapeyron*) angegebene Methode der Berechnung an, welche eine directe Beziehung zwischen den Momenten über drei auf einander folgenden Stützen ergibt.

Es sei im Folgenden ein auf beliebig vielen Stützen $A_1, A_2, A_3 \dots$, Fig. 139, frei ausliegender Balken vorausgesetzt, und es seien mit $l_1, l_2, l_3 \dots$

Fig. 139.



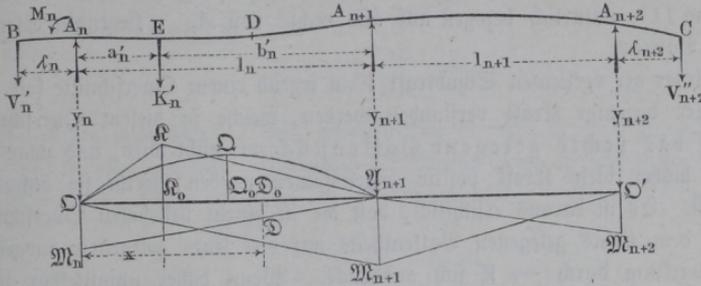
die horizontalen Entfernungen dieser Stützen von einander bezeichnet. Die verticalen Ordinaten dieser zunächst allgemein als in beliebiger Höhe liegend angenommenen Stützpunkte seien, auf eine willkürliche Horizontale bezogen, mit $y_1, y_2, y_3 \dots$ bezeichnet. Jede der Strecken soll einer gleichmäßig vertheilten Belastung ausgesetzt sein, welche pro Längeneinheit bzw. $q_1, q_2, q_3 \dots$ betragen möge, so daß also die n te Strecke zwischen A_n und A_{n+1} von der Länge l_n einer gleichmäßig vertheilten Belastung $Q_n = q_n l_n$ unterworfen ist. Außerdem möge der Balken noch einer beliebigen Anzahl concentrirter Belastungen K unterworfen sein, welche mit $K_1, K_2, K_3 \dots$ u. s. w. bezeichnet werden, so daß z. B. die n te Strecke durch die Kräfte $K'_n, K''_n \dots$

*) S. Comptes rendus, Dec. 1857.

angegriffen werden möge, deren Angriffspunkte bezw. um $a_n', a_n'' \dots$ von der Stütze A_n entfernt sind.

Dies vorausgesetzt, sei nun das Stück $A_n A_{n+1} A_{n+2}$, Fig. 140, des Balkens ins Auge gefaßt, welches die beiden Strecken l_n und l_{n+1} enthält.

Fig. 140.



Durch den Einfluß der links von A_n befindlichen Balkenstrecken und ihrer Belastungen wird in dem Querschnitte des Balkens, welcher unmittelbar vor der Stütze A_n in einem verschwindend kleinen Abstände $d\ell$ gelegen ist, eine zweifache Wirkung hervorgerufen; es wird nämlich daselbst auf das Balkenstück A_n eine verticale Schubkraft und ein Drehungsmoment ausgeübt, welches etwa in der Richtung des Pfeiles auf das Balkenende A_n wirken möge. Bezeichnet man dieses Moment, welches wegen der unendlich kleinen Entfernung $d\ell$ auch mit dem Momente über A_n übereinstimmt, mit M_n , und die verticale Schubkraft mit V_n' , so kann man sich die Schubkraft V_n' und das Moment M_n zu einer Resultirenden V_n' vereinigt denken, welche in B in solchem Abstände λ_n von A_n wirkt, daß man

$$V_n' \lambda_n = M_n$$

hat. Es ist daher klar, daß man den links von A_n befindlichen Theil des Balkens ganz beseitigt denken kann, ohne an dem Gleichgewichtszustande etwas zu ändern, vorausgesetzt nur, daß man den beseitigten Balkentheil durch die betreffende Verticalkraft V_n' im Abstände λ_n von A_n ersetzt. Die Größe dieser Kraft V_n' wird gefunden, wenn man die sämtlichen Belastungen aller beseitigten Balkenstrecken $l_1, l_2, l_3 \dots l_{n-1}$ addirt und die Summe aller Reactionen davon abzieht, mit welchen die Stützen $A_1, A_2 \dots A_{n-1}$ gegen den Balken aufwärts wirken. Bezeichnet man diese Reactionen mit $R_1, R_2, R_3 \dots$, so hat man also für die Schubkraft V_n' den Ausdruck:

$$V_n' = l_1 q_1 + \Sigma K_1 + l_2 q_2 + \Sigma K_2 \dots l_{n-1} q_{n-1} + \Sigma K_{n-1} - (R_1 + R_2 \dots R_{n-1}) \dots \dots \dots (1)$$

In derselben Weise kann man auch den rechts von A_{n+2} gelegenen Balkentheil fortgeschnitten denken, wenn man denselben ersetzt durch die in einem solchen Abstände $A_{n+2}C = \lambda_{n+2}$ wirkende Schubkraft V''_{n+2} , daß $V''_{n+2} \lambda_{n+2} = M_{n+2}$ ist, wenn unter M_{n+2} das Moment verstanden ist, welches durch den beseitigten Balkentheil in dem Querschnitte durch A_{n+2} erzeugt wird. Für die Größe der Schubkraft V''_{n+2} gilt ebenfalls die Gleichung (1), natürlich bezogen auf alle rechts von A_{n+2} liegenden Strecken des Balkens.

Unter der verticalen Schubkraft V in irgend einem Querschnitte soll hier immer diejenige Kraft verstanden werden, welche in diesem Querschnitte auf das rechts gelegene Balkenstück ausgeübt wird, und zwar soll wie bisher diese Kraft positiv angenommen werden, wenn sie aufwärts wirkt. Es ist daraus ersichtlich, daß die in einem beliebigen Querschnitte von dem rechts gelegenen Balkentheile auf den links gelegenen ausgeübte Einwirkung durch $-V$ sich ausdrückt. Wenn daher unmittelbar links neben einer Stütze A_n die Schubkraft durch V'_n und unmittelbar rechts davon durch V''_n ausgedrückt ist, so ergibt sich die Reaction R_n , mit welcher diese Stütze gegen den Balken wirkt, wegen des Gleichgewichts zwischen den drei Kräften V'_n , R_n und $-V''_n$ durch die Gleichung

$$R_n + V'_n - V''_n = 0$$

allgemein zu

$$R_n = V''_n - V'_n \dots \dots \dots (2)$$

in welcher Gleichung für V'_n und V''_n in dem oben gedachten Sinne je nach der Richtung der Schubkraft ein positiver oder negativer Werth anzunehmen ist.

Man nehme nun eine Horizontale DD' als Abscissenaxe für ein rechtwinkeliges Coordinatensystem an, dessen Y -Axe durch A_n hindurchgeht, und bezeichne mit α den Winkel, welchen die elastische Linie des belasteten Balkens in irgend einem Punkte mit dem Horizonte bildet, so hat man für die elastische Linie allgemein:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha = \alpha,$$

oder

$$\partial y = \alpha \partial x \dots \dots \dots (3)$$

wenn man wegen der Kleinheit dieses Winkels α für $\operatorname{tg} \alpha$ setzt. Mit Rücksicht hierauf schreibt sich nun die Navier'sche Gleichung:

$$M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = TE \frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

oder

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{M}{TE} \dots \dots \dots (4)$$

Die Gleichung (3) giebt nach der bekannten Methode der theilweisen Integration, wonach

$$\int u \partial v = uv - \int v \partial u \text{ ist,}$$

$$y = \alpha x - \int x \partial \alpha = \alpha x - \int x \frac{\partial \alpha}{\partial x} \partial x,$$

oder mit Rücksicht auf (4)

$$y = \alpha x - \int \frac{M}{TE} x \partial x \dots \dots \dots (5)$$

Berechnet man diesen Werth zwischen den Grenzen $x = 0$ in A_n und $x = l_n$ in A_{n+1} , wofür entsprechend der Winkel $\alpha = \alpha_n$ und $\alpha = \alpha_{n+1}$ sowie $y = y_n$ und $y = y_{n+1}$ ist, so erhält man:

$$y_{n+1} - y_n = \alpha_{n+1} l_n - \int_0^{l_n} \frac{M}{TE} x \partial x \dots \dots \dots (6)$$

Man denke sich nun ebenfalls für die $n + 1$ te Strecke $A_{n+1} A_{n+2}$ die Y -Axe durch A_{n+2} gelegt, so gilt auch hierfür die allgemeine Gleichung (5) und man hat für A_{n+2} die Werthe $x = 0$, $\alpha = \alpha_{n+2}$, und $y = y_{n+2}$, sowie für A_{n+1} ebenso $x = l_{n+1}$, $\alpha = -\alpha_{n+1}$ und $y = y_{n+1}$; daher erhält man zwischen diesen Grenzen aus (5):

$$y_{n+1} - y_{n+2} = -\alpha_{n+1} l_{n+1} - \int_0^{l_{n+1}} \frac{M}{TE} x \partial x \dots \dots (7)$$

Setzt man das Trägheitsmoment T für alle Querschnitte des Balkens als constant voraus, so erhält man aus (6) und (7) durch Addition nach vorheriger Reducirung mit l_n und l_{n+1} :

$$TE \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_{n+2}}{l_{n+1}} \right)$$

$$= -\frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} M x \partial x - \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} M x \partial x \dots \dots (8)$$

Die Werthe der beiden Integrale sind nun leicht geometrisch zu deuten. Denkt man sich für jeden beliebigen Punkt des Balkens nämlich das daselbst wirkende Kraftmoment M ermittelt und in der oben besprochenen Weise nach einem beliebigen Momentenmaßstabe als Ordinate über der Abscissenaxe DD' aufgetragen, so erhält man, wie früher schon angegeben, die sogenannte Momentenfläche. Es ist dann $M \partial x$ der Flächeninhalt des unendlich kleinen Streifens von der Breite ∂x , welchen die beiden Ordinaten im

Abstände x und $x + \partial x$ vom Anfangspunkte D bzw. D' , aus der Momentenfläche herauszuschneiden. Folglich ist $xM\partial x$ das statische Moment dieses Streifens, bezogen auf den Anfang der Coordinaten und daher drückt

$$\int_0^{l_n} Mx \partial x$$

das statische Moment der über der Strecke $A_n A_{n+1}$ construirten Momentenfläche in Bezug auf A_n aus, und ebenso stellt

$$\int_0^{l_{n+1}} Mx \partial x$$

das statische Moment der Momentenfläche über der Strecke $A_{n+1} A_{n+2}$ in Bezug auf A_{n+2} vor. Bezeichnet daher F den Inhalt einer solchen Momentenfläche und f den horizontalen Abstand ihres Schwerpunktes von dem betreffenden Stützpunkte A_n oder A_{n+2} , so kann man das Product Ff als den Werth des zugehörigen Integrals in (8) ansehen. Es kommt daher nur darauf an, die Momentenflächen für die beiden Strecken l_n und l_{n+1} zu bestimmen, und deren Schwerpunkte zu ermitteln. Das letztere kann ebensowohl durch Rechnung wie mit Hilfe der Zeichnung geschehen.

Die Bestimmung der Momentenflächen oder des Momentes M für jeden Balkenquerschnitt ist leicht vorzunehmen, wie die folgende Betrachtung lehrt. Das Moment M in irgend welchem Punkte D der Strecke $A_n A_{n+1}$ entspringt aus drei Wirkungen, nämlich aus denjenigen

- 1) der concentrirten Lasten K_n ,
- 2) der gleichmäßig vertheilten Last $Q_n = q_n l_n$ und
- 3) der Momente M_n und M_{n+1} , welche in den Stützen A_n und A_{n+1} durch die daselbst sich anschließenden Balkentheile hervorgerufen werden. Nach dem Vorstehenden können diese Momente so angesehen werden, als ob sie durch die Schubkraft V_n' und bzw. $-V_{n+1}''$ erzeugt werden, welche in den betreffenden Abständen λ_n und λ_{n+1} von A_n und A_{n+1} angreifen.

Man hat also die Momentenfläche für die Strecke $A_n A_{n+1}$ genau so zu bestimmen, wie für einen Balken, der in A_n und A_{n+1} frei aufliegt, und durch die Kräfte K_n , Q_n , V_n' und $-V_{n+1}''$ angegriffen wird. Dies geschieht nach dem in §. 35 Gesagten wie folgt:

1. Eine Kraft K_n' in E im Abstände a_n' von A_n und b_n' von A_{n+1} veranlaßt (s. Fig. 125) in E ein Moment von der Größe

$$\mathfrak{R} \mathfrak{R}_0 = K_n \frac{a_n' b_n'}{l_n},$$

und das Dreieck $\mathcal{D}\mathcal{R}\mathcal{A}_{n+1}$ stellt danach die Momentenfläche vor. Der Inhalt derselben ist

$$F_n' = \frac{1}{2} \mathcal{D}\mathcal{A}_{n+1} \times \mathcal{R}\mathcal{R}_0 = \frac{1}{2} l_n \frac{a_n' b_n'}{l_n} K_n' = \frac{a_n' b_n'}{2} K_n'.$$

Der Schwerpunkt dieser Fläche hat, wie man aus der Figur leicht findet, von A_n den Abstand

$$f_n' = \frac{l_n}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{l_n}{2} - a_n' \right) = \frac{l_n + a_n'}{3},$$

folglich hat man für diese Momentenfläche das statische Moment in Bezug auf A_n

$$F_n' f_n' = a_n' b_n' \frac{l_n + a_n'}{6} K_n'.$$

Denkt man sich diesen Ausdruck für alle concentrirten Kräfte $K_n', K_n'' \dots$ der Strecke l_n gebildet, und dies einfach durch das Summenzeichen Σ angedeutet, so ist

$$\Sigma a_n b_n \frac{l_n + a_n}{6} K_n = \mathcal{R}_n \dots \dots \dots (9)$$

derjenige Theil des Integrals $\int_0^{l_n} Mx \partial x$ der Gleichung (8), welcher von den concentrirten Belastungen der Strecke l_n herrührt. Ebenso würde

$$\Sigma a_{n+1} b_{n+1} \frac{l_{n+1} + b_{n+1}}{6} K_{n+1} = \mathcal{R}_{n+1} \dots \dots (10)$$

dieselbe Bedeutung für die Strecke l_{n+1} in Bezug auf den Stützpunkt A_{n+2} , d. h. für das Integral $\int_0^{l_{n+1}} Mx \partial x$ haben.

2. Der gleichförmig vertheilten Belastung $Q_n = q_n l_n$ entspricht nach §. 35 und Fig. 126 die Parabelfläche $\mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{A}_{n+1}$, deren Scheitelordinate $\mathcal{D}\mathcal{D}_0 = q_n \frac{l_n^2}{8}$ ist. Für diese Fläche hat man

$$F_n = \frac{2}{3} \mathcal{D}\mathcal{A}_{n+1} \times \mathcal{D}\mathcal{D}_0 = \frac{2}{3} l_n q_n \frac{l_n^2}{8} = q_n \frac{l_n^3}{12},$$

und da der Schwerpunkt in der Mitte liegt, ist hierfür

$$F_n f_n = q_n \frac{l_n^4}{24} = \mathcal{D}_n \dots \dots \dots (11)$$

derjenige Theil des Ausdrucks $\int_0^{l_n} Mx \partial x$, welcher von der gleichförmig ver-

theilten Belastung der Strecke l_n herrührt. Für die Strecke $A_{n+1}A_{n+2}$ hat man ebenso

$$Q_{n+1} \frac{l_{n+1}^4}{24} = \mathfrak{D}_{n+1} \dots \dots \dots (12)$$

3. Die Kraft V_n' , welche als Ersatz des linken Trägertheiles in A_n ein Moment $M_n = V_n' l_n = \mathfrak{D} M_n$ erzeugt, ruft in D im Abstände x von A_n ein Moment

$$\mathfrak{D}_0 \mathfrak{D} = \frac{l_n - x}{l_n} \mathfrak{D} M_n = \frac{l_n - x}{l_n} M_n$$

hervor, wie man sich ohne Weiteres überzeugt, wenn man sich $B A_n A_{n+1}$ als einen doppelarmigen Hebel vorstellt, an welchem die in B wirkende Kraft V_n' einen Gegendruck in A_{n+1} von der Größe

$$\frac{V_n' l_n}{l_n} = \frac{M_n}{l_n}$$

hervorruft, der in D ein Moment

$$M_n \frac{l_n - x}{l_n}$$

erzeugt. Die von dem Momente M_n für die Strecke l_n veranlaßten Momente sind daher durch das Dreieck $\mathfrak{D} M_n A_{n+1}$ dargestellt, dessen statisches Moment in Bezug auf A_n durch

$$M_n'' = \frac{1}{2} \mathfrak{D} M_n \cdot l_n \cdot \frac{1}{3} l_n = \frac{1}{6} M_n l_n^2 \dots \dots (13)$$

ausgedrückt ist. In gleicher Weise stellt das Dreieck $\mathfrak{D}' A_{n+1} M_{n+2}$ die Momentenfläche dar, welche den Einfluß des in A_{n+2} durch den rechtsseitigen Balkentheil ausgeübten Momentes M_{n+2} auf die Strecke l_{n+1} erzieht, und man erhält das statische Moment dieser Fläche in Bezug auf A_{n+2} zu

$$M_{n+2}' = \frac{1}{2} \mathfrak{D}' M_{n+2} \cdot l_{n+1} \cdot \frac{1}{3} l_{n+1} = \frac{1}{6} M_{n+2} \cdot l_{n+1}^2 \dots (14)$$

Wenn man ferner nach dem gewählten Momentenmaßstabe $A_{n+1} M_{n+1} = M_{n+1}$ macht, so sind die beiden Dreiecke $\mathfrak{D} A_{n+1} M_{n+1}$ und $\mathfrak{D}' A_{n+1} M_{n+1}$ die Flächen für diejenigen Momente, welche durch das Moment M_{n+1} der Stütze A_{n+1} in den Strecken l_n und bezw. l_{n+1} hervorgerufen werden. Nun hat das Dreieck $\mathfrak{D} A_{n+1} M_{n+1}$ in Bezug auf A_n das statische Moment

$$M_{n+1}' = \frac{1}{2} M_{n+1} \cdot \frac{2}{3} l_n^2 = \frac{1}{3} M_{n+1} l_n^2 \dots (15)$$

während das Dreieck $\mathfrak{D}' A_{n+1} M_{n+1}$ in Bezug auf A_{n+2} das statische Moment

$$M_{n+1}'' = \frac{1}{2} M_{n+1} \cdot \frac{2}{3} l_{n+1}^2 = \frac{1}{3} M_{n+1} l_{n+1}^2 \quad (16)$$

hat. Man erhält daher aus (13) und (15) die Größe

$$U_n = M_n'' + M_{n+1}' = \frac{l_n^2}{6} (M_n + 2 M_{n+1}), \quad (17)$$

welche den von den Momenten in A_n und A_{n+1} herrührenden Theil des

Integrals $\int_0^{l_n} Mx \, dx$ vorstellt, wie ebenso die Summe von (14) und (16)

$$U_{n+1} = M_{n+1}'' + M_{n+2}' = \frac{l_{n+1}^2}{6} (2 M_{n+1} + M_{n+2}) \quad (18)$$

den von den Stützmomenten M_{n+1} und M_{n+2} herrührenden Theil des

Integrals $\int_0^{l_{n+1}} Mx \, dx$ ergibt.

Setzt man nunmehr die Werthe aus (9) bis (12), sowie (17) und (18) für die beiden Integrale der Gleichung (8) ein, so geht dieselbe über in:

$$\begin{aligned} TE \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_{n+2}}{l_{n+1}} \right) &= - \frac{1}{l_n} (R_n + Q_n + U_n) \\ &- \frac{1}{l_{n+1}} (R_{n+1} + Q_{n+1} + U_{n+1}) = - \left(\sum a_n b_n \frac{l_n + a_n}{6 l_n} K_n + q_n \frac{l_n^3}{24} \right. \\ &+ \left. \sum a_{n+1} b_{n+1} \frac{l_{n+1} + a_{n+1}}{6 l_{n+1}} K_{n+1} + q_{n+1} \frac{l_{n+1}^3}{24} \right) \\ &- \frac{l_n}{6} (M_n + 2 M_{n+1}) - \frac{l_{n+1}}{6} (2 M_{n+1} + M_{n+2}); \end{aligned}$$

welche Gleichung sich auch schreiben läßt:

$$\begin{aligned} M_n l_n + 2 M_{n+1} (l_n + l_{n+1}) + M_{n+2} l_{n+1} &= \\ - 6 TE \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_{n+2}}{l_{n+1}} \right) - \sum a_n b_n \frac{l_n + a_n}{l_n} K_n \\ - \sum a_{n+1} b_{n+1} \frac{l_{n+1} + a_{n+1}}{l_{n+1}} K_{n+1} - q_n \frac{l_n^3}{4} - q_{n+1} \frac{l_{n+1}^3}{4} \quad (19) \end{aligned}$$

Wenn man in dieser Gleichung die concentrirten Lasten K wegläßt und ferner voraussetzt, daß sämmtliche Stützpunkte in einer Horizontalen liegen, d. h. daß $y_n = y_{n+1} = y_{n+2}$ ist, so erhält man die zuerst von Clapeyron aufgestellte Gleichung:

$$M_n l_n + 2 M_{n+1} (l_n + l_{n+1}) + M_{n+2} l_{n+1} = - \frac{q_n l_n^3 + q_{n+1} l_{n+1}^3}{4} \quad (20)$$

Die Gleichung (19) oder (20) gilt für jede Zwischenstütze eines auf beliebig vielen Stützen liegenden Trägers, man erhält daher bei n Stützen, also bei $n - 2$ Zwischenstützen, $n - 2$ Bedingungsgleichungen, welche zusammen mit den zwei allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen genügen, um die Momente $M_1, M_2 \dots M_n$ für die Stützpunkte zu berechnen.

Aus den so gefundenen Werthen der Momente in den Stützpunkten läßt sich dann auch das Biegemoment für jede beliebige Stelle des Trägers bestimmen, wie sich aus Folgendem ergibt. Um für den beliebigen Punkt D im Abstände x von A_n das Moment M zu bestimmen, denkt man wieder den links von A_n befindlichen Balkentheil durch die Verticalkraft V_n' in solchem Abstände λ_n von A_n ersetzt, daß

$$V_n' \lambda_n = M_n$$

ist. Nimmt man zunächst an, daß in der Strecke l_n concentrirte Lasten K nicht vorhanden sind, so hat man für den Punkt D das Moment

$$M = V_n' (\lambda_n + x) + R_n x - q_n \frac{x^2}{2} = M_n + (R_n + V_n') x - q_n \frac{x^2}{2}. \quad (21)$$

Für $x = l_n$ nimmt M den Werth M_{n+1} des Momentes über der Stütze A_{n+1} an, folglich hat man hierfür

$$M_{n+1} = M_n + (R_n + V_n') l_n - q_n \frac{l_n^2}{2}. \quad (22)$$

Aus (21) und (22) folgt durch Gleichsetzung der Werthe von $R_n + V_n'$ für das Moment M in dem beliebigen Abstände x von A_n :

$$M = M_n + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} x + \frac{q_n}{2} (l_n x - x^2). \quad (23)$$

Betrachtet man M als die Ordinate zur Abscisse x , so entspricht die Gleichung (23) einer Parabel mit verticaler Y -Achse, deren Scheitelabscisse x_0 sich dadurch bestimmt, daß für den Scheitel die Tangente horizontal ausfällt, also $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$ ist. Hiernach erhält man aus (23) diese Abscisse x_0 durch

$$0 = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} + q_n \frac{l_n}{2} - q_n x_0$$

zu

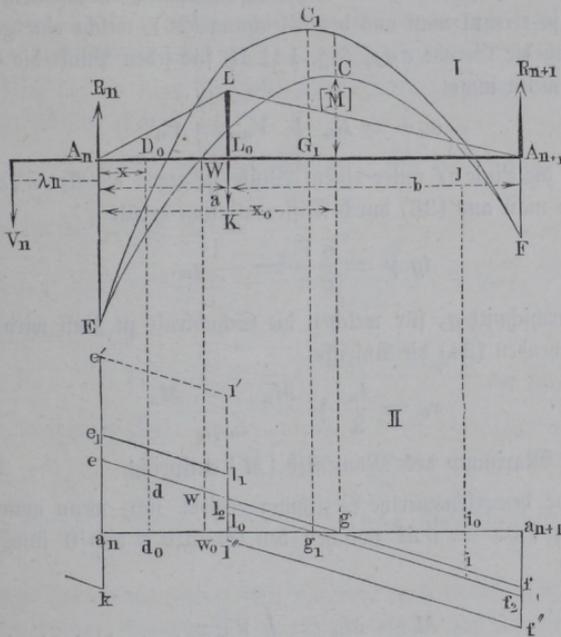
$$x_0 = \frac{l_n}{2} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n q_n}. \quad (24)$$

Setzt man diesen Werth von x_0 in (23) ein, so ergibt sich das größte Moment zwischen den Stützen A_n und A_{n+1} , welches durch $[M_n]$ bezeichnet werden soll, zu:

$$[M_n] = M_n + \frac{q_n}{2} \left(\frac{l_n}{2} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n q_n} \right)^2 = M_n + q_n \frac{x_0^2}{2} \dots (25)$$

Zeichnet man diese Parabel ECF , Fig. 141, für welche man außer den durch (24) und (25) bestimmten Ordinaten x_0 und $[M]$ des Scheitels C noch die beiden Punkte E und F durch ihre Ordinaten $A_n E = M_n$ und $A_{n+1} F = M_{n+1}$ kennt, so erhält man in der Fläche $A_n ECF A_{n+1}$ ein

Fig. 141.



deutliches Bild von der Inanspruchnahme der Strecke l_n durch biegende Momente. In W und J ist das Moment gleich Null, so daß die elastische Linie daselbst Wendepunkte zeigt, zu deren beiden Seiten der Balken nach den entgegengesetzten Richtungen gebogen wird.

Auch die Größe der Vertical- oder Sheerkraft ist leicht für jeden Punkt des Trägers zu bestimmen, wenn man mit Hilfe der Clapeyron'schen Formel (20) oder (19) die Momente über den Stützen gefunden hat. Für den beliebigen Punkt D_0 im Abstände $A_n D_0 = x$ von der Stütze A_n ist nach der Figur die verticale Schubkraft V gegeben durch die Gleichung:

$$V = V_n'' - q_n x = R_n + V_n' - q_n x \dots (26)$$

Zu demselben Ausdrucke gelangt man auch durch Differentiation der Gleichung (21), wodurch man erhält

$$\frac{\partial M}{\partial x} = R_n + V_n' - q_n x \dots \dots \dots (27)$$

entsprechend der schon früher angegebenen allgemeinen Beziehung:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \dots \dots \dots (28)$$

Betrachtet man, um auch die Schubkraft graphisch darzustellen, V als die Ordinate, so erkennt man aus der Gleichung (26), welche eine gerade Linie darstellt, daß die Gerade egf , Fig. 141 II, für jeden Punkt die Größe von V ergibt, wenn man

$$a_n e = R_n + V_n' = V_n''$$

macht, und die Linie ef unter einem Winkel γ gegen die Aze $a_n a_{n+1}$ zieht, für welchen man aus (26) durch Differentiation erhält

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\partial V}{\partial x} = -q_n \dots \dots \dots (29)$$

Der Durchschnitt g , für welchen die Schubkraft zu Null wird, hat nach dem Vorstehenden (24) die Abscisse

$$x_0 = \frac{l_n}{2} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n q_n},$$

welche dem Maximum des Momentes $[M]$ entspricht.

Noch eine bemerkenswerthe Beziehung ergibt sich, wenn man die Gleichung (28), $V \partial x = \partial M$ zwischen den Grenzen x und 0 integriert; man erhält dann

$$M - M_n = \int_0^x V \partial x \dots \dots \dots (30)$$

Da das Integral die Fläche $a_n e d d_0$ des Schubkraftdiagramms zwischen $x = 0$ für A_n und $x = A_n D_0$ bedeutet, so folgt hieraus, daß das Stück dieser Fläche zwischen irgend zwei Ordinaten als Maß für die Zunahme des Momentes M zwischen denselben Ordinaten angesehen werden kann. Es stellt daher beispielsweise das Trapez $a_n w_0 w e$ nach demselben Maßstabe das Moment M_n über der Stütze A_n vor, nach welchem das Moment $[M]$ in G durch das Dreieck $g w_0 w$ oder das ebenso große $g i_0 i$ ausgedrückt ist, und nach welchem das Trapez $a_{n+1} i_0 i f$ die Größe des Momentes M_{n+1} über der Stütze A_{n+1} ergibt.

Man erkennt aus der Figur auch die plötzliche Veränderung der Schubkraft V in den Stützpunkten. Während unmittelbar links von der Stütze

A_n , in unmeßbar kleinem Abstände davon, die auf das rechte Balkenstück abwärts gerichtete (negative) Schubkraft durch $V_n' = a_n k$ dargestellt ist, wird durch die Wirkung der in A_n vertical aufwärts wirkenden Auflagerreaction $R_n = k e$ unmittelbar rechts von A_n eine aufwärts wirkende (positive) Schubkraft auf das Balkenstück rechts ausgeübt von der Größe $a_n e = R_n + V_n' = V_n''$ [vergl. (2)]. Da also auch über dem Pfeiler die Schubkraft durch Null geht, so muß auch hier das Moment einen Maximalwerth annehmen, wenigstens so lange, als die Stütze A_n überhaupt einen Druck R_n auf den Balken ausübt, d. h. so lange der Balken daselbst wirklich aufricht und nicht etwa durch die Wirkung der übrigen Strecken ein Abheben des Balkens über dieser Stütze stattfindet.

Um endlich die Reaction R irgend einer Stütze zu finden, hat man aus (22) für die Stütze A_n :

$$R_n + V_n' = V_n'' = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} + q_n \frac{l_n}{2},$$

und ebenso für die Stütze A_{n+1} :

$$R_{n+1} + V_{n+1}' = V_{n+1}'' = \frac{M_{n+2} - M_{n+1}}{l_{n+1}} + q_{n+1} \frac{l_{n+1}}{2}.$$

Nun ist aber

$$V_{n+1}' = V_n'' - q_n l_n = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} - q_n \frac{l_n}{2},$$

und daher folgt nach (2):

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= V_{n+1}'' - V_{n+1}' \\ &= \frac{M_{n+2} - M_{n+1}}{l_{n+1}} - \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} + \frac{q_n l_n + q_{n+1} l_{n+1}}{2} \quad (31) \end{aligned}$$

Nach dem Vorstehenden kann man nunmehr auch den Einfluß beurtheilen, welchen concentrirte Belastungen K auf die Größe des Momentes und der Schubkraft an jeder Stelle ausüben. Es sei etwa in L_0 , Fig. 141, im Abstände a von A_n und b von A_{n+1} eine Last K wirkend, so vergrößert dieselbe in A_n den Stützendruck und also auch die Auflagerreaction R_n um $K \frac{b}{l_n}$. Die Schubkraft V_n'' ist daher um diesen Werth $K \frac{b}{l} = e e_1$ größer geworden. Da dieselbe Vergrößerung für alle Punkte zwischen A_n und L_0 gilt, so wird das Diagramm für die Schubkraft durch die Gerade $e_1 l_1$ dargestellt sein, welche durch e_1 parallel zu $e f$, also unter dem Winkel $\gamma = \text{arc tg } q_n$, gegen die Horizontale gelegt wird. In L_0 ändert sich dann die Schubkraft plötzlich um den Betrag $K = l_1 l_2$, und wenn man durch l_2 eine Parallele $l_2 f_2$ mit $e f$ zieht, so erhält man in deren Ordinaten die Schubkräfte zwischen L und A_{n+1} . In dem letztgenannten Punkte ist

die Schubkraft V'_{n+1} um das (negative) Stück ff_2 größer geworden, welches nach der Construction sich zu

$$l_1 l_2 - e_1 e = K - K \frac{b}{l} = K \frac{a}{l}$$

ergiebt, wie es dem Gesetze des Hebels auch entspricht.

Trägt man ferner in L_0 die Ordinate $L_0 L = K \frac{a b}{l_n}$ auf, so erhält man in dem Dreiecke $A_n L A_{n+1}$ bekanntlich die Momentenfläche, welche der Belastung durch K allein entspricht, und es ist dann leicht, durch algebraische Summirung der Ordinaten der Parabel ECF und des Dreiecks $A_n L A_{n+1}$ die resultirende Momentenfläche $EC_1 F$ zu erhalten. Es ergibt sich aus dem Vorhergegangenen, daß dem Scheitel C_1 dieser resultirenden Curve dieselbe Abscisse $A_n G_1$ zukommen muß, wie dem Punkte g_1 , in welchem die Axe $a_n a_{n+1}$ von der Begrenzung $e_1 l_1 l_2 f_2$ getroffen wird, d. h. in welchem die Schubkraft zu Null wird. Hieraus folgt auch, daß es ganz von der Größe der Kraft K abhängen wird, ob das Maximalmoment $[M]$ zwischen den Stützen in dem Angriffspunkte L_0 der Kraft K , oder zwischen L_0 und G auftreten wird. Den in der Figur zu Grunde gelegten Verhältnissen gemäß findet sich dieses Maximum von M in dem Punkte g_1 zwischen g und l_0 , es ist aber deutlich, daß bei einem vergrößerten K , welchem etwa das Schubkraftdiagramm $a_n e' l' l'' f'' a_{n+1}$ entspricht, das größte oder Bruchmoment der Strecke mit dem Angriffspunkte L_0 der concentrirten Last zusammenfällt.

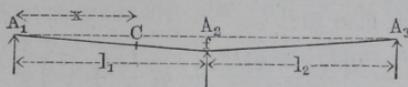
Die Wirkung einer concentrirten Belastung K veranlaßt also, ebenso wie die Reaction einer Stütze eine plötzliche Veränderung der Scheerkraft, und man kann daher einen durch concentrirte Belastungen angegriffenen Balken auch wie einen Träger auffassen, für welchen diese Belastungen als Stützpunkte betrachtet werden, die den Balken von oben nach unten mit den Reaktionskräften K angreifen. Man hat dann die allgemeine Formel (19) anzuwenden, indem man für die Reactionen in den Kraftangriffen diese Kräfte K einführt und die Größen $y_{n+1} - y_n$ zc. mit Rücksicht auf die erzeugten Durchbiegungen in Rechnung stellt.

Um die Anwendung der vorstehend entwickelten Formeln zu zeigen, sollen in den folgenden Paragraphen einige der am häufigsten vorkommenden Unterstützungsarten von Trägern näher untersucht werden.

§. 38. **Balken auf drei Stützen.** Der Balken liege auf den drei Stützen A_1, A_2 und A_3 , Fig. 142, frei auf und sei über der Länge $A_1 A_2 = l_1$ mit q_1 und über der Länge $A_2 A_3 = l_2$ mit q_2 pro Längeneinheit belastet. Concentrirte Lasten sollen zunächst nicht angenommen werden, und es möge

vorausgesetzt werden, daß die Endstützen A_1 und A_3 in gleicher Höhe liegen, wie dies in der Praxis wohl fast immer der Fall sein wird. Die mittlere Stütze A_2 jedoch soll der Allgemeinheit wegen um die Größe f tiefer liegend angenommen werden, als die beiden Endauflager. Es soll ferner von der

Fig. 142.



Breite der Auflagerflächen abgesehen und vorausgesetzt werden, daß der Auflagerdruck sich in einem Punkte, etwa in der Mitte der Auflagerbreite concentrirt, wo-

bei bemerkt werden kann, daß der durch diese Annahme veranlaßte Fehler um so geringer sein wird, je größer die lichten Oeffnungen sind.

Für den hier vorausgesetzten Fall hat man nach den Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphen die Momente über den freien Auflagern in A_1 und A_3

$$M_1 = M_3 = 0,$$

ebenso

$$V_1' = 0 \text{ und } V_3'' = 0.$$

Ferner ist

$$y_2 - y_1 = y_2 - y_3 = -f,$$

und daher findet sich das Moment M_2 über der Zwischenstütze A_2 nach (19) des vorigen Paragraphen aus

$$0 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + 0 = 6 TE \left(\frac{f}{l_1} + \frac{f}{l_2} \right) - q_1 \frac{l_1^3}{4} - q_2 \frac{l_2^3}{4}$$

zu

$$\begin{aligned} M_2 &= -\frac{1}{8} \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{l_1 + l_2} + 3 TE \frac{f}{l_1 + l_2} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \\ &= -\frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 L} + \varepsilon \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

wenn $l_1 + l_2 = L$ und $3 TE \frac{f}{l_1 + l_2} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) = \varepsilon$ gesetzt wird.

Ferner ist nach (22) des vorigen Paragraphen

$$M_2 = 0 + (R_1 + 0) l_1 - q_1 \frac{l_1^2}{2};$$

folglich erhält man hieraus und aus (1) die Auflagerreaction in A_1 zu

$$R_1 = -\frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 l_1 L} + q_1 \frac{l_1}{2} + \frac{\varepsilon}{l_1} \dots \dots \dots (2)$$

und analog durch Vertauschung von l_1 und l_2 für die andere Endstütze A_3 :

$$R_3 = - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 l_2 L} + q_2 \frac{l_2}{2} + \frac{\varepsilon}{l_2} \dots \dots (3)$$

und daher den Druck der Mittelstütze:

$$R_2 = q_1 l_1 + q_2 l_2 - (R_1 + R_3) \dots \dots (4)$$

Das Moment M für irgend einen Punkt C der Strecke $A_1 A_2$ im Abstände $A_1 C = x$ von A_1 erhält man zu:

$$M = R_1 x - q_1 \frac{x^2}{2} = \left(- \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 l_1 L} + q_1 \frac{l_1}{2} + \frac{\varepsilon}{l_1} \right) x - q_1 \frac{x^2}{2} \dots \dots (5)$$

Den größten Werth von M findet man nach (24) für die Abscisse

$$x_0 = \frac{l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1 q_1} = \frac{l_1}{2} - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 L l_1 q_1} + \frac{\varepsilon}{l_1 q_1} \dots (6)$$

und zwar wird dieses Maximum nach (25) gleich

$$[M_1] = \frac{q_1}{2} \left(\frac{l_1}{2} - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 L l_1 q_1} + \frac{\varepsilon}{l_1 q_1} \right)^2 \dots \dots (7)$$

Die Gleichungen (5) bis (7) gelten natürlich auch für die Strecke $A_3 A_2$, wenn man darin l_1 mit l_2 und q_1 mit q_2 vertauscht und x von A_3 nach A_2 hin rechnet.

Für gleiche Weite und Belastungen, also für $l_1 = l_2 = \frac{L}{2}$ und $q_1 = q_2 = q$, und für gleiche Höhenlage aller Stützen, also mit $f = \varepsilon = 0$, erhält man die schon in Thl. I angegebenen Werthe:

$$M_2 = - \frac{1}{32} q L^2 \dots \dots (1^a)$$

$$R_1 = \frac{3}{16} q L = R_3 \dots \dots (2^a)$$

$$R_2 = \frac{5}{8} q L \dots \dots (4^a)$$

$$M = \frac{3}{16} q L x - q \frac{x^2}{2} \dots \dots (5^a)$$

$$x_0 = \frac{3}{16} L = \frac{3}{8} l \dots \dots (6^a)$$

$$[M] = - \frac{9}{32 \cdot 16} q L^2 = \frac{9}{512} q L^2 \dots \dots (7^a)$$

Diese Belastungsart ist offenbar übereinstimmend mit der in §. 35 unter (8) angegebenen, denn man kann sich denken, der Träger sei hier zur Hälfte

$A_1 A_2$ horizontal eingemauert, man erhält daher die in §. 35 angegebenen Formeln, wenn man hier $2l$ für L einsetzt.

Die hier gefundenen Gleichungen können auch für Brückenträger gebraucht werden, welche über zwei Oeffnungen gelegt sind, also auf drei Stützpunkten frei aufrufen, da man die Belastung derselben in der Regel als eine gleichmäßig über die Länge vertheilte ansehen darf.

Nimmt man auch hier, wie es in der Wirklichkeit meistens zutreffen wird, die Oeffnungen von gleicher Weite, also $l_1 = l_2 = \frac{L}{2}$ an, so erhält man nach (1) das Moment über der Zwischenstütze

$$M_2 = -\frac{q_1 L^3 + q_2 L^3}{8 \cdot 8 L} + \varepsilon = -\frac{L^2}{64} (q_1 + q_2) + \varepsilon. \quad (1^b)$$

und die Auflagerreaction in A_1 nach (2) zu

$$R_1 = \frac{L}{32} (7q_1 - q_2) + \frac{2\varepsilon}{L} \dots \dots \dots (2^b)$$

und in A_3 entsprechend

$$R_3 = \frac{L}{32} (7q_2 - q_1) + \frac{2\varepsilon}{L} \dots \dots \dots (3^b)$$

Daher ist der Druck der mittleren Stütze gegen den Balken:

$$R_2 = \frac{L}{2} (q_1 + q_2) - R_1 - R_3 = \frac{L}{16} (5q_1 + 5q_2) - \frac{4\varepsilon}{L} \quad (4^b)$$

Das größte Moment zwischen A_1 und B_1 findet sich nach (6) in einem Abstände x_0 von A_1

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{L}{4} + \frac{2M_2}{Lq_1} = \frac{L}{32} \frac{7q_1 - q_2}{q_1} + \frac{2\varepsilon}{Lq_1} \\ &= \frac{L}{32} \left(\frac{7q_1 - q_2}{q_1} + 2 \frac{32\varepsilon}{L^2 q_1} \right), \dots \dots \dots (6^b) \end{aligned}$$

und zwar ist dieses Moment nach (7):

$$\begin{aligned} [M_1] &= \frac{q_1}{2} \left[\frac{L}{32} \left(\frac{7q_1 - q_2}{q_1} + 2 \frac{32\varepsilon}{L^2 q_1} \right) \right]^2 \\ &= \frac{L^2}{2 \cdot 32 \cdot 32 q_1} \left(7q_1 - q_2 + 2 \frac{32\varepsilon}{L^2} \right)^2 \dots \dots \dots (7^b) \end{aligned}$$

Man erkennt aus (1^b), daß das Moment M_2 über der Zwischenstütze sowohl mit einer Vergrößerung von q_1 wie q_2 an Größe zunimmt, und man erhält daher den größten Werth dieses Momentes, wenn beide Oeffnungen mit der größten Belastung beschwert sind. Die Belastung einer Brücke besteht nun aus deren Eigengewichte p und der zufälligen oder Verkehrslast k , und es möge die Summe beider Belastungen pro Längen-

einheit durch $q = p + k$ ausgedrückt sein. Man erhält alsdann das größte Moment über der Mittelstütze, wenn beide Oeffnungen mit der zufälligen Belastung k bedeckt sind, also für $q_1 = q_2 = q$, zu

$$M_{2 \max} = - \frac{L^2}{32} q + \varepsilon \dots \dots \dots (8)$$

Das große Moment $[M_1]$ dagegen zwischen A_1 und A_2 wächst, wie aus (7^b) folgt, zwar ebenfalls mit q_1 , nimmt aber mit zunehmendem q_2 ab, woraus man schließt, daß $[M_1]$ seinen Maximalwerth annimmt, wenn die Oeffnung $A_1 A_2$ mit der möglich größten Belastung $k + p = q$ und die jenseitige Oeffnung $A_2 A_3$ mit der thunlich kleinsten Belastung, d. h. nur mit dem Eigengewichte p beschwert ist. Danach erhält man also

$$[M_1]_{\max} = \frac{L^2}{2 \cdot 32 \cdot 32 q} \left(7q - p + 2 \frac{32 \varepsilon}{L^2} \right)^2 \dots \dots \dots (9)$$

Vergleicht man diese beiden Werthe von $M_{2 \max}$ und $[M_1]_{\max}$, welche den ungünstigsten Belastungen entsprechen, so erkennt man, daß die Größe ε also die Senkung f der mittleren Stütze auf beide Momente in entgegengesetzter Weise wirkt, indem nämlich eine Vergrößerung dieser Senkung f oder des Werthes

$$\varepsilon = 3 TE \frac{f}{L} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) = 12 TE \frac{f}{L^2}$$

das (negative) Moment M_2 über der Mittelstütze dem absoluten Werthe nach verringert, dagegen dasjenige $[M_1]$ in der Oeffnung vergrößert.

Es ist daraus ersichtlich, daß es eine gewisse Senkung s der mittleren Stütze unterhalb der äußeren Auflager geben wird, bei welcher die beiden Momente $M_{2 \max}$ und $[M_1]_{\max}$ von gleicher absoluter Größe sind, und eine solche Anordnung wird die vortheilhafteste sein, insofern, als dann das größte vorkommende Moment den kleinstmöglichen Werth annimmt. Um diese Senkung s zu ermitteln, hat man nur die beiden absoluten Werthe von $M_{2 \max}$ und $[M_1]_{\max}$ einander gleich zu setzen und erhält also:

$$\frac{L^2}{32} q - \varepsilon = \frac{L^2}{2 \cdot 32 \cdot 32 q} \left(7q - p + 2 \frac{32 \varepsilon}{L^2} \right)^2.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\frac{L^2}{32} q$ und setzt der Kürze wegen das Verhältniß der Belastungen

$$\frac{p}{q} = v \text{ und } u = \frac{32 \varepsilon}{L^2 q} = \frac{32 \cdot 12 TE f}{L^4 q}, \dots \dots \dots (10)$$

so erhält man

$$1 - u = \frac{1}{64} (7 - v + 2u)^2,$$

woraus

$$u^2 + (23 - v) u = \frac{15 - v^2 + 14 v}{4}$$

oder

$$u = \frac{v - 23 + \sqrt{544 - 32 v}}{2} \dots \dots \dots (11)$$

folgt.

Da $u = \frac{384 TE}{L^4 q} f$ gesetzt war, so ergibt sich die nöthige Senkung f der Mittelstütze für den Fall gleicher Momentenmaxima zu

$$f_0 = \frac{L^4 q}{384 TE} u = \frac{L^4 q}{768 TE} (v - 23 + \sqrt{544 - 32 v}), \quad (12)$$

und zwar ist das Moment in diesem Falle sowohl über der Mittelstütze bei ganzer Belastung als in der einen Oeffnung, wenn nur diese belastet ist, nach (8):

$$- M_2 \text{max} = [M_1] \text{max} = \frac{L^2 q}{32} - \varepsilon = \frac{L^2 q}{32} (1 - u) \dots (13)$$

Da das Maximalmoment M_2 ohne Senkung der Mittelstütze $\frac{L^2 q}{32}$ ist, so giebt also der Werth u zugleich an, um welchen Procentsatz das Maximalmoment M_2 durch die Senkung vermindert wird.

Die Größe u hängt nach (11) wesentlich von dem Verhältnisse $v = \frac{p}{q}$ der specifischen Belastungen ab, und ist nach (11) die folgende kleine Tabelle berechnet worden.

$v = \frac{p}{q}$	0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,75	1
$u =$	0,162	0,177	0,193	0,208	0,239	0,277	0,314

Der Werth $u = 0,162$, entsprechend dem Verhältnisse $v = 0$, würde danach für Träger gelten, deren Eigengewicht p gegen die zufällige Belastung verschwindet, also für kleine Spannweiten, während der Werth von $u = 0,314$ für $v = 1$ solchen Trägern zukommt, gegen deren Eigengewicht die zufällige Last unerheblich ist, welche also stets über der ganzen Länge von der gleichen Belastung $p = q$ angegriffen werden. Diese Zahl stimmt mit der in Thl. I, §. 241 für einen Balken mit gleichmäßig verteilter Belastung gefundenen überein.

Der Vortheil, welcher mit einer Senkung der Mittelstütze verbunden ist,

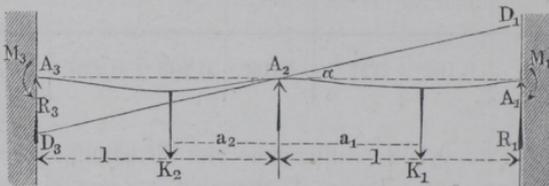
wurde zuerst von Röpke*), Grasshof**) und Scheffler***) gezeigt, die hier gegebene Darstellung schließt sich wesentlich an die Arbeit von Mohr†) an, welcher zuerst darauf aufmerksam gemacht hat, daß bei der Vergleichung der Maximalmomente M_2 und $[M_1]$ die denselben zugehörigen ungünstigsten Belastungen des ganzen Trägers und bezw. nur der einen Oeffnung in Betracht kommen müssen.

Eine besondere Betrachtung verdient der bei Hochbauconstructions häufiger vorkommende Fall, in welchem ein in der Mitte durch eine Säule unterstützter Träger oder Unterzug an den Enden nicht frei aufliegt, sondern eingemauert ist, so daß man eine horizontale Richtung der elastischen Linie an diesen Enden voraussetzen darf. Wenn hierbei der Balken zu beiden Seiten der Mittelstütze symmetrisch belastet ist, so muß auch über dieser mittleren Stütze die elastische Linie horizontal sein, und es kommt die Belastungsweise auf die in §. 35 unter (5) und (6) besprochene hinaus. Man kann nämlich dann jede Hälfte des Balkens als einen an beiden Enden horizontal eingeklemmten Balken ansehen, und auf jede dieser Hälften die in §. 35 angeführten Formeln anwenden.

Wenn indessen die Belastungen nicht symmetrisch zur Mittelstütze vertheilt sind, wie es z. B. bei den Unterzügen unter Fabrikräumen oft vorkommt, wo die Gewichte der einzelnen Arbeitsmaschinen als isolirte Lasten auftreten, welche nicht nothwendig symmetrisch zur Mittelstütze angebracht sind, so wird über der letzteren die elastische Linie des Balkens auch nicht horizontal bleiben, und es möge dieser Fall einer besonderen Untersuchung unterworfen werden.

Es sei $A_1 A_3$, Fig. 143, ein solcher, bei A_1 und A_3 horizontal eingemauerter Träger von der Länge $2l$, welcher in der Mitte auf einer Säule

Fig. 143.



ruht, deren Stützlager A_2 in gleicher Höhe mit den Endauflagern A_1 und A_3 angenommen werden soll. Der Träger soll einer gleichmäßig ver-

*) Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. f. Hannover, Bd. II, 1856.

**) Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 1857.

***) Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. eisernen Brücken. 1857.

†) Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. f. Hannover. 1860.

theilten Belastung ausgesetzt sein, welche zwar in der Wirklichkeit meist für beide Strecken von gleichem Betrage pro Längeneinheit sein wird, hier aber der Allgemeinheit wegen mit q_1 und q_2 für jeden Meter Länge angenommen werden soll. Von den isolirten Kräften K ist in der Figur in jeder Strecke nur eine Kraft K_1 und bezw. K_2 angedeutet, und es soll auch für diese nur die Rechnung geführt werden, wodurch die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird, denn bei einer beliebig großen Anzahl concentrirter Belastungen in einer Strecke hat man diese Kräfte sämmtlich in übereinstimmender Art in die Rechnung einzuführen. Die Kräfte K_1 und K_2 mögen die Abstände a_1 und a_2 von dem mittleren Stützpunkte A_2 haben, welcher letztere als der Anfang rechtwinkliger Coordinaten mit der horizontalen X-Axe $A_1 A_2 A_3$ angesehen wird. Der Unterschied zwischen diesem Falle und dem in Fig. 142 dargestellten eines auf drei Stützen frei aufliegenden Balkens besteht darin, daß die Momente über den Endstützen A_1 und A_3 hier nicht mehr gleich Null sind, sondern gewisse von vornherein noch unbekannte Werthe M_1 und M_3 haben. Es mögen R_1 und R_3 wieder die Auflagerreactionen in A_1 und A_3 sein, so hat man diese und die besagten Momente M_1 und M_3 mit Rücksicht darauf zu ermitteln, daß die elastische Linie in A_1 und A_3 horizontal gerichtet ist, und daß die Stützpunkte A_1 und A_3 mit A_2 in gleicher Höhe liegen.

Bezeichnet man daher mit α den Winkel, unter welchem die elastische Linie in A_2 gegen den Horizont geneigt ist, so müssen die auf jede Hälfte $A_2 A_1$ und $A_2 A_3$ wirkenden Kräfte eine Biegung an den Enden im Winkelbetrage ebenfalls von α hervorbringen, da diese Enden horizontal gerichtet sind. Außerdem müssen aber die Enden aus der Richtung $D_1 D_3$ der Tangente in A_2 um die Größe $D_1 A_1 = D_3 A_3 = l\alpha$ gesenkt resp. gehoben werden. Um diese Bedingungen durch Gleichungen auszudrücken, hat man nur zu beachten, daß die Neigung β und die Senkung f eines Balkens von der Länge l an seinem Ende bezw. ausgedrückt ist durch:

$$1) \quad TE.\beta = q \frac{l^3}{6} \quad \text{und} \quad TE.f = q \frac{l^4}{8},$$

bei Vorhandensein einer gleichmäßig vertheilten Belastung $q l$;

$$2) \quad TE.\beta = M l \quad \text{und} \quad TE.f = M \frac{l^2}{2},$$

bei Einwirkung eines Kräftepaars vom Momente M , und

$$3) \quad TE.\beta = K \frac{a^2}{2}, \quad \text{bezw.}$$

$$TE.f = K \frac{a^3}{3} + K \frac{a^2}{2} (l - a) = K a^2 \frac{3l - a}{6},$$

bei der Wirkung einer concentrirten Kraft K am Hebelarme a (vergl. Thl. I, §. 236 bis §. 239).

Mit Rücksicht hierauf hat man nun für die Hälfte $A_2 A_1$ die beiden Bedingungen:

$$TE. \alpha = q_1 \frac{l^3}{6} + K_1 \frac{a_1^2}{2} + M_1 l - R_1 \frac{l^2}{2} \dots \dots \dots (14)$$

und

$$TE. l\alpha = q_1 \frac{l^4}{8} + K_1 a_1^2 \frac{3l - a_1}{6} + M_1 \frac{l^2}{2} - R_1 \frac{l^3}{3} \dots \dots (15)$$

Wenn man daher die Gleichung (15) nach vorheriger Division durch l von (14) subtrahirt, wird

$$q_1 \frac{l^3}{24} + K_1 \frac{a_1^3}{6l} + M_1 \frac{l}{2} - R_1 \frac{l^2}{6} = 0,$$

oder

$$R_1 = q_1 \frac{l}{4} + K_1 \frac{a_1^3}{l^3} + 3 \frac{M_1}{l} \dots \dots \dots (16)$$

Ganz in derselben Weise erhält man für die andere Balkenstrecke $A_2 A_3$, wenn man $-\alpha$ für α einführt:

$$- TE. \alpha = q_2 \frac{l^3}{6} + K_2 \frac{a_2^2}{2} + M_3 l - R_3 \frac{l^2}{2} \dots \dots \dots (14^a)$$

$$- TE. l\alpha = q_2 \frac{l^4}{8} + K_2 a_2^2 \frac{3l - a_2}{6} + M_3 \frac{l^2}{2} - R_3 \frac{l^3}{3} \dots \dots (15^a)$$

$$R_3 = q_2 \frac{l}{4} + K_2 \frac{a_2^3}{l^3} + 3 \frac{M_3}{l} \dots \dots \dots (16^a)$$

Durch Addition von (14) und (14^a) erhält man nun, wenn man aus (16) und (16^a) die Werthe von R_1 und R_3 einführt:

$$\frac{q_1 + q_2}{6} l^3 + K_1 \frac{a_1^2}{2} + K_2 \frac{a_2^2}{2} + (M_1 + M_3) l = (R_1 + R_3) \frac{l^2}{2}$$

$$= \frac{q_1 + q_2}{8} l^3 + K_1 \frac{a_1^3}{2l} + K_2 \frac{a_2^3}{2l} + 3 \frac{M_1 + M_3}{2} l,$$

woraus sich

$$M_1 + M_3 = \frac{q_1 + q_2}{12} l^2 + K_1 a_1^2 \frac{l - a_1}{l^2} + K_2 a_2^2 \frac{l - a_2}{l^2} \dots \dots (17)$$

ergiebt.

Eine zweite Beziehung zwischen M_1 und M_3 findet sich aus der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung, wonach die Momentensumme aller Kräfte der einen Hälfte in Bezug auf A_2 gleich derjenigen für die andere Balkenhälfte und zwar gleich dem Momente M_2 über der mittleren Stütze sein muß. Demgemäß ist

$$q_1 \frac{l^2}{2} + K_1 a_1 + M_1 - R_1 l = M_2 = q_2 \frac{l^2}{2} + K_2 a_2 + M_3 - R_3 l, \dots \dots \dots (18)$$

woraus man, wenn für R_1 und R_3 die Werthe aus (16) gesetzt werden:

$$q_1 \frac{l^2}{4} + K_1 a_1 \frac{l^2 - a_1^2}{l^2} - 2 M_1 = q_2 \frac{l^2}{4} + K_2 a_2 \frac{l^2 - a_2^2}{l^2} - 2 M_3$$

folgt, so daß man nun erhält:

$$M_1 - M_3 = \frac{q_1 - q_2}{8} l^2 + K_1 a_1 \frac{l^2 - a_1^2}{2 l^2} - K_2 a_2 \frac{l^2 - a_2^2}{2 l^2} \dots (19)$$

Man erhält dann schließlich aus (17) und (19) durch Addition:

$$M_1 = \frac{5 q_1 - q_2}{48} l^2 + K_1 \frac{a_1 l^2 + 2 a_1^2 l - 3 a_1^3}{4 l^2} + K_2 \frac{2 a_2^2 l - a_2 l^2 - a_2^3}{4 l^2} \dots \dots (20)$$

und durch Subtraction:

$$M_3 = \frac{5 q_2 - q_1}{48} l^2 + K_2 \frac{a_2 l^2 + 2 a_2^2 l - 3 a_2^3}{4 l^2} + K_1 \frac{2 a_1^2 l - a_1 l^2 - a_1^3}{4 l^2} \dots \dots (21)$$

Würde man diese Werthe für M_1 und M_2 in (16), (16^a) und (18) einsetzen, so erhielte man allgemeine Ausdrücke für die Reactionen R_1 und R_3 , sowie für das Moment M_2 über der Mittelstütze. Der Auflagerdruck in der Mitte folgt dann einfach zu

$$R_2 = (q_1 + q_2) l + K_1 + K_2 - R_1 - R_3;$$

auch erhält man aus (14) oder (15) die Neigung α der elastischen Linie in A_2 gegen den Horizont, deren Kenntniß indessen für gewöhnlich nicht von praktischem Interesse ist.

Setzt man in den vorstehenden Formeln $q_1 = q_2 = q$ und $K_1 = K_2 = 0$, so erhält man, entsprechend dem unter (6) in §. 35 angeführten Belastungs-falle

$$M_1 = M_3 = M_2 = q \frac{l^2}{12}, R_1 = R_3 = q \frac{l}{2}, \text{ und } R_2 = q l.$$

Ebenso erhält man mit $q_1 = q_2 = 0$ und $K_1 = K_2 = K$, sowie $a_1 = a_2 = \frac{l}{2}$, d. h. für den in den Mitten der Strecken belasteten Balken, entsprechend §. 35, (5):

$$M_1 = M_3 = M_2 = K \frac{l}{8}, R_1 = R_3 = \frac{K}{2} \text{ und } R_2 = K \text{ u. f. w.}$$

Beispiele: 1. Wie groß ist die Senkung der Mittelstütze eines über zwei gleichen Oeffnungen liegenden Trägers zu machen, damit die Maximalmomente gleich groß werden, wenn die ganze Länge des Trägers $L = 40$ m, die Belastung durch sein Eigengewicht pro Meter $p = 800$ kg und die zufällige Last $k = 2400$ kg beträgt, und wenn die zulässige Faserjpannung 6 kg pro Quadratmillimeter und der Elasticitätsmodul 18 000 anzunehmen ist?

Man hat hier

$$v = \frac{p}{q} = \frac{800}{2400 + 800} = 0,25,$$

und daher nach (11):

$$u = \frac{0,25 - 23 + \sqrt{544 - 32 \cdot 0,25}}{2} = 0,201,$$

folglich das Maximalmoment für den Fall der gehörigen Senkung der Mittelstütze nach (13):

$$M_{1max} = \frac{L^2 q}{32} (1 - u) = \frac{40 \cdot 40 \cdot 3200}{32} \cdot 0,799 = 127\,840 \text{ mkg.}$$

Nimmt man die Höhe des Trägers zu $h = 2$ m, also die Entfernung der äußersten Faserschicht von der neutralen Aye zu $e = 1$ m an, so erhält man das Trägheitsmoment T , wenn alle Maße in Metern ausgedrückt werden durch

$$M_{max} = s \frac{T}{e} \text{ zu}$$

$$T = \frac{1 \cdot 127\,840}{6 \cdot 1000 \cdot 1000} = 0,02131,$$

und daher die erforderliche Senkung der Mittelstütze nach (12):

$$f = \frac{u L^4 q}{384 T \cdot E} = \frac{0,201 \cdot 40^4 \cdot 3200}{384 \cdot 0,02131 \cdot 18\,000 \cdot 1000 \cdot 1000} = 0,0112 \text{ m}$$

oder nur wenig mehr als 11 mm.

2. In einer Spinnerei ist ein 8 m langer, an beiden Enden eingemauerter Unterzug angebracht, welcher in der Mitte, Fig. 144, durch eine Säule gestützt ist. Die Anstrengung dieses Unterzuges soll ermittelt werden, wenn derselbe durch das Gewicht des darauf ruhenden Fußbodens pro Meter Länge mit $q = 2000$ kg belastet wird, und außerdem durch aufgestellte Maschinen die eine Oeffnung eine Last von 800 kg in 2,4 m Entfernung von der Mitte, und die andere Oeffnung in 3 m Entfernung von der Säule eine Last von 1000 kg erhält?

Hier ist $q = 2000$ kg, $K_1 = 800$ kg, $K_2 = 1000$ kg, $a_1 = 2,4$, $a_2 = 3$ und $l = 4$ m. Man findet daher (20) das Moment an einem Ende

$$M_1 = 2000 \frac{16}{12} + 800 \frac{2,4 \cdot 16 + 2 \cdot 2,4^2 \cdot 4 - 3 \cdot 2,4^3}{4 \cdot 16} + 1000 \frac{2 \cdot 9 \cdot 4 - 3 \cdot 16 - 27}{4 \cdot 16}$$

$$= 2666,7 + 537,6 - 46,9 = 3157,4 \text{ mkg,}$$

und das am anderen Ende:

$$M_3 = 2000 \frac{16}{12} + 1000 \frac{3 \cdot 16 + 2 \cdot 9 \cdot 4 - 3 \cdot 27}{64} + 800 \frac{2 \cdot 2,4^2 \cdot 4 - 2,4 \cdot 16 - 2,4^3}{64}$$

$$= 2666,7 + 609,4 - 76,8 = 3199,3 \text{ mkg.}$$

Mit diesen Werthen erhält man aus (16) den Auflagerdruck auf der einen Seite A_1 zu:

$$R_1 = 2000 \frac{4}{4} + 800 \frac{2,4^3}{4^3} + 3 \frac{3157,4}{4} = 4541 \text{ kg,}$$

und aus (16^a) auf der anderen Seite A_3 :

$$R_3 = 2000 + 1000 \frac{27}{64} + 3 \frac{3199,3}{4} = 4822 \text{ kg,}$$

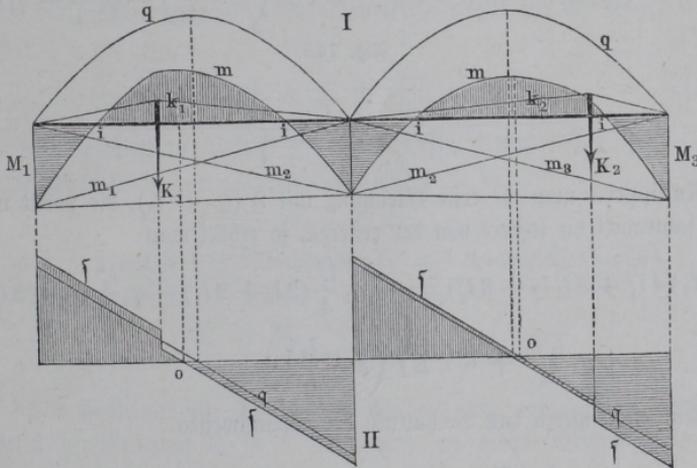
folglich ist der Druck auf die Mittelstütze:

$$R_2 = 2000 \cdot 8 + 800 + 1000 - 4541 - 4822 = 8437 \text{ kg.}$$

Das Biegemoment über der Mittelstütze ergibt sich endlich aus (18) zu

$$M_2 = 2000 \frac{16}{2} + 800 \cdot 2,4 + 3157,4 - 4541 \cdot 4 = 2912 \text{ mkg.}$$

Fig. 144.



Um das Biegemoment und die Scheerkraft an jeder Stelle zu finden, sind in Fig. 144 I und II die Diagramme entworfen, indem die Curven m und f für die resultirenden Momente und Schubkräfte durch Vereinigung der Diagramme gezeichnet wurden, welche der gleichförmigen Belastung q , den concentrirten Kräften K und den negativen Stützenmomenten M_1, M_2 und M_3 zukommen, welche Diagramme durch die entsprechenden Bezeichnungen q, q, k und m_1, m_2, m_3 unterschieden sind. Man ersieht daraus die Inflectionspunkte i und die Stellen, wo die Zwischenmomente $[M]$ die größten Werthe haben, d. h. wo die Schubkräfte Null werden.

Balken auf vier Stützen. Es soll ein continuirlicher Brücken- §. 39.
träger $A_1 A_4$, Fig. 145 (a. f. S.), über drei Oeffnungen angenommen werden, von welchen jede der äußeren die gleiche Weite $l_1 = l_3$ und die mittlere die Weite l_2 haben soll. Die Endstützen A_1 und A_4 sollen in einer Horri-

zontalen liegen, unter welche jede der beiden mittleren Stützpunkte um die Größe $f_2 = f_3 = f$ gesenkt sein soll, so daß man $y_1 - y_2 = y_4 - y_3 = f$ hat. Die Belastung durch das Eigengewicht sei überall pro 1 m Länge mit p , diejenige durch die Verkehrslast mit k und die gesammte Belastung wieder mit $q = p + k$ bezeichnet.

Wegen der freien Auflagerung der Enden hat man wieder für die Momente daselbst

$$M_1 = M_4 = 0$$

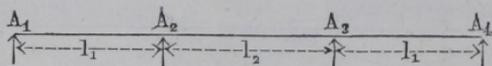
und erhält daher hiermit aus (19), §. 37 die beiden Ausdrücke für A_2 :

$$0 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = - 6 T E \left(-\frac{f}{l_1} + 0 \right) - q_1 \frac{l_1^3}{4} - q_2 \frac{l_2^3}{4}$$

und für A_3 :

$$M_2 l_2 + 2 M_3 (l_2 + l_1) + 0 = - 6 T E \left(0 - \frac{f}{l_1} \right) - q_2 \frac{l_2^3}{4} - q_3 \frac{l_1^3}{4}.$$

Fig. 145.



Multipliziert man die erste Gleichung mit $2(l_1 + l_2)$, die zweite mit l_2 und subtrahirt die letztere von der ersteren, so erhält man:

$$\begin{aligned} M_2 (4l_1^2 + 8l_1 l_2 + 3l_2^2) &= - q_1 \frac{l_1^3}{4} (2l_2 + 2l_1) - q_2 \frac{l_2^3}{4} (l_2 + 2l_1) \\ &+ q_3 \frac{l_1^3 l_2}{4} + 6 T E f \left(2 + \frac{l_2}{l_1} \right). \end{aligned}$$

Wenn man hierin das Verhältniß der Spannweiten

$$\begin{aligned} \frac{l_2}{l_1} &= m, \text{ und } 4l_1^2 + 8l_1 l_2 + 3l_2^2 = (2l_1 + l_2)(2l_1 + 3l_2) \\ &= l_1^2 (2 + m)(2 + 3m), \end{aligned}$$

sowie die ganze Länge

$$L = 2l_1 + l_2 = l_1 (2 + m)$$

setzt, so wird:

$$\begin{aligned} M_2 l_1^2 (2 + m)(2 + 3m) &= \frac{l_1^4}{4} \left(-q_1 (2 + 2m) - q_2 m^3 (2 + m) + q_3 m \right. \\ &\left. + \frac{24}{l_1^4} T E f (2 + m) \right), \end{aligned}$$

oder:

$$M_2 = \frac{L^2 - q_1 (2 + 2m) - q_2 m^3 (2 + m) + q_3 m + u (2 + m)}{4 (2 + m)^3 (2 + 3m)}, \dots (1)$$

wenn der Kürze wegen

$$\frac{24}{l_1^4} T E f = u$$

gesetzt wird.

Wegen der symmetrischen Anordnung kann diese Gleichung auch für die Stütze A_3 gelten, sobald man darin q_3 mit q_1 vertauscht. Man erhält dann:

$$M_3 = \frac{L^2 - q_3(2 + 2m) - q_2 m^3(2 + m) + q_1 m + u(2 + m)}{4(2 + m)^3(2 + 3m)} \dots (1^a)$$

Nunmehr findet man auch die Reaction R_1 der Endstütze A_1 aus der Gleichung (22) in §. 37, worin man die Verticalkraft V_1' unmittelbar links von A_1 gleich Null anzunehmen hat, zu

$$R_1 = q_1 \frac{l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1}, \dots (2)$$

und dem entsprechend hat man der Symmetrie wegen für die andere Endstütze A_4 :

$$R_4 = q_3 \frac{l_1}{2} + \frac{M_3}{l_1} \dots (2^a)$$

Aus der Verticalkraft $R_1 = V_1''$ unmittelbar rechts neben A_1 ergibt sich die Schubkraft V_2' unmittelbar links neben A_2 zu

$$V_2' = R_1 - q_1 l_1, \dots (3)$$

so daß man nun mit diesem Werthe von V_2' aus der Gleichung (22), §. 37 auch die Reaction R_2 in A_2 zu

$$R_2 = \frac{M_3 - M_2}{l_2} + q_2 \frac{l_2^2}{2} - V_2' \dots (4)$$

erhält. Die Ausdrücke für V_3' und R_3 werden ganz analoge sein müssen. Vermitteltst der Reaction R_1 in A_1 folgt nun das größte Biegemoment zwischen A_1 und A_2 zu

$$[M_1] = \frac{R_1^2}{2q_1} = \frac{q_1}{2} \left(\frac{l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1 q_1} \right)^2, \dots (5)$$

welches sich bekanntlich in dem Abstände von A_1

$$x_0 = \frac{R_1}{q_1} = \frac{l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1 q_1} \dots (6)$$

einstellt, wo die Verticalkraft gleich Null ist.

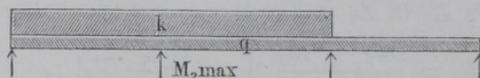
Außerdem findet sich noch ein Maximalmoment in dem mittleren Felde, welches bei symmetrischer Anordnung und Belastung in der Mitte des Trägers eintritt, und dessen Betrag unter dieser Voraussetzung aus der Gleichung (25) in §. 37 sich ergibt zu:

$$[M_2] = M_2 + \frac{q_2}{2} \left(\frac{l_2}{2} + \frac{M_3 - M_2}{l_2 q_2} \right)^2 = M_2 + q_2 \frac{l_2^2}{8} \dots (7)$$

weil für $q_1 = q_3$ auch $M_2 = M_3$ ist. Es werden also an drei Stellen jeder Balkenhälfte die relativ größten Momente auftreten, nämlich in der Mitte $[M_2]$, über der Zwischenstütze M_2 , und im Abstände x_0 von dem Endauflager $[M_1]$. Es wird daher von Interesse sein, diejenigen Verhältnisse zu prüfen, unter denen die Bruchgefahr für den Träger an allen diesen Stellen die nämliche wird, d. h. unter denen die absolute Größe dieser Maximalmomente denselben Werth annimmt. Es muß hierbei bemerkt werden, daß der Werth jedes dieser Momente wesentlich von der Art der Belastung, d. h. von dem Verhältnisse der Größen q_1, q_2 und q_3 abhängig ist, und daß die gedachten Momentenmaxima $M_2, [M_1]$ und $[M_2]$ keineswegs bei einer und derselben Belastungsweise gleichzeitig ihre absolut größten Werthe annehmen, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Aus der Gleichung (1) ersieht man zunächst, daß der absolute Werth des (negativen) Momentes M_2 über der Zwischenstütze A_2 um so größer wird, je größer die Belastungen q_1 und q_2 der benachbarten Felder sind und je kleiner die Belastung q_3 des dritten Feldes ist. Man wird daher den absolut größten Werth, welchen M_2 überhaupt annehmen kann, dann erhalten, wenn man für die beiden benachbarten Felder $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ die größte Verkehrslast k annimmt, während das abgewandte Feld $A_3 A_4$ einer zufälligen Belastung gar nicht, sondern nur seinem Eigengewichte p unter-

Fig. 146.



worfen ist, wie Fig. 146 anzeigt. Man erhält diesen größten Werth von M_2 daher, wenn man

$$q_1 = q_2 = p + k = q \text{ und } q_3 = p$$

in die Gleichung (1) einsetzt, zu

$$M_{2 \max} = \frac{L^2}{4} \frac{q(2 + 2m)(1 + m^3) + pm + u(2 + m)}{(2 + m)^3(2 + 3m)} \dots (8)$$

Um auch den ungünstigsten Werth von $[M_1]$ zu bestimmen, berechnet sich der Werth von R_1 aus (2), wenn man für M_2 den Werth aus (1) einsetzt zu

$$R_1 = \frac{L}{4} \frac{q_1(6 + 14m + 6m^2) - q_2 m^3(2 + m) + q_3 m + u(2 + m)}{(2 + m)^2(2 + 3m)}$$

Man erkennt hieraus, daß dieser Ausdruck den größten Werth für R_1 liefert, wenn man q_1 und q_3 möglichst groß, also gleich $p + k = q$, wenn man q_2 möglichst klein, also gleich p wählt, Fig. 147, und damit erhält man:

$$R_{1max} = \frac{L}{4} \frac{q(3+6m) - pm^3 + u}{(2+m)(2+3m)}.$$

Daher ergibt sich für diesen größten Auflagerdruck auch der größte Werth für $[M_1]$ zu:

$$[M_1]_{max} = \frac{R_1^2}{2q} = \frac{L^2}{32q} \left(\frac{q(3+6m) - pm^3 + u}{(2+m)(2+3m)} \right)^2 \dots (9)$$

Fig. 147.



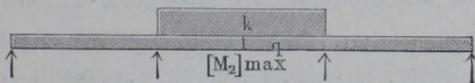
Das Maximalmoment $[M_2]$ in der mittleren Strecke berechnet sich nach (7), wenn man in dem Werthe für M_2 in (1) die Belastung $q_1 = q_3$ setzt zu

$$\begin{aligned} [M_2] &= \frac{L^2 - q_1(2+2m-m) - q_2m^3(2+m) + u(2+m)}{4(2+m)^3(2+3m)} + \frac{m^2L^2}{8(2+m)^2} q_2 \\ &= \frac{L^2 - 2q_1 + q_2(2+m)m^2 + 2u}{8(2+m)^2(2+3m)}. \end{aligned}$$

Dasselbe erhält seinen größten Werth, wenn q_2 möglichst groß, also gleich q , und $q_1 = q_3$ möglichst klein, also gleich p ist, Fig. 148, und daher erhält man diesen größten Werth zu

$$[M_2]_{max} = \frac{L^2}{8} \frac{q(2+m)m^2 - 2p + 2u}{(2+m)^2(2+3m)} \dots (10)$$

Fig. 148.



Hieraus ergibt sich, daß die drei Maximalmomente M_2 , $[M_1]$ und $[M_2]$ nicht zugleich, sondern bei den durch die Figuren 146 bis 148 dargestellten Belastungsarten eintreten, und es folgt daraus, daß bei der vollen Belastung der ganzen Brücke durch q keineswegs der ungünstigste Zustand vorhanden ist, indem hierbei nicht ein einziges der drei Maximalmomente seinen größten Werth annimmt.

Will man daher die gestellte Bedingung erfüllen, wonach an den gedachten drei Stellen gleiche Bruchgefahr stattfindet, so ergeben sich aus den drei Ausdrücken (8), (9) und (10) die Bedingungsgleichungen:

größten Spannweiten, für welche das Eigengewicht p vorherrscht. Ebenso erkennt man aus der Tabelle, daß die mittlere Deffnungsweite l_2 für alle Belastungsverhältnisse größer zu nehmen ist, als die der Seitenöffnungen und zwar um 13 bis 17 Proc. In der Ausführung pflegt man dieses Verhältniß $\frac{l_2}{l_1}$ in der Regel zu 1,2 bis 1,25 zu wählen.

Tabelle von Mohr

über das Verhältniß der Deffnungen und die Senkung der Mittelstützen bei continuirlichen Trägern auf vier Stützen.

$v = \frac{p}{q} = \frac{\text{Eigenlast}}{\text{Totallast}}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$m = \frac{l_2}{l_1} = \frac{\text{Mittelöffnung}}{\text{Seitenöffnung}}$	1,13	1,14	1,15	1,16	1,165	1,17
$\frac{u}{q} = \frac{24 TE}{q l_1^4} f$; $f =$ Senkung d. Mittelstützen	0,40	0,47	0,53	0,59	0,65	0,72
$M_{max} = \frac{q L^2}{72}$ mal	0,82	0,78	0,74	0,69	0,65	0,61

Aus den Resultaten dieser Tabelle folgert Mohr die empirischen Formeln:

$$m = 1,13 + 0,04 \frac{p}{q}, \dots \dots \dots (13)$$

$$u = 0,40 q + 0,32 p \dots \dots \dots (14)$$

und

$$M_{max} = \frac{L^2}{72} (0,82 q - 0,21 p) \dots \dots \dots (15)$$

Da hier $u = \frac{24 TE}{l_1^4} f$ angenommen wurde, so ist auch:

$$f = \frac{l_1^4}{60 TE} (q + 0,80 p) \dots \dots \dots (16)$$

Beispiel. Für eine Eisenbahnbrücke sollen zwei über drei Deffnungen gespannte, 4 m hohe continuirliche Träger von $L = 120$ m Länge angeordnet werden. Die Verhältnisse sind mit Rücksicht darauf zu ermitteln, daß die Verkehrslast pro laufenden Meter der Brücke 4000 kg beträgt und für das Material eine höchstens zulässige Faserspannung von 6 kg pro Quadratmillimeter, sowie ein Elasticitätsmodul von $E = 20\,000$ angenommen werden kann.

Nimmt man das Eigengewicht der ganzen Brücke zu 2400 kg pro 1 m Länge, also die dadurch bewirkte Belastung für jeden der beiden Längsträger gleich der Hälfte zu $p = 1200$ kg an, so hat man das Verhältniß der beiden Belastungen

$$v = \frac{p}{q} = \frac{1200}{1200 + 2000} = 0,375.$$

Hiermit erhält man aus (13):

$$m = 1,13 + 0,04 \cdot 0,375 = 1,145,$$

folglich wird jede Seitenöffnung eine Weite

$$l_1 = \frac{L}{2 + m} = \frac{120}{3,145} = 38,1 = \text{rot } 38 \text{ m},$$

und die Mittelöffnung eine solche von

$$l_2 = 120 - 2 \cdot 38 = 44 \text{ m}$$

zu erhalten haben.

Das größte Biegemoment bestimmt sich nach (15) zu

$$M_{max} = \frac{3,2 \cdot 120^2}{72} \left(0,82 - 0,21 \frac{1,2}{3,2} \right) = 640 \cdot 0,741 = 474 \text{ Metertonnen.}$$

Um die Senkung der Mittelstützen zu berechnen, bestimmt man zunächst das Trägheitsmoment T mit Rücksicht darauf, daß das Biegemoment $M_{max} = 474\,000$ mkg eine Spannung $s = 6$ kg in der äußersten Faser erzeugt, und daß diese äußerste Faser um die halbe Trägerhöhe

$$\frac{h}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$$

von der neutralen Aye absteht, nach der Grundformel I des §. 35 durch

$$M_{max} = s \frac{T}{e} \text{ zu } T = \frac{e M_{max}}{s},$$

also hier, wenn die Längen in Metern, die Kräfte in Kilogrammen ausgedrückt werden:

$$T = \frac{2 \cdot 474\,000}{6000\,000} = 0,158.$$

Mit diesem Werthe erhält man dann aus (16) die Senkung der mittleren Stützen

$$f = \frac{3200 \cdot 38^4}{60 \cdot 0,158 \cdot 20\,000 \cdot 1000^2} (1 + 0,80 \cdot 0,375) = 0,0458 \text{ m oder rund } 46 \text{ mm.}$$

Aus den vorstehenden Untersuchungen erkennt man, daß die Anordnung continuirlicher Träger, im Vergleiche mit der Anwendung von Einzelträgern für jede Brückenöffnung, mit einem gewissen Gewinne verbunden ist, indem bei den ersteren die Inanspruchnahme und somit der Materialaufwand geringer ausfällt, als bei isolirten Trägern. Die Größe dieses Gewinnes ist insbesondere aus den Coefficienten zu erkennen, mit welchen nach der vorstehenden Tabelle der Werth des Momentes für Einzelträger $\frac{q L^4}{72}$ zu multipliciren ist, um das größte Moment M_{max} des continuirlichen Trägers zu erhalten. Diese Coefficienten zeigen, daß der besagte Vortheil um so

größer ist, je mehr sich das Verhältniß $v = \frac{p}{q}$ der Einheit nähert, d. h. je größer die lichten Spannweiten sind, und daß er bei Trägern auf vier Stützen bis zu 39 Proc. anwachsen kann. So groß nun auch dieser Vortheil, insbesondere bei schweren Trägern oder großen Spannweiten ist, so hat doch die Anwendung continuirlicher Träger gewichtige praktische Bedenken, wie sich aus dem Folgenden ergibt.

Aus der Rechnung erkennt man, daß es sich meist um sehr geringe Höhenunterschiede der Auflager handelt, durch deren Einfluß die Verringerung der Anspannung des Trägers herbeigeführt wird; so genügte in dem vorstehend berechneten Beispiele schon eine Senkung der Mittelstützen um noch nicht 46 mm, um das Moment M_{max} in dem Verhältnisse 1 : 0,741 zu verringern, eine Senkung, die im Verhältnisse zu der Trägerlänge von 120 m sehr gering erscheinen muß.

Wenn man nun auch bei sorgfältiger Ausführung diese Höhenlagen der Stützen genau erzeugen kann, so muß man doch befürchten, daß im Laufe der Zeit, etwa durch ungleichmäßiges Setzen der Brückenpfeiler, diese gegenseitige Lage der Stützpunkte sich verändern könne, und es ist leicht einzusehen, daß unter einer solchen Voraussetzung der Zustand des Trägers ein sehr ungünstiger wird. Denkt man sich z. B., daß bei einem auf drei Stützen ruhenden Träger mit entsprechend tiefer gelegtem Mittelauslager, wie er im vorhergehenden Paragraphen berechnet wurde, die Außenpfeiler sich um so viel senken würden, daß sämtliche Stützpunkte in eine Horizontale zu liegen kämen, so würde dadurch das Moment, wofür der Träger berechnet ist, und welches ursprünglich an den gefährdeten Stellen $\frac{qL^2}{32} (1 - u)$ betrug, zu dem Betrage $\frac{qL^2}{32}$ gewachsen sein.

Diese Senkung würde für den im Beispiel 1 des vorigen Paragraphen berechneten Träger von 40 m Länge nur 12 mm zu betragen haben, um das Maximalmoment in dem Verhältnisse $1 : 1 - u = \frac{1}{0,799} = 1,25$ zu steigern.

Würde die Höhenveränderung noch größer werden, so würde eine weitere Vergrößerung des Bruchmomentes veranlaßt werden, und das letztere würde den äußersten Betrag $\frac{qL^2}{8}$, also mehr als das Vierfache desjenigen, wonach der Träger construirt ist, erlangen, wenn die Außenstützen sich so tief gesenkt hätten, daß der Träger nur noch in der Mitte A_2 aufruhe würde, Fig. 149 (a. f. S.) Es würde derselbe Betrag $\frac{qL^2}{8}$ des Maximalmomentes

auch eintreten, wenn etwa die mittlere Stütze A_2 sich um so viel gesenkt hätte, daß der Träger nur an beiden Enden A_1 und A_3 aufruhe würde,

Fig. 149.

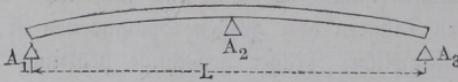


Fig. 150.

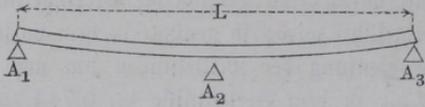


Fig. 150. Die hierzu erforderliche Höhendifferenz zwischen der Mittelstütze und den äußeren Auflagern müßte für diese äußersten Fälle offenbar den Betrag der Durchbiegungen erreichen, um welche der Träger unter Einfluß der Belastung q sich an den Enden resp. in der Mitte

durchbiegen würde. Man erhielt diese Durchsenkung für den durch Fig. 149 dargestellten Zustand nach §. 35, 2 zu

$$f = \frac{q l^4}{8 TE} = \frac{q L^4}{16 \cdot 8 TE} = 0,167 \text{ m,}$$

und für den Zustand der Fig. 150 nach §. 35, 4 durch

$$f = \frac{5}{384} \frac{q L^4}{TE} = 0,278 \text{ m.}$$

Wenn nun auch eine so beträchtliche Veränderung der Auflagerhöhen nicht zu befürchten sein mag, so erkennt man doch zur Genüge aus den vorstehenden Zahlenwerthen, in welcher erheblichen Weise die Sicherheit kontinuierlicher Träger durch zufällige und unvermeidliche Veränderungen der Auflager beeinflusst werden kann.

Hierzu tritt der ungünstige Umstand, daß auch schon bei der Herstellung des eisernen Trägers Abweichungen von der richtigen Form leicht vorkommen können, welche nur durch Anwendung besonderer Sorgfalt sich vermeiden lassen. Die vorstehende Theorie ist nämlich immer von der Voraussetzung ausgegangen, daß die Unterkante des Trägers im unbelasteten Zustande eine gerade Linie sei, oder daß doch wenigstens sämtliche Auflagerstellen desselben ursprünglich in einer Geraden liegen, so lange der Träger noch nicht durch eine Belastung, also auch nicht durch sein Eigengewicht angegriffen ist. Denkt man sich etwa den Träger nach seiner Fertigstellung, bei welcher er auf hoher Kante zu stehen pflegt, umgekantert, so daß sein Eigengewicht nunmehr nicht auf eine Durchbiegung in der Trägerebene wirkt, so müssen in dieser Lage des Trägers die sämtlichen Auflagerstellen genau in einer geraden Linie liegen. Wenn dies nicht der Fall ist, wenn z. B. die mittlere Auflagerstelle um eine gewisse Größe a von der geraden

Verbindungsline der äußeren Auflagerflächen abweiche, wie dies unter anderem sicher der Fall sein wird, wenn diese Auflagerstellen bei der Zusammensetzung des Trägers in aufrechter Stellung in einer Geraden befindlich gewesen sein sollten, so ist diese Abweichung von der richtigen Trägerform offenbar in ihrem Einflusse gleichbedeutend mit einer Höhenabweichung der mittleren Stütze von der Verbindungsline der äußeren Auflager um eben dieselbe Größe a . Man ersieht hieraus, wie durch ein möglicherweise in ungünstiger Art stattfindendes Zusammentreffen der nie ganz zu vermeidenden Ungenauigkeiten der Anfertigung mit denen der Aufstellung die Sicherheit continuirlicher Träger in hohem Grade gefährdet erscheint, und daß eine stete Ueberwachung des betreffenden Zustandes unerläßlich ist.

Diese Gründe sind denn auch hauptsächlich die Veranlassung, weshalb man neuerdings mehr und mehr von der Anwendung continuirlicher Brückenträger zurückgekommen ist, und den isolirten Trägern über die einzelnen Oeffnungen den Vorzug giebt, trotzdem dieselben nach den vorstehenden Rechnungen einen größeren Materialaufwand zu ihrer Ausführung erfordern. Es ist leicht ersichtlich, daß bei der Anordnung von Einzelträgern eine Veränderung der Auflagerhöhen, wie sie etwa durch ungleichmäßiges Setzen der Pfeiler eintritt, so bedenkliche Wirkungen für die Sicherheit nicht im Gefolge hat, wie sie vorstehend für die continuirlichen Träger erkannt wurden.

Es mag hier noch die sinnreiche, ebenfalls von Mohr angegebene Aufstellungsart angeführt werden, welche den Zweck hat, die gedachten Uebelstände zu beseitigen, welche aus den unvermeidlichen Fehlern der Anfertigung und Aufstellung der continuirlichen Träger herrühren. Mohr schlägt zu dem Ende vor, continuirliche Träger in den Einzelstrecken der verschiedenen Oeffnungen getrennt anzufertigen und aufzustellen, und nach ihrer Aufstellung die Enden der auf den Mittelpfeilern zusammentreffenden Einzelträger nachträglich durch Vernietung mit einander zu verbinden. Ist dies geschehen, so hat man eine nachträgliche Senkung der mittleren Auflager durch Entfernung von besonderen zu dem Zwecke untergelegten Platten zu bewirken. Die Stärke dieser Platten, d. h. die Größe der entsprechenden Senkung, ist natürlich nicht direct durch die vorstehend entwickelten Formeln zu berechnen, sondern mit Rücksicht darauf zu bestimmen, daß der Träger in dem Zustande, wo er nur sein Eigengewicht zu tragen hat, auf Stützen ruht, welche solche Höhenlage zu einander haben, daß die Momente über den Mittelstützen gleich Null sind, wie es offenbar vor der Zusammenkuppelung der Einzelträger der Fall war, und woran die Vereinigung nichts ändern konnte. Von diesem Zustande ausgehend ist dann die nachträglich zu bewirkende Senkung der Innenstützen so zu berechnen, daß die verschiedenen Maximalmomente für die ungünstigsten Belastungsfälle einander gleich

werden. Hinsichtlich der Ausführung dieser Rechnungen muß hier auf die benutzte Quelle*) verwiesen werden.

§. 40. Die elastische Linie als Seilcurve. Die Berechnung der continuirlichen Träger führt, wie aus dem Vorstehenden sich ergibt, zu verwickelten und umständlichen Rechnungen, sobald die Anzahl der Stützen eine größere und die Belastungsart nicht eine sehr einfache ist. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, kann man sich daher auch hier graphischer Methoden bedienen, welche eine für die Praxis genügende Genauigkeit gewähren. Im Folgenden soll die von Mohr**) herrührende, durch ihre Anschaulichkeit und Einfachheit ausgezeichnete Methode näher angegeben werden. Aus der für die elastische Linie geltenden Gleichung

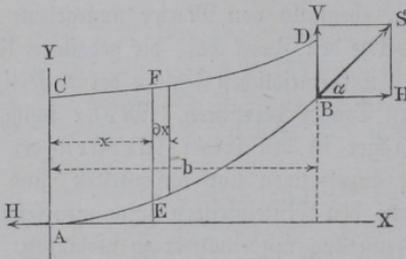
$$M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

oder

$$E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{T} \dots \dots \dots (1)$$

läßt sich wie folgt nachweisen, daß die elastische Linie zu den sogenannten Seilcurven gehört. Man denke sich zu dem Zwecke in *AB*, Fig. 151, ein

Fig. 151.



Seilstück, dessen tiefster Punkt *A* ist, so daß daselbst die Tangente des Seiles horizontal ausfällt, und dessen Belastung in bekannter Weise der Belastungslinie *CFD* gemäß derart angenommen ist, daß die Ordinate *EF* in dem beliebigen Punkte *E* daselbst die spezifische Belastung *q* nach einem gewissen willkürlich ge-

wählten Maßstabe darstellt. In dem Punkte *B* wirkt auf das Seilstück eine Zugspannung *S*, deren horizontale Componente gleich dem überall constanten Werthe *H* ist, während die verticale Componente *V* übereinstimmt mit der zwischen dem Scheitel *A* und dem Punkte *B* angebrachten Belastung. Diese letztere ist nach dem Begriffe der Belastungsfläche durch das Flächenstück *ACDB* dargestellt.

Nimmt man den Scheitel *A* der Seilcurve zum Anfang rechtwinkliger Coordinaten an, deren *X*-Axe horizontal gerichtet ist, und ist α der Winkel

*) S. Zeitschr. d. Archit. u. Ing.-Ver. für Hannover, 1860.

**) S. Zeitschr. d. Archit. u. Ing.-Ver. für Hannover, 1868.

des Seiles in B gegen die Horizontale, so hat man dem Vorstehenden gemäß

$$S \cos \alpha = H,$$

$$S \sin \alpha = V = \int_0^b q \partial x,$$

folglich durch Division:

$$\text{tang } \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\int_0^b q \partial x}{H},$$

woraus durch Differentiation:

$$H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q \quad \dots \quad (2)$$

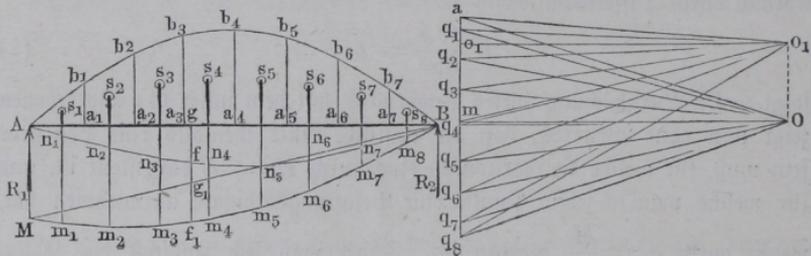
folgt. Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem unter (1) angegebenen zeigt nun ohne Weiteres, daß die elastische Linie ebenfalls eine Seilcurve sein muß, für welche der horizontale Zug durch $H = E$ dargestellt ist, und für welche man in jedem Punkte eine Belastungsordinate anzunehmen hat, welche durch $q = \frac{M}{T}$ gegeben ist. Denkt man sich zunächst das Trägheitsmoment des Balkens für alle Punkte desselben von derselben Größe, so kann man auch $q = M$ setzen, und es ergibt sich aus dem Vorstehenden die folgende Construction der elastischen Linie.

Für irgend einen Balken, welcher etwa auf zwei Stützen frei aufliegend angenommen werden möge, kann man, wenn die Belastung gegeben ist, das auf Biegung wirkende Moment M in der mehrfach gezeigten Weise bestimmen, sei es durch Rechnung oder vermöge eines Seilpolygons, wie dies in Thl. I, Anhang 2 angegeben und an mehreren Beispielen durchgeführt worden ist. Ist dies geschehen, so kann man in jedem Punkte des Balkens eine Ordinate aufgetragen denken, welche nach einem beliebig anzunehmenden Maßstabe die Größe des in diesem Punkte angreifenden Momentes darstellt, mit anderen Worten, man kann die Momentenfläche des Balkens in der vorstehend mehrfach angegebenen Art construiren. Entwirft man nun mit Hülfe eines Kräftepolygons, dessen Polabstand oder Horizontalzug man nach demselben Maßstabe wie die Belastungen gleich dem Elasticitätsmodul E annimmt, diejenige Seilcurve, welche man erhält, wenn man die gedachte Momentenfläche als Belastungsfläche ansieht, so erhält man in derselben die elastische Linie des Balkens, und also in den verticalen Ordinaten ihrer verschiedenen Punkte die Durchbiegungen dieser Punkte.

Um dieses Verfahren, welches zwar bei früheren Gelegenheiten mehrfach zur Anwendung gekommen ist, des Zusammenhanges wegen hier zu er-

läutern, diene Fig. 152. Es sei für den Balken AB die Belastungslinie durch die krumme oder gebrochene Linie $Ab_1b_2b_3\dots B$ gegeben, und durch die verticalen Theilungslinien ab sei die Belastungsfläche beliebig in Lamellen getheilt, deren Gewichte $Q_1, Q_2, Q_3\dots$ in den Schwerpunkten s der Flächenstreifen wirkend gedacht werden. Die Größen dieser den betreffenden Streifen der Belastungsfläche proportionalen Kräfte seien nach einem gewissen Maßstabe im Kräftepolygone als die Strecken $aq_1, q_1q_2, q_2q_3\dots$ der Reihe nach angetragen. Wählt man den Pol O_1 des Kräfte-

Fig. 152.



polygons beliebig, und construirt in bekannter Weise durch Parallellinien mit den Polstrahlen $O_1a, O_1q_1, O_1q_2\dots$ das Seilpolygon $Mm_1m_2\dots B$, so erhält man bekanntlich in der Schlußlinie BM die Richtung desjenigen Polstrahles Om , welcher die Gesamtbelastung aq_8 so theilt, daß die beiden Theile am und mq_8 die Auflagerdrücke R_1 und R_2 in A und B angeben. Wenn man daher den Pol in einer durch diesen Punkt m gehenden Horizontallinie in O angenommen hätte, so würde man mit diesem Pole das Seilpolygon $An_1n_2n_3\dots B$ mit horizontaler Schlußlinie AB erhalten haben. Es ist ferner bekannt, daß ein solches Seilpolygon für jeden seiner Punkte wie f in der verticalen Ordinate $y = fg$ ein Maß für das daselbst stattfindende Moment abgibt, dergestalt, daß dieses Moment durch $M = Hy$ ausgedrückt ist, wenn H diejenige Kraft bedeutet, welche durch die Polabstand mO nach dem Kräftemaßstabe dargestellt ist, während y nach dem Längenmaßstabe zu messen ist, in welchem die Zeichnung ausgeführt ist. Werden beispielsweise die Belastungen durch Kilogramme und die Längen durch Meter gemessen, so erhält man das Moment für den Punkt f des Balkens zu $M = Hy$ Meterkilogramm. Es geht hieraus auch hervor, daß die beiden mit den Polen O und O_1 gezeichneten Seilpolygone An und Mm für jeden Punkt g des Balkens gleich große verticale Ordinaten $fg = f_1g_1$ haben müssen, sobald für beide Pole O und O_1 derselbe Abstand von der Kraftlinie aq_8 angenommen wurde. Wäre dagegen der Abstand O_1o_1 des

Poles O_1 größer oder kleiner als derjenige O_m gewählt, so daß etwa

$$O_1 o_1 = \mu \cdot O_m$$

wäre, so würden an jeder Stelle des Balkens die Ordinaten y und y_1 der beiden zugehörigen Seilpolygone im umgekehrten Verhältnisse zu einander stehen, d. h. man hätte in diesem Falle $y_1 = \frac{1}{\mu} y$, denn für beide Polygone gilt

$$M = Hy = O_m \cdot fg = O_1 o_1 \cdot f_1 g_1.$$

Wendet man diese Betrachtungen auf den vorliegenden Fall an, so hat man zur Verzeichnung der elastischen Linie die Belastungsfläche $Ab_1 b_2 \dots B$ des Balkens so zu bestimmen, daß die Ordinate für jeden Punkt wie g gleich ist dem in g wirkenden Momente, während man die Polbistanz O_m , welche den Horizontalzug darstellt, gleich dem Elasticitätsmodul E zu machen hat. Die mit dieser Polbistanz gezeichnete Seilcurve, d. h. die von dem Seilpolygone umhüllte Curve stellt dann nach dem Obigen die elastische Linie des Balkens vor, deren Construction daher nach den bekannten Regeln in jedem Falle leicht zu entwerfen ist, wie im Folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Was den beim Auftragen der Belastungsordinaten anzuwendenden Maßstab anbetrifft, so läßt sich darüber Folgendes bemerken. Setzt man in der allgemeinen Gleichung $M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ der elastischen Linie für das Moment M das Product Pa aus einer Kraft P Kilogramm und einer Länge a Meter, und setzt man für das Trägheitsmoment T des Querschnittes den Ausdruck Fr^2 , worin F die Fläche des Querschnittes in Quadratmetern und r den sogenannten Trägheitshalbmesser in Metern bezeichnet, so kann man die obige Gleichung auch schreiben:

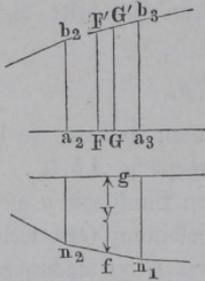
$$\frac{Pa}{r^2} = FE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Hierin bedeutet FE eine Kraft in Kilogrammen, welche dem Horizontalzuge H in der Gleichung der Seilcurve (2) $q = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ entspricht. Andererseits ist $\frac{Pa}{r^2}$ eine Kraft dividirt durch eine Länge, d. h. eine spezifische Belastung oder eine Belastung für die Längeneinheit gleich $1m$, entsprechend dem Werthe q in der Gleichung (2) der Seilcurve. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich nunmehr analog der Construction in Fig. 152 das folgende Verfahren.

Man habe bei der Zeichnung des Balkens AB einen Längenmaßstab L angenommen, welcher etwa in dem Verhältnisse λ z. B. $\frac{1}{200}$ verjüngt ist,

so daß also jeder Länge der Abscissen in der Zeichnung von 5 mm eine wirkliche Trägerlänge von 1 m entspricht, und man habe ferner für die Horizontalkraft $H = FE$ einen Kräftemaßstab K so gewählt, daß jedem Kilogramme etwa eine Länge gleich κ in der Zeichnung zukommt. Wenn man nun nach dem-

Fig. 153.



selben Kräftemaßstabe K die Größe der spezifischen Kraft $\frac{Pa}{r^2}$ an jeder Stelle des Balkens als Belastungsordinate aufträgt, z. B. für den Punkt F ,

Fig. 153, die Ordinate $FF' = \frac{Pa}{r^2} = \frac{M}{r^2}$ macht,

unter M das Moment in F verstanden, so ist es deutlich, daß daselbst der Streifen $FF'G'G$ von der Breite 1 m, also in der Figur von der Breite $FG = 5$ mm, durch seinen Inhalt die Größe der auf 1 m Länge entfallenden Belastung des Trägers in F repräsentirt, genau so, wie es in Fig. 152 der Fall ist, wo die Ordinaten ab der Belastungsfläche den spezifischen Belastungen des Trägers entsprechen. Es ergibt sich daher, daß man zur Auftragung der Kräfte im Kräftepolygone die einzelnen Flächenstücke, wie $a_2 b_2 b_3 a_3$, in Rechtecke von der Basis $FG = 1$ m zu verwandeln und die Höhe der so verwandelten Rechtecke auf der Verticalen des Kräftepolygons ($a q_s$ in Fig. 152) aufzutragen hat. Die so erhaltenen Strecken stellen dann offenbar die den Elementen $A a_1, a_1 a_2 \dots$ des Balkens zugehörigen Werthe von $\frac{M}{r^2}$ vor, und wenn man das Seilpolygon nunmehr zeichnet, so erhält man in der zugehörigen Ordinate $y = fg$ eine Länge, für welche die dem Seilpolygone eigenthümliche Beziehung gilt,

$$Hy = \int_0^x q \partial x,$$

oder im vorliegenden Falle

$$FE \cdot y = \int_0^x \frac{M}{r^2} \partial x.$$

In diesem Ausdruck ist die Ordinate $y = fg$ des Seilpolygons nach dem Maßstabe L der Zeichnung zu messen; es würde also beispielsweise bei dem gewählten Verjüngungsverhältnisse $\lambda = 1/200$ jeder Länge der Ordinate y , welche gleich 5 mm ist, eine Länge von 1 m entsprechen. Man erhält also den Werth

$$FE \cdot y = \int_0^x \frac{M}{r^2} \partial x$$

in Metekilogrammen, wenn man die Anzahl von Kilogrammen, welche die Poldistanz H nach dem Kräftemaßstabe K darstellt, multiplicirt mit der Anzahl von Metern, welche die Ordinate y nach dem Längenmaßstabe L vorstellt. Würde man in dieser Weise verfahren, so würde bei der außerordentlichen Größe des Elasticitätsmoduls E , also auch der Horizontalkraft FE , gegen welche die Strecken auf der Verticallinie des Kräftepolygons sehr klein sind, der Pol in weite Ferne gerückt, so daß die Polstrahlen nur wenig von einander und von der Horizontalen abweichen würden. In Folge dessen würde die erhaltene Seilcurve, welche die elastische Linie darstellt, sehr flach werden, und von der geraden Balkenaxe nur unmerklich abweichen. Wenn man sich jedoch vorstellt, daß man als den Maßstab, nach welchem man den Horizontalschub $H = FE$ aufträgt, nicht denjenigen K , sondern einen ν fach kleineren annimmt, so daß also für die Horizontalkraft H ein Kilogramm nicht mehr durch ν Millimeter, sondern durch $\nu \nu$ Millimeter dargestellt ist, während man für die verticalen Kräfte den Maßstab K beibehält, so ist es nach dem oben über den Einfluß der Poldistanz Gesagten klar, daß nunmehr die Ordinaten der Seilcurve im Verhältnisse von $\frac{1}{\nu}$ vergrößert erscheinen. Gesezt, man würde $\nu = \lambda = 1/200$, also gleich dem für die Längen gewählten Verjüngungsverhältnisse der Zeichnung annehmen, so würde eine Vergrößerung der Ordinaten y in dem Verhältnisse $\frac{1}{\nu} = 200$ eintreten, mit anderen Worten, die Ordinaten der Seilcurve stellen dann die Durchbiegungen des Balkens in natürlicher Größe vor. Hierauf beruht die Möglichkeit, den Verlauf der elastischen Linie und damit die mit der Biegung im Zusammenhange stehenden Kraftverhältnisse des elastischen Balkens graphisch zu behandeln.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß in Folge der nach dem Vorstehenden anzunehmenden Verschiedenheit des Kräftemaßstabes für die verticalen und horizontalen Kräfte die sich ergebende Seilcurve wegen der dadurch hervorgerufenen Verzerrung nun nicht mehr die Copie der elastischen Linie vorstellen kann, und daß die Neigungen der Tangenten beider Curven in entsprechenden Punkten verschieden ausfallen müssen. Es ist aber aus dem Obigen ohne Weiteres der einfache Zusammenhang klar, welcher zwischen diesen beiden Neigungen für jeden Punkt besteht. Wenn nämlich in irgend einem Punkte des Balkens die Richtung der Tangente an die Seilcurve den Winkel α' mit der Horizontalen bildet, so muß die elastische

Linie in demselben Punkte unter einem Winkel α gegen den Horizont geneigt sein, für welchen man hat

$$\operatorname{tg} \alpha = v \operatorname{tg} \alpha',$$

wofür man bei der Kleinheit von α in den meisten Fällen $\alpha = v \alpha'$ wird setzen können.

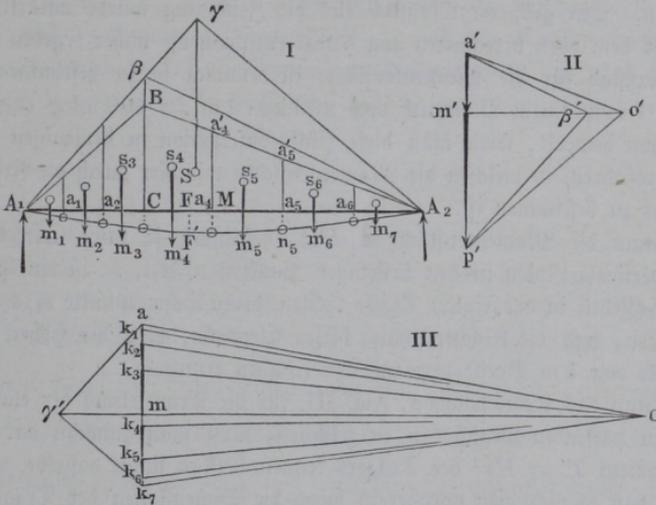
Wenn man es mit einem Balken von überall gleichem Querschnitte zu thun hat, für welchen also das Trägheitsmoment $T = Fr^2$ überall dieselbe Größe hat, so kann man die Ordinaten der Belastungsfläche auch einfach proportional der Größe des Momentes M und die Horizontalkraft einfach gleich dem Elasticitätsmodul E annehmen, da diese Annahme, welche $T=1$ voraussetzt, nur auf die Einheit des für die Horizontalkraft H angewendeten Maßstabes, also auf das oben mit v bezeichnete Verhältniß, nicht aber auf das gegenseitige Verhältniß der Kräfte von Einfluß ist. Wenn dagegen der Querschnitt des Balkens an verschiedenen Stellen verschieden ist, so kann man die Untersuchung in zweifacher Weise führen. Nach der einen Methode setzt man in dem Ausdrucke $T = Fr^2$ die Fläche F gleich der Einheit (1 qm) voraus, bestimmt mit Rücksicht darauf die Trägheitshalbmesser r für die verschiedenen Querschnitte und trägt als Ordinaten der Belastungsfläche in den einzelnen Punkten Strecken auf, welche den jeweiligen Werthen von $\frac{M}{r^2}$ entsprechen. Andererseits kann man aber auch einen überall constanten Trägheitshalbmesser r gleich der Einheit zu Grunde legen, so daß man die Belastungsordinaten den Momenten direct proportional aufträgt, hat aber dann zur Verzeichnung der einzelnen Seiten des Seilpolygons für jeden Punkt eine veränderte Horizontalkraft anzuwenden, welche durch $F \cdot E$ ausgedrückt ist, wenn F überall die aus der Beziehung $T = F \cdot 1^2$ sich ergebende Fläche bedeutet. Mit anderen Worten, man verändert dem Werthe des Trägheitsmomentes entsprechend im Kräftepolygone die Pol-
distanz, mit Hilfe deren die entsprechende Seite des Seilpolygons gezeichnet wird. Es kann, je nach den Umständen bald das eine, bald das andere dieser beiden Verfahren bequemer in der Anwendung sein. Daß beide zu demselben Resultate führen müssen, ist leicht zu erkennen, wenn man bedenkt, daß ganz allgemein die n fach vergrößerte Annahme von F also auch von der Horizontalkraft H ebenfalls eine n fache Vergrößerung der Belastungsordinaten $\frac{M}{r^2} = M \frac{F}{T}$, also nur eine Veränderung in der Einheit des Kräftemaßstabes zur Folge hat.

§. 41. Beispiele. Zur Erläuterung der vorstehend angegebenen Beziehungen möge die Anwendung des darauf beruhenden graphischen Verfahrens an

einigen Beispielen gezeigt werden. Es sei A_1A_2 , in Fig. 154, I, ein etwa im Maßstabe 1 : 100 gezeichneter horizontaler Träger auf zwei Stützen, dessen Länge $l = 5$ m ist, und welcher im Abstände $A_1C = a = 1,5$ m von A_1 durch ein concentrirtes Gewicht von $P = 5000$ kg belastet sein soll. Wenn zunächst von der Belastung durch das Eigengewicht abgesehen wird, so findet man das in C auf den Balken wirkende Moment bekanntlich zu

$$M = P \frac{a(l-a)}{l} = 5000 \frac{1,5 \cdot 3,5}{5} = 5250 \text{ mkg},$$

Fig. 154.



und wenn man diese Größe nach einem beliebigen Maßstabe, d. h. für eine beliebige Basis b gleich CB anträgt, so giebt die Dreiecksfläche A_1BA_2 die Momentenfläche des Trägers. Man kann dieselbe übrigens ohne jegliche Rechnung graphisch bestimmen, wenn man nach dem für die Kräfte angenommenen Maßstabe (in der Figur 1 mm = 200 kg) auf einer Verticallinie in II die Strecke $a'p' = P$ anträgt und durch a' und p' zwei Parallelen mit den beiden Geraden βA_2 und βA_1 legt, welche man von einem beliebigen Punkte β der Richtung P nach den Stützpunkten A_2 und A_1 gezogen hat. Zieht man durch den Durchschnitt β' dieser Linien eine Horizontale $\beta'm'$, so theilt diese bekanntlich die Kraft $a'p'$ in m' in zwei Abschnitte, welche den Auflagerdrücken R_1 in A_1 und R_2 in A_2 entsprechen. Man hat also, um das Seilpolygon A_1BA_2 für die Momente mit einer horizontalen Schlußlinie A_1A_2 zu erhalten, auf der durch m' gelegten Horizontalen nur die Länge $m'o'$ gleich der für den Momentenmaßstab gewählten

Basis b anzutragen (in der Figur II ist $b = m'o' = 20$ mm, entsprechend einer Länge von 2 m). Zieht man dann durch A_1 eine Parallele mit $o'p'$ und durch A_2 eine Parallele mit $o'a'$, so müssen sich diese nach der Construction in einem Punkte B der Krafrichtung schneiden, und man hat das Moment in C in Meterkilogrammen durch das Product

$$CB \text{ Kilogramm} \times m'o' \text{ Meter}$$

gefunden. In der Figur ergibt sich $CB = 13,2$ mm, entsprechend 2640 kg, also hat man graphisch das Moment zu

$$CB \times m'o' = 2640 \cdot 2 = 5280 \text{ mkg}$$

gefunden. Ein größerer Maßstab für die Zeichnung würde natürlich das Resultat dem oben berechneten von 5250 entsprechend näher ergeben haben. Der Maßstab für die Momentenfläche ist demnach so zu bestimmen, daß danach 1 mm einem Momente von 200 kg \cdot 2 m = 400 mkg entspricht. Wie schon bemerkt, wird man diese Hilfsconstruction in denjenigen Fällen nicht ausführen, in welchen die Momentenfläche wie hier durch die Rechnung einfacher zu bestimmen ist.

Ist nun die Momentenfläche A_1BA_2 bestimmt, so kann man dieselbe durch verticale Linien in den beliebigen Punkten $a_1 a_2 \dots$ in eine größere Anzahl (sieben in der Figur) Theile theilen, deren Schwerpunkte $s_1, s_2, s_3 \dots$ bestimmen, und die Flächeninhalte dieser Elemente, d. h. die Höhen der in Rechtecke von 1 m Breite verwandelten Flächen ermitteln.

Um nun das Kräftepolygon, Fig. III, für die Ermittlung der elastischen Linie in passenden Maßstäben zu zeichnen, muß man zunächst das Trägheitsmoment $T = Fr^2$ des Trägers kennen. Man findet dasselbe, vorausgesetzt, daß es nicht von vornherein durch die Dimensionen des Trägers gegeben ist, mit Rücksicht auf die Festigkeitsformel

$$M_{max} = s \frac{T}{e}$$

zu

$$T = \frac{M_{max}}{s} e,$$

unter s die höchstens zulässige Faserspannung und unter e den Abstand der äußersten Faser von der neutralen Axe verstanden. Setzt man $s = 6$ kg pro Quadratmillimeter, und e gleich der halben Trägerhöhe, welche 0,5 betragen mag, also $e = \frac{h}{2} = 0,25$ m, so ergibt sich T , wenn alle Maße in Metern ausgedrückt werden, zu

$$T = \frac{5250}{6000000} 0,25 = 0,0002187.$$

Nimmt man an, die ganze Fläche F des Querschnittes sei in den beiden Gurtungen im Abstände $r = e = 0,25$ m concentrirt, so ergibt sich

$$F = \frac{T}{r^2} = \frac{0,000\ 2187}{0,25 \cdot 0,25} = 0,0035 \text{ qm.}$$

Man hat daher den Horizontalzug

$$H = FE = 0,0035 \cdot 18\ 000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 63\ 000\ 000 \text{ kg} \\ = 63\ 000 \text{ Tonnen}$$

anzunehmen, und kann danach einen passenden Maßstab wählen. In der Figur ist dieser Maßstab für die Horizontalkraft so gewählt, daß 1 mm = 1000 Tonnen ist, daher die Polabstand $mo = 63$ mm aufgetragen wurde. Für die Verticalkräfte $ak_1, k_1k_2 \dots$ ist der Maßstab hundertmal größer genommen, so daß also 1 mm = 10 Tonnen ist, und zwar sind die Strecken $ak_1, k_1k_2 \dots$ so bestimmt, daß sie nach diesem Maßstabe den Werthen

$$\frac{K}{r^2} = \frac{K}{0,25 \cdot 0,25} = 16 K$$

entsprechen, wenn mit K der Flächeninhalt der einzelnen Elemente der Belastungsfläche A_1BA_2 bezeichnet ist. Man erhält also beispielsweise die Strecke k_4k_5 , wenn man das Trapez $a_4a_4'a_5'a_5$ in ein Rechteck von der Breite 1 m verwandelt. Mißt man die erhaltene Höhe h dieses Rechtecks nach einem Maßstabe, dessen Einheiten in dem Verhältnisse $\frac{1}{r^2}$ kleiner sind, als diejenigen des Momentenmaßstabes, so daß also danach in dem vorliegenden Falle $1 \text{ mm} = \frac{400 \text{ mkg}}{1/16 \text{ qm}} = 6400 \text{ kg pro Meter}$ ist, so hat man das so gewonnene Resultat nach dem für die Verticalkräfte gewählten Maßstabe (1 mm = 10 Tonnen) als k_4k_5 auf ak_7 abzutragen. In der Figur ist

$$h = \frac{a_4a_4' + a_5a_5'}{2} \cdot a_4a_5 = 7,2 \text{ mm,}$$

daher

$$k_4k_5 = h \frac{6400}{10\ 000} = 4,6 \text{ mm.}$$

Was die Höhenlage des Pols O anbelangt, so hat man dieselbe so zu wählen, daß die Horizontale durch den Pol die Verticalkraft ak_7 in einem Punkte m so trifft, daß die Abschnitte am und mk_7 den Auflagerdrücken gleich sind, welche die Belastungsfläche A_1BA_2 in A_1 und A_2 erzeugt. Um diesen Punkt m zu finden, denkt man sich das Gewicht der Belastung in dem leicht anzugebenden Schwerpunkte S des Dreiecks A_1BA_2 wirkend, und zieht durch irgend welchen Punkt γ der Schwerriichtung zwei

Gerade γA_1 und γA_2 nach den Auflagern. Legt man sodann im Kräftepolygone durch a und h_7 Parallelen $a\gamma'$ und $h_7\gamma'$ zu jenen Linien, so liefert die Projection des Durchschnittspunktes γ' auf ak_7 in m den gesuchten Theilpunkt, in dessen Horizontallinie der Pol O in der oben ermittelten Poldistanz angenommen werden muß.

Nachdem das Kräftepolygon in dieser Weise festgestellt ist, kann die Zeichnung des Seilpolygons in der bekannten Art geschehen, indem man, von A_1 aus beginnend, Parallelen $A_1 m_1, m_1 m_2, m_2 m_3 \dots$ mit den Polstrahlen $Oa, Ok_1, Ok_2 \dots$ zieht, dann muß der gewählten Lage von O entsprechend die durch m_7 mit dem letzten Polstrahle Ok_7 gezogene Parallele durch den Punkt A_2 gehen, indem die Schlußlinie des Seilpolygons $A_1 m_1 m_2 \dots A_2$ mit der horizontalen Balkenaxe $A_1 A_2$ zusammentreffen muß.

Das erhaltene Seilpolygon hüllt die dem Balken zugehörige Seilcurve ein, welche man erhalten würde, wenn die Theilung der Belastungsfläche in unendlich viele unendlich schmale Streifen vorgenommen werden könnte. Jede Seite des Polygons ist eine Tangente an die Seilcurve, und es ist ersichtlich, daß irgend eine Polygonseite, wie z. B. $m_3 m_6$, die Seilcurve in dem Punkte n_3 berührt, durch welchen die verticale Theilungslinie $a_3 a_3'$ hindurchgeht. Dementsprechend ist die erste Polygonseite $A_1 m_1$ eine Tangente in A_1 und die letzte Seite $m_2 A_2$ eine Berührungslinie in A_2 an die Seilcurve. Es ist mit Bezug hierauf leicht, die Seilcurve mit genügender Sicherheit in das Polygon einzuzichnen, wenn die Anzahl der Elemente, in welche die Belastungsfläche getheilt wurde, nicht zu klein angenommen ist. In der Figur I sind die Punkte, wie n_3 , in welchen die Seilcurve die Polygonseiten berührt, durch kleine Kreise angedeutet.

Die so erhaltene Curve giebt nach dem Vorstehenden eine Darstellung der elastischen Durchbiegungen des Balkens an jeder Stelle, und zwar ist im vorliegenden Falle, in welchem das Verhältniß der Kräftemaßstäbe für H und K gleich dem Verjüngungsverhältniße der Abscissen in I (1 : 100) gewählt wurde, an jeder Stelle die Durchbiegung durch die Ordinate der Seilcurve daselbst unmittelbar in natürlicher Größe gegeben. Die größte Durchbiegung $f = FF'$ des Balkens erhält man offenbar für denjenigen Punkt F , in welchem die Seilcurve eine mit der Schlußlinie $A_1 A_2$ parallele Tangente hat, diese Durchbiegung bestimmt sich nach der Figur zu nahezu 3 mm und zwar findet sie sich hier nicht im Angriffspunkte C der Kraft P , auch nicht in der Mitte M , sondern in einem Punkte F , welcher zwischen C und M gelegen ist. Nur wenn die Kraft P in der Mitte des Balkens angreift, tritt auch in der Mitte die größte Durchbiegung ein. Diese Durchbiegung würde im vorliegenden Falle rechnerisch zufolge §. 35. 3, zu

$$f = \frac{5000 \cdot 5^3}{48 \cdot 0,000 \cdot 2187 \cdot 18 \cdot 000 \cdot 1000^2} = 0,0033 \text{ m} = 3,3 \text{ mm}$$

sich ergeben.

Die Seilcurve ist, wie schon bemerkt wurde, nicht mit der elastischen Linie übereinstimmend oder geometrisch ähnlich, sondern ihre Ordinaten sind in dem Verhältnisse der beiden Kräftemaßstäbe $\left(\frac{1}{\nu} = 100\right)$ vergrößert. Wenn daher die Neigungen der ersten und der letzten Polygonseite gegen den Horizont mit α_1' und α_2' bezeichnet werden, man also

$$m_1 A_1 A_2 = \alpha_1' \text{ und } m_7 A_2 A_1 = \alpha_2'$$

hat, so bestimmen sich die Neigungen α_1 und α_2 der elastischen Linie an den Enden in A_1 durch

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \nu \operatorname{tg} \alpha_1' = 0,01 \operatorname{tg} \alpha_1'$$

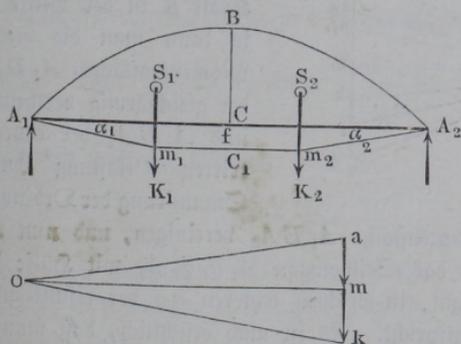
und in A_2 durch

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \nu \operatorname{tg} \alpha_2' = 0,01 \operatorname{tg} \alpha_2' \text{ u. s. w.}$$

Wenn die beiden Auflager A_1 und A_2 nicht, wie hier angenommen wurde, in einer Horizontallinie liegen, so ändert sich die Construction nur in der Beziehung, daß der Pol O des Kräftepolygons nicht in der durch den Punkt m gelegten Horizontallinie, sondern da anzunehmen ist, wo eine durch m mit $A_1 A_2$ gezogene Parallele diejenige Verticallinie schneidet, welche im Abstände gleich der Polabstand $H = FE$ von der Kräftelinie $a k_7$ gezogen ist.

Die hier angeführte Construction giebt Aufschluß über den ganzen Verlauf der elastischen Linie. Wenn es indessen nur darauf ankommt, die

Fig. 155.



größte Durchbiegung f derselben kennen zu lernen, so läßt sich die Zeichnung in allen den Fällen einfacher ausführen, in denen man von vornherein diejenige Stelle kennt, für welche die Durchbiegung ihren größten Werth annimmt. Es sei z. B. $A_1 A_2$, Fig. 155, ein auf zwei in gleicher Höhe befindlichen Stützen ruhender Balken von der

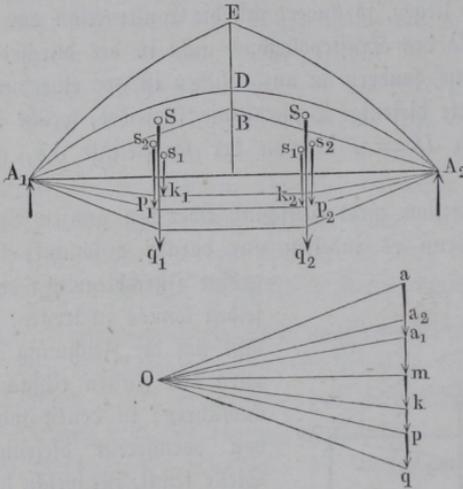
Länge $A_1 A_2 = l$, welcher durch eine gleichmäßig verteilte Belastung von q Kilogramm pro laufenden Meter belastet ist, so liegt die größte Durchbiegung in der Mitte, für welche das Moment seinen Maximalbetrag

$M = q \frac{l^2}{8} = CB$ annimmt. Zeichnet man durch A_1, B und A_2 eine Parabel mit der Axe in BC , also dem Scheitel in B , so erhält man die zugehörige Momentenfläche, deren Inhalt durch $\frac{2}{3} \cdot CB \cdot A_1A_2 = \frac{1}{12} q l^3$ gegeben ist. Trägt man daher wieder auf der Verticallinie ak nach dem für die Verticalkräfte gewählten Maßstabe die Strecke

$$ak = \frac{1}{12} \frac{q l^3}{r^2}$$

ab, und macht auf der Horizontalen durch die Mitte m von ak die Pol-
distanz $mO = FE$, wobei r und F aus dem bekannten Trägheitsmomente
 $T = Fr^2$ zu entnehmen sind, so erhält man, mit Hülfe der in den Schwer-
punkten S_1 und S_2 der Segmenthälften anzunehmenden Belastungen K_1 und
 K_2 das Seilpolygon $A_1 m_1 m_2 A_2$, an welches die Seilcurve in A_1, C_1 und A_2
sich tangential anschließt. Man hat also, wie im vorhergehenden Beispiele,

Fig. 156.



die Durchbiegung f in der
Mitte durch CC_1 und die
Neigung der elastischen Linie
gegen den Horizont in A_1
und A_2 durch $\nu \alpha_1'$ und
 $\nu \alpha_2'$ gefunden.

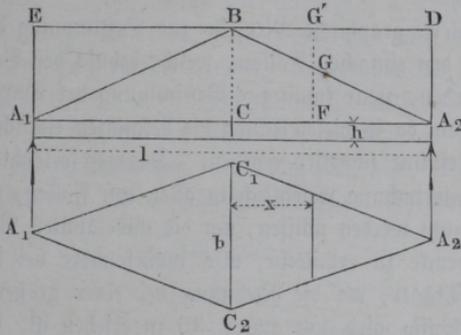
Wenn ein Balken A_1A_2 ,
Fig. 156, durch mehrere
Kräfte belastet ist, z. B.
durch sein Eigengewicht pl
und durch eine concentrirte
Kraft K in der Mitte C ,
so kann man die beiden
Momentenflächen A_1DA_2
der gleichförmig vertheilten
und A_1BA_2 der concentrirten
Belastung durch
Summirung der Ordinaten

zu einer resultirenden Momentenfläche A_1EA_2 vereinigen, und nun wie
oben verfahren, indem man das Seilpolygon $A_1 q_1 q_2 A_2$ mit Hülfe des
Kräftepolygons Oaq bestimmt, in welchem letzteren aq der resultirenden
Momentenfläche A_1EA_2 entspricht. Es ist auch ersichtlich, daß man zu
demselben Resultate gelangen wird, wenn man für die einzelnen Belastungen
mit demselben Horizontalzuge mO ihre besonderen Seilpolygone zeichnet und
deren Ordinaten summirt. So stellt in der Figur $A_1 k_1 k_2 A_2$ das mit
Hülfe des Kräfteplans $Oa_1 k$ gezeichnete Seilpolygon für die concentrirte

Kraft K vor, während $A_1 p_1 p_2 A_2$ der gleichförmigen Belastung durch das Eigengewicht $p l$ entspricht, für welche das Kräftepolygon durch $O a_2 p$ gegeben ist.

Wenn der Querschnitt des Trägers für verschiedene Punkte verschieden ist, wie z. B. bei der Dreiecksfeder, Fig. 157, deren Breite in der Mitte

Fig. 157.



$C_1 C_2 = b$ und deren constante Stärke h ist, so hat man die Werthe $\frac{M}{r^2}$ als

Ordinaten der Belastungsfläche aufzutragen. So ist für das Beispiel in Fig. 157 das Trägheitsmoment in der Mitte bei C durch

$$T = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} h^2 b h = r^2 F,$$

und im Abstände x von der Mitte, woselbst die Breite $b_1 = b \frac{l - 2x}{l}$ ist, durch

$$T_1 = \frac{1}{12} b \frac{l - 2x}{l} h^3 = \frac{1}{12} \frac{l - 2x}{l} h^2 \cdot b h = r_1^2 F$$

gegeben. Nimmt man $F = bh$ gleich dem Querschnitte in C an, und verwendet für das Seilpolygon den constanten Horizontalzug $FE = bh$. E , so hat man die Ordinate FG der dreieckigen Momentenfläche $A_1 B A_2$ im Abstände x von der Mitte in dem Verhältnisse $\frac{1}{r_1^2}$ zu vergrößern, und man

erhält, wenn CB als Ordinate $\frac{M}{\frac{1}{12} h^2}$ für die Belastungsfläche in C angenommen wird, die Ordinate in F zu

$$FG' = FG \frac{l}{l - 2x} = CB,$$

d. h. die Belastungsfläche ist durch das Rechteck $A_1 E D A_2$ dargestellt. Wollte man dagegen die Dreiecksfläche $A_1 B A_2$ der Momente direct als die Belastungsfläche durch die Ordinaten $\frac{M}{r^2}$ ansehen, d. h. r^2 für alle Querschnitte constant gleich $\frac{1}{12} h^2$ annehmen, so hätte man für den Querschnitt durch F einen Horizontalzug

$$H_1 = \frac{l - 2x}{l} b h E$$

zu benutzen. Im vorliegenden Falle wird das erstgedachte Verfahren mit Verwendung eines constanten Horizontalzuges das bequemere sein, in manchen Fällen kann es sich jedoch empfehlen, den Horizontalzug H veränderlich zu machen, indem man die Momentenfläche direct als die für die elastische Linie geltende Belastungsfläche verwendet.

Die im Vorstehenden erläuterte graphische Methode zur Bestimmung der elastischen Linie wird man in den einfachen Fällen, welche behufs der Bedeutlichkeit hier betrachtet wurden, zwar kaum zur Bestimmung der Durchbiegungen von Trägern benutzen, da in diesen Fällen die bekannten einfachen Formeln in der Regel das Resultat schneller ergeben. Dagegen erleichtert die graphische Methode die Untersuchung wesentlich in allen den Fällen, wo die Elasticitätsverhältnisse benutzt werden müssen, um die unbekannteren Biegemomente und Auflagerdrucke zu ermitteln, also insbesondere bei der Prüfung der continuirlichen Träger, wo die Rechnung bei einer größeren Anzahl von Stützen sehr weitläufig wird, wie aus §. 39 zu ersehen ist. Es soll daher die hier angegebene graphische Methode noch besonders in ihrer Anwendung auf continuirliche Träger besprochen werden.

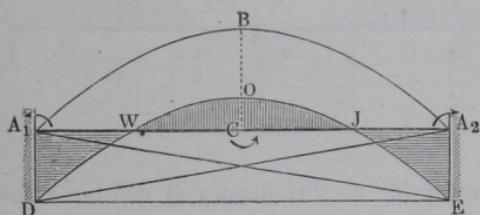
§. 42. **Continuirliche Träger.** Die Belastung eines auf zwei Stützen frei aufliegenden Trägers ruft in der Strecke zwischen den Stützen Momente hervor, in Folge deren der Balken eine nach unten hin convexe Krümmung annimmt. Ueber den Stützen treten Momente nicht auf, vielmehr werden sich hier die Enden unter gewissen Neigungen gegen den Horizont einstellen, die von der Art der Belastung abhängen. Wenn der Träger indessen an den Enden in gewisser horizontaler oder geneigter Richtung eingespannt ist, so kann man sich den durch die Einspannung auf den Träger ausgeübten Zwang als die Wirkung von Momenten denken, welche eine derartige Biegung auf die Enden ausüben, daß dieselben in Folge davon aus denjenigen Neigungen, welche die Balkenenden bei freier Auflagerung durch die Belastung anzunehmen veranlaßt werden, zurückgebogen werden in diejenigen Richtungen, unter welchen die Einklemmung geschehen ist. Diese Momente haben also eine Drehungsrichtung, der zufolge sie den Balken nach oben convex zu biegen streben, welche daher der Drehungsrichtung der Belastungsmomente entgegengesetzt ist.

In ganz gleicher Weise sind die Zwischenstützen der continuirlichen Träger zu beurtheilen, indem auch hier jedes mittlere Feld, d. h. ein von zwei Zwischenstützen begrenztes, wie ein an den Enden eingespannter Balken zu betrachten ist, auf dessen Enden Momente wirken, die hier aber nicht mehr durch Einmauerung, sondern durch die Einwirkung der beiderseits sich an-

schließenden belasteten Strecken erzeugt werden. Es sind daher auch über allen Zwischenstützen Momente wirksam, die im Allgemeinen die entgegengesetzte Drehungsrichtung von derjenigen haben, welche von den durch die Belastung zwischen den Stützen hervorgerufenen Momenten angestrebt wird. Wie im Vorhergehenden immer geschehen, sollen auch in der Folge die Momente positive oder negative heißen, je nachdem sie, wie die Belastungsmomente, dem Balken eine positive, d. h. nach oben concave oder, wie die Stützenmomente, eine negative, nach unten hin concave Krümmung zu ertheilen streben. Auch sollen im Folgenden in graphischen Darstellungen die positiven Momente aufwärts, die negativen abwärts von der Abscissenaxe angetragen werden.

Zur Erläuterung sei $A_1 A_2$, Fig. 158, ein an den Enden horizontal eingespannter, durch eine gleichmäßig verteilte Last q pro Längeneinheit belasteter Balken von der Länge l .

Fig. 158.



Die positive Momentenfläche ist in diesem Falle bekanntlich durch die Parabel $A_1 B A_2$ mit der mittleren Ordinate $CB = q \frac{l^2}{8}$ dargestellt. Durch

die Einspannung der Enden werden daselbst nach §. 35

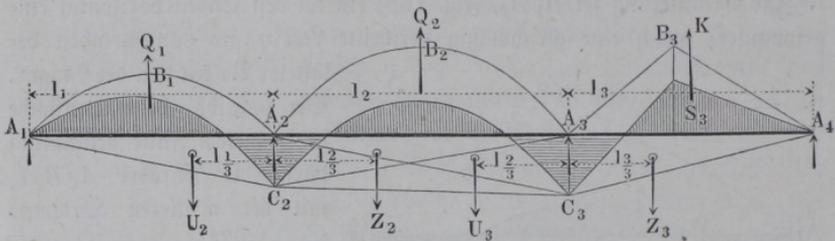
negative Momente $M_1 = M_2 = q \frac{l^2}{12}$ hervorgerufen. Jedem solchen Pfeilmomente entspricht als Momentenfläche für den Balken eine Dreiecksfläche von der Länge l zur Basis und einer Höhe gleich dem Momente an der Einmauerungsstelle. Es ist z. B. für das Moment M_1 in A_1 die Momentenfläche durch das Dreieck $A_1 D A_2$ und für das Moment M_2 in A_2 durch das Dreieck $A_2 E A_1$ dargestellt, wenn nach dem gewählten Maßstabe $A_1 D = M_1$ und $A_2 E = M_2$ gemacht ist.

Man kann die beiden negativen Momentenflächen einfach addiren, wenn man DE zieht, indem man für $A_2 E A_1$ das flächengleiche Dreieck $A_2 E D$ einführt, und man erhält auf diese Weise als negative Momentenfläche des eingespannten Balkens das Trapez $A_1 A_2 E D$, welches in dem vorliegenden Falle, wo die Anordnung und Belastung symmetrisch zur Mitte C ist, wegen der Gleichheit von M_1 und M_2 zu einem Rechtecke wird. Wenn man nun ebenfalls eine Summirung der positiven Momentenfläche $A_1 B A_2$ mit der negativen Momentenfläche $A_1 A_2 E D$ vornimmt, was einfach dadurch geschieht, daß man die Parabel $A_1 B A_2$ ohne Formänderung mit dem Punkte A_1 nach D und mit dem Punkte A_2 nach E herunterrückt, so erhält man in $A_1 D W O J E A_2$ die bekannte Momentenfläche für den beiderseits ein-

gemauerten, gleichförmig belasteten Balken. Aus dieser Momentenfläche, welche aus einem positiven Theile WOJ und zwei negativen Stücken A_1WD und A_2JE besteht, erkennt man, daß der Balken in dem mittleren Theile WJ convex nach unten und an den Enden convex nach oben gebogen wird, und daß in W und J die beiden Inflexionspunkte der elastischen Linie liegen, wo das Moment Null, also der Krümmungsradius unendlich groß ist, so daß daselbst also die entgegengesetzten Krümmungen in einander übergehen.

Demgemäß hat man sich auch bei einem continuirlichen Träger, wie demjenigen $A_1A_2A_3A_4$, Fig. 159, die Anstrengungen hervorgebracht zu

Fig. 159.



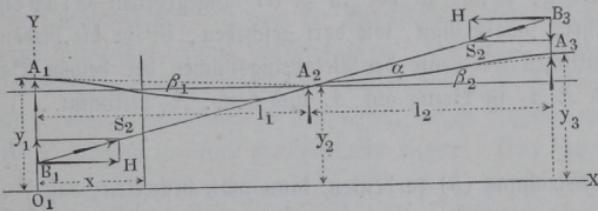
denken aus den positiven Momenten für die Belastungen Q und den negativen Momenten der Stützen. Die positiven Momente sind beispielsweise in der Figur durch die Parabelflächen $A_1B_1A_2$ und $A_2B_2A_3$ für die beiden ersten Strecken entsprechend einer gleichmäßig vertheilten Belastung, und für die dritte Strecke durch das Dreieck $A_3B_3A_4$ entsprechend einer in B_3 wirkenden concentrirten Last dargestellt. Die Momente über den Zwischenstützen, M_2 in A_2 und M_3 in A_3 rufen nach dem Vorstehenden in den Balkenstrecken die durch die Dreiecke $A_2C_2A_1$ und $A_2C_2A_3$, sowie $A_3C_3A_2$ und $A_3C_3A_4$ dargestellten Momente hervor. Die Summirung aller Momentenflächen ist aus der Figur ersichtlich, und es sind darin auch durch verschiedene Schraffirung die positiven Momente von den negativen unterschieden.

Es sei nun angenommen, daß die Ordinaten dieser sämtlichen Momentenflächen den Größen $\frac{M}{r^2}$ proportional gewählt seien, so kann man nach dem Vorstehenden diese Flächen als die Belastungsflächen der elastischen Linie betrachten, welche sich als Seilcurve für den Horizontalzug FE zeichnet, wenn wieder, wie mehrfach angegeben, $Fr^2 = T$ das Trägheitsmoment des Balkens bedeutet. Da es im Folgenden weniger darauf ankommt, die elastische Linie selbst in ihrem Verlaufe kennen zu lernen, es sich vielmehr in der Regel nur um die Ermittlung der Momente an einzelnen Stellen, ins-

besondere über den Stützen handelt, so wird es genügen, die durch die einzelnen Belastungsflächen dargestellten Belastungen in den Schwerpunkten dieser Flächen concentrirt anzunehmen. Demgemäß wirken die den gleichförmig vertheilten Lasten zukommenden Kräfte Q_1 und Q_2 in den Mitten von A_1A_2 und A_2A_3 , während die Belastung K_3 in dem Schwerpunkte S_3 des Dreiecks $A_3B_3A_4$ wirksam zu denken ist. Die mit U und Z bezeichneten negativen Belastungen durch die Stützenmomente wirken ebenfalls in den Schwerpunkten der betreffenden Dreiecke, also in Abständen von der betreffenden Stütze, welche dem dritten Theile der zugehörigen Felderweite gleichkommen. Die Belastungen durch die positiven Momente Q und K sind nach dem oben Bemerkten natürlich aufwärts gerichtet anzunehmen, da diese Anstrengungen positive Krümmungen hervorzurufen bestrebt sind.

Betrachtet man nunmehr irgend welche zwei benachbarte Strecken $A_1A_2A_3$, Fig. 160, der elastischen Linie eines continuirlichen Trägers als eine Seil-

Fig. 160.



curve mit dem horizontalen Zuge FE und der Belastungsordinate $q = \frac{M}{r^2}$, so ergibt sich ohne Weiteres aus der Figur das Folgende. Man kann den Träger in A_2 zerschneiden, ohne das Gleichgewicht zu stören, wenn man an der Schnittstelle an jedem Ende der dadurch gebildeten Trägertheile eine Kraft gleich derjenigen Spannung S_2 anbringt, welche vor der Trennung an dieser Stelle vorhanden war. Denkt man die in der Richtung der elastischen Linie in A_2 anzunehmende Kraft S_2 für das Balkenstück A_1A_2 in B_1 wirksam, und zerlegt sie in ihre verticale und ihre horizontale Componente, welche letztere $H = FE$ ist, so hat man für das Gleichgewicht des Balkentheils A_1A_2 die Momentengleichung in Bezug auf A_1

$$H \cdot A_1 B_1 = \int_0^{l_1} q x \partial x,$$

oder da, unter α den Winkel der Tangente an die elastische Linie in A_2 gegen den Horizont verstanden, $B_1 A_1 = l_1 \operatorname{tg} \alpha + y_1 - y_2$ ist,

$$\int_0^{l_1} q x \partial x - H (l_1 \operatorname{tg} \alpha + y_1 - y_2) = 0 \dots (1)$$

In gleicher Weise findet man die Momentengleichung für das Balkenstück $A_2 A_3$ in Bezug auf A_3 , wenn man die auf dasselbe wirkende Kraft S_2 in B_3 angreifend denkt und in ihre Componenten zerlegt:

$$\int_0^{l_2} q x \partial x + H (l_2 \operatorname{tg} \alpha + y_2 - y_3) = 0 \dots (2)$$

Durch die Verbindung von (1) und (2) entfernt man $\operatorname{tg} \alpha$ und erhält

$$\frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} q x \partial x + \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} q x \partial x + H \left(\frac{y_2 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_3}{l_2} \right) = 0, (3)$$

eine Gleichung, welche zu der in §. 37 angegebenen Clapeyron'schen Formel führt, sobald man, wie dort geschehen, in ihr die beiden Integrale als die statischen Momente der Belastungsflächen der beiden Balkenstrecken $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ in Bezug auf A_1 und bezw. A_3 bestimmt.

Um die Gleichung (3) zu deuten, kann man bemerken, daß $\int_0^{l_1} q x \partial x$ das statische Moment der Belastungsfläche der Strecke $A_1 A_2$ in Bezug auf A_1 , folglich $\frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} q x \partial x$ den von dieser Belastungsfläche in A_2 erzeugten Druck auf diese Stütze bedeutet. Ebenso stellt das zweite Integral $\frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} q x \partial x$ den von der Belastungsfläche der Strecke $A_2 A_3$ auf A_2 ausgeübten Druck vor. Der dritte Summand ferner $H \left(\frac{y_2 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_3}{l_2} \right)$ ist der algebraische Ausdruck für denjenigen Druck, welchen ein Seil mit dem Horizontalzuge H auf den Punkt A_2 ausübt, wenn dasselbe durch die drei Stützpunkte A_1 , A_2 und A_3 gelegt ist. Letzteres erkennt man sofort aus den Eigenschaften der Seilpolygone, wenn man die geraden Verbindungslinien $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ zieht, welche mit der Horizontalen bezw. die Winkel β_1 und β_2 bilden mögen. Die Spannungen S_1 und S_3 in A_1 und A_3 haben die horizontale Componente H , folglich die verticalen Componenten $H \operatorname{tg} \beta_1$ und $H \operatorname{tg} \beta_3$, oder, da nach der Figur abgesehen vom Vorzeichen

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{y_2 - y_1}{l_1} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{y_2 - y_3}{l_2}$$

ist, so folgt die von beiden Seilen auf A_2 ausgeübte Verticalkraft durch

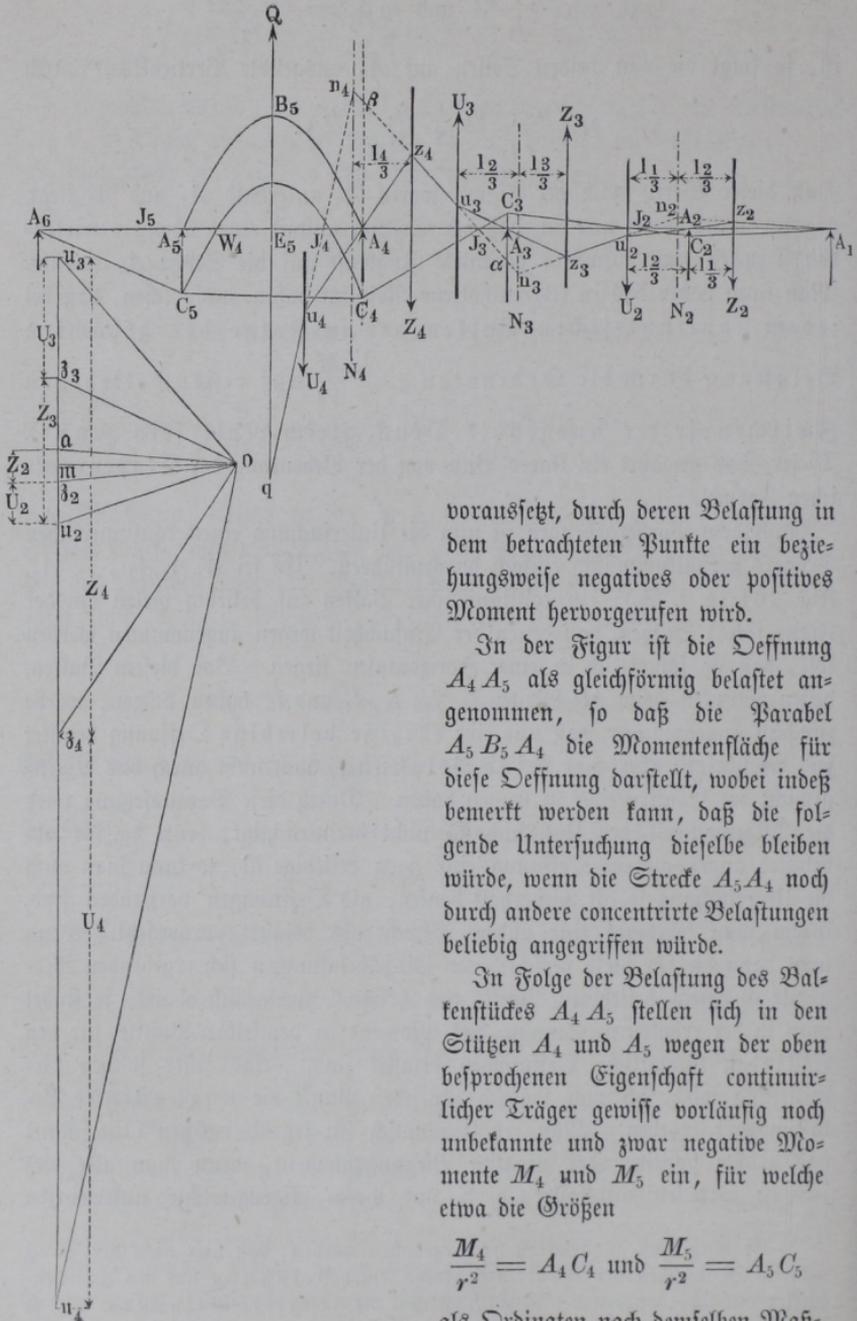
$$H \left(\frac{y_2 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_3}{l_2} \right).$$

Daß dieser Werth nach der Figur, worin A_2 unterhalb A_1 und A_3 liegt, negativ wird, deutet nur an, daß der Seilzug anstatt eines abwärts wirkenden Druckes eine aufwärts gerichtete Zugkraft auf die Stütze A_2 ausübt. Man kann daher das in (3) enthaltene Resultat dahin aussprechen, daß bei jedem continuirlichen Balken der in Folge der gedachten Belastung durch die Ordinaten $q = \frac{M}{r^2}$ auf einen beliebigen Zwischenpfeiler ausgeübte Druck gleich Null sein muß*). Dieser Satz gewährt ein klares Bild von der Bedeutung der Clapeyron'schen Formel.

Nach dem Vorhergehenden ist nun die Untersuchung eines continuirlichen Trägers verhältnißmäßig einfach durchzuführen. Es sei $A_1 A_2 A_3 \dots A_6$, Fig. 161 (a. f. S.), ein continuirlicher Balken auf beliebig vielen (in der Figur sechs) Stützen, von denen der Einfachheit wegen angenommen werden soll, daß sie sämmtlich in einer Horizontalen liegen. Von diesem Balken, dessen Strecken bezw. die Weiten l_1, l_2, l_3, l_4 und l_5 haben mögen, werde zunächst angenommen, daß nur eine einzige beliebige Oeffnung belastet sei, die übrigen aber gar keine Belastung, auch nicht durch das Eigengewicht der Construction zu tragen haben. Durch diese Voraussetzung wird die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigt, denn da die als belastet angenommene Oeffnung eine ganz beliebige ist, so kann man auch die Untersuchung so oft wiederholt denken, als Oeffnungen vorhanden sind, indem man jedesmal eine andere Strecke als belastet voraussetzt. Wenn man dann die für diese verschiedenen Einzelbelastungen sich ergebenden Momente in einem beliebigen Punkte des Trägers algebraisch addirt, so findet man in der erhaltenen Summe das Moment in demselben Punkte für den Fall, daß sämmtliche Oeffnungen belastet sind. Aus einer solchen Ermittlung wird sich auch sogleich für jeden Punkt die ungünstigste Belastungsart ergeben. Man erhält nämlich für irgend welchen Querschnitt das größte positive oder negative Biegemoment, wenn man alle diejenigen Strecken unbelastet, d. h. nur ihrem Eigengewichte unterworfen

*) Es mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß hier nicht der Druck gemeint ist, welchen der Balken in Folge seiner Belastung auf den Zwischenpfeiler ausübt, sondern der Druck, welchen die fingirte Belastung durch die Momentenfläche daselbst erzeugt.

Fig. 161.



voraussetzt, durch deren Belastung in dem betrachteten Punkte ein beziehungsweise negatives oder positives Moment hervorgerufen wird.

In der Figur ist die Deffnung $A_4 A_5$ als gleichförmig belastet angenommen, so daß die Parabel $A_5 B_5 A_4$ die Momentenfläche für diese Deffnung darstellt, wobei indeß bemerkt werden kann, daß die folgende Untersuchung dieselbe bleiben würde, wenn die Strecke $A_5 A_4$ noch durch andere concentrirte Belastungen beliebig angegriffen würde.

In Folge der Belastung des Balkenstückes $A_4 A_5$ stellen sich in den Stützen A_4 und A_5 wegen der oben besprochenen Eigenschaft continuirlicher Träger gewisse vorläufig noch unbekannte und zwar negative Momente M_4 und M_5 ein, für welche etwa die Größen

$$\frac{M_4}{r^2} = A_4 C_4 \text{ und } \frac{M_5}{r^2} = A_5 C_5$$

als Ordinaten nach demselben Maß-

stabe aufgetragen sein mögen, nach welchem die Momentenfläche $A_4 B_5 A_5$ der Belastung Q gezeichnet worden ist. Das Moment M_4 in A_4 ruft nunmehr in der folgenden Strecke $A_4 A_3$ Momente hervor, welche durch das Dreieck $A_4 C_4 A_3$ dargestellt sind, und man kann sich das Gewicht dieses Dreiecks in seinem Schwerpunkte, also im Abstände $\frac{1}{3} l_3$ von A_4 im Bezugs

$$Z_4 = \frac{1}{2} \cdot A_4 C_4 \cdot l_3 = \frac{1}{2} M_4 \cdot l_3$$

wirksam denken.

Es ist nun leicht ersichtlich, daß das in A_4 hervorgerufene Moment M_4 in der folgenden Stütze A_3 ebenfalls das Auftreten eines gewissen Momentes

$$M_3 = A_3 C_3$$

veranlassen muß, und zwar muß dieses Moment M_3 die entgegengesetzte Drehungsrichtung von M_4 haben, weil nur dann die oben gefundene Bedingung erfüllt sein kann, wonach in der Stütze A_3 der von den Momentenflächen ausgeübte Druck gleich Null sein muß. Es ist leicht erkennbar, daß diese Bedingung nur bei entgegengesetzten Vorzeichen der von M_4 und M_3 erzeugten Druckkomponenten, d. h. also bei entgegengesetzten Drehungsrichtungen der Momente M_4 und M_3 erfüllbar sein wird. Denkt man sich daher das Moment $\frac{M_3}{r^2}$ als $A_3 C_3$ nach oben hin aufgetragen, so finden sich die beiden Momentenflächen, welche M_3 für die angrenzenden Strecken erzeugt, in den Dreiecken

$$A_3 C_3 A_4 = \frac{1}{2} \frac{M_3}{r^2} l_3 = U_3$$

im Abstände $\frac{1}{3} l_3$ links von A_3 und

$$A_3 C_3 A_2 = \frac{1}{2} \frac{M_3}{r^2} l_2 = Z_3$$

im Abstände $\frac{1}{3} l_2$ rechts von A_3 beide positiv, also aufwärts wirkend. In Folge dieses Momentes M_3 in A_3 wird ebenfalls in A_2 ein gewisses Moment M_2 hervorgerufen werden, und dieselbe Schlussfolgerung, welche für A_3 angestellt wurde, gilt auch für A_2 , d. h. das hier auftretende Moment M_2 wird die entgegengesetzte Richtung von M_3 haben müssen, wenn in A_2 der Auflagerdruck der Momentenflächen Null werden soll. Es sei nach dem gewählten Maßstabe etwa

$$A_2 C_2 = \frac{M_2}{r^2}$$

nach der negativen Richtung aufgetragen, so stellen die beiden Kräfte

$$\frac{1}{2} \frac{M_2}{r^2} l_2 = U_2 \text{ im Abstände } \frac{l_2}{3} \text{ von } A_2$$

und

$$\frac{1}{2} \frac{M_2}{r^2} l_1 = Z_2 \text{ im Abstände } \frac{l_1}{3} \text{ von } A_2$$

die Belastungen der elastischen Linie dar, welche durch M_2 erzeugt werden. In der Endstütze A_1 kann ein Moment nicht auftreten, es wird daselbst also auch ein gewisser Auflagerdruck stattfinden, welcher, von dem Dreiecke $A_2 C_2 A_1$ herrührend, den Betrag $\frac{1}{3} Z_2$ haben muß.

Die Aufgabe nun, die noch unbekanntten Momente M_2 , M_3 und M_4 aus der bekannten Belastung Q zu bestimmen, kann als gelöst betrachtet werden, sobald es möglich ist, mit einem beliebig anzunehmenden Horizontalzuge H ein Seilpolygon für das Balkenstück $A_1 A_2 A_3 A_4$ zu entwerfen, denn alsdann findet man in bekannter Weise die Größen U und Z , also auch die Momente M_2 , M_3 , M_4 , wenn man mit den einzelnen Seiten des Seilpolygons durch den Pol des Kräftepolygons Parallellinien legt.

Um ein solches Seilpolygon zu zeichnen, möge zunächst vorausgesetzt werden, das Moment M_2 über A_2 sei gegeben, so ist dadurch auch die Größe des Dreiecks $A_2 C_2 A_1$, also die Kraft Z_2 bekannt. Man denke sich nun nach einem beliebigen Maßstabe diese Kraft Z_2 gleich der Strecke a_{z_2} auf einer Verticalen angetragen, und nehme einen Pol o in beliebigem Abstände von a_{z_2} so an, daß die Horizontale om die Strecke a_{z_2} in dem Verhältnisse theilt, in welchem die von der Kraft Z_2 in A_1 und A_2 erzeugten Stützendrucke stehen, d. h. also, man mache $am = \frac{1}{3} a_{z_2}$. Zieht man nun durch A_1 eine Parallele $A_1 z_2$ mit oa , so ist z_2 ein Punkt des Seilpolygons, und wenn man von z_2 eine Gerade durch A_2 zieht, welche Gerade in Folge des gewählten Poles o mit oz_2 parallel ausfallen muß, so erhält man in dem Durchschnitte u_1 mit der Richtungslinie von U_2 eine zweite Ecke des Seilpolygons. Die darauf folgende in u_2 sich anschließende Seite des Seilpolygons ist nun leicht mit Rücksicht darauf zu zeichnen, daß diese Seite, gehörig verlängert, mit der Verlängerung von $A_1 z_2$ sich in einem Punkte der verticalen Mittelkraft N_2 aus U_2 und Z_2 treffen muß. Die Lage dieser in der Figur punktirten Mittelkraft N_2 läßt sich aber ohne Weiteres angeben, denn da man das Verhältniß der Seitenkräfte $\frac{U_2}{Z_2} = \frac{l_2}{l_1}$ kennt, so braucht man nur den Abstand $\frac{l_1}{3} + \frac{l_2}{3}$ dieser beiden Kräfte U_2 und Z_2 in dem umgekehrten Verhältnisse derselben, also im Verhältnisse $\frac{l_1}{l_2}$ zu theilen, und erhält also die Richtung der Mittelkraft N_2 im Abstände

$\frac{l_1}{3}$ von U_2 und $\frac{l_2}{3}$ von Z_2 . Verlängert man daher $A_1 z_2$ bis zum Durchschnitte n_2 mit N_2 , so ergibt sich aus $n_2 u_2$ die Richtung der folgenden Polygonseite, welche die Kraft Z_3 in z_3 schneidet. Die weitere Verzeichnung des Seilpolygons erfolgt in gleicher Art; indem man von z_3 durch A_3 zieht, erhält man den Durchschnitt u_3 in der Kraft U_3 und hat von u_3 aus die folgende Polygonseite so zu ziehen, daß dieselbe durch den Schnittpunkt n_3 der verlängerten Polygonseite $u_2 z_3$ mit der Mittelkraft N_3 aus Z_3 und U_3 hindurchgeht. Hierbei ist die Lage dieser Mittelkraft N_3 wieder so zu bestimmen, daß ihr Abstand von U_3 gleich $\frac{l_2}{3}$, und derjenige von Z_3 gleich $\frac{l_3}{3}$ anzunehmen ist. Von der Ecke z_4 des Polygons zieht man ferner durch A_4 bis zum Durchschnitte u_4 mit U_4 und fügt die folgende $u_4 q$ wiederum in solcher Richtung an, daß $q u_4$ verlängert durch den Schnittpunkt n_4 des Seiles $u_3 z_4$ mit der Mittelkraft N_4 aus Z_4 und U_4 hindurchgeht. Für diese Mittelkraft N_4 gilt dieselbe Beziehung, wie für N_3 und N_2 , ihre Abstände von U_4 und Z_4 sind deren Größen umgekehrt proportional und daher bezw. $\frac{l_3}{3}$ und $\frac{l_4}{3}$.

Auf diese Weise wäre das Seilpolygon $A_1 z_2 u_2 z_3 u_3 z_4 u_4 q$ gefunden, und man würde durch Polstrahlen im Kräftepolygone, die parallel mit den Seilpolygonseiten sind, die Größen U und Z erhalten, wenn eine von diesen Größen, etwa $Z_2 = a z_2$, oder auch wenn Z_4 bekannt wäre, welche letztere Größe im Kräftepolygone offenbar durch die Strecke $u_3 z_4$ dargestellt ist, welche die mit den Seiten $z_4 u_3$ und $z_4 u_4$ parallelen Polstrahlen zwischen sich einschließen. Um die Aufgabe als gelöst zu betrachten, ist es also nur nöthig, die noch unbekannte Größe Z_4 , d. h. das Moment M_4 in A_4 aus der bekannten Belastung Q der Strecke $A_4 A_5$ zu bestimmen, da alsdann das Kräftepolygon die übrigen Größen U und Z , d. h. die Momente M_3 und M_2 ergibt. Um nun Z_4 aus Q zu bestimmen, kann man zunächst betreffs des Seilpolygons die folgende Betrachtung anstellen.

Fortsetzung. Die vorstehend mit Hülfe der Mittelkräfte N_2, N_3 und §. 43. N_4 festgesetzten Seilrichtungen ergeben in der Horizontalen $A_1 A_5$ gewisse Schnittpunkte J_2, J_3 und J_4 , welche für die Untersuchung der continuirlichen Träger von besonderer Wichtigkeit sind. Es ist zunächst leicht zu erkennen, daß diese Punkte ganz bestimmte **Festpunkte** sind, zu denen man immer gelangen wird, wenn man auch ein anderes Seilpolygon, d. h. eine andere Horizontalkraft $o m$ zu Grunde legen würde. Dies erkennt man, wenn man die Bedeutung jedes dieser Punkte J ins Auge faßt, als Angriffspunkt einer Mittelkraft von zwei verticalen Kräften, welche ein constantes

Verhältniß zu einander haben. Man ersieht nämlich aus dem Kräftepolygon, daß J_2 der Angriffspunkt derjenigen Mittelkraft ist, welche aus der Verticalkraft $U_2 = z_2 u_2$ und dem Auflagerdrucke $m_{z_2} = \frac{2}{3} Z_2$ resultirt, den die Momentenfläche Z_2 auf A_2 ausübt. Denn mit den Polstrahlen $o m$, o_{z_2} und $o u_2$ sind offenbar die drei Seile $A_2 J_2$, $A_2 u_2$ und $z_2 u_2$ parallel, folglich geht durch den Schnittpunkt J_2 der Endseile $A_2 J_2$ und $z_2 u_2$ die Mittelkraft der beiden genannten Kräfte U_2 und $\frac{2}{3} Z_2$. Diese Kräfte drücken sich nun durch

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{M_2}{r^2} l_2$$

und

$$\frac{2}{3} Z_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{M_2}{r^2} l_1$$

aus, folglich haben sie ein festes, nur von den Oeffnungsweiten l_1 und l_2 abhängiges Verhältniß

$$\frac{U_2}{\frac{2}{3} Z_2} = \frac{3 l_2}{2 l_1}.$$

Daraus folgt aber, daß auch der Punkt J_2 eine ganz bestimmte Lage im ersten Drittel der Länge l_2 von A_2 aus haben muß, welche Lage nicht von der Größe des Momentes M_2 , d. h. nicht von der Größe der Belastung Q abhängig ist.

Ebenso erkennt man, daß J_3 der Angriffspunkt der Mittelkraft ist aus der Kraft $U_3 = z_3 u_3$ und aus m_{z_3} , d. h. dem von Z_3 bei einer Zerlegung nach A_3 und J_2 auf A_3 ausgeübten Drucke, denn die drei Seile $A_3 J_3$, $A_3 u_3$ und $z_3 u_3$ sind mit den Polstrahlen $o m$, o_{z_3} und $o u_3$ bezw. parallel, folglich muß durch den Schnittpunkt J_3 die Mittelkraft der genannten beiden Seitenkräfte gehen. Da nun auch U_3 und Z_3 ein constantes nur von l_3 und l_2 abhängiges Verhältniß haben, und J_2 als ein fester Punkt erkannt wurde, so findet sich ähnlich wie für J_2 auch, daß J_3 ein fester von der Belastung unabhängiger Punkt sein muß. Gleiches gilt von J_4 , durch welchen die Mittelkraft von $U_4 = z_4 u_4$ und dem von Z_4 bei einer Zerlegung nach A_4 und J_3 auf A_4 ausgeübten Auflagerdrucke m_{z_4} hindurchgeht.

Diese festen Punkte J , welche wegen der später ersichtlichen, ihnen anhaftenden Eigenschaft Inflexions- oder Wendepunkte genannt werden, haben nun die merkwürdige Eigenschaft, daß durch die beiden Abschnitte, in welche ein solcher Punkt die Oeffnungsweite, in welcher er liegt, theilt, gleichzeitig das Verhältniß der beiderseitigen Stützmente gegeben ist. Es ist also z. B. für J_3 die Gleichung gültig:

$$J_3 A_3 : J_3 A_4 = M_3 : M_4.$$

Diese Beziehung läßt sich leicht aus dem Seilpolygone erkennen. Bekanntlich ist nach den Eigenschaften der Seilcurven das Moment einer Kraft wie U_3 in Bezug auf irgend einen Punkt wie A_3 gleich dem Producte aus dem Horizontalzuge H in die Ordinate $A_3\alpha$, welche auf einer durch A_3 gelegten Verticallinie durch die beiden Seile u_3z_3 und u_3z_4 abgeschnitten wird, zwischen denen die Kraft U_3 enthalten ist*). Man hat daher

$$H \cdot A_3\alpha = U_3 \frac{l_3}{3}.$$

In derselben Weise erhält man aber auch für die Kraft Z_4 in Bezug auf den Punkt A_4 :

$$H \cdot A_4\beta = Z_4 \frac{l_3}{3},$$

daher durch Division:

$$\frac{A_3\alpha}{A_4\beta} = \frac{U_3}{Z_4} = \frac{M_3}{M_4}.$$

Da nun aber auch

$$A_3\alpha : A_4\beta = J_3 A_3 : J_4 A_4,$$

so folgt die obige Behauptung:

$$\frac{J_3 A_3}{J_4 A_4} = \frac{M_3}{M_4}.$$

Kennt man daher die Inflexionspunkte J_2, J_3, J_4 , so kann man aus einem beliebigen Stützpunkte, wie z. B. M_4 in A_4 , sofort auch die Größe der Momente M_3 in A_3 und M_2 in A_2 bestimmen, ohne das Seilpolygon zeichnen zu müssen. Denn ist $M_4 = A_4 C_4$ bekannt, so giebt die Gerade $C_4 J_4$ in C_3 das Moment $M_3 = A_3 C_3$, und die durch C_3 und J_2 gelegte Gerade schneidet ebenso auf der Verticalen durch A_2 in C_2 eine Strecke $A_2 C_2$ ab, welche nach dem angenommenen Maßstabe das Moment M_2 daselbst vorstellt.

Die Ermittlung der Inflexionspunkte J verursacht nach dem Vorhergegangenen keine Schwierigkeit. Um diese letzteren Punkte festzustellen, zieht man durch einen beliebigen Punkt z_2 der Verticallinie Z_2 im Abstände $\frac{l_3}{3}$ von A_2 zwei Gerade durch A_2 und A_1 , und verbindet deren bezügliche

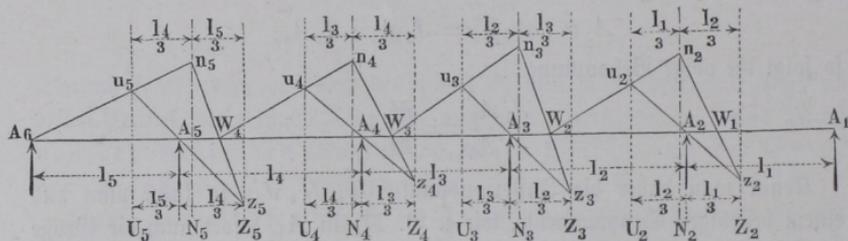
*) Man erkennt die Richtigkeit hiervon sogleich, wenn man die Spannung S_3 des Seiles $u_3 n_3$ in α in ihre horizontale Componente H und ihre verticale Componente V zerlegt, welche letztere für A_3 ein Moment gleich Null hat, so daß für A_3 die Momentengleichung gilt:

$$U_3 \cdot \frac{l_3}{3} = H \cdot A_3\alpha.$$

Durchgangspunkte u_2 durch die Verticallinie U_2 im Abstände $\frac{l_2}{3}$ von A_2 und n_2 durch die Mittelkraft N_2 von Z_2 und U_2 mit einander durch die Gerade $u_2 n_2$, welche in der Horizontalen $A_1 A_5$ den Inflexionspunkt J_2 liefert. Ist J_2 gefunden, so zieht man ebenso durch einen beliebigen Punkt z_3 von Z_3 die beiden Strahlen durch A_3 und J_2 , und verbindet den Durchschnitt u_3 von U_3 und $z_3 A_3$ mit demjenigen n_3 , in welchem $z_3 J_2$ die Mittelkraft N_3 von U_3 und Z_3 schneidet, um in dem Durchschnitte der Verbindungslinie $u_3 n_3$ mit der Horizontalen $A_1 A_5$ den Inflexionspunkt J_3 zu finden, und sofort findet man J_4 und J_5 .

Wenn man die vorstehend angegebene Construction der Fig. 161 in entsprechender Art nochmals in der entgegengesetzten Richtung, d. h. von A_6 nach A_1 fortschreitend vornimmt, so gelangt man in derselben Weise zu einer zweiten Reihe von Wendepunkten W_4, W_3, W_2 und W_1 rechts neben den Zwischenstützen, für welche die Art der Construction aus Fig. 162 ersichtlich

Fig. 162.



und nach dem Vorangegangenen leicht verständlich ist. Man zieht, um diese Wendepunkte W zu erhalten, durch einen beliebigen Punkt u_5 von U_5 zwei Strahlen durch A_6 und A_5 und verbindet deren Schnittpunkte mit N_5 und bezw. Z_5 durch die Gerade $u_5 z_5$, welche in der Axe $A_6 A_1$ den Punkt W_4 ergibt. Durch W_4 und A_4 zieht man dann wieder von einem beliebigen Punkte u_4 der Verticalen U_4 zwei Strahlen, deren Schnittpunkte n_4 mit N_4 und z_4 mit Z_4 in ihrer Verbindung $n_4 z_4$ den folgenden Wendepunkt W_3 ergeben u. s. w. Für diese Wendepunkte W gelten die nämlichen Beziehungen, welche vorstehend für die Wendepunkte J gefunden wurden, d. h. wenn nur eine einzige Deffnung des Trägers belastet ist, so werden die links von dieser Deffnung gelegenen Strecken durch die Wendepunkte W in demselben Verhältnisse getheilt, wie dasjenige der Stützmente über den beiden die betreffende Strecke einschließenden Auslagern ist.

Um nun die durch die Belastung einer Strecke wie $A_4 A_5$, Fig. 163, hervorgerufenen Momente M_4 und M_5 in den beiden Auslagern A_4 und A_5 zu bestimmen, dient ebenfalls die im Vorstehenden gefundene Eigenschaft der Wendepunkte W und J in folgender Art. Es sei die Strecke $A_4 A_5$ in

irgend einem Punkte E_5 durch eine beliebige Belastung K angegriffen, welche daselbst das Moment

$$E_5 B_5 = K \frac{A_4 E_5 \cdot A_5 E_5}{A_4 A_5} = K \frac{ab}{l_4} = k$$

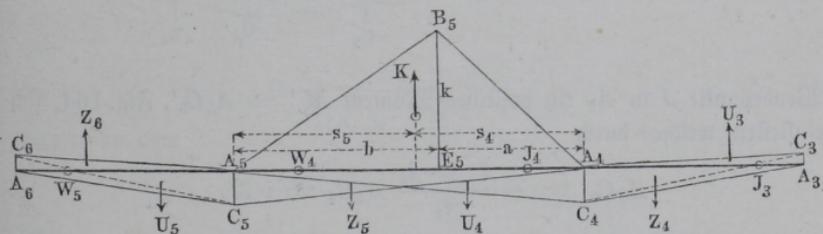
hervorruft, so ist die Belastung der elastischen Linie durch die Dreiecksfläche $A_4 B_5 A_5$ von dem Inhalte $F = k \frac{l_4}{2}$ dargestellt. Sind nun s_4 und s_5 die horizontalen Abstände des Schwerpunktes S dieser Dreiecksfläche von A_4 und A_5 , so erhält man die von dieser Momentenfläche auf die Stützen ausgeübten Auflagerdrucke zu

$$k \frac{l_4}{2} \cdot \frac{s_5}{l_4} = k \frac{s_5}{2} \text{ in } A_4$$

und

$$k \frac{s_4}{2} \text{ in } A_5.$$

Fig. 163.



Bezeichnet man nun wieder mit $M_4 = A_4 C_4$ und $M_5 = A_5 C_5$ die noch unbekanntenen in A_4 und A_5 erzeugten negativen Momente, und ebenso mit $M_3 = A_3 C_3$ und $M_6 = A_6 C_6$ *) die positiven Momente der nächst benachbarten Stützen, so sind die beiden Stützen A_4 und A_5 außerdem noch durch die zugehörigen Dreiecke

$$\begin{aligned} + A_4 A_3 C_3 &= U_3, & - A_4 A_3 C_4 &= Z_4, \\ - A_4 A_5 C_4 &= U_4, & - A_4 A_5 C_5 &= Z_5, \\ - A_5 A_6 C_5 &= U_5 \text{ und } + A_5 A_6 C_6 &= Z_6 \end{aligned}$$

belastet, welche mit $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{3}$ ihres Betrages auf die Stützpunkte drücken. Man findet daher die auf A_4 und A_5 ausgeübten gesammten Auflagerdrucke, welche nach dem oben erkannten Gesetze gleich Null sein müssen, zu:

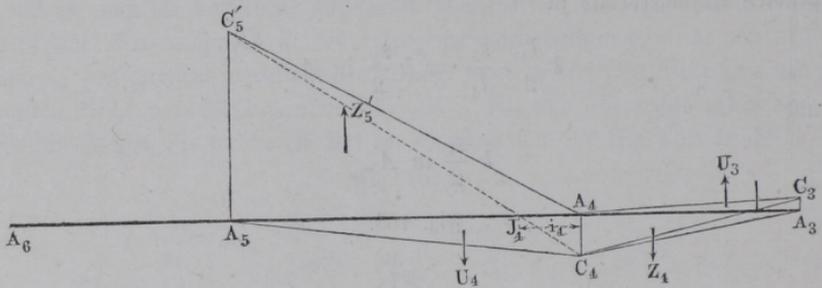
*) Wenn A_6 eine Endstütze ist, wie in Fig. 161, so fällt $M_6 = 0$ aus.

$$A_4 = k \frac{s_5}{2} - \frac{Z_5}{3} - 2 \frac{U_4 + Z_4}{3} + \frac{U_3}{3} = 0 \dots (1)$$

$$A_5 = k \frac{s_4}{2} - \frac{U_4}{3} - 2 \frac{Z_5 + U_5}{3} + \frac{Z_6}{3} = 0 \dots (2)$$

Denkt man sich jetzt die Belastung durch die Kraft K beseitigt, und statt deren auf den links von A_5 befindlichen Trägertheil äußere Kräfte in solcher Art wirksam, daß in A_4 dasselbe Moment $A_4 C_4 = M_4$ auftritt, welches durch die Belastung K hervorgerufen wird, so muß nach der Eigenschaft der

Fig. 164.



Wendepunkte J in A_5 ein positives Moment $M_5' = A_5 C_5'$, Fig. 164, sich einstellen, welches durch

$$A_5 C_5' = - \frac{l_4 - i_4}{i_4} A_4 C_4 = v M_4$$

ausgedrückt ist, wenn $i_4 = A_4 J_4$ den Abstand des Inflexionspunktes J_4 von A_4 und $v = - \frac{l_4 - i_4}{i_4}$ das Verhältniß der beiden Abschnitte $\frac{A_5 J_4}{A_4 J_4}$ bedeutet, in welche die Strecke l_4 durch den Inflexionspunkt J_4 getheilt wird. Die Stütze A_4 ist daher in diesem Falle durch die aus der Fig. 164 ersichtlichen Weise belastet, und man findet nunmehr den dadurch in A_4 hervorgerufenen Auflagerdruck, welcher auch jetzt gleich Null sein muß, zu

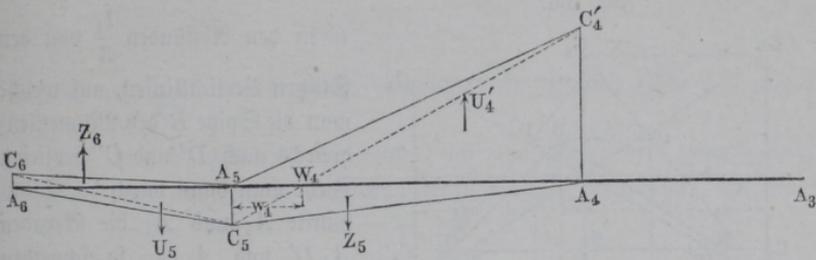
$$A_4 = \frac{Z_5'}{3} - 2 \frac{U_4 + Z_4}{3} + \frac{U_3}{3} = 0 \dots (1^a)$$

Wenn man eine ganz übereinstimmende Betrachtung in Betreff der Stütze A_5 anstellt, d. h. wenn man sich die Belastung K ersetzt denkt durch eine Einwirkung äußerer Kräfte auf das rechts von A_4 gelegene Balkenstück von solcher Art, daß in A_5 das Moment M_5 unverändert wird, so muß für diesen Fall in A_4 ein positives Moment, Fig. 165, $M_4' = A_4 C_4' = \mu M_5$ sich einstellen, wenn man mit $\mu = - \frac{A_4 W_4}{A_5 W_4} = - \frac{l_4 - w_4}{w_4}$ das Verhältniß

der Abschnitte bezeichnet, in welches die Strecke l_4 durch den linken Wendepunkt getheilt wird. Es findet sich nunmehr der Auflagerdruck in A_5 zu

$$A_5 = \frac{U_4'}{3} - 2 \frac{Z_5 + U_5}{3} + \frac{Z_6}{3} = 0 \dots \dots \dots (2^a)$$

Fig. 165.



Die Vergleichung von (1) und (2) mit (1^a) und (2^a) ergibt nun:

$$k \frac{s_5}{2} = \frac{Z_5' + Z_5}{3} \dots \dots \dots (3)$$

und

$$k \frac{s_4}{2} = \frac{U_4' + U_4}{3} \dots \dots \dots (4)$$

oder wenn man

$$Z_5' = \nu U_4 = \nu M_4 \frac{l_4}{2}$$

und

$$U_4' = \mu Z_5 = \mu M_5 \frac{l_4}{2}$$

einführt,

$$k \frac{s_5}{2} = \frac{1}{3} (M_5 + \nu M_4) \frac{l_4}{2} \dots \dots \dots (5)$$

und

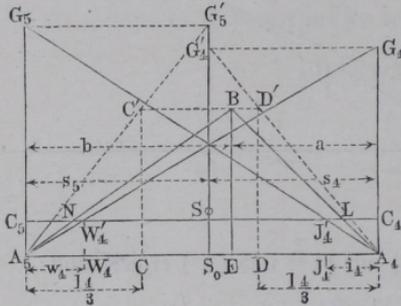
$$k \frac{s_4}{2} = \frac{1}{3} (M_4 + \mu M_5) \frac{l_4}{2} \dots \dots \dots (6)$$

Aus dem Vorstehenden (3) folgt also, daß der Druck, welchen die Momentenfläche der Belastung K auf eine der beiden Stützen wie A_4 ausübt, gerade so groß ist, wie derjenige, welchen die beiden Momentendreiecke Z_5 und Z_5' auf dieselbe Stütze A_4 hervorbringen. Wenn man daher ein bei A_5 rechtwinkeliges Dreieck von der Basis $A_5A_4 = l_4$ aufsucht, welches in A_4 den Druck $k \frac{s_5}{2}$ erzeugt, so erhält man nach (5) in der Höhe oder der anderen Kathete desselben in A_5 die Größe für den Werth $M_5 + \nu M_4$. In derselben Weise ergibt ein Dreieck zu derselben Basis A_5A_4 , welches bei A_4 rechtwinkelig ist und in

A_5 den Druck $k \frac{s_4}{2}$ ausübt, nach (6) in seiner Höhe bei A_4 den Werth von $M_4 + \mu M_5$.

Diese Dreiecke sind leicht zu construiren, und zwar giebt Mohr dazu die folgende Construction an. Ist $A_4 B A_5$, Fig. 166, die Momentenfläche der Last K , so zieht man in D und

Fig. 166.



C in den Abständen $\frac{l_4}{3}$ von den Stützen Verticallinien, auf welche man die Spitze B des Momentendreiecks nach D' und C' projectirt. Zieht man dann durch die Stützpunkte A_4 und A_5 die Geraden $A_4 D'$ und $A_5 C'$, so schneiden diese auf der Verticalen durch den Schwerpunkt S die gesuchten Höhen $S_0 G_4' = A_4 G_4$ und

$S_0 G_5' = A_5 G_5$ ab. Die Richtigkeit dieser Construction erkennt man leicht aus der Figur, welche aus

$$S_0 G_4' : D D' = s_4 : \frac{l_4}{3}$$

die Größe

$$S_0 G_4' = 3 \cdot \frac{k s_4}{l_4}$$

ergiebt. Das Dreieck $A_5 A_4 G_4$ übt daher auf A_5 den Druck

$$\frac{1}{3} \cdot A_4 G_4 \cdot \frac{l_4}{2} = \frac{k s_4}{2},$$

also von derselben Größe, wie das Momentendreieck $A_4 B A_5$ aus.

Hat man die beiden Dreiecke $A_4 A_5 G_4$ und $A_4 A_5 G_5$ gezeichnet, so findet man nach dem Vorstehenden die gesuchten Momente M_4 und M_5 über den Stützen, wenn man durch die Wendepunkte W_4 und J_4 Verticallinien zieht, und die Schnittpunkte W_4' und J_4' mit den Hypotenusen der betreffenden Dreiecke durch eine Gerade $W_4' J_4'$ verbindet. Diese liefert dann in $C_4 A_4$ und $C_5 A_5$ die gesuchten Momente M_4 und M_5 .

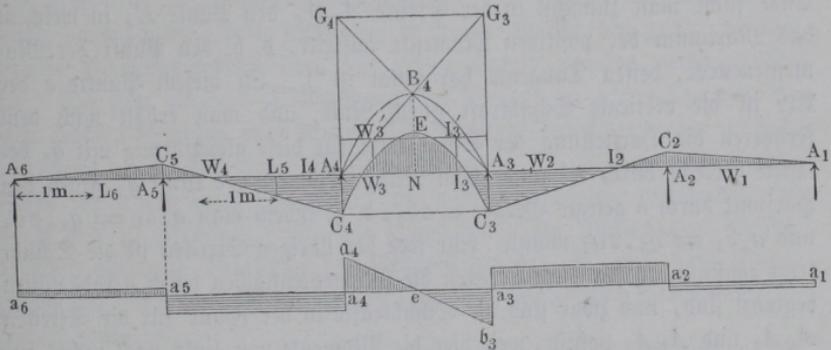
Es mag hier sogleich bemerkt werden, daß die Spitze B des Momentendreiecks der Last K immer oberhalb der beiden Dreiecksseiten $A_5 G_4$ und $A_4 G_5$ gelegen sein wird, wo auch die Belastung K zwischen A_4 und A_5 wirken möge. In Folge dessen werden die Schnittpunkte L und N niemals zwischen die Wendepunkte J und W , sondern stets zwischen die letzteren und die betreffenden Stützpunkte fallen, eine Eigenschaft, auf welche in der Folge noch Bezug genommen werden wird.

Wenn die Belastung der Oeffnung gleichmäßig über deren Länge vertheilt ist, wie in Fig. 161 vorausgesetzt worden, so ergeben sich die beiden vorerwähnten Höhen A_4G_4 und A_5G_5 gleich groß und zwar ist jede derselben gleich der doppelten Scheitelordinate k der Parabel, welche die Momentenfläche darstellt, denn der von der Parabel auf jede Stütze ausgeübte Auflagerdruck ist

$$1/2 \cdot 2/3 k l_4 = \frac{k l_4}{3},$$

also eben so groß wie derjenige eines Dreiecks von der Höhe $2k$ und der Basis l_4 .

Nach dem Vorstehenden bestimmen sich nun die in dem ganzen Träger A_1A_6 , Fig. 167, durch Belastung einer einzigen Oeffnung, wie A_3A_4 ,
Fig. 167.



hervorgerufenen Momente wie folgt. Es seien zunächst nach Anweisung der Figuren 161 und 162 die Wendepunkte J und W ermittelt und durch die Parabel $A_4B_4A_3$, deren Scheitelhöhe in der Mitte N der belasteten Oeffnung die Größe $NB_4 = q_3 \frac{l_3^2}{8}$ hat, sei die Fläche der positiven Momente dieser Strecke dargestellt. Macht man jetzt $A_4G_4 = A_3G_3 = 2NB_4$, und zieht A_4G_3 und A_3G_4 , so erhält man in den Verticalen durch J_3 und W_3 die beiden Punkte J_3' und W_3' , deren Verbindungslinie auf den Verticalen durch A_3 und A_4 Strecken abschneidet, welche man als $M_3 = A_3C_3$ und als $M_4 = A_4C_4$ anzutragen hat. Nachdem dies geschehen, erhält man in bekannter Art mittelst der Wendepunkte W und J durch die Linienzüge $C_3J_2C_2A_1$ und $C_4W_4C_5A_6$ die Momentenflächen der unbelasteten Strecken zu beiden Seiten. Wenn man noch, um die positiven und negativen Momente der belasteten Strecke A_3A_4 zu addiren, die Ordinate der Parabel $A_4B_4A_3$ und des Trapezes $A_4A_3C_3C_4$ algebraisch summiert, so giebt die in der Figur schraffierte Fläche eine Darstellung der Biegemomente, welche

in jedem Punkte durch die gleichmäßige Belastung der Strecke $A_3 A_4$ mit der Last $q_3 l_3$ hervorgerufen werden.

Es leuchtet ein, daß, wenn dieselbe Construction für sämtliche Oeffnungen wiederholt wird, durch algebraische Summirung aller so erhaltenen Momentenflächen diejenige Fläche erhalten wird, welche der vollen Belastung des ganzen Trägers in allen Feldern durch die diesen Feldern zukommenden Belastungen ($q = p + k$) entspricht.

Aus den für alle Punkte des Balkens gefundenen Biegemomenten M läßt sich dann auch mit Hülfe der Gleichung

$$V = \frac{\partial M}{\partial x}$$

die Größe der Schubkraft V ermitteln, welche in jedem Punkte des Balkens ebenfalls durch die Belastung der Strecke $A_3 A_4$ erzeugt wird. Zu dem Ende sucht man zunächst in der Strecke $A_3 A_4$ den Punkt E , in welchem das Maximum der positiven Momente auftritt, d. h. den Punkt der Momentencurve, dessen Tangente horizontal ist *). In diesem Punkte e der Aze ist die verticale Schubkraft gleich Null, und man erhält nach dem Früheren die Darstellung der Schubkräfte für diese gleichförmig mit q_3 belastete Strecke durch die unter dem Neigungswinkel $\text{arc tang } q_3$ gegen den Horizont durch e gelegte Gerade $a_4 e b_3$, d. h. indem man $a_4 a_4 = q_3 \cdot e a_4$ und $a_3 b_3 = q_3 \cdot e a_3$ macht. Für jede der übrigen Strecken ist die Schubkraft constant, da für diese Strecken die Momentenflächen durch gerade Linien begrenzt sind, und zwar sind die Schubkräfte in der Figur für die Strecken $A_6 A_5$ und $A_3 A_2$ positiv, weil hier die Momente von links nach rechts zunehmen (algebraisch), während für die Strecken $A_5 A_4$ und $A_2 A_1$, auf welchen die Momente von links nach rechts abnehmen, die Schubkräfte negativ und demgemäß in der Figur unterhalb der Aze $a_6 a_1$ angetragen sind. Die absolute Größe der Schubkraft für jedes Feld findet man wegen

$V = \frac{\partial M}{\partial x}$ aus der constanten Neigung der Momentenlinie, z. B. für $A_6 A_5$ aus dem Verhältnisse

$$+ \frac{A_5 C_5}{A_6 A_5} = + \frac{M_5}{l_5},$$

und für die Strecke $A_5 A_4$ durch

$$- \frac{A_4 C_4}{W_4 A_4}.$$

Da die Größen $A_5 C_5$, $A_4 C_4$. . . Momente, d. h. Meterkilogramme (oder

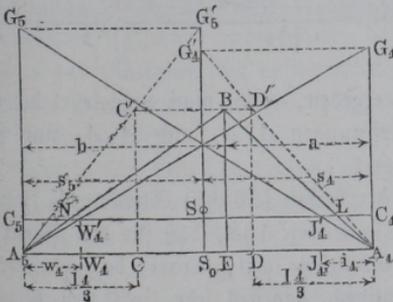
*) Dieser Punkt E liegt bei der gleichförmig vertheilten Belastung in Fig. 167 in der Mitte der Oeffnung.

Meter-tonnen) vorstellen, so repräsentiren obige Verhältnisse natürlich Kräfte (Kilogramme oder Tonnen). Hat man daher für die Momente einen Maßstab gewählt, nach welchem 1 mm n Meter-tonnen beträgt, so erhält man in der Ordinate des Punktes L_6 oder L_5 , welcher nach dem Längenmaßstabe um 1 m von dem Nullpunkte A_6 bzw. W_4 absteht, diejenigen Längen, welche, nach dem Maßstabe für die Momente gemessen, die Schubkraft in Tonnen ergeben. Wenn man auch die Schubkraftdiagramme für die besondere Belastung jeder einzelnen Oeffnung entwirft, so erhält man durch algebraische Summirung derselben ebenfalls das Diagramm für die aus der vollen Belastung des ganzen Trägers resultirenden Schubkräfte.

Die volle Belastung des ganzen Trägers durch die gesammte aus dem Eigengewichte p und der Verkehrslast k bestehende Totallast q entspricht jedoch nicht dem ungünstigsten Belastungsfalle des Trägers für jeden Querschnitt, da durch diese volle Belastung in keinem Punkte das größte daselbst mögliche Biegemoment oder die größte Schubspannung hervorgerufen wird. Da nun aber die Dimensionen des Balkens in jedem Querschnitte diesen größten Werthen $max M$ und $max V$ gemäß gewählt werden müssen, so erübrigt noch, diejenigen Belastungszustände des Balkens festzustellen, welchen für irgend einen Querschnitt die gedachten absolut größten Werthe von M und V zukommen. Da das Eigengewicht der Construction ein für alle Mal als volle Belastung des Trägers auftritt, so wird diese Untersuchung sich nur auf die jeweilige Stellung der beweglichen Verkehrslast zu beziehen haben.

Betrachtet man irgend eine Oeffnung wie $A_5 A_4$, Fig. 168, welche in einem beliebigen Punkte E einer Belastung durch K ausgesetzt ist, während die sämmtlichen übrigen Oeffnungen, abgesehen vom Eigengewichte, nicht belastet sind, so erhält man nach dem Vorstehenden in dem Linienzuge

Fig. 168.



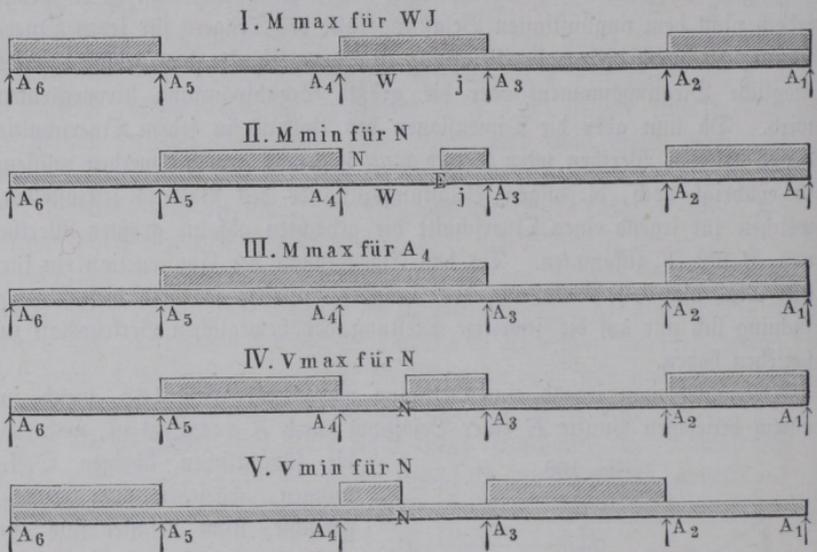
$$A_5 C_5 N B L C_4 A_4$$

die Begrenzung der Momentenfläche, von welcher das Dreieck NBL die positiven Momente darstellt. Nun wurde schon oben bemerkt, daß die Nullpunkte N und L niemals zwischen die

Wendepunkte W und J fallen können, wo auch der Angriffspunkt E der Kraft K zwischen A_5 und A_4 gewählt werden möge. Daraus geht also hervor, daß jede Belastung irgend eines Elementes der betrachteten

Deffnung für die zwischen W und J gelegene Balkenstrecke einen positiven Zuwachs zu dem Momente in allen Punkten dieser Strecke hervorruft. Man hat daher zu schließen, daß in den Querschnitten dieser mittleren Strecke WJ das größte positive Moment eintritt, wenn die ganze Deffnung $A_5 A_4$ von der beweglichen Last $q_4 l_4$ bedeckt ist. Denkt man jetzt auch die übrigen Deffnungen des Trägers beliebig belastet, so ergibt sich aus dem Früheren und aus Fig. 167, daß jede Belastung der beiden unmittelbar anstoßenden Deffnungen negative, und jede Belastung der darauf folgenden zweitnächsten positive Momente u. s. f. in der Strecke WJ hervorruft. Daraus folgt, daß man für diese Strecke die größten positiven Momente bei einer Belastung erhält, wie sie durch I, Fig. 169, dargestellt ist.

Fig. 169.



Die kleinsten Momente würden sich ergeben, wenn man umgekehrt die unmittelbar an $A_4 A_3$ anstoßenden Deffnungen $A_5 A_4$ und $A_3 A_2$ und jede zweitfolgende belasten würde.

Anders verhält es sich hinsichtlich der beiden seitlichen Strecken $A_4 W$ und JA_3 jeder Deffnung. Man ersieht aus Fig. 168, daß für den Punkt N die Lage einer Kraft K in E als Grenzlage gilt, derart, daß jede rechts von E wirkende Last in N ein negatives, dagegen jede links von E wirkende Last in N ein positives Moment erzeugt. Wenn daher die Strecke $A_5 E$ von der beweglichen Last bedeckt ist, so wird das größte positive Moment in N erzeugt, welches aus einer Belastung der Deffnung $A_4 A_5$ überhaupt resultirt, während eine Belastung der Strecke $A_4 E$ den größten

negativen Beitrag zu dem Momente in N ergibt. Ebenso folgt, daß die Belastungen der ersten, dritten u. s. w. Oeffnung links neben A_5 , sowie der zweiten, vierten zc. Oeffnung rechts von A_4 negative Momente für $A_5 N$ erzeugen. Demgemäß ergibt sich, daß das absolut größte negative Moment, d. h. M_{min} für einen Punkt N der Strecke $A_4 W$, Fig. 169, durch die in II dieser Figur dargestellte Belastungsart des Balkens hervorgerufen wird. Dabei stellt E denjenigen Punkt vor, welcher nach Fig. 168 die Belastungsscheide für den in Betracht gezogenen Querschnitt N abgibt, und welcher in der oben angegebenen Art zu ermitteln ist. Man kann hinsichtlich dieses Punktes E bemerken, daß derselbe bei einer Verschiebung des zugehörigen Punktes N von A_5 nach W_4 , Fig. 168, zwischen A_5 und A_4 sich bewegt, derart, daß er gleichzeitig mit N in A_5 fällt und nach A_4 gelangt, wenn N nach W_4 gekommen ist. Eine ganz ähnliche Betrachtung wie für die Strecke $A_5 W_4$ gilt auch für diejenige $A_4 J_4$, indem für den Punkt L derselben ebenfalls E als Belastungsscheide auftritt, derart, daß links von E befindliche Lasten negative und rechts von E gelegene Belastungen positive Momente in L erzeugen.

Fällt der Punkt N in einen Stützpunkt A_4 , so ergibt sich, da alsdann auch die zu N gehörige Belastungsscheide in diesen Stützpunkt hineinfällt, die Belastung des Trägers, welche dem absolut größten Werthe des negativen Stützmomentes in A_4 entspricht, in der durch Fig. 169, III dargestellten Weise.

Um auch die Belastung, welche der größten Verticalkraft V für einen beliebigen Punkt N , Fig. 169, IV, entspricht, zu finden, hat man zu bemerken, daß nach §. 36 die Belastung der Strecke NA_3 rechts von N für diesen Punkt nur positive Scheerkräfte hervorruft, und daß dasselbe für die Belastungen derjenigen Oeffnungen $A_5 A_4$ und $A_2 A_1$ gilt, welche in der Oeffnung $A_4 A_3$ Momente erzeugen, die von links nach rechts abgebräuisch zunehmen. Hieraus geht hervor, daß die in IV dargestellte Belastungsart in N das Maximum der positiven Scheerkraft erzeugt, während die entgegengesetzte Belastungsart in Fig. 169, V die größte negative Scheerkraft oder V_{min} hervorruft.

Die in Fig. 169 angedeuteten Belastungsarten lassen erkennen, in welcher Art man für jeden Querschnitt des Trägers die ungünstigsten Beanspruchungen durch Bieugungsmomente und Scheerkräfte zu bestimmen hat, indem man nach Fig. 167 für jede Oeffnung die aus der Belastung derselben durch p und k sich ergebenden Diagramme der Momente und Schubkräfte entwirft, und für jeden Querschnitt nur diejenigen Ordinaten in Betracht zieht, welche der entsprechenden Belastungsart gemäß der Fig. 169 zukommen.

Hierbei empfiehlt es sich, diese Diagramme unter Zugrundelegung einer

Belastung Eins (1 kg oder 1 Tonne für 1 m Länge) zu entwerfen, indem man dann nur nöthig hat, für jede Belastung durch p oder k die betreffende Ordinate mit der Maßzahl von p oder k zu multipliciren.

Es würde im vorliegenden Falle zu weit führen, die vorstehenden Untersuchungen auch auf die Fälle auszudehnen, in denen die einzelnen Stützen nicht in derselben Höhe liegen, oder die Trägheitsmomente des Trägers für verschiedene Querschnitte von verschiedener Größe sind, es muß in dieser Hinsicht auf die hier zu Grunde gelegte Arbeit von Mohr*) verwiesen werden.

§. 44. **Trägheitsmomente der Querschnitte.** Wenn nach dem Vorstehenden für einen Balken die größten Biegemomente M und die größten verticalen Scheerkräfte V in jedem Querschnitte ermittelt sind, so kommt es darauf an, die Dimensionen der einzelnen Querschnitte derartig zu bemessen, daß das Material mit genügender Sicherheit den einwirkenden Kräften zu widerstehen vermag. Man hat zu dem Ende die Anordnung so zu treffen, daß die größte in einem Querschnitte auftretende Spannung pro Flächeneinheit (1 qmm) einen erfahrungsmäßig zulässigen Werth s nicht übersteige. Da die Biegungsspannungen in irgend einem Punkte eines beliebigen Querschnittes im geraden Verhältnisse mit dem Abstände dieses Punktes von der neutralen Aze des Querschnittes stehen, so wird die größte Spannung in den am weitesten von der neutralen Aze entfernten Punkten des Querschnittes auftreten. Erreicht daher die Spannung in diesen Punkten, deren Entfernung von der neutralen Aze fernerhin mit e bezeichnet werden soll, den zulässigen Werth s , so hat man im Abstände gleich Eins von der neutralen Aze die Spannung $\frac{s}{e}$. Es ist nun bereits in Thl. I gezeigt, wie das in irgend einem Querschnitte des Balkens durch die äußeren Kräfte hervorgerufene Biegemoment M durch das Moment der Spannungen aller Querschnittselemente, bezogen auf die neutrale Aze, im Gleichgewichte gehalten werden muß, und es wurde daselbst die Formel

$$M = \frac{s}{e} W$$

angegeben, unter W eine an obiger Stelle ebenfalls als Biegemoment bezeichnete gewisse Function des Querschnittes verstanden. Diese Function W stellt sich dar als die Summe aller derjenigen Producte, welche aus den einzelnen Flächenelementen ∂F des Querschnittes F in die Quadrate y^2 ihrer Abstände von der neutralen Aze gebildet werden. Wegen der Analogie dieses Werthes mit den in Thl. I, Abschn. V, Cap. 2 besprochenen

*) Zeitschr. d. Hannov. Archit. u. Ing.-Ver. 1868.

Trägheitsmomenten der Körper, hat man jene gedachte Summe $\int \partial F \cdot y^2$ meistens gleichfalls als das Trägheitsmoment des Querschnittes bezeichnet und es soll in der Folge diese Benennung hier beibehalten und dafür die Bezeichnung T gewählt werden. Was die Uebereinstimmung der vorgedachten Querschnittsfunction mit dem Trägheitsmomente eines Körpers hinsichtlich des analytischen Ausdruckes betrifft, so hat man nur anstatt der Massentheilchen ∂m des Körpers die Flächenelemente ∂F des Querschnittes einzuführen, und es gelten die in Thl. I, Abschn. V über die Trägheitsmomente materieller Körper gefundenen Beziehungen auch für die hier in Betracht kommenden Trägheitsmomente der Querschnitte. Es ist auch in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 2 gezeigt worden, in welcher Weise man aus den Dimensionen einer Querschnittsfläche von bestimmter Form das zugehörige Trägheitsmoment zu berechnen hat, und es ist daselbst diese Rechnung für eine Anzahl häufig vorkommender Querschnittsformen durchgeführt worden. Hinsichtlich dieser Berechnung, welche hier nicht wiederholt werden soll, ist auf Thl. I zu verweisen, und es möge nur in der Tabelle am Schlusse dieses Paragraphen eine Zusammenstellung der Ausdrücke für die Trägheitsmomente einiger der häufiger vorkommenden Balkenquerschnitte angeführt werden.

• Aus dieser Zusammenstellung ersieht man, daß alle diese Trägheitsmomente unter der Form:

$$T = r^2 F \dots \dots \dots (1)$$

erscheinen, unter F die Querschnittsfläche und unter r eine gewisse von der Form des Querschnittes abhängige Größe verstanden. Diese Größe r ist für verschieden geformte Querschnitte verschieden, aber für alle unter sich ähnlichen Querschnitte durch einen und denselben aliquoten Theil einer und derselben Querschnittsdimension ausgedrückt. Man hat z. B. für die kreisförmige Fläche vom Durchmesser d :

$$T = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{d^2}{16} F,$$

folglich ist hier

$$r = \frac{d}{4},$$

während für ein Rechteck von der Höhe h und Breite b , letztere in der Richtung der neutralen Ase gemessen,

$$T = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{h^2}{12} F,$$

also

$$r = \frac{h}{6} \sqrt{3} = 0,289 h$$

schnitt zu jeder Seite dieser Ase in eine größere Anzahl Streifen parallel zu EE von genügend geringer Breite, um diese Streifen als Trapeze betrachten zu können, und nimmt in den Schwerpunkten $s_1, s_2 \dots s_9$ dieser Streifen Kräfte parallel zu EE an, deren Größen mit den Flächeninhalten dieser Flächenstreifen proportional sind. Es mögen nach einem beliebigen angenommenen Kräftemaßstabe diese Kräfte als die Strecken $01, 12, 23 \dots 89$ auf der mit EE parallelen Kräftelinie angetragen, und der Pol o in einer Entfernung $40 = P$ von der Kräftelinie so gewählt werden, daß die beiden Strecken 04 und 49 bzw. den Flächenstücken CS und ABS zu beiden Seiten der Ase EE gleich sind. Zeichnet man nun in bekannter Weise das Seilpolygon $a_0 a_1 a_2 a_3 \dots a_9 a_0$, so muß der gewählten Pollage o zufolge der Schnittpunkt a_0 der äußersten mit $o0$ und $o9$ parallelen Seile auf der Ase EE liegen. Nach den bekannten Eigenschaften des Seilpolygons ist nun für das Moment irgend eines Flächenstreifens, z. B. f_2 , dessen Schwerpunkt in s_2 liegt, in Bezug auf EE derjenige Abschnitt $b_1 b_2$ ein Maß, welchen die beiden die Kraft f_2 einschließenden Seile $a_1 a_2 b_1$ und $a_2 a_3 b_2$ auf EE abschneiden, und zwar ist, unter y_2 den Abstand der Kraft f_2 von EE verstanden, dieses Moment durch

$$f_2 \cdot y_2 = P \cdot b_1 b_2$$

ausgedrückt, wenn P die Polabstand 40 bedeutet. Es folgt daher auch das Trägheitsmoment dieses elementaren Streifens durch

$$f_2 y_2^2 = P \cdot b_1 b_2 \cdot y_2 = 2 P \cdot \Delta a_2 b_2 b_1,$$

indem y_2 als Höhe des Dreiecks $a_2 b_2 b_1$ zur Grundlinie $b_1 b_2$ anzusehen ist. Da dieselbe Betrachtung für jedes andere Element in gleicher Weise gilt, so findet man, daß das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes durch das Product aus P und der von dem Seilpolygone $a_0 a_1 a_2 \dots a_9 a_0$ umschlossenen Fläche dargestellt ist. Nennt man diese Fläche φ , und ist F die ganze Fläche des betrachteten Querschnittes, so hat man, unter r dessen Trägheitshalbmesser verstanden, daher für den Querschnitt das Trägheitsmoment:

$$T = F r^2 = 2 P \varphi.$$

Wählt man nun die Polabstand

$$P = 40 = \frac{F}{2} = \frac{1}{2} 09,$$

so erhält man mit diesem Werthe

$$T = F r^2 = F \varphi, \text{ d. h. } r^2 = \varphi.$$

Wenn man daher die Fläche $a_1 a_2 \dots a_9 a_0$ in ein Quadrat verwandelt, so erhält man in der Seite desselben den Trägheitshalbmesser r in Bezug

auf die durch den Schwerpunkt S des Querschnittes gehende neutrale Ase EE .

Ist $E_1 E_1$ eine andere, im Abstände d zu EE parallele Ase, so erhält man durch dieselbe Betrachtung in der Fläche $a_1 a_2 \dots a_n f g a_1$ das Maß für das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf diese Ase $E_1 E_1$. Wird diese Fläche mit φ_1 bezeichnet, so hat man nach der Figur

$$\varphi_1 = \varphi + a_0 f g = \varphi + \frac{d}{2} \cdot f g.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $a_0 f g$ und $o O g$ folgt nun

$$f g : d = o g : 4 o = F : \frac{F}{2},$$

oder

$$f g = 2 d,$$

so daß man den Inhalt des Dreiecks $a_0 f g = d^2$ und das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf $E_1 E_1$ zu

$$T_1 = F (r^2 + d^2) \dots (2)$$

erhält. Dieser Satz ist auch in anderer Art schon in Thl. I gefunden worden.

Kennt man die Trägheitsmomente T_x und T_y eines Querschnittes in Bezug auf zwei zu einander senkrechte, sonst beliebige Axen $O X$ und $O Y$, Fig. 171, so erhält man das Trägheitsmoment T_a für eine durch O gehende, mit der X Axe den beliebigen Winkel α bildende Ase $O A$ nach der Figur zu

$$T_a = \int \partial F \cdot a^2 = \int \partial F [x^2 + y^2 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2],$$

oder

$$T_a = \int \partial F x^2 \sin^2 \alpha + \int \partial F y^2 \cos^2 \alpha - \int \partial F \cdot 2 x y \cos \alpha \sin \alpha,$$

d. h.

$$T_a = T_y \sin^2 \alpha + T_x \cos^2 \alpha - \sin 2 \alpha \int x y \cdot \partial F \dots (3)$$

Dieser Werth wird zu einem Maximum oder Minimum für solche Größen von α , welche sich aus $\frac{\partial T_a}{\partial \alpha} = 0$ ergeben, also aus

$$2 \sin \alpha \cos \alpha T_y - 2 \cos \alpha \sin \alpha T_x = 2 \cos 2 \alpha \int x y \cdot \partial F \text{ zu}$$

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 \int x y \cdot \partial F}{T_y - T_x} \dots (4)$$

Um die Größe $\int xy \partial F$ zu entfernen, denke man noch das Trägheitsmoment T_c für eine unter 45° gegen die Coordinatenaxen geneigte Axe OC eingeführt, welches Moment nach (3) zu

$$T_c = \frac{1}{2} T_y + \frac{1}{2} T_x - \int xy \partial F$$

folgt, so daß man

$$2 \int xy \partial F = T_y + T_x - 2 T_c$$

setzen kann, womit die Gleichung (4) übergeht in:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{T_y + T_x - 2 T_c}{T_y - T_x} \dots \dots \dots (4^a)$$

Dieser Ausdruck liefert in jedem Falle zwei Werthe für 2α , welche sich um 180° unterscheiden, und von welchen der eine einem Maximum, der andere einem Minimum entspricht, wie sich daraus ergibt, daß

$$\frac{\partial^2 T_a}{\partial \alpha^2} = 2 \cos 2\alpha (T_y - T_x) + 4 \sin 2\alpha \int xy \partial F$$

mit den Werthen 2α und $2\alpha + 180^\circ$ entgegengesetzte Vorzeichen annimmt. Diese Werthe T_{max} und T_{min} erhält man, wenn man den aus (4) gefundenen Werth von α in (3) einführt.

Man nennt die beiden, den Trägheitsmomenten T_{max} und T_{min} zugehörigen Axen die Hauptaxen des Querschnittes für den Punkt O , und es ist aus (4) ersichtlich, daß die Axen OX und OY selbst zu diesen Hauptaxen werden, sobald

$$\int xy \partial F = 0$$

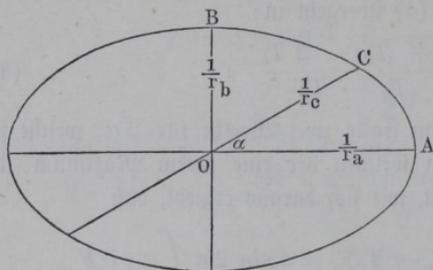
wird. Dies ist offenbar für jede Symmetriearie eines Querschnittes der Fall, da der Symmetrie wegen jeder positiven Ordinate einerseits dieser Arie eine gleich große negative Ordinate auf der entgegengesetzten Seite entspricht. Hieraus ergibt sich die auch schon aus dem in Thl. I, Abschn. V, Cap. 2 über die Trägheitsmomente Gesagten folgende Beziehung, daß eine Symmetriearie eines Querschnittes für jeden ihrer Punkte eine Trägheitshauptaxe ist. Die zugehörige andere Hauptaxe findet sich dann in der in diesem Punkte zur Symmetriearie senkrechten Geraden.

Denkt man sich für alle möglichen durch einen beliebigen Punkt O eines Querschnittes, Fig. 172 (a. f. S.), gehenden Geraden wie OC das Trägheitsmoment $T = Fr^2$ ermittelt, und auf jeder dieser Axen vom Mittelpunkte O nach jeder Seite ein Stück OC abgetragen, welches nach einem beliebig gewählten Maßstabe der Größe $\frac{1}{r}$ proportional ist, so liegen alle die

so erhaltenen Punkte C , wie leicht zu erkennen ist, auf dem Umfange einer Ellipse, deren Mittelpunkt in O liegt, und deren Halbachsen $OA = a$ und $OB = b$ durch die Größen $\frac{1}{r_a}$ und $\frac{1}{r_b}$ dargestellt sind, wenn r_a und r_b die den beiden Hauptachsen zugehörigen Trägheitshalbmesser sind, für welche man also

$$T_{max} = F r_a^2 \text{ und } T_{min} = F r_b^2$$

Fig. 172.



hat. Wählt man, um dies zu erkennen, die Hauptachsen OA und OB zu Coordinatenachsen, so ist für irgend eine Axe OC , welche mit der X -Axe den Winkel α bildet, der Construction zufolge

$$OC = c = \frac{1}{r_c},$$

unter r_c den Trägheitshalbmesser des der Axe OC zugehörigen Trägheitsmomentes $T_c = F r_c^2$ verstanden. Nun ist nach (3)

$$T_c = T_y \sin^2 \alpha + T_x \cos^2 \alpha,$$

da für die Hauptachsen die Größe $\int xy \cdot \partial F = 0$ wird. Setzt man in obiger Gleichung $T = F r^2$, so folgt

$$r_c^2 = r_b^2 \sin^2 \alpha + r_a^2 \cos^2 \alpha,$$

oder, wenn man nach der Figur $\sin \alpha = y r_c$ und $\cos \alpha = x r_c$ einführt und durch r_c^2 beiderseits dividirt:

$$1 = r_b^2 y^2 + r_a^2 x^2,$$

welche Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen $\frac{1}{r_a} = a$ und $\frac{1}{r_b} = b$ zukommt.

Diejenigen Hauptachsen, welche durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen, nennt man die Schwerpunkts-hauptachsen, und die zugehörige Ellipse die Centraellipse des Querschnittes (s. auch Thl. I, Abschn. V, Cap. 2).

Die Ermittlung der Schwerpunkts-hauptachsen und ihrer zugehörigen Trägheitsmomente ist, wie sich aus dem Folgenden (§. 46) ergeben wird, dann erforderlich, wenn die Kraftebene, in welcher der Balken in Angriff genommen wird, nicht eine Symmetrieebene desselben ist.

Trägheitsmomente.

	F	T	W	r^2	$\eta = \frac{W}{F} \frac{h}{2}$
	$b h$	$\frac{1}{12} b h^3$	$\frac{1}{6} b h^2$	$\frac{h^2}{12}$	0,333
	a^2	$\frac{1}{12} a^4$	$\frac{1}{6} a^3$	$\frac{a^2}{12}$	0,333
	a^2	$\frac{1}{12} a^4$	$0,118 a^3$	$\frac{a^2}{12}$	0,236
	$2,598 a^2$	$0,5413 a^4$	$\frac{5}{8} a^3$	$0,209 a^2$	0,278
	$2,598 a^2$	$0,5413 a^4$	$0,5413 a^3$	$0,209 a^2$	0,209
	πa^2	$\frac{\pi a^4}{4}$	$\frac{\pi a^3}{4}$	$\frac{a^2}{4}$	0,25
	$\pi a b$	$\frac{\pi a^3 b}{4}$	$\frac{\pi a^2 b}{4}$	$\frac{a^2}{4}$	0,25
	$b(h - h_1)$	$\frac{b}{12}(h^3 - h_1^3)$	$\frac{b}{6} \frac{h^3 - h_1^3}{h}$	$\frac{h^2 + h h_1 + h_1^2}{12}$	$\frac{1}{3} \frac{h^2 + h h_1 + h_1^2}{h^2}$
	$h^2 - h_1^2$	$\frac{h^4 - h_1^4}{12}$	$\frac{h^4 - h_1^4}{6 h}$	$\frac{h^2 + h_1^2}{12}$	$\frac{1}{3} \frac{h^2 + h_1^2}{h^2}$
	$\pi(a^2 - a_1^2)$	$\pi \frac{a^4 - a_1^4}{4}$	$\pi \frac{a^4 - a_1^4}{4 a}$	$\frac{a^2 + a_1^2}{4}$	$\frac{1}{4} \frac{a^2 + a_1^2}{a^2}$
	$b h + b_1 h_1$	$\frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{12}$	$\frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{6 h}$	$\frac{1}{12} \frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{b h + b_1 h_1}$	$\frac{1}{3} \frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{h^2 b h + b_1 h_1}$
	$b h - b_1 h_1$	$\frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12}$	$\frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{6 h}$	$\frac{1}{12} \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{b h - b_1 h_1}$	$\frac{1}{3} \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{h^2 b h - b_1 h_1}$

§. 45. **Balkenquerschnitte.** Aus der oben angegebenen Fundamentalformel für die Biegung von Balken

$$M = s \frac{T}{e}$$

erkennt man, daß der Widerstand eines Balkens von einem bestimmten Materiale, d. h. bei einer gewissen, höchstens zulässigen specifischen Faser-
spannung s mit dem Werthe $\frac{T}{e}$ proportional ist. Man bezeichnet daher gewöhnlich die Querschnittsfunction

$$\frac{T}{e} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Entfernung der äußersten Faser von der neutralen Aze}} = W$$

als das Widerstandsmoment des Balkens. Wenn der Querschnitt die neutrale Aze zur Symmetrieaxe hat, d. h. wenn die Abstände e_1 und e_2 der äußersten Fasern zu beiden Seiten der neutralen Aze den gleichen Werth e haben, so sind auch die Spannungen in diesen Fasern von gleicher Größe, jedoch von entgegengesetzter Richtung, indem die concav gebogenen Fasern Druckspannungen und die convex gebogenen Fasern Zugspannungen ausgesetzt sind. Wenn das Material des Balkens von solcher Beschaffenheit ist, daß die für dasselbe zulässigen Spannungen für Zug und Druck zu gleichem Betrage angenommen werden dürfen, wie dies für Holz und Schmiedeeisen der Fall ist, so wird man den Querschnitten solche Formen geben, daß $e_1 = e_2$ ist, denn mit ungleichen Entfernungen der äußersten Fasern würden auch die Anstrengungen derselben ungleich werden, was einer möglichsten Ausnutzung des Materials widersprechen würde. Wenn jedoch das Material, wie es bei dem Gußeisen der Fall ist, für Zug und Druck verschieden große Spannungen s_z und s_a zuläßt, so wird man auch e_z und e_a verschieden anzunehmen haben, so zwar, daß

$$\frac{s_z}{e_z} = \frac{s_a}{e_a}$$

ist. Da die neutrale Aze bei einem nur auf Biegung beanspruchten Balken durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht, so folgt hieraus, daß man die Querschnitte der Gußeisenträger gegen die horizontale Schwerpunktsaxe derartig unsymmetrisch machen wird, daß der Schwerpunkt von den gedrückten Fasern einen im Verhältnisse $\frac{s_a}{s_z}$ größeren Abstand e_a hat, als von den gezogenen Fasern. Dieser Fall soll in einem folgenden Paragraphen näher untersucht und hier zunächst die Gleichheit von s_z und s_a vorausgesetzt, mithin auch gleicher Abstand der neutralen Aze von den äußersten Fasern zu beiden Seiten angenommen werden.

Es leuchtet ein, daß das in einem Balken vorhandene Material dann in der möglich vortheilhaftesten Weise zur Verwendung kommen würde, wenn in jedem Elemente die für das Material gerade noch zulässige Faserspannung auftreten könnte, wie dies bei einem nur auf Zug oder nur auf Druck beanspruchten Stabe in der That der Fall ist. Eine solche Inanspruchnahme ist bei gebogenen Balken nicht möglich, da die Spannungen in den einzelnen Punkten eines Querschnittes mit deren Abständen von der neutralen Axc proportional sind, in dieser letzteren daher den Werth Null haben, und so nach nur die äußersten Fasern mit ihrer ganzen Widerstandsfähigkeit wirksam sind, während alle übrigen Fasern mit geringeren Kräften widerstehen, als sie ihrer Natur nach äußern könnten. Dächte man sich bei einem Balken von der Höhe h des Querschnittes das gesammte Material zu gleichen Theilen in den beiden äußersten Schichten vereinigt, so daß jede dieser Schichten durch einen sehr dünnen Streifen von dem Querschnitte $\frac{F}{2}$ dargestellt wäre, so würde auch alles Balkenmaterial vollständig ausgenützt werden, und man würde einen idealen Querschnitt erhalten, welcher für den gegebenen Flächeninhalt F des Querschnittes und eine gleichfalls gegebene Querschnittshöhe h die größtmögliche Widerstandsfähigkeit darbot. Da hierbei in jeder der beiden äußersten Schichten im Abstände h von einander der halbe Querschnitt $\frac{F}{2}$ concentrirt zu denken wäre, so würden die beiden gleichen und entgegengesetzten Spannkkräfte, jede von der Größe $s \frac{F}{2}$, ein Kräftepaar bilden, welches sich der Biegung mit einem Momente

$$s \frac{F h}{2} = M$$

entgegensetzt, man hätte daher für diesen idealen Fall aus

$$M = s W = s \frac{F h}{2}$$

das Widerstandsmoment:

$$W = F \frac{h}{2}.$$

Dieser ideale Zustand, welcher der größtmöglichen Widerstandsfähigkeit des Balkens entspricht, ist in der Wirklichkeit aus den angegebenen Gründen niemals erreichbar, man wird demselben aber um so mehr sich nähern, je mehr man das Material aus dem mittleren Theile des Balkens entfernt und in den von der neutralen Axc entfernteren Parthieen anhäuft, wie dies z. B. bei den Balken von doppelt T förmigem Querschnitte und bei den

Blechträgern geschieht, welche im mittlern Theile aus einer dünnen Wand und zu beiden Seiten aus massigeren Streifen bestehen. Die Grenze, bis zu welcher hierbei die Stärke der Mittelrippe vermindert werden kann, hängt außer von den Rücksichten der Herstellung namentlich von den Schubspannungen der Querschnitte ab, worüber in einem folgenden Paragraphen das Nähere angegeben werden soll.

Aus den vorstehenden Betrachtungen folgt zunächst, daß z. B. ein kreisförmiger Querschnitt, bei welchem das Material verhältnißmäßig mehr in dem mittlern Theile angehäuft ist, als in den äußeren, von der neutralen Aze entfernteren Parthieen, weniger günstig sein wird, als ein rechteckiger Querschnitt. Um die einzelnen Querschnitte in Hinsicht dieser mehr oder minder vortheilhaften Wirksamkeit mit einander zu vergleichen, kann man passend ihr Widerstandsmoment $W = \frac{T}{e} = F \frac{r^2}{e}$ mit dem oben besprochenen idealen Werthe $F \frac{h}{2}$ vergleichen, welcher einem Querschnitte von demselben Flächeninhalte F und derselben Höhe h angehört. Das Verhältniß dieser beiden Größen

$$\eta = \frac{W}{F \frac{h}{2}} = \frac{F r^2}{e F \frac{h}{2}} = 2 \frac{r^2}{e h},$$

oder bei einem symmetrischen Querschnitte, bei welchem $h = 2e$ ist,

$$\eta = \frac{r^2}{e^2},$$

kann gewissermaßen als das Güteverhältniß der Querschnittsform angesehen werden. Man erhält beispielsweise dieses Verhältniß bei einem rechteckigen Querschnitte von der Breite b und der Höhe h zu

$$\eta = \frac{W}{F \frac{h}{2}} = \frac{\frac{1}{6} b h^2}{\frac{1}{2} b h^2} = \frac{1}{3}$$

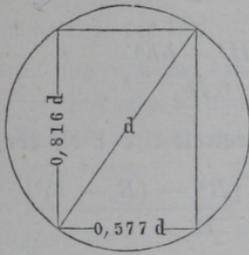
unabhängig von der Breite, während für den kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d sich

$$\eta = \frac{\frac{\pi}{32} d^3}{\frac{\pi}{4} d^2 \cdot \frac{d}{2}} = \frac{1}{4},$$

also wie oben schon bemerkt, kleiner als für das Rechteck herausstellt. In der Tabelle des vorigen Paragraphen sind unter η diese Verhältnisse für die verschiedenen Querschnitte angegeben.

Bei den hölzernen Balken kommt nur der rechteckige Querschnitt in Betracht, und da diese Balken aus runden Stämmen geschnitten werden, so ist

Fig. 173.



es von Interesse, zu untersuchen, welches Verhältniß man bei diesem Querschnitte der Breite zur Höhe geben muß, um aus einem Rundholze vom Durchmesser d den widerstandsfähigsten Balken zu erzielen. Setzt man $b = v h$, so hat man das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} v h^3,$$

und da nach der Fig. 173

$$d^2 = b^2 + h^2 = (v^2 + 1) h^2,$$

also

$$h = \frac{d}{\sqrt{v^2 + 1}}$$

ist, so erhält man hiermit

$$W = \frac{1}{6} v h^3 = \frac{d^3}{6} \frac{v}{(v^2 + 1)^{3/2}}.$$

Man erhält daher das Maximum von W durch

$$\frac{\partial W}{\partial v} = 0,$$

d. h.

$$(v^2 + 1)^{3/2} = v^{3/2} (v^2 + 1)^{1/2} 2 v,$$

woraus:

$$v^2 = 1/2 \text{ und } v = \sqrt{1/2} = 0,707$$

folgt. Man hat daher:

$$h = \frac{d}{\sqrt{v^2 + 1}} = d \sqrt{2/3} = 0,816 d$$

und

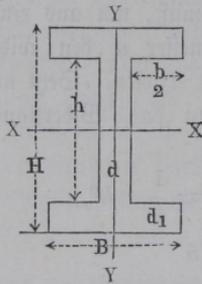
$$b = d \sqrt{1/3} = 0,577 d.$$

Für schmiedeeiserne Träger wählt man nach dem Vorstehenden am vorteilhaftesten die I oder C Form, insbesondere findet die erstere in der Praxis sehr häufig Verwendung. Es mögen zunächst nur die aus einem Stücke bestehenden gewalzten Träger in Betracht genommen werden, während die aus Blechplatten und Winkelisen zusammengenieteten Träger im §. 51 besonders behandelt werden sollen.

Für den nach zwei zu einander senkrechten Axen X und Y symmetrischen

Trägerquerschnitt, Fig. 174, ist nach der Tabelle des vorigen Paragraphen

Fig. 174.



$$T_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

und

$$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H},$$

während man für die neutrale Axe Y die Werthe

$$T_y = \frac{HB^3 - h[B^3 - (B - b)^3]}{12}$$

und

$$W_y = \frac{HB^3 - h[B^3 - (B - b)^3]}{6B}$$

hat. Da die Querschnittsfläche $F = BH - bh$ ist, so erhält man das Güteverhältniß zu

$$\eta_x = \frac{W_x}{F \frac{H}{2}} = \frac{BH^3 - bh^3}{3H^2(BH - bh)}$$

und

$$\eta_y = \frac{W_y}{F \frac{B}{2}} = \frac{HB^3 - h[B^3 - (B - b)^3]}{3B^2(BH - bh)}.$$

Wählt man z. B. $H = 30$ cm, $B = 12$ cm, $h = 27$ cm und $b = 11$ cm, also $B - b = d = 1$ cm, und $\frac{H-h}{2} = d_1 = 1,5$ cm, so erhält man mit diesen Werthen

$$T_x = \frac{12 \cdot 30^3 - 11 \cdot 27^3}{12} = 8957; \quad W_x = \frac{8957}{15} = 597,$$

und

$$T_y = \frac{30 \cdot 12^3 - 27(12^3 - 1^3)}{12} = 434; \quad W_y = \frac{434}{6} = 72,3;$$

und da $F = 12 \cdot 30 - 11 \cdot 27 = 63$ qcm ist, so folgt:

$$\eta_x = \frac{597}{63 \cdot 15} = 0,632$$

und

$$\eta_y = \frac{72,3}{63 \cdot 6} = 0,191$$

Die geringe Größe von η_y erklärt sich nach dem Vorhergehenden dadurch, daß ein relativ sehr großer Theil des Materials, nämlich die ganze Mittelwand in der Nähe der neutralen Aze angebracht ist, wenn der Balken flach gelegt wird, so daß die neutrale Aze nach YY fällt. Man wird daher eine solche Lage des Balkens für gewöhnlich nicht wählen.

Wenn nun auch aus dem Vorstehenden folgt, daß man bei einer gewissen, durch die Umstände bedingten Höhe H des Trägers behufs einer möglichst vortheilhaften Ausnutzung des Materials die Stärke d der Mittelrippe thunlichst verringern und dafür die Breite b der Flanschen nach Möglichkeit vergrößern müsse, so muß doch bemerkt werden, daß mit Rücksicht auf die Möglichkeit des bequemen Auswalzens sowohl die Minimaldicke der Mittelrippe als auch die Maximalbreite der Flanschen innerhalb gewisser praktischer Grenzen eingeschlossen ist. Man wird etwa annehmen können, daß die Dicke d der Mittelwand mindestens noch $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{30}$ der Trägerhöhe H zu betragen habe, wobei die größere Dicke $\frac{H}{20}$ für niedrige, die kleinere $\frac{H}{30}$ für höhere Träger angenommen werden mag. Desgleichen wird die

Breite B nur bei niedrigen Trägern etwa gleich der halben Höhe $\frac{H}{2}$, bei größeren Höhen dagegen nicht viel über $\frac{H}{3}$ anzunehmen sein. Wesentliche Abweichungen von diesen Verhältnissen würden, sofern sie die Herstellung überhaupt noch zulassen, den Preis der Träger pro Gewichtseinheit so bedeutend erhöhen, daß die Construction aus diesem Grunde unvortheilhaft werden würde.

Ferner muß bemerkt werden, daß man sich bei der Feststellung der Trägerprofile aus praktischen Gründen meistens nach den Calibern der in den Walzwerken vorhandenen Walzen richten wird, da die Anfertigung von besonderen Walzen für das gewünschte Profil kostspielig ist und sich nur dann wird ermöglichen lassen, wenn von einem gewissen Profile eine große Menge von Trägern gewalzt wird.

Mit Rücksicht hierauf ist es denn gebräuchlich, daß der Constructeur in jedem Falle unter den ihm zugänglichen Profilsformen der Walzwerke dasjenige auswählt, welches dem vorliegenden Zwecke am besten entspricht. Da nun diese vorhandenen Walzeisenprofile von den verschiedenen Walzwerken im Laufe der Zeit und nach Maßgabe der jeweiligen Bedürfnisse hergestellt worden sind, so ist es natürlich, daß der Abstufung der einzelnen Formen meistens ein festes System nicht zu Grunde liegt, und ebenso zeigt die Erfahrung, daß diese so entstandenen Profile sehr häufig mit einer unglünstigen Verwendung des Materials verbunden, d. h. nach dem Vorstehenden, mit

einem kleinen Güteverhältnisse η behaftet sind. Man hat daher in neuerer Zeit mehrfach die Frage der Aufstellung eines geordneten Systems von Normalprofilen angeregt, und in dieser Beziehung müssen insbesondere die Bestrebungen des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine und des Vereins deutscher Ingenieure hervorgehoben werden. Die von diesen Vereinen niedergelegte Commission hat sich über eine Anzahl von Tabellen geeinigt, welche für die verschiedenen gebräuchlichen Querschnittsformen in regelmäßigen Abstufungen solche Abmessungen angeben, wie sie einer möglichst vortheilhaften Materialverwendung sowohl als einer guten und wohlfeilen Herstellung entsprechen. Diese so entstandenen Profilformen sind unter der Bezeichnung „Normalprofile“ veröffentlicht*) und zur Zeit von beinahe sämtlichen deutschen Regierungen den betreffenden Baubehörden und Verwaltungen zur thunlichsten Berücksichtigung empfohlen.

Fig. 175.

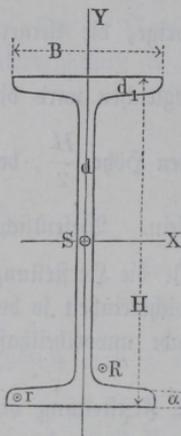
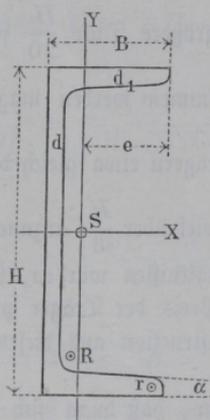


Fig. 176.



Dieser Zusammenstellung sind die beiden folgenden Tabellen entnommen, welche die Dimensionen, Trägheitsmomente, Widerstandsmomente und Güteverhältnisse von I und C förmigen Querschnitten enthalten. Die Verhältnisse der Querschnittsdimensionen sind dabei entsprechend den Figuren 175 und 176 so gewählt, daß für I Träger, Fig. 175, bei den kleineren Höhen H unter 250 mm

$H < 250 \text{ mm}$: $B = 0,4 H + 10 \text{ mm}$; $d = 0,03 H + 1,5 \text{ mm}$,
und bei größeren Höhen

$H > 250 \text{ mm}$: $B = 0,3 H + 35 \text{ mm}$; $d = 0,036 H$

angenommen worden ist. Die Halbmesser für die Abrunden sind zu $R = d$ und $r = 0,6 d$ gewählt und für den Neigungswinkel α der inneren Flanschflächen hat man $\text{tg } \alpha = 0,14$ angenommen. Die unter d_1 angegebene Stärke der Flanschen ist für die Mitte derselben gedacht.

Ebenso ist für die C förmigen Querschnitte, Fig. 176,

$$B = 0,25 H + 25 \text{ mm}; R = d_1 \text{ und } r = \frac{d_1}{2}$$

*) Deutsches Normalprofilbuch für Walzisen, im Auftrage u. f. w. bearbeitet und herausgegeben von Dr. F. Heinzerling und D. Zunge. 1881.

A. Normalprofile für I-Eisen (Fig. 175).

für $H < 250$ mm:

für $H > 250$ mm:

$$B = 0,4H + 10 \text{ mm}; d = 0,03H + 1,5 \text{ mm}$$

$$R = d; r = 0,6 d$$

$$B = 0,3H + 35 \text{ mm}; d = 0,036H$$

H mm	B mm	d mm	d ₁ mm	F qcm	G kg	T _x cm	W _x cm	η _x	T _y cm	W _y cm	η _y	$\frac{W_x}{W_y} = v$
80	42	3,9	5,9	7,61	6,0	78,4	19,6	0,646	7,35	3,5	0,219	5,6
90	46	4,2	6,3	9,05	7,1	118	26,2	0,644	10,4	4,5	0,223	5,8
100	50	4,5	6,8	10,69	8,3	172	34,4	0,642	14,3	5,7	0,213	6,0
120	58	5,1	7,7	14,27	11,1	331	55,1	0,644	25,2	8,7	0,210	6,4
140	66	5,7	8,6	18,35	14,3	579	82,7	0,645	41,3	12,5	0,206	6,6
160	74	6,3	9,5	22,9	17,9	945	118	0,645	64,4	17,4	0,205	6,8
180	82	6,9	10,4	28,0	21,9	1460	162	0,644	95,9	23,4	0,204	7,0
200	90	7,5	11,3	33,7	26,2	2162	216	0,641	138	30,7	0,203	7,0
220	98	8,1	12,2	39,8	31,0	3090	281	0,642	192	39,2	0,201	7,2
240	106	8,7	13,1	46,4	36,2	4288	357	0,642	261	49,3	0,200	7,2
260	113	9,4	14,1	53,7	41,9	5798	446	0,639	341	60,3	0,198	7,4
280	119	10,1	15,2	61,4	47,9	7658	547	0,636	429	72,1	0,197	7,6
300	125	10,8	16,2	69,4	54,1	9888	659	0,633	530	84,8	0,195	7,8
320	131	11,5	17,3	78,2	61,0	12622	789	0,631	652	99,5	0,194	7,9
340	137	12,2	18,3	87,2	68,0	15827	931	0,628	789	115	0,193	8,1
360	143	13,0	19,5	97,5	76,1	19766	1098	0,626	956	134	0,192	8,2
380	149	13,7	20,5	107,5	83,9	24208	1274	0,624	1138	153	0,191	8,3
400	155	14,4	21,6	118,3	92,3	29446	1472	0,622	1349	174	0,189	8,5
425	163	15,3	23,0	133,0	103,7	37266	1754	0,621	1672	205	0,189	8,6
450	170	16,2	24,3	147,7	115,2	46204	2054	0,619	2004	236	0,188	8,7
500	185	18,0	27,0	180,2	140,5	69245	2770	0,614	2871	310	0,186	8,9

B. Normalprofile für □ Eisen (Fig. 176).

$$B = 0,25 H + 25 \text{ mm}; R = d_1; r = \frac{d_1}{2}$$

H mm	B mm	d mm	d ₁ mm	F qcm	G kg	e cm	T _x cm	W _x cm	η _x	T _y cm	W _y cm	η _y	$\frac{W_x}{W_y} = v$
30	33	5	7	5,42	4,2	1,86	6,5	4,3	0,529	5,2	2,8	0,313	1,54
40	35	5	7	6,20	4,8	2,04	14,2	7,1	0,520	7,3	3,6	0,332	1,97
50	38	5	7	7,12	5,6	2,32	26,7	10,7	0,600	10,0	4,3	0,318	2,50
65	42	5,5	7,5	9,05	7,1	2,66	58,2	17,9	0,609	15,7	5,9	0,305	3,04
80	45	6	8	11,04	8,6	2,93	107	26,7	0,605	21,7	7,4	0,298	3,60
100	50	6	8,5	13,5	10,5	3,31	207	41,4	0,613	33,1	10,0	0,295	4,14
120	55	7	9	17,04	13,3	3,76	368	61,3	0,60	49,2	13,1	0,280	4,69
140	60	7	10	20,4	15,9	4,09	609	87,0	0,620	71,2	17,4	0,285	5,00
160	65	7,5	10,5	24,1	18,8	4,49	932	117	0,607	97,4	21,7	0,277	5,38
180	70	8	11	28,0	21,9	4,90	1364	152	0,605	130	26,6	0,272	5,70
200	75	8,5	11,5	32,3	25,2	5,30	1927	193	0,598	171	32,2	0,266	5,99
220	80	9	12,5	37,6	29,3	5,66	2712	247	0,598	226	39,9	0,264	6,19
260	90	10	14	48,4	37,8	6,42	4837	374	0,594	365	56,9	0,261	6,57
300	100	10	16	58,8	45,9	7,05	8064	538	0,610	564	80,0	0,273	6,72

vorausgesetzt. Unter e ist hierbei der Abstand des Schwerpunktes S von den Enden der Flanschen zu verstehen, und es sind in beiden Tabellen mit T_x und W_x die Trägheits- und Widerstandsmomente in Bezug auf die Schwerpunktschwerachse XX bezeichnet, während T_y und W_y dieselben Größen in Beziehung zur Schwerpunktschwerachse YY bedeuten. Endlich ist unter G das Gewicht der Träger pro 1 m Länge, entsprechend einer Dichte des Walzeisens von 7,8 angegeben. Aus den Tabellen ersieht man, daß das Güteverhältniß für die erste Schwerpunktschwerachse XX bei den Γ Trägern etwa zwischen 0,61 und 0,64 und für \square Eisen zwischen 0,52 und 0,62 schwankt, während diese Größe für die Y Achse, also für die flache Lage der Träger nur die geringen Beträge zwischen 0,19 und 0,22, bzw. 0,26 und 0,33 zeigt.

Wenn ein Träger aus Gußeisen hergestellt werden soll, so hat man zu beachten, daß dieses Material gegen Druck eine größere Widerstandsfähigkeit zu äußern vermag, als gegen Zugkräfte. Man wird daher, da die Spannungen der einzelnen Elemente auch hier mit ihren Abständen von der durch den Schwerpunkt gehenden neutralen Achse proportional sind, der concaven oder gedrückten Faser einen im Verhältniß der zulässigen Spannungen größeren Abstand von der neutralen Achse zu geben haben, als der convexen oder gezogenen äußersten Faserschicht. Bezeichnet man mit $v = \frac{s_d}{s_z}$ dieses

Verhältniß der höchstens zulässigen Spannungen, so ist der Querschnitt nach Fig. 177 so anzuordnen, daß die Abstände des Schwerpunktes S von den äußersten Fasern ebenfalls in diesem Verhältnisse stehen, d. h. daß

$$\frac{e_d}{e_z} = \frac{s_d}{s_z} = v$$

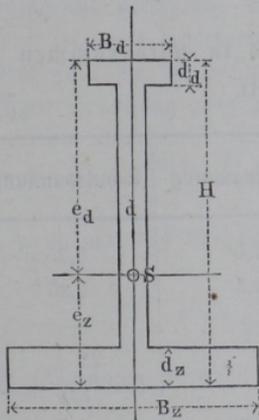


Fig. 177.

ist. In diesem Falle treten gleichzeitig die größten zulässigen Zug- und Druckspannungen in den betreffenden äußersten Faserschichten ein, und man erzielt in Folge dessen die bestmögliche Ausnutzung des Materials. Wenn dagegen die Schwerpunktslage dieser Bedingung nicht entspricht, so wird bei der Belastung des Balkens entweder die Zugspannung in der convexen Schicht oder die Druckspannung in der concaven Schicht zuerst den höchstens zulässigen Betrag s_z bzw. s_d

erreichen, je nachdem das Verhältniß $\frac{s_z}{e_z}$ oder $\frac{s_d}{e_d}$ den kleineren Werth hat.

Man hat daher in diesem Falle die Tragfähigkeit des Balkens dadurch zu bestimmen, daß man in der allgemeinen Formel

$$M = s \frac{T}{e}$$

für $\frac{s}{e}$ den kleineren der beiden Werthe $\frac{s_z}{e_z}$ und $\frac{s_d}{e_d}$ der Rechnung zu Grunde legt. Häufig pflegt man das Verhältniß $\nu = \frac{s_d}{s_z} = 2$ vorauszusetzen (s. Thl. I). Nach Mohr *) kann man die zulässigen Spannungen für 1 qmm Querschnittsfläche zu

$$s_d = 10 \text{ kg und } s_z = 3\frac{1}{3} \text{ kg,}$$

also $\nu = 3$ annehmen, und erhält günstige Verhältnisse des Querschnittes, wenn man, Fig. 177,

$$d = \frac{1}{15} H; d_d = \frac{1}{15} H \text{ und } d_z = \frac{2}{15} H$$

annimmt, für welche Verhältnisse sich

$$H = 1,5 \sqrt[3]{M} \text{ und } F = 0,48 \sqrt[3]{M^2} = 0,21 H^2$$

ermittelt.

Was die zulässigen Spannungen s der verschiedenen Baumaterialien anbelangt, so kann man dafür etwa die in der folgenden kleinen Zusammenstellung angeführten Werthe in Rechnung setzen, wobei es kaum der Bemerkung bedarf, daß unter besonderen günstigen oder ungünstigen Verhältnissen in entsprechendem Maße nach der einen oder anderen Seite hin Abweichungen zulässig sein werden.

Zulässige Spannungen des Materials in Kilogrammen
pro 1 qmm Querschnitt.

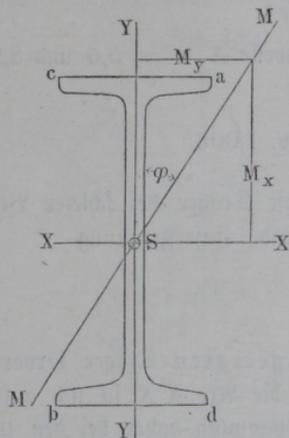
Material	Zugspannung	Druckspannung	Schubspannung
Schmiedeeisen	7,5	7,5	5,25
Blech	7,5	7,5	5,25
Draht	12	—	—
Gußstahl	30	30	22
Guß Eisen	2,5	5	1,9
Eichen- und Buchenholz . .	1,2	0,66	—
Nadelholz	0,8	0,6	—

*) S. Technische Mechanik, bearb. u. herausgeg. vom Ingenieur-Verein am Polytechnikum zu Stuttgart.

Schiefe Belastung. Die in dem Vorhergehenden zur Anwendung §. 46. gebrachte Formel $M = s \frac{W}{e}$ beruht auf der stillschweigenden Voraus-

setzung, daß die eine Schwerpunkthauptaxe des Querschnittes, etwa die Y Axe, Fig. 178, in die Ebene der wirkenden Belastungen hineinfällt. Denkt man sich dagegen, daß die Belastungsebene MM gegen die Y Axe etwa um den Winkel φ geneigt sei, so kann man das wirkende Moment M in zwei Componenten

Fig. 178.



zerlegt denken, von denen das Moment M_y eine Biegung um die Y Axe und M_x eine Biegung um die X Axe aufstrebt. In Folge dieser beiden Beanspruchungen werden sich die Spannungen in den äußersten Fasern bezw. zu

$$M_y = M \sin \varphi \text{ und } M_x = M \cos \varphi$$

$$s_y = \frac{M \sin \varphi}{W_y} \text{ und } s_x = \frac{M \cos \varphi}{W_x}$$

bestimmen. Wie man aus der Figur erkennt, werden diese beiden Spannungen in der Kante a als Zugspannungen sich zu dem größten Werthe $s = s_y + s_x$ addiren, und ebenso wird in b die größte Druckspannung von demselben Betrage sich einstellen, während in den Ecken c und d die entgegengesetzt gerichteten Spannungen s_y und s_x totale Anstrengungen gleich $\pm (s_y - s_x)$ hervorrufen. Es ist von Interesse, zu untersuchen, in welchem Falle die am meisten gefährdeten Fasern in a und b der größten zulässigen Spannung ausgesetzt sind. Zu dem Ende hat man

$$s = s_y + s_x = \frac{M \sin \varphi}{W_y} + \frac{M \cos \varphi}{W_x}$$

oder, wenn man das Verhältniß $\frac{W_x}{W_y} = v$, also $W_y = \frac{W_x}{v}$ einführt:

$$s = \frac{M}{W_x} (v \sin \varphi + \cos \varphi).$$

Diese Spannung wird zu einem Maximum für $\frac{\partial s}{\partial \varphi} = 0$, d. h. für $v \cos \varphi = \sin \varphi$ oder $\operatorname{tg} \varphi = v$, und zwar erhält man mit diesem Werthe von φ die absolut größte Faser Spannung in a oder b :

$$s_{\max} = \frac{M}{W_x} (\operatorname{tg} \varphi \sin \varphi + \cos \varphi) = \frac{M}{W_x \cos \varphi} = \frac{M}{W_y v \cos \varphi}$$

Setzt man noch

$$\frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \sqrt{1 + v^2},$$

so kann man auch schreiben:

$$s_{max} = \frac{M}{W_y} \sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}.$$

Mit den äußersten Werthen von v aus der Tabelle A, $v = 5,6$ und $8,9$ erhält man

$$\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}} = 1,015 \text{ und bezw. } 1,006.$$

Die größte Faserspannung wird daher für diese Träger bei schiefer Belastung nur um 1,5 bezw. 0,6 Proc. größer, als die Faserspannung

$$s = \frac{M}{W_y},$$

welche durch das Moment M in dem flach gelegten Träger hervorgerufen wird, d. h. wenn die Belastungsebene die Axc. XX in sich aufnimmt. Man wird diese Vergrößerung der Spannung daher bei den in Tabelle A enthaltenen Γ Trägern vernachlässigen dürfen.

Beträchtlicher stellt sich diese durch schiefe Belastung hervorgerufene Vergrößerung der Kantenspannung bei einem geringeren Werthe von v heraus, z. B. erhält man für das erste \square Eisenprofil der Tabelle B mit $v = 1,54$, die größte Kantenspannung

$$s_{max} = \frac{M}{W_y} \sqrt{1 + \frac{1}{1,54^2}} = 1,192 \frac{M}{W_y},$$

und zwar stellt sich diese Spannung ein, wenn die Belastungsebene um $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1,54 = 57^\circ$ von der Y Axc abweicht. Man hätte daher für eine derartige schiefe Belastung die Dimensionen aus der Formel $1,192 M = s W_y$ zu bestimmen.

Am bedeutendsten wird die Spannungsvergrößerung für $v = 1$, d. h. für einen quadratischen Querschnitt, für denselben wird

$$\varphi = 45^\circ$$

und

$$s_{max} = \frac{M}{W} \sqrt{2} = 1,414 \frac{M}{W},$$

d. h. es findet die ungünstigste Belastung bei der in Fig. 179 dargestellten Lage statt, wenn die Belastungsebene mit der Diagonalebene AB zusammenfällt.

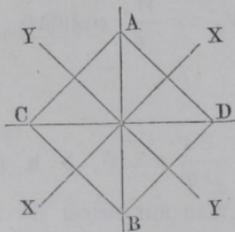
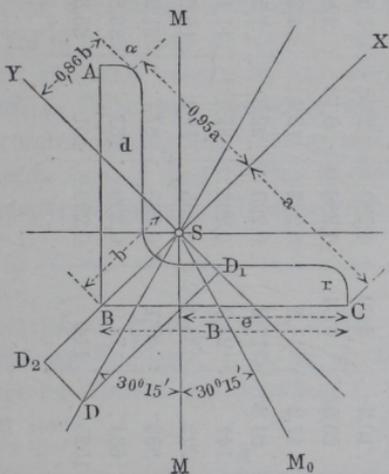


Fig. 179.

Eine besondere Berücksichtigung verdient die schiefe Belastung bei der Anwendung der Winkelisen. Ein Auszug aus der für gleichschenkelige Winkelisen in den Normalprofilen angegebenen Tabelle ist in der folgenden mit C bezeichneten Zusammenstellung gegeben.

Wenn die Winkelisen gleichschenkelig sind, so halbirt die eine Schwerpunktschwerachse XX den rechten Winkel ABC , Fig. 180. Ist daher der

Fig. 180.



eine Schenkel BC horizontal gelagert und wirkt die Belastung in der verticalen Ebene MM , so zerlegt sich das Moment M in die beiden gleichen Seitenmomente

$$\begin{aligned} M \sin 45^\circ &= M \cos 45^\circ \\ &= 0,707 M. \end{aligned}$$

Setzt man die Abrundung der Ecke und der Schenkel so voraus, wie die Normalprofile bestimmen, d. h. nimmt man $R = d$ und

$$r = \frac{R}{2},$$

so findet die größte Faserspannung bei A nicht in der Kante, sondern etwa in der Mitte der Abrundung in einem Punkte

α statt, welcher von der X Achse den Abstand $0,95 a$ und von der Y Achse denjenigen $0,86 b$ hat. Es bestimmt sich daher die größte Faserspannung in diesem Punkte vermöge der beiden Seitenmomente $0,707 M$ zu

$$\begin{aligned} s_{max} &= 0,707 \left(\frac{M}{T_x} 0,95 a + \frac{M}{T_y} 0,86 b \right) \\ &= 0,707 \left(\frac{0,95 M}{W_x} + \frac{0,86 M}{W_y} \right), \end{aligned}$$

oder, wenn wieder $v = \frac{W_x}{W_y}$ eingeführt wird, zu

$$s_{max} = 0,707 \frac{M}{W_x} (0,95 + 0,86 v).$$

Für die Ecke B hat man dagegen, da hierfür das um die X Achse biegende Moment eine Spannung nicht erzeugt, die Spannung

$$s = 0,707 \frac{M}{W_y} = 0,707 v \frac{M}{W_x}.$$

Nimmt man beispielsweise aus der Tabelle für das Winkelisen von 80 mm Schenkellänge und 10 mm Stärke den Werth

C. Normalprofile für gleichschenkelige L-Öffnen (Fig. 180).

 $d = 0,1 B$ für $B < 100$ mm;

 $R = d$; $r = \frac{d}{2}$;

 $d = \frac{1}{11} B$ für $B > 100$ mm;

B mm	d mm	F cm	G kg	e mm	a mm	b mm	T_x cm	W_x cm	η_x	T_y cm	W_y cm	η_y	$\frac{W_x}{W_y} = v$
20	4	1,44	1,12	1,35	1,41	0,92	0,792	0,563	0,277	0,209	0,226	0,223	2,49
25	4	1,84	1,44	1,73	1,77	1,09	1,64	0,926	0,284	0,432	0,397	0,243	2,34
30	6	3,24	2,53	2,02	2,12	1,30	4,01	1,89	0,277	1,05	0,755	0,220	2,50
40	6	4,41	3,46	2,77	2,83	1,74	10,2	3,60	0,289	2,68	1,54	0,247	2,34
50	7	6,51	5,1	3,49	3,54	2,14	23,5	6,64	0,288	6,18	2,89	0,251	2,30
60	8	8,96	7,0	4,21	4,24	2,53	47,2	11,1	0,292	12,4	4,90	0,258	2,26
70	9	11,8	9,2	4,92	4,95	2,94	84,8	17,2	0,295	22,3	7,58	0,259	2,26
80	10	15,0	11,7	5,63	5,66	3,35	141	24,9	0,293	37,1	11,1	0,262	2,24
90	11	18,6	14,5	6,35	6,36	3,75	222	34,9	0,295	58,4	15,6	0,264	2,24
100	12	22,6	17,6	7,06	7,07	4,15	333	47,1	0,295	87,7	21,2	0,265	2,22
120	13	29,5	23,0	8,52	8,48	4,93	634	74,9	0,299	167	33,8	0,270	2,21
150	16	45,4	35,4	10,7	10,6	6,14	1525	144	0,299	401	65,3	0,271	2,20

$$v = \frac{24,9}{11,1} = 2,24$$

an, so erhält man für den Punkt α die Spannung

$$s_{max} = 0,707 (0,95 + 0,86 \cdot 2,24) \frac{M}{W_x} = 2,03 \frac{M}{W_x},$$

also mehr als doppelt so groß wie diejenige größte Spannung ist, die dasselbe Moment M hervorrufen würde, wenn es eine Biegung um die X Ase anstreben, d. h. wenn die Belastung die Richtung der Y Ase haben würde.

Es ist auch leicht zu ersehen, daß ein Winkelisen, dessen einer Flansch BC horizontal gelagert ist und welches durch vertical in der Ebene MM wirkende Belastungen angegriffen wird, eine Durchbiegung in einer von der verticalen abweichenden Richtung annehmen muß. Es läßt sich nämlich die Durchbiegung f eines Balkens in einem gewissen Punkte nach den in §. 35 angegebenen Formeln allgemein durch

$$f = k \frac{M}{T}$$

ausdrücken. Hierin bedeutet k eine von der Länge und Unterstüßungsart abhängige Constante, z. B. für die Mitte eines auf zwei Punkten frei aufliegenden Balkens von der Länge l , der in der Mitte durch K belastet ist, hat man

$$f = \frac{K}{48 TE} l^3 = \frac{l^2}{12 E} \frac{Kl}{4T} = \frac{l^2}{12 E} \frac{M}{T},$$

also

$$k = \frac{l^2}{12 E}.$$

Demgemäß wird das erwähnte Winkelisen durch die beiden um die X Ase und Y Ase biegender Seitenmomente

$$M \sin 45^\circ = M \cos 45^\circ = 0,707 M$$

zwei Durchbiegungen nach den zu einander senkrechten Richtungen SY und SX erleiden, für welche man hat

$$f_x = SD_1 = k \frac{0,707 M}{T_x}$$

und

$$f_y = SD_2 = k \frac{0,707 M}{T_y},$$

so daß die aus f_1 und f_2 resultirende Gesamtbiegung

$$f = SD = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

nach einer Richtung SD erfolgt, die mit der Y Ase einen Winkel β , also

mit der Verticalen MM einen Winkel $\beta - 45^\circ$ einschließt, für welchen man hat:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f_y}{f_x} = \frac{T_x}{T_y}.$$

Bei den der Tabelle C zu Grunde gelegten Verhältnissen ergibt sich für alle Querschnitte fast genau

$$\frac{T_x}{T_y} = 3,8,$$

so daß man

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3,8 = 75^\circ 15',$$

also die Abweichung der Biegungsebene dieser Winkeleisen von der Vertical-ebene zu

$$DSM = \beta - 45^\circ = 30^\circ 15'$$

erhält.

Will man eine vertical gerichtete Durchbiegung des mit einem Schenkel horizontal gelagerten Winkeleisens erreichen, so hat man $f_x = f_y$ zu setzen und erhält, wenn jetzt M_x und M_y wieder allgemein die beiden Momente darstellen, welche um die X Achse und bezw. Y Achse zu biegen streben:

$$k \frac{M_x}{T_x} = k \frac{M_y}{T_y},$$

d. h.

$$\frac{M_x}{M_y} = \frac{T_x}{T_y},$$

also für die Winkeleisen der Tabelle C

$$\frac{M_x}{M_y} = 3,8 = \operatorname{tg} 75^\circ 15'.$$

Betrachtet man die beiden Momente M_x und M_y als die Seitenmomente, in welche das Belastungsmoment M bei rechtwinkliger Zerlegung nach den Hauptaxen zerfällt, so folgt, daß dieses Moment in einer Richtung SM_0 wirksam sein müsse, deren Neigung $M_0SY = \varphi$ gegen die Y Achse durch

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{M_x}{M_y} = 3,8 \text{ zu } \varphi = 14^\circ 45'$$

ausgedrückt ist, oder es muß die Ebene, in welcher das Moment M wirksam ist, gegen die Verticale um einen Winkel

$$MSM_0 = 45^\circ - \varphi = 30^\circ 15'$$

geneigt sein, wenn das Winkeleisen in einer verticalen Ebene sich durchbiegen soll. Denkt man sich daher dieses biegende Moment durch eine Kraft K in der Ebene SM_0 dargestellt, so ergibt sich, daß in Folge der Abweichung dieser Kraft K von der Verticalrichtung auf das Winkeleisen ein

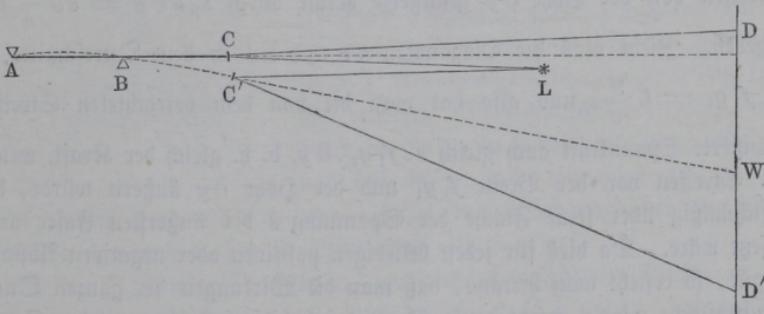
horizontaler Druck H und ein verticaler Druck V ausgeübt wird, für welche man hat

$$H = V \operatorname{tg} 30^{\circ} 15' = 0,58 V.$$

Man kann den Zustand daher auch dadurch kennzeichnen, daß auf das betreffende, durch eine Verticalkraft V belastete Winkelisen noch ein horizontaler Zwang (etwa durch Führungen *z.*) von dem Betrage $0,58 V$ ausgeübt werden muß, wenn die Durchbiegung in verticaler Ebene erfolgen soll.

Die vorstehend angegebenen Resultate sind von D. Inge durch sehr schöne Versuche mit einem sinnreichen Apparate in der Versammlung deutscher Ingenieure zu Stuttgart, 1881, bestätigt worden. Der dazu dienende Apparat bestand im Wesentlichen aus einem bei A und B , Fig. 181, unterstützten Winkelisen AC von 2 m Länge, welches an seinem freien Ende C durch ein Gewicht K belastet wurde. Die hierdurch hervorgerufene

Fig. 181.



Biegung des Stabes, welcher dadurch etwa in die punktirte Lage ABC' gelangt, wurde mit Hilfe eines Spiegels zur Anschauung gebracht, der am freien Ende C des Stabes normal zu dessen Axe befestigt war, und daher an der Neigungsveränderung theil nahm, welche dem freien Stabende in Folge der Durchbiegung mitgetheilt wurde. Ein bei L aufgestelltes Drummond'sches Kalklicht wurde von dem Spiegel nach D und bezw. D' auf eine 14 m entfernte Wand W projectirt, und auf diese Weise nicht nur die lineare Durchbiegung in vergrößertem Maßstabe, sondern auch die Abweichung der Biegungsebene von der Belastungsebene zur Anschauung gebracht, wenn der letzteren verschiedene Richtungen gegeben wurden. Hinsichtlich der näheren Erörterung dieser interessanten Versuche, welche gleichzeitig zur Ermittlung des Elasticitätsmoduls des angewandten Materials benutzt wurden, muß auf die angezeigte *) Quelle verwiesen werden.

*) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ingenieure, 1881, October.

§. 47. Reducirte Querschnitte. Ist $abcd$, Fig. 182, ein beliebiger, hier der Einfachheit halber rechteckig vorausgesetzter Querschnitt eines Balkens

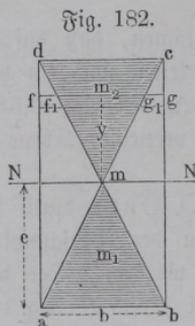


Fig. 182.

von der Breite b und Höhe $h = 2e$, so erzeugt ein in diesem Querschnitte wirksames Biegemoment M in der äußersten Faserschicht ab oder cd eine spezifische Faserspannung s , welche nach dem Vorstehenden durch

$$s = \frac{M}{W} = \frac{M e}{T}$$

ausgedrückt ist. Die Spannung in irgend welchem anderen, von der neutralen Axe NN um y entfernten horizontalen Streifen fg ist durch

$s_y = s \frac{y}{e}$ dargestellt, und daher die daselbst durch einen unendlich schmalen

Streifen von der Höhe ∂y geäußerte Kraft durch $s_y b \partial y = s b \frac{y}{e} \partial y$ gegeben. Zieht man die Diagonalen ac und bd in dem Querschnitte, so

ist $f_1 g_1 = b \frac{y}{e}$, und also hat man die von dem betrachteten Streifen

geäußerte Spannkraft auch gleich $s \cdot f_1 g_1 \cdot \partial y$, d. h. gleich der Kraft, welche ein Streifen von der Breite $f_1 g_1$ und der Höhe ∂y äußern würde, der gleichmäßig über seine Fläche der Spannung s der äußersten Faser ausgesetzt wäre. Da dies für jeden beliebigen positiven oder negativen Abstand y gilt, so ersieht man hieraus, daß man die Wirkungen der ganzen Querschnittsfläche $abcd$ ersetzt denken kann durch diejenigen der mit der Spannung s gleichmäßig behafteten, in der Figur schraffirten Fläche abm_1dc , und zwar derart, daß die von der oberhalb der neutralen Axe gelegenen Fläche dcm geäußerte Spannung derjenigen entgegengesetzt ist, welche von der unterhalb der neutralen Axe gelegenen Fläche abm ausgeübt wird. Ist $\mu = m_1 m_2$ der Abstand der Schwerpunkte m_1 und m_2 dieser beiden Flächenstücke und f der Inhalt eines jeden derselben, so hat man das Moment des durch die beiden gedachten Spannkräfte gebildeten Kräftepaars gleich

$$\mu f s = W = M.$$

Wenn der Balkenquerschnitt, wie hier vorausgesetzt, ein Rechteck ist, hat man

$$\mu = 2 \frac{2}{3} \frac{h}{2} = \frac{2}{3} h$$

und

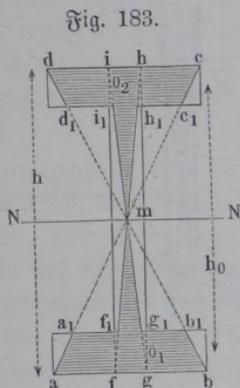
$$f = \frac{1}{2} b \frac{h}{2} = \frac{bh}{4},$$

folglich das gedachte Moment

$$\frac{2}{3} h \frac{bh}{4} s = \frac{bh^2}{6} s,$$

entsprechend dem Widerstandsmomente des rechteckigen Querschnittes $W = \frac{bh^2}{6}$ (s. §. 45).

Die so erhaltene Fläche $dbmdc$ nennt man die reducirte Fläche des Querschnittes, und es ist leicht ersichtlich, wie man für jede beliebige andere Form des Balkenquerschnittes zu der reducirten Fläche desselben einfach dadurch gelangt, daß man die horizontale Breite an jeder um y von der neutralen Axe entfernten Querschnitt in dem Verhältnisse $\frac{y}{e}$ verringert, unter e den Abstand derjenigen äußersten Faser von der neutralen Axe verstanden, für welche die spezifische Spannung gleich s angenommen ist. Hieraus ergibt sich z. B. für den symmetrischen I förmigen Querschnitt $abcd$, Fig. 183, die reducirte Querschnittsfläche, wenn man durch die Mitte m sowohl die Diagonalen ac und bd sowie auch diejenigen fh und gi



zieht, indem dann abb_1a_1 und edd_1c_1 den beiden Flanschen zugehören, während $f_1g_1mh_1i_1$ für die Mittelrippe gilt.

Ist der I förmige Querschnitt, wie dies bei gußeisernen Balken zu sein pflegt, unsymmetrisch, Fig. 184 und 185 (a. f. S.), derart, daß die Abstände der äußersten Fasern e_1 und e_2 sind, und daher die Spannungen daselbst s_1 und s_2 in dem Verhältnisse $\frac{s_1}{s_2} = \frac{e_1}{e_2}$ stehen, so kann man die Reducirung der Querschnittsfläche ebensowohl auf die Faserspannung s_1 wie auf diejenige s_2 vornehmen. Im ersteren Falle macht man $a'b' = ab$ im Abstände e_1 von NN , Fig. 184, und zieht von m nach a', b', f' und g' gerade Linien, während man, wenn der Reducirung die Spannung s_2 in ab , Fig. 185, zu Grunde gelegt werden soll, $d'e' = dc$ im Abstände e_2 von NN zu machen, und von m durch d', c', h' und i' zu ziehen hat. Die reducirten Flächen sind in beiden Figuren durch Schraffirung hervorgehoben.

Aus diesen Figuren ersieht man, daß bei Balken mit I förmigen Querschnitten, wie Fig. 183, die mittlere Wand viel weniger ausgenutzt wird, als die von der neutralen Axe entfernteren Flanschen. Es wird daher vortheilhaft sein, das zur Ausführung des Trägers zu verwendende Material

möglichst an den günstigeren Stellen, d. h. zur Bildung der Flanschen anzubringen, und der Mittelwand nur die durchaus erforderliche Dicke d zu geben. In welcher Weise diese Dicke zu bestimmen ist, wird sich aus den folgenden Paragraphen ergeben.

Fig. 184.

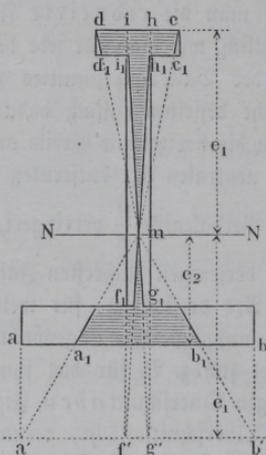
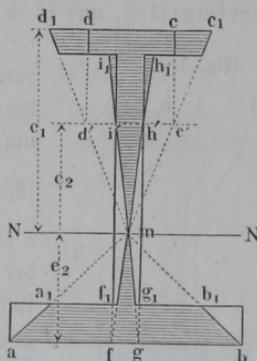
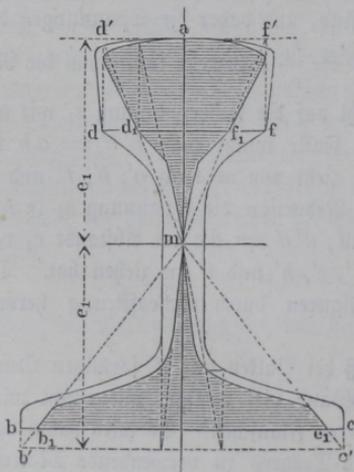


Fig. 185.



Wenn die Stärke d der Mittelwand nur gering ist, wie dies z. B. bei den später näher zu betrachtenden Blechträgern der Fall ist, so kann man annähernd genug den Theil $f_1 g_1 m h_1 i_1$ der reducirten Querschnittsfläche

Fig. 186.



als klein vernachlässigen und für den Fall, daß auch die Dicke d_1 der Flanschen nur unbedeutend ist im Vergleiche zur Höhe h des Querschnittes, darf man den Querschnitt $b d_1$ eines Flanschen für die reducirten Querschnittsflächen $a b b_1 a_1$ bezw. $c d d_1 c_1$, Fig. 183, setzen. Jeder dieser Flanschen äußert demnach eine Spannkraft gleich $s b d_1$, und da man diese Kräfte in den Mitten der Flanschen, also im Abstände $h_0 = h - d_1$ von einander annehmen darf, so erhält man das Widerstandsmoment für einen solchen Querschnitt zu

$$W = s b d_1 h_0.$$

Für Blech- und Fachwerksträger (s. unten) kann man in den meisten Fällen von dieser angenäherten Formel Gebrauch machen.

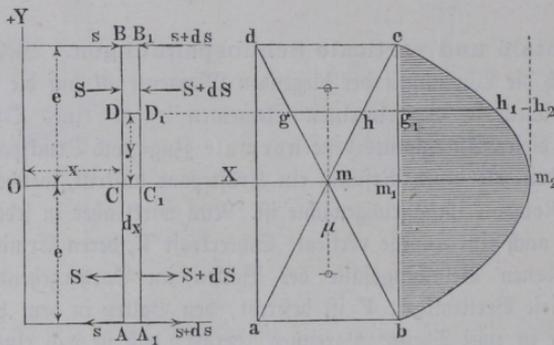
Aus dem Angeführten ergibt sich auch leicht die Construction, welche dazu dienen kann, für irgend welchen beliebigen Querschnitt, z. B. den einer Eisenbahnschiene abc , Fig. 186, die reducirte Fläche $a d_1 m b_1 c_1 f_1$ zu bestimmen. Man hat dazu nur nöthig, eine genügende Anzahl von Breiten, wie z. B. df in dem Verhältnisse $\frac{y}{e_1}$ zu reduciren, indem man df auf die Horizontale durch a gleich $d'f'$ projectirt und die Geraden md' und mf' zieht, welche die zugehörige reducirte Breite $d_1 f_1$ zwischen sich einschließen. Ebenso macht man wieder $b'c' = bc$ im Abstände e_1 von der neutralen Axe und zieht von m nach b' und c' , um $b_1 c_1$ zu erhalten u. s. f.

Horizontale und verticale Schubspannungen. Bisher wurden §. 48. ausschließlich die Wirkungen der biegenden Momente M auf die Balken betrachtet, wodurch in den einzelnen Elementen irgend eines Querschnittes gewisse auf dieser Querschnittsebene normale Zug- und Druckspannungen s erzeugt werden, als deren Resultat ein Kräftepaar auftritt, welches mit dem biegenden Momente im Gleichgewichte ist. Nun wirkt aber in jedem Balkenquerschnitte auch eine gewisse verticale Scheerkraft V , deren Ermittlung für die verschiedenen Belastungsfälle der Balken im Vorhergehenden gezeigt wurde. Diese Vertikalkraft V ist bestrebt, den Balken in dem betreffenden Querschnitte in zwei Theile zu trennen, derart, daß sie das eine Stück an dem anderen entlang der Querschnittsebene vertical zu verschieben trachtet. Einer solchen Trennung widersteht das Material vermöge seiner Cohäsion, und zwar dadurch, daß in den einzelnen Elementen des besagten Querschnittes verticale, also in die Querschnittsebene hineinfallende Reactionen rege werden, welche für jedes der beiden Balkenstücke solche Richtung haben, daß sie der auf dieses Balkenstück einwirkenden Vertikalkraft V das Gleichgewicht halten. Die so in dem Querschnitte auf das diesseits desselben gelegene Balkenstück ausgeübten Reactionen sind daher denjenigen genau gleich und entgegengerichtet, welche in denselben Punkten auf das jenseits des Querschnittes befindliche Balkenstück wirken, so daß in jedem Querschnitte diese tangentialen Spannungen als innere Kräfte sich ebenso gegenseitig aufheben, wie dies auch für die auf beide Seiten des Querschnittes wirkenden normalen Zug- und Druckspannungen s gilt. Man nennt diese, in die Schnittfläche hineinfallenden tangentialen Kräfte die Schubspannungen, und es sollen dieselben fernerhin, bezogen auf die Flächeneinheit (1 qmm), mit σ bezeichnet werden, zum Unterschiede von den normalen Schub- und Druckspannungen s . Ebenso soll, dem Früheren entsprechend, eine Schubkraft positiv heißen, wenn sie die Richtung der vertical aufwärts gedachten

positiven *Y*-Axe hat, und umgekehrt. Die *X*-Axe soll hier wie früher vom Anfangspunkte nach rechts gerichtet positiv genannt werden.

Wie sich aus dem Folgenden ergeben wird, stellen sich nicht nur die zum Gleichgewichte mit *V* erforderlichen verticalen Schubkräfte in den Querschnittsflächen ein, sondern auch in horizontalen sowie in schräg geneigten Schnitten des Balkens treten Schubkräfte auf, so daß man in irgend welchem Punkte im Innern eines Balkens Schubspannungen nach allen möglichen Richtungen parallel mit der Belastungsebene des Balkens anzunehmen hat. Senkrecht zu dieser Belastungsebene kommen keinerlei Spannungen vor, wenn, wie hier immer stillschweigend geschehen soll, in diese Belastungsebene

Fig. 187.



Schwerpunktschubspannungen der Querschnitte hineinfallen. Es sollen im Folgenden speciell die verticalen Schubspannungen mit σ_v bezeichnet werden, während der Buchstabe σ_h für die horizontalen, also die mit der geraden Balkenaxe parallelen Schubspannungen gewählt werden mag. Zur Ermittlung der einzelnen Schubspannungen kann folgende Betrachtung dienen.

In dem Querschnitte *AB* eines Balkens, Fig. 187, im Abstände *x* vom Anfangspunkte, für welchen die reducirte Querschnittsfläche durch *abmc* gegeben sein mag, findet, unter *M* das Biegemoment für den Querschnitt *AB* verstanden, in den äußersten Fasern bei *A* und *B* die Spannung

$$s = \frac{M}{W} \dots \dots \dots (1)$$

statt, wenn $W = \frac{T}{e}$ das Widerstandsmoment des Querschnittes ist. Wenn ferner *f* die reducirte Fläche *abm = cdm* zu jeder Seite der neutralen Axe ist, so kann man nach dem vorigen Paragraphen die ganze auf eine Hälfte des Querschnittes zu jeder Seite der neutralen Axe wirkende normale Spannkraft

$$S = fs = \frac{f}{W} M (2)$$

setzen.

Dieselben Gleichungen gelten für den um ∂x entfernten Querschnitt $A_1 B_1$, für welchen f und W dieselben Werthe haben, für welchen jedoch das von x abhängige Moment der biegenden Kräfte durch $M + \partial M$ ausgedrückt ist. Also hat man für diesen Querschnitt $A_1 B_1$:

$$s + \partial s = \frac{M + \partial M}{W} (3)$$

und

$$S + \partial S = f(s + \partial s) = \frac{f}{W} (M + \partial M) . . . (4)$$

Aus (4) und (2) erhält man durch Subtraction den Ueberschuß der auf den Querschnitt $A_1 B_1$ zu jeder Seite der neutralen Aze wirkenden Zug- oder Druckspannung:

$$\partial S = f \partial s = \frac{f}{W} \partial M (5)$$

Dieser Ueberschuß ∂S strebt die obere Hälfte CB_1 des betrachteten unendlich kleinen Balkenstückes von der Länge ∂x auf der neutralen Faser-schicht $C_1 C$ von rechts nach links zu verschieben, und es muß, damit diese Verschiebung nicht eintrete, der untere Balkentheil in der Berührungsfläche CC_1 eine gleiche, von links nach rechts gerichtete Reaction auf den oberen Balkentheil ausüben, d. h. es müssen in CC_1 Schubspannungen erregt werden, welche auf den oberen Balkentheil von C nach C_1 gerichtet sind. Selbstredend gilt die gleiche Betrachtung in Hinsicht auf eine Verschiebung des unteren Balkentheiles, dessen von links nach rechts angestrebte Verschiebung durch eine von dem oberen Balkentheile geäußerte Schubspannung im Sinne von C_1 nach C und im Betrage ∂S verhindert werden muß. Hieraus geht hervor, daß in der horizontalen Fläche CC_1 eine Schubkraft im Betrage ∂S erregt wird. Die Größe dieser Anhaftungsfläche CC_1 ist bei einer Breite des Balkens $= b$ durch $b \partial x$ gegeben, und daher hat man, wenn σ die Spannung in CC_1 pro Flächeneinheit bezeichnet, den ganzen Betrag der Schubkraft gleich $\sigma b \partial x$ zu setzen, woraus

$$\partial S = \sigma b \partial x (6)$$

folgt. Aus (5) und (6) ergibt sich nun einfach

$$\sigma b \partial x = \frac{f}{W} \partial M,$$

und da bekanntlich

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V \text{ und } W = \mu f$$

ist, so erhält man

$$\sigma b = \frac{f}{W} V = \frac{V}{\mu} \dots \dots \dots (7)$$

In dieser Formel bedeutet σb die Schubspannung für eine Längeneinheit in der Richtung der Aze, und man ersieht daraus, daß diese Spannung, also auch die spezifische Schubspannung σ in der neutralen Aze des Balkens proportional mit der verticalen Scheerkraft V , proportional mit der Größe der reducirten Querschnittsfläche f , und umgekehrt proportional mit dem Widerstandsmomente $W = \frac{T}{e}$ des Querschnittes ist.

Beispielsweise hat man für den rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h

$$f = \frac{1}{2} b \frac{h}{2} = \frac{bh}{4} \text{ und } W = \frac{bh^2}{6},$$

daher ist für denselben die Schubkraft in der neutralen Aze pro Längeneinheit des Balkens

$$\sigma b = \frac{f}{W} V = \frac{3}{2} \frac{V}{h}.$$

Es ist leicht ersichtlich, daß die horizontale Schubkraft σ_y in einem Längenschnitte DD_1 , welcher nach der einen oder anderen Seite von der neutralen Aze um $CD = y$ entfernt ist, durch dieselbe Formel (7) ausgedrückt ist, wenn man nur darin unter f den Querschnitt desjenigen Stückes $ghcd$ der reducirten Fläche versteht, welcher auf der einen Seite des betreffenden Längenschnittes gelegen ist. Wenn man nämlich für diesen Längenschnitt dieselbe Betrachtung anstellt, wie hier für den Schnitt CC_1 in der neutralen Aze geschehen, so findet sich, daß der einzige Unterschied darin besteht, daß nunmehr die Spannkraft S des einerseits der Schnittfläche gelegenen Theiles, gleichviel ob DB oder DA , durch $S = s \cdot d e g h$ ausgedrückt ist. Man kann daher den Ausdruck (7) ganz allgemein für die horizontale Schubspannung in irgend welchem Längenschnitte anwenden, wenn man unter f denjenigen Theil der algebraisch gedachten reducirten Querschnittsfläche versteht, welcher einerseits von dem Längenschnitte gelegen ist.

Aus (7) ergibt sich daher, daß die horizontale Schubkraft zu Null wird nicht nur für alle Punkte desjenigen Querschnittes, in welchem $V = 0$, also M ein Maximum ist, sondern auch für die äußersten Punkte aller Querschnitte, weil für dieselben f , in dem gedachten Sinne genommen, verschwindet.

Man erhält ein anschauliches Bild von der Vertheilung der horizontalen Schubkräfte, wenn man in der Figur senkrecht zu bc in allen Punkten

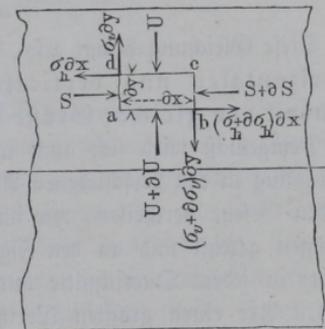
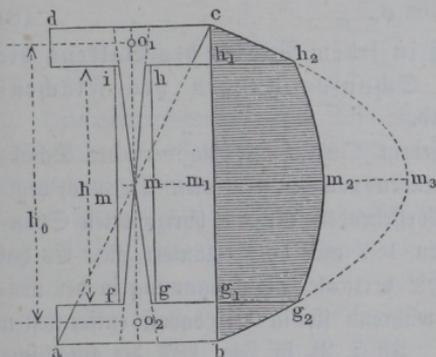
Ordinaten aufgetragen denkt, welche nach einem beliebig gewählten Maßstabe die horizontalen Schubspannungen darstellen, die in der Höhe dieser Punkte auftreten. Dadurch erhält man als Begrenzung der in der Figur schraffirten Fläche eine Curve cm_2b , welche für den rechteckigen Querschnitt eine Parabel mit dem Scheitel in m_2 ist. Hiervon überzeugt man sich leicht dadurch, daß, wenn $m_1 m_2$ die Schubkraft in m und $g_1 h_1$ diejenige in gh darstellt, man nach (7)

$$m_1 m_2 : g_1 h_1 = dcm : dchg,$$

also

$$m_1 m_2 : h_1 h_2 = dcm : ghm = e^2 : y^2$$

hat. Ganz in derselben Weise erkennt man, daß das Diagramm der Schubspannungen für einen I förmigen Querschnitt $abcd$, Fig. 188, sich aus Fig. 188. Fig. 189.



den beiden Parabeln bm_3c und $g_2 m_2 h_2$ zusammensetzt, welche den Rechtecken $abcd$ und bezw. $fghi$ entsprechen. Man ersieht auch, daß der mittlere Parabelbogen $g_2 m_2 h_2$ um so flacher ausfällt, je dünner die Mittelwand gh ist, so daß man bei den Blechträgern mit genügender Genauigkeit die Schubkraft für alle Punkte der Mittelwand gleich dem größten Werthe $m_1 m_2$ in der neutralen Ase annehmen darf.

Denkt man sich, Fig. 189, im Innern eines Balkens an beliebiger Stelle ein unendlich kleines Parallelepipед von der Grundfläche $abcd$ mit der horizontalen Seite dx und der verticalen Höhe dy und von der Länge senkrecht zur Bildebene gleich Eins, so muß dasselbe unter dem Einflusse sämtlicher auf dasselbe wirkenden Kräfte im Gleichgewichte stehen. Diese Kräfte sind zunächst die auf die vier Seitenflächen wirkenden Normalkräfte und die in diesen vier Flächen thätigen horizontalen und verticalen Schubkräfte. Die Normalkräfte S und $S + dS$ auf die Flächen ad und bc heben sich gegenseitig auf, da sie nur um die gegen S verschwindend kleine Größe dS

verschieden sind, und dasselbe gilt für die beiden auf ed und ab wirkenden verticalen Spannungen U und $U + \partial U$.

Bezeichnet man nun mit σ_h die horizontale Schubspannung pro Flächeneinheit der Flächen de , und mit σ_v die verticale spezifische Schubspannung in ad , so sind die totalen Tangentialspannungen in diesen Flächen durch $\sigma_h \partial x$ und bezw. $\sigma_v \partial y$ dargestellt. Die entsprechenden Spannungen in den zusammenstoßenden Flächen ab und bc werden sich dann durch $(\sigma_h + \partial \sigma_h) \partial x$ und $(\sigma_v + \partial \sigma_v) \partial y$ ausdrücken lassen. Diese vier Schubspannungen müssen nun unter sich ebenfalls im Gleichgewichte sein, da das Eigengewicht des Parallelepipeds $\gamma \partial x \partial y$ als unendlich kleine Größe zweiter Ordnung zu vernachlässigen ist. Für den Eckpunkt b als Mittelpunkt der statischen Momente gilt daher die Gleichung

$$\sigma_h \partial x \cdot \partial y = \sigma_v \partial y \cdot \partial x,$$

oder

$$\sigma_h = \sigma_v \dots \dots \dots (8)$$

Diese Gleichung besagt also, daß in jedem Punkte des Balkens die horizontalen und verticalen Schubspannungen pro Flächeneinheit von gleicher Größe sind.

Demgemäß wird sich auch in jedem Querschnitte die verticale Schubspannung in den verschiedenen Abständen von der neutralen Aze nach demselben Gesetze vertheilen, wie im Vorstehenden für die horizontalen Spannungen gezeigt und an den Figuren 187 und 188 erläutert ist. Es hat daher in jedem Querschnitte auch die verticale Schubspannung in der neutralen Aze einen größten Werth, während sie in den davon entferntesten Faserschichten gleich Null ausfällt. Ist z. B. in Fig. 187 die spezifische Schubspannung in der neutralen Aze durch $m_1 m_2$ dargestellt, so ist im Punkte D im Abstände y von der neutralen Aze die verticale Schubspannung ebenso wie die horizontale durch die Ordinate $g_1 h_1$ des Schubkraftdiagramms daselbst gegeben. Ein horizontaler Streifen des Querschnittes an dieser Stelle von der Breite b und Höhe ∂y wird daher eine verticale Kraft äußern von der Größe

$$b \partial y \cdot g_1 h_1 = b z \partial y,$$

wenn mit z die Ordinate $g_1 h_1$ des Schubkraftdiagramms bezeichnet wird. Es ist daraus deutlich, wie bei constanter Breite b die ganze von dem Querschnitte geäußerte verticale Schubkraft

$$\int_{-e}^{+e} b z \partial y$$

durch den Inhalt des Schubkraftdiagramms $b c m_2$ gemessen wird. Diese gesammte verticale Schubkraft des Querschnittes hat nun, wie oben erwähnt

wurde, der Verticalkraft V des Querschnitts das Gleichgewicht zu halten, so daß der Ausdruck folgt:

$$V = \int_{-e}^{+e} b z \partial y (9)$$

Für den rechteckigen Querschnitt z. B. von der Breite b und Höhe $h = 2e$, für welchen, wie oben gezeigt worden, die Begrenzung der Schubkraftordinaten eine Parabel $b m_2 c$ ist, hat man den Inhalt derselben bekanntlich

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \partial y = \frac{2}{3} h \cdot m_1 m_2 = \frac{2}{3} h \sigma_0,$$

folglich erhält man die Schubkraft σ_0 in der neutralen Aye aus (9) durch

$$V = b \frac{2}{3} h \sigma_0 \text{ zu } \sigma_0 = \frac{3}{2h} \frac{V}{b}$$

übereinstimmend mit dem oben aus (7) ermittelten Werthe.

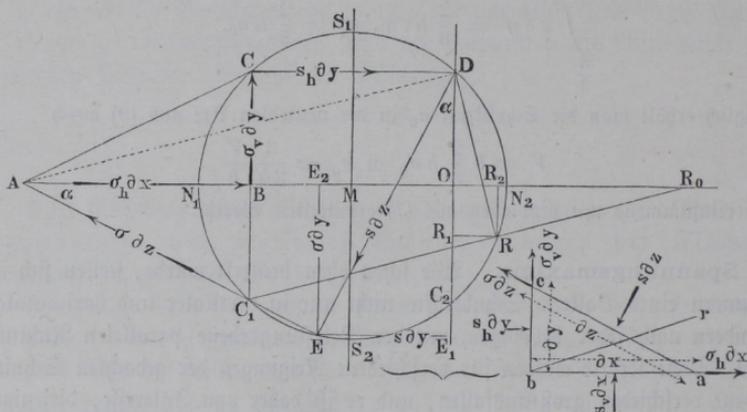
Spannungsmaxima. Wie schon oben bemerkt wurde, stellen sich im §. 49. Innern eines Balkens Schubkräfte nicht nur in verticaler und horizontaler, sondern nach jeder beliebigen, mit der Belastungsebene parallelen Richtung ein. Diese Kräfte werden für verschiedene Neigungen der gedachten Schnittebene verschieden groß ausfallen, und es ist daher von Interesse, diejenigen Richtungen kennen zu lernen, nach welchen die Schubspannungen ihre absolut größten Werthe annehmen. Die Ermittlung dieser Spannungsmaxima ist schon in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 3 auf analytischem Wege vorgenommen, es soll hier der Anschaulichkeit halber die Untersuchung graphisch in der von Culmann*) angegebenen Art angeführt werden.

Es sei abc , Fig. 190 (a. f. S.), der Durchschnitt eines kleinen dreiseitigen Prismas von einer Länge senkrecht zur Zeichnung gleich Eins, dessen Basis $ab = \partial x$ horizontal, und dessen Seite $bc = \partial y$ vertical gerichtet sein mag. Die dritte Seite $ac = \partial z$ soll unter dem beliebigen Winkel α gegen die Horizontale ab geneigt sein. Es handelt sich darum, für diese unter dem willkürlich gewählten Winkel α geneigte Schnittfläche ac die normale Spannung s und die Schubspannung σ zu ermitteln. Die beiden anderen Prismasflächen bc und ab sind gewissen Normalspannungen s_h und s_v und ebenso gewissen Schubspannungen σ_v und σ_h ausgesetzt, von welchen s_h aus dem bekannten Biegemomente M des Balkens in bc und $\sigma_h = \sigma_v$ aus der gleichfalls bekannten Verticalkraft V nach dem Vorstehenden leicht zu ermitteln sind. Die Spannung s_v dagegen ist nicht

*) Culmann, Die graphische Statik.

bekannt; dieselbe hängt von der Art ab, in welcher die verticale Belastung an dem Trägerquerschnitte angreift, und man kann in den gewöhnlichen Fällen eine solche Anordnung voraussetzen, vermöge deren die Spannung s_v auf ab zu Null wird. Wenn diese Annahme*) gemacht wird, so ist die Aufgabe, aus den drei bekannten Kräften $s \partial y$, $\sigma_h \partial x$ und $\sigma_v \partial y$ die Spannungen s und σ , oder die totalen Kräfte $s \partial z$ und $\sigma \partial z$ zu ermitteln, einfach auf die Verzeichnung des betreffenden Kräftepolygons zurückgeführt.

Fig. 190.



Trägt man nämlich in $ABCD$ die drei Kräfte $\sigma_h \partial x$, $\sigma_v \partial y$ und $s_h \partial y$ ihrer Richtung und Größe nach an einander an, so erhält man in der Schlusslinie DA die Resultirende aus den beiden die Fläche ac angreifenden Kräften $\sigma \partial z$ und $s \partial z$, und diese Kräfte selbst, wenn man durch A eine Parallele AE mit ac und durch D eine zu AE senkrechte Gerade zieht. Dann ist nach dem gewählten Kräftemaßstabe

$$DE = s \partial z \text{ und } EA = \sigma \partial z.$$

Projicirt man den Punkt E auf AB und auf die Verticale DO durch D nach E_2 und E_1 , so ist leicht zu erkennen, daß

*) Diese Voraussetzung trifft, wie eine nähere, hier nicht weiter durchzuführende Untersuchung ergibt, dann zu, wenn die Belastung nach demselben Gesetze erfolgt, welches vorstehend für die Vertheilung der verticalen Schubkraft auf die Querschnittsfläche gefunden wurde. Danach würde bei Blechträgern annähernd eine gleichmäßig auf die Mittelwand vertheilte Uebertragung stattfinden müssen, wie sie der wirklichen Ausführung auch meistens entspricht. S. Ritter, Lehrb. der Ingenieurmechanik.

$$EE_2 = \sigma \partial z \cdot \sin \alpha = \sigma \partial y$$

und

$$EE_1 = s \partial z \cdot \sin \alpha = s \partial y$$

ist. Verbindet man jetzt A mit C , so hat man auch $CAB = \alpha$, denn für diesen Winkel ist wegen der Gleichheit von σ_h und σ_v :

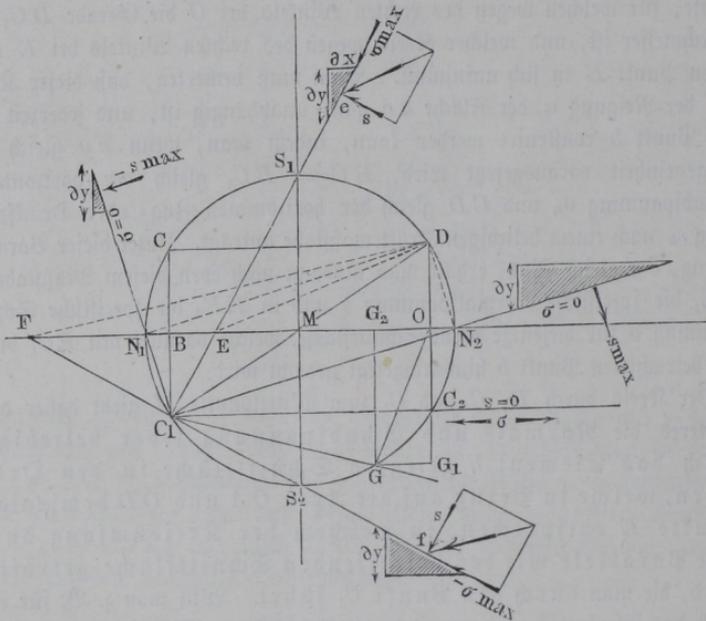
$$\operatorname{tg} CAB = \frac{\sigma_v \partial y}{\sigma_h \partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Verlängert man daher CB bis zum Durchschnitte C_1 mit AE , so ist auch $BC = BC_1$. Die drei Punkte D , C und C_1 liegen daher auf einem Kreise, für welchen wegen des rechten Winkels bei C die Gerade DC_1 ein Durchmesser ist, und welcher Kreis wegen des rechten Winkels bei E auch diesen Punkt E in sich aufnimmt. Man muß bemerken, daß dieser Kreis von der Neigung α der Fläche ac ganz unabhängig ist, und jederzeit für den Punkt b construirt werden kann, indem man, wenn ∂y gleich der Längeneinheit vorausgesetzt wird, $BC = BC_1$ gleich der horizontalen Schubspannung σ_h und CD gleich der horizontalen Zug- oder Druckspannung s_h nach einem beliebigen Kräftemaßstabe anträgt. Unter dieser Voraussetzung, ∂y gleich Eins, erhält man alsdann nach eben diesem Maßstabe in EE_1 die spezifische Normalspannung s und in EE_2 die spezifische Schubspannung σ für diejenige ebene Schnittfläche, welche parallel mit EC_1 durch den betrachteten Punkt b hindurchgelegt gedacht wird.

Der Kreis durch D , C und C_1 zum Mittelpunkte M giebt daher ohne Weiteres die Normal- und Schubspannung jeder beliebigen durch das Element b gelegten Schnittfläche in den Ordinaten, welche in Bezug auf die Axen OA und OD demjenigen Punkte E entsprechen, in welchem der Kreisumfang durch eine Parallele mit der betreffenden Schnittfläche getroffen wird, die man durch den Punkt C_1 führt. Will man z. B. für eine durch das Element bc , oder was damit gleichbedeutend ist, durch den Punkt b gelegte Schnittfläche br die Spannungen finden, so legt man durch C_1 eine mit br parallele Gerade, welche den Kreis in R schneidet, und erhält in den Ordinaten $RR_1 = s_r$ und $RR_2 = \sigma_r$ die spezifischen Spannungen für die Schnittfläche br . Man erkennt auch, daß die Normalspannung RR_1 dieser Schnittfläche und diejenige EE_1 der Fläche ac auf entgegengesetzten Seiten der Axe DO gelegen sind, wodurch ein entgegengesetzter Sinn der Spannungen angedeutet ist. Während nämlich die Normalspannung auf die Fläche ac eine in das Prisma abc hinein gerichtete, durch DE angezeigte Pressung ist, wird die Fläche br durch eine von dem Prisma ber fort gerichtete, durch DR angegebene Zugspannung angegriffen. In welcher Richtung eine Spannung überhaupt wirkt, davon kann man in

jedem Falle sich Rechenschaft geben, wenn man aus dem Kräftepolygone die Resultirende der beiden Spannkkräfte aufsucht. Diese Resultirende ist z. B. für die Fläche ac der Richtung und Größe nach durch DA gegeben, daher müssen die Einwirkungen, welche auf die Fläche ac von der äußeren Umgebung ausgeübt werden, in dem durch die Pfeile angedeuteten Sinne in den Richtungen von D nach E und von E nach A erfolgen. Ebenso erhält man für die Fläche br , welche als Begrenzung des Prismas ber zu denken ist, die auf dieselbe von den sie begrenzenden Körpertheilchen aus-

Fig. 191.



geübte Einwirkung durch DR_0 dargestellt, d. h. die beiden Spannungen wirken in der Richtung von D nach R und von R nach R_0 u. s. f.

Man erkennt auch aus der Figur, daß den zwei Endpunkten N_1 und N_2 des horizontalen Durchmessers bezw. die größte und kleinste horizontale Ordinate ON_1 und ON_2 zugehören, woraus man schließt, daß der Richtung der Fläche C_1N_1 das Maximum der normalen Spannung $s_{max} = ON_1$ und der Fläche C_1N_2 das Minimum $s_{min} = ON_2$ zukommt. Ebenso gehören den Flächen C_1S_1 und C_1S_2 die absolut größten Schubspannungen $\sigma_{max} = \sigma_{min} = MS_1 = MS_2$ an. In Fig. 191 sind diese vier dem betrachteten Punkte im Balken zugehörigen charakteristischen

Flächen $C_1 N_1$, $C_1 N_2$, $C_1 S_1$ und $C_1 S_2$ besonders dargestellt. Man ersieht hieraus zunächst, da der Radius des Kreises durch

$$MN_1 = MC = \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

ausgedrückt ist, daß der Fläche $C_1 N_1$ eine Normalspannung (negative)

$$-s_{max} = ON_1 = -N_1O = -\frac{s}{2} - \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \dots \dots (1)$$

und der Fläche $C_1 N_2$ eine solche von

$$+s_{max} = ON_2 = MN_2 - MO = -\frac{s}{2} + \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \dots (2)$$

zukommt, während für beide Flächen die Schubspannung gleich Null ist. Da die beiden Geraden $C_1 N_1$ und $C_1 N_2$ auf einander senkrecht stehen, so giebt jede derselben die Richtung der gesammten Druckkraft für die der anderen entsprechende Schnittfläche an.

Ebenso hat man die absolut größten den Flächen $C_1 S_1$ und $C_1 S_2$ entsprechenden Schubkräfte durch die Längen MS_1 und MS_2 dargestellt, so daß man allgemein schreiben kann:

$$\sigma_{max} = \pm \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \dots \dots \dots (3)$$

Die Richtungen dieser Schubkräfte ergeben sich nach dem Obigen mit Rücksicht darauf, daß die gesammte Spannung für die Schnittfläche $C_1 S_1$ durch die Richtung von D nach E und für die Schnittfläche $C_1 S_2$ durch die Richtung von D nach F dargestellt ist, woraus die in der Figur bei e und f durch Pfeile angedeuteten Spannungsrichtungen unzweifelhaft sich ergeben. Die Figur zeigt übrigens, daß die Flächen für die größten Schubspannungen $C_1 S_1$ und $C_1 S_2$ ebenfalls auf einander senkrecht stehen, und die rechten Winkel halbiren, welche von den Flächen $C_1 N_1$ und $C_1 N_2$ der größten positiven und negativen Normalspannungen gebildet werden.

Setzt man für die Fläche ac eine verticale Lage voraus, so erhält man selbstredend in CD die Spannung s und in CB die Schubkraft σ , während für eine horizontale Schnittfläche die Spannungen durch die Ordinaten des Punktes C_2 , also $s = 0$ und $\sigma = OC_2$ gefunden werden. Diese letztere Spannung ist in der Figur durch einen Doppelpfeil $\leftarrow \sigma \rightarrow$ bezeichnet, um anzudeuten, daß die Spannungen in den beiden Balkentheilen, welche sich in dieser horizontalen Fläche berühren, nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, wie dies auch die Figur ergiebt, denn bei der geringsten Nei-

gung der Horizontalen $C_1 C_2$ in dem einen oder anderen Sinne rückt der Durchschnitt dieser Geraden mit der Ase $N_1 N_2$ auf der linken oder rechten Seite aus der Unendlichkeit in endliche Entfernung heran, dadurch andeutend, daß die resultirende Wirkung auf diese Schnittfläche von D aus nach links oder nach rechts hin gerichtet ist.

Eine zweite Schnittfläche, für welche ebenfalls die Normalspannung s zu Null wird, erhält man in der Richtung des Durchmessers $C_1 D$, und es bilden daher, wie schon bemerkt, die Flächen $C_1 D$ und $C_1 C_2$ die Grenzen für die positiven und negativen Werthe von s , indem für jede in den Winkel $DC_1 C_2$ fallende Richtung s eine Zugspannung, für jede in den Nebenwinkel $DC_1 F$ fallende s eine Druckspannung bedeutet.

Wenn man für irgend eine Fläche, z. B. $C_1 G$, deren normale Spannung $s = G G_1$ mit ihrer Schubspannung $\sigma = G G_2$ zu einer Mittelkraft zusammensetzt, so erhält man in dem von O aus nach dem Schnittpunkte G gezogenen Radiusvector OG die totale Anstrengung t der Fläche pro Flächeneinheit. Es ist nun aus der Figur ersichtlich, daß dieser Radius seinen größten Werth in ON_1 übereinstimmend mit s_{max} erreicht, man wird daher bei der Bestimmung der Querschnittsdimensionen diese größte Normalspannung zu Grunde zu legen haben, welche nach (1) und (2) für jeden Punkt allgemein durch

$$s_{max} = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \dots \dots \dots (4)$$

ausgedrückt werden kann. Hierin bedeutet s die Zug- oder Druckspannung und σ die Schubspannung des betreffenden Punktes, welche beide jederzeit leicht aus M und V ermittelt werden können. Von den beiden durch (4) gelieferten Werthen hat man den absolut größeren der Querschnittsbestimmung zu Grunde zu legen, indem man diesen Werth gleich dem für das Material höchstens zulässigen Spannungscoefficienten setzt.

Es kann bemerkt werden, daß dieser größte Werth der Spannung normal zu der Fläche gerichtet ist, da die Schubspannungen für die Richtungen CN_1 und CN_2 gleich Null sind.

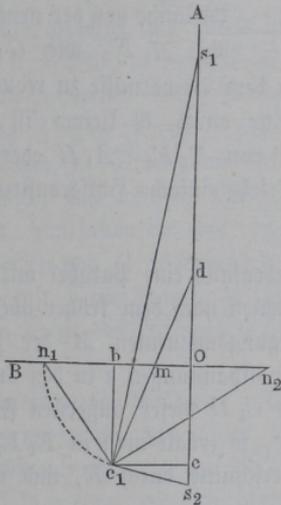
Man erhält von der Art, wie die Spannungen im Innern eines Balkens wirken, eine anschauliche Darstellung durch die Verzeichnung der sogenannten Spannungstrajectorien, das sind Linien, welche die Richtungen derjenigen Flächen in jedem Punkte angeben, die den größten Werthen der Spannungen ausgesetzt sind. Denkt man sich, um eine solche durch irgend einen Punkt a in dem Querschnitte f eines Balkens gehende Linie zu zeichnen, für diesen Punkt die Richtung der Fläche, in welcher s ein Maximum wird, nach Anweisung der Fig. 191 gefunden, und bestimmt man in derselben Art für denjenigen Punkt a_1 , in welchem die gefundene Richtung

einen benachbarten Querschnitt f_1 trifft, wiederum die Richtung der Fläche für s_{max} , und fährt so fort, so erhält man ein Polygon $aa_1 \dots$, welches bei sehr geringen Abständen der Querschnittsflächen f_1 in eine Curve, die gesuchte Spannungstrajectorie für s_{max} übergeht. In den zur Richtung der Fläche für s_{max} Senkrechten ist auch nach dem Vorigen die Richtung der Flächen für s_{min} gefunden, während die Winkelhalbirenden zugleich die Richtungen der Schubkraftmaxima ergeben.

Zur Bestimmung dieser Richtungen für irgend einen Punkt ist es nach Fig. 191 erforderlich, die in diesem Punkte zur Wirkung kommende horizontale Zug- oder Druckspannung s und die Schubkraft σ zu kennen, in welchem Falle die folgende einfache Construction zum Ziele führt, deren Richtigkeit aus dem Vorhergehenden sich leicht ergibt.

Man trägt auf einem rechtwinkligen Axenkreuze AOB , Fig. 192, auf der verticalen Axe OA nach beiden Seiten $Od = Oc = \sigma$, und horizontal $Ob = s$ an, und verbindet d

Fig. 192.



zonal $Ob = s$ an, und verbindet d mit dem durch die Ordinaten Ob und Oc gegebenen Punkte c_1 , um im Durchschnittspunkte m den Mittelpunkt des in Betracht kommenden Kreises vom Halbmesser $m c_1$ zu finden. Es ist nicht nöthig, diesen Kreis selbst zu zeichnen, sondern es genügt, $m n_1 = m c_1$ zu machen, um in $c_1 n_1$ die Flächenneigung für $-s_{max}$, und in der dazu Senkrechten $c_1 n_2$ diejenige für $+s_{max}$ sowie in den Winkelhalbirenden $c_1 s_1$ und $c_1 s_2$ die Richtungen der größten Schubspannungen σ_{max} zu erhalten. Hierbei ist es nicht nöthig, die Spannungen s und σ für jeden Punkt immer von Neuem zu berechnen, vielmehr genügt es, diese

Größen nur für einen Punkt zu bestimmen, indem man sich dann mit Vortheil für die übrigen Punkte des Diagramms für die Momente M und die verticalen Scheerkräfte V bedienen kann, wie an einem Beispiele hier gezeigt werden mag.

Es sei AB , Fig. 193 (a. f. S.), ein bei A und B frei aufliegender, gleichmäßig über seine Länge l mit dem Gewichte $q l$ belasteter Balken von rechteckigem Querschnitte mit der Höhe h und Breite b , so findet man die größte Zug- oder Druckspannung in der Mitte CC_1 zu

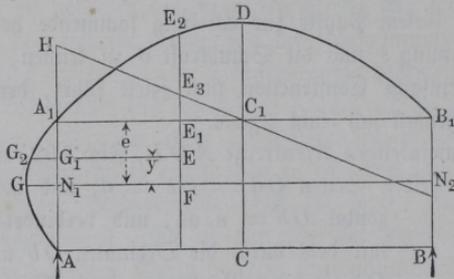
$$s = \frac{M}{W} = \frac{1/8 q l^2}{1/6 b h^2} = 3/4 \frac{q l^2}{b h^2},$$

und die Schubspannung an den Enden bei N_1 oder N_2 nach §. 48 (7) zu

$$\sigma = \frac{f}{bW} V = \frac{1/4 bh}{b^{1/6} b h^2} q \frac{l}{2} = 3/4 \frac{q l}{bh}.$$

Denkt man sich nun nach einem beliebigen Kräftemaßstabe diese Größen $s = C_1 D$ und $\sigma = N_1 G$ aufgetragen, und construirt durch A , G und

Fig. 193.



A_1 einen Parabelbogen mit dem Scheitel in G , so ist nach dem vorigen Paragraphen die Schubspannung in irgend einem Punkte G_1 des Endquerschnittes durch $G_1 G_2$ gegeben. Will man daher für irgend einen Punkt wie E in demselben Abstände von der neutralen Achse $N_1 N_2$ wie G_1 die

Schubkraft finden, so hat man nur $G_1 G_2$ in dem Verhältnisse zu reduciren, in welchem die Verticalkraft im Querschnitte durch E kleiner ist, als diejenige in A , d. h. also im Verhältnisse von $E_1 E_3 : A_1 H$ oder von $C_1 E_1 : C_1 A_1$, welche Reduction durch eine sehr einfache Hilfsconstruction jederzeit leicht ausführbar ist.

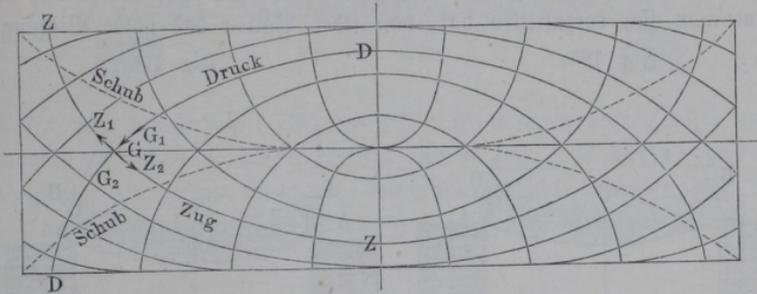
Denkt man ferner durch A_1 , D und B_1 ebenfalls eine Parabel mit dem Scheitel in D gezeichnet, so sind deren Ordinaten nach dem früher über die Momentendiagramme Angeführten den Biegemomenten M der zugehörigen Querschnitte, folglich auch den Normalspannungen s in den äußersten Fasern daselbst proportional. Da nun $C_1 D$ dieser äußersten Faserspannung in der Mitte gleich gemacht wurde, so erhält man in $E_1 E_2$ die Spannung der äußersten Faser in dem Querschnitte durch E , und in E selbst daher eine in dem Verhältnisse $\frac{FE}{FE_1} = \frac{y}{e}$ verringerte Zugspannung.

In dieser Weise sind in Fig. 194 die Trajectorien*) für einen auf zwei Stützen ruhenden, gleichmäßig belasteten Balken von rechteckigem Querschnitte gezeichnet worden. Die beiden Curvensysteme für $\pm s_{max}$ schneiden sich nach dem Vorstehenden überall unter rechten Winkeln. Da nun in den Flächen für s_{max} nach dem Obigen die Schubkraft gleich Null ist, so folgt,

*) Unter den Spannungstrajectorien werden, wie bereits bemerkt, die Linien verstanden, welche für jeden ihrer Punkte die Richtung der größten Druck-, Zug- oder Schubspannung durch ihre Tangente daselbst angeben.

daß in jeder Curve des einen Systems, wie z. B. derjenigen DGD , in irgend einem Elemente G_1G_2 nur eine normal zu diesem Elemente wirkende Spannung thätig sein kann, d. h. eine Spannung, welche nach der Tangente Z_1Z_2 der durch diesen Punkt G hindurchgehenden Curve ZGZ des anderen

Fig. 194.



Systems gerichtet ist. Man hat sich daher diese beiden Curvensysteme als solche zu denken, in welchen lediglich Spannungen nach der Richtung dieser Curven auftreten, etwa wie bei Seilcurven, wenn, wie in Z diese Spannungen Zugspannungen sind, oder wie bei Gewölben, wenn, wie in der Curve D Druckspannungen auftreten. Beispielsweise mag man sich vorstellen, daß in dem Punkte G drei Kräfte einander das Gleichgewicht halten, von denen die eine, in der Richtung von G_1 nach G_2 wirkende, in den beiden von G ausgehenden Seilstücken GZ_1 und GZ_2 Zugspannungen hervorruft, deren Resultante zusammen mit der in der Richtung G_1G_2 wirkenden Kraft das Element G comprimiriert.

Verzahnte Balken. Bei den gewöhnlichen hölzernen und eisernen Trägern, welche aus einem einzigen Stücke bestehen, ist der Einfluß der Schubspannungen σ im Vergleiche mit den Biegespannungen in der Regel so gering, daß man die ersteren unbeachtet lassen darf. Dies ist nicht mehr zulässig, sobald die Träger aus mehreren mit einander verbundenen Theilen zusammengesetzt sind, wie dies bei manchen Holzconstruktionen, z. B. den verzahnten Trägern, und bei den aus Blechplatten und Winkelisen bestehenden Blechträgern der Fall ist. Bei den letzteren erfordert auch die Feststellung der immer nur geringen Dicke der Mittelwand eine Untersuchung, um die Schubspannung in dieser Mittelwand nicht übermäßig groß werden zu lassen.

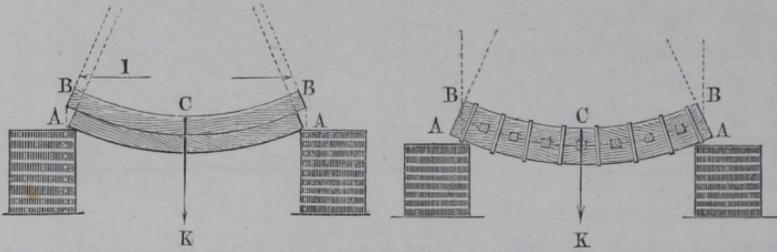
Hölzerne Balken, welche für eine gegebene Tragweite und Belastung nicht in genügender Stärke aus einem Stamme geschnitten werden können, stellt man zuweilen wohl aus mehreren übereinander gelegten Balken von recht-

eckigen Querschnitte her, welche mit einander so zu vereinigen sind, daß die ganze Verbindung gegen die biegenden Momente wie ein einziger aus einem Stücke bestehender Träger sich verhält.

Wenn man zwei Balken *A* und *B*, Fig. 195, von rechteckigem Querschnitte einfach über einander legt und durch eine Kraft *K* belastet, so nimmt jeder Balken eine Biegung unabhängig von derjenigen des anderen an, und indem man sich vorzustellen hat, daß jeder Balken das halbe Biegungs-

Fig. 195.

Fig. 196.



moment aufnimmt, d. h. die Hälfte der Last *K* trägt, bestimmen sich die Breite *b* und Höhe *h* für den Querschnitt jedes der beiden Balken durch

$$\frac{1}{2} M = \frac{1}{2} \frac{Kl}{4} = s \frac{bh^2}{6},$$

oder

$$K = \frac{4}{3} s bh^2 \dots \dots \dots (1)$$

Denkt man sich jedoch die beiden Balken so mit einander vereinigt, daß eine Verschiebung des einen gegen den anderen ebensowohl wie eine Trennung der Balken von einander ausgeschlossen ist, so tritt die Biegung nach Fig. 196 wie diejenige eines einfachen Balkens von der Breite *b* und Höhe *2h* des Querschnittes ein, so daß jetzt die Bedingung

$$M = \frac{Kl}{4} = s \frac{b(2h)^2}{6},$$

oder

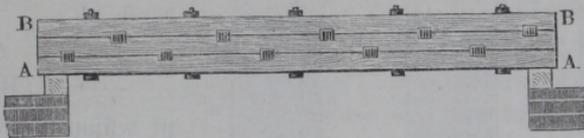
$$K = \frac{8}{3} s bh^2 \dots \dots \dots (2)$$

gilt. Der Balken in Fig. 196 hat daher bei gleichen Dimensionen die doppelte Tragfähigkeit von derjenigen der einfach über einander gelegten Balken in Fig. 195. Ebenso findet sich, daß ein aus drei, vier oder allgemein *n* Einzelbalken vereinigtcr Träger, Fig. 197, die drei, vier oder allgemein *n* fache Tragfähigkeit der einfach über einander liegenden Balken von gleichen Dimensionen besitzt.

Um dieses Resultat zu erzielen, muß die Art der Vereinigung zunächst eine Verschiebung der einzelnen Balken auf einander verhindern, was man

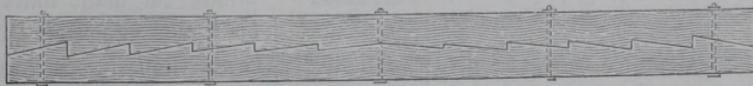
entweder durch zwischen die Balken eingeschobene Keile oder Dübel (Fig. 196 und 197) erreicht, verdübelte Träger, oder dadurch, daß man die

Fig. 197.



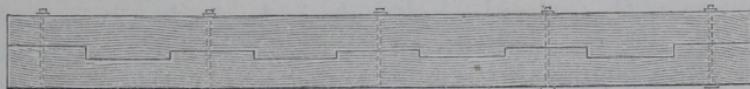
Balken nach den Figuren 198 und 199 mit schrägen oder geraden gegen einander passenden Zähnen versehen, welche sich einer Verschiebung entgegensetzen. Außerdem pflegt man durch übergeschobene Bänder, Fig. 196, oder durchgezogene Schraubenbolzen, Fig. 197, eine Trennung der Balken

Fig. 198.



zu verhindern, welche sich deshalb einstellen würde, weil bei gleicher Gestalt der elastischen Linien in den Mittellinien beider Balken die unterste Faserschicht des oberen Balkens größere Krümmungshalbmesser annimmt, als die oberste Faserschicht des unteren Balkens. Durch die Einschnitte für die Dübel

Fig. 199.



und Zähne sowie durch die Bolzenlöcher werden natürlich die Balken entsprechend geschwächt, wodurch der Gewinn an Tragfähigkeit wieder herabgezogen wird und worauf bei der Berechnung gerücksichtigt werden muß. Auch wirft man diesen Balken vor, daß das Holz in den Einschnitten in Folge von Feuchtigkeit einer schnellen Fäulniß ausgesetzt ist, wodurch die Widerstandsfähigkeit der Zähne gegen Verschiebung bedenklich beeinträchtigt wird. Aus diesem Grunde und wegen der heutzutage wohlfeilen Herstellung eiserner Bauconstructions wendet man verzahnte und verdübelte Träger nur noch selten und nur etwa da an, wo durch die besonderen Verhältnisse die Verwendung von Holz bedingt ist. Bei eisernen Trägern verwendet man Verzahnungen niemals und Dübel oder Keile nur selten, indem man sich zur Verbindung bei Schmiedeeisen fast ausschließlich der Nieten, bei Gußeisen der Schraubenbolzen bedient.

Die zwischen zwei auf einander liegenden Balken angebrachten Zähne müssen der an der Vereinigungsstelle auftretenden horizontalen Schubkraft widerstehen, welche letztere nach §. 48, Gleichung (7) durch

$$\sigma = \frac{1}{b} \frac{f}{W} V$$

zu bestimmen ist. Hierin bedeutet f den einerseits der Berührungsfläche gelegenen Theil der reducirten Querschnittsfläche, deren Widerstandsmoment mit W bezeichnet ist. Demgemäß hat man, unter b die Breite und h die Höhe

des Querschnittes von jedem einzelnen Balken verstanden, den Werth von $\frac{f}{W}$ bei einem:

a) zweifachen Balken, Fig. 200,

$$\frac{f}{W} = \frac{\frac{1}{2} b h}{\frac{1}{6} b (2h)^2} = \frac{3}{4h} = \frac{3}{2H};$$

b) dreifachen Balken, Fig. 201,

$$\frac{f}{W} = \frac{(1 - \frac{1}{9}) \frac{1}{2} b \cdot \frac{3}{2} h}{\frac{1}{6} b (3h)^2} = \frac{4}{9h} = \frac{4}{3H};$$

c) vierfachen Balken, Fig. 202, in der Fuge mm :

$$\frac{f}{W} = \frac{bh}{\frac{16}{6} b h^2} = \frac{3}{8h} = \frac{3}{2H'}$$

und in der Fuge nn :

$$\frac{f}{W} = \frac{\frac{3}{4} bh}{\frac{16}{6} b h^2} = \frac{9}{32h} = \frac{9}{8H}.$$

Der durch obige Formel $\sigma = \frac{1}{b} \frac{f}{W} V$ bestimmten Schubspannung muß das Holz durch seine Scheerfestigkeit in allen Punkten widerstehen können, und man hat selbstredend bei dieser Untersuchung diejenigen Stellen ins Auge zu fassen, für welche V ein Maximum ist, also die Endpunkte des auf zwei Stützen aufstiegender Balkens. Dieser Schubkraft wird das Holz bei den gewöhnlichen Ausführungen meistens widerstehen können. Es mag hierbei bemerkt werden, daß die Schubspannungen um so größer ausfallen

Fig. 200.

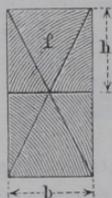


Fig. 201.

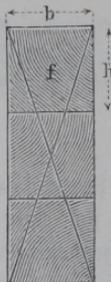
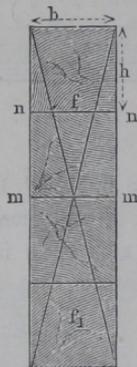
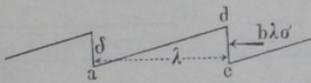


Fig. 202.



müssen, je größer die Verticalkraft V , d. h. je größer die Belastung K und je kleiner die Länge l des Balkens ist, über welche sich doch die Schubkraft vertheilt. Die Zähne müssen aber auch eine bestimmte Tiefe $cd = \delta$, Fig. 203, erhalten, so daß der spezifische Druck auf die verticale Stoßfläche

Fig. 203.



cd das für die Druckfestigkeit zulässige Maß sa nicht übersteigt. Bezeichnet $\lambda = ac$ die Länge eines Zahnes, so ist die von dem letzteren aufzunehmende Schubkraft durch $\lambda b\sigma$ ausge-

drückt, und da die diesen Druck aufnehmende Fläche cd die Größe δb hat, so erhält man die auf die letztere entfallende Druckkraft pro Flächeneinheit durch

$$\lambda b\sigma = \delta b s \text{ zu } s = \frac{\lambda}{\delta} \sigma = n \sigma,$$

wenn das Verhältniß $\frac{\lambda}{\delta}$ der Länge zur Höhe eines Zahns durch n ausgedrückt wird. In der Regel wird dieses Verhältniß zwischen 5 und 10 angenommen.

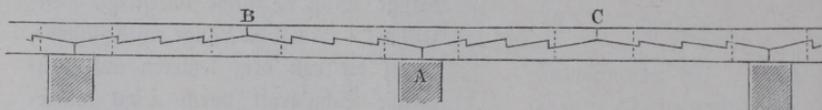
Da die Hölzer durch die Zähne um so mehr geschwächt werden, je größer deren Tiefe δ ist, so erscheint es zweckmäßig, den Zähnen nur die durch die Größe des Schubes bedingte, also an verschiedenen Stellen wegen der Veränderlichkeit der Schubkraft eine verschieden große Höhe zu geben. Insbesondere wird es sich empfehlen, in der Mitte zwischen den Stützen, wo das Moment M ein Maximum und die Verticalkraft $V = 0$ ist, den Zähnen nur eine geringe Höhe δ zu geben, und diese Höhe nach den Enden hin dem Wachstum von V entsprechend zu vergrößern. Liegt der Balken an diesen Enden frei auf Stützen, so ist die Verschwächung durch hohe Zähne an diesen Stellen nicht bedenklich, da das Biegemoment daselbst bis zu Null abnimmt. Wenn jedoch der Träger an den Enden eingemauert ist, oder wenn er als continuirlicher Balken über die Stützen hinwegreicht, so hat man an diesen Stellen mit Rücksicht auf die daselbst auftretenden Biegemomente eine beträchtliche Verschwächung durch tiefe Zähne möglichst zu vermeiden.

Bei schrägen Zähnen ist natürlich deren Richtung derjenigen der wirkenden Schubkraft entsprechend anzuordnen, also sind von dem Querschnitte des Maximalmomentes aus, wo die Schubkraft Null ist, nach beiden Seiten entgegengesetzte Richtungen anzunehmen, wie in Fig. 198. Wenn diese Stelle des Maximalmomentes ihren Platz ändert, wie dies in §. 36 für mobile Belastungen gezeigt worden ist, so werden gerade Zähne nach Fig. 199 den schrägen vorzuziehen sein, da die ersteren nach beiden Seiten wirksam sind.

Bei langen verzahnten Trägern, besonders bei continuirlichen über mehrere Stützen wegreichenden, wird man oft genöthigt sein, jeden der einzelnen Balken

aus mehreren Hölzern darzustellen; dabei wird man die Stoßfugen möglichst an solchen Stellen anzuordnen haben, wo das zu stoßende Stück einer Pressung ausgesetzt ist, also z. B. in Fig. 204 das untere Holz über der Zwischenstütze *A*, das obere in den Mitten *B* und *C* der Oeffnungen.

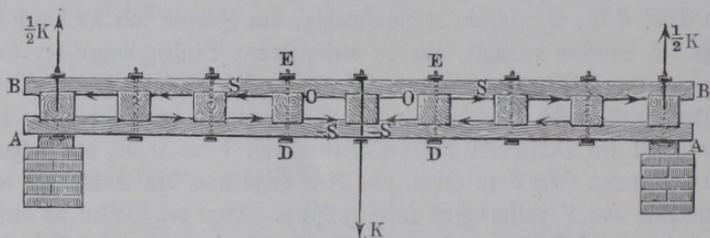
Fig. 204.



Jedenfalls wird man bei einer größeren Anzahl von mit einander zu verbindenden Hölzern niemals zwei derselben in demselben Querschnitte, sondern immer in gehöriger Abwechslung zusammenstoßen und für die Tragfähigkeit des aus n einfachen Balken bestehenden Trägers nur $n - 1$ Balken in Rechnung bringen.

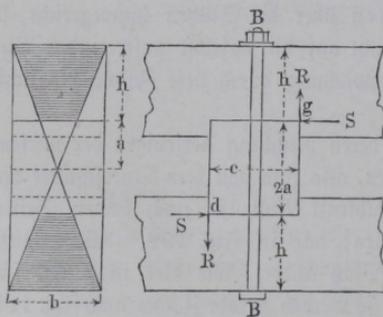
In ähnlicher Art, wie die verzahnten und verdübelten Balken sind auch die nach Fig. 205 aus zwei Längshölzern und zwischengelegten Holzklößen *O*

Fig. 205.



durch Schrauben *ED* zusammengebolzten Träger zu beurtheilen, wobei die Holzklöße *O* die Schubkraft aufzunehmen haben und gewissermaßen als Dübel anzusehen sind.

Fig. 206.



Bezeichnet hier wieder, Fig. 206, b die Breite und h die Höhe eines der Längshölzer an der durch einen Klotz verschwächten Stelle und $2a$ die Höhe dieses Klotzes, so hat man hier die halbe reducirte Querschnittsfläche nach der Figur zu

$$f = \frac{b}{2} (a + h) - \frac{b}{2} \frac{a}{a + h} a = \frac{bh}{2} \frac{2a + h}{a + h}$$

und das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{12} b \frac{8(a+h)^3 - 8a^3}{a+h} = \frac{2}{3} b \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{a+h},$$

woraus die Schubspannung pro Längeneinheit

$$\sigma b = \frac{f}{W} V = \frac{3h}{4} \frac{2a+h}{3a^2h + 3ah^2 + h^3} V$$

folgt. Ist λ die Entfernung zweier Klöße und σ die in der Mitte eines Klotzes wirkende spezifische Schubkraft, so ist der Klotz einem Schube jedes der Längshölzer von der Größe

$$S = \lambda b \sigma$$

ausgesetzt. Diese beiden nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte S erzeugen in den Ecken d und g zwei verticale Reactionen R von solcher Größe, daß, unter c die Länge eines Klotzes verstanden,

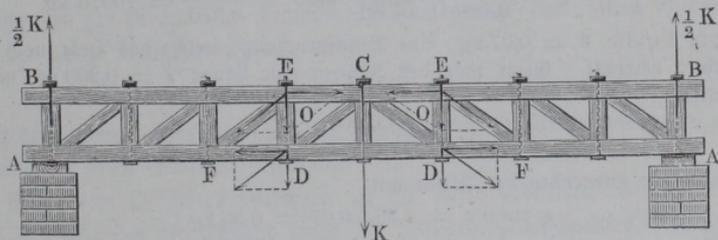
$$Rc = Sa$$

ist, und daher müssen die Schraubenbolzen dem Zuge

$$R = S \frac{a}{c}$$

durch ihre absolute Festigkeit widerstehen.

Um diesem Bestreben zum Drehen der Klöße oder Bolzen kräftig entgegen zu wirken, ordnet man wohl nach Fig. 207 zwischen den Längsbalken



noch Streben CD und EF an, und setzt auch wohl Kreuz- oder Gegenstreben ein, so daß der Zwischenraum zwischen je zwei Bolzen durch ein sogenanntes Andreaskreuz ausgefüllt ist. Derartige Constructionen sind wie die Fachwerke zu beurtheilen, über welche weiter unten das Nähere angegeben ist.

Beispiel. Ein verzahnter Balken von 6 m freier Länge dient als Unterzug unter den Balken einer Etage, durch welche eine gleichmäßig verteilte Last von 1200 kg auf jeden laufenden Meter der Trägerlänge übertragen wird. Wie stark müssen die beiden, den Träger bildenden Hölzer werden, wenn denselben eine Breite von 0,20 m gegeben wird?

Das größte Biegemoment stellt sich hier in der Mitte zu

$$M = q \frac{l^2}{8} = 1200 \frac{36}{8} = 5400 \text{ mkg.}$$

Nimmt man an, daß die Bolzen 20 mm stark sind, also nur eine wirkliche Breite von $200 - 20 = 180$ mm verbleibt, und setzt man voraus, daß in der Mitte des Balkens eine Verschwächung durch Zähne nicht stattfindet, so erhält man die Höhe $2h$ des verzahnten Trägers durch

$$M = s W = s \frac{1}{6} 0,180 (2h)^2,$$

woraus mit $s = 1$ kg pro Quadratmeter

$$2h = \sqrt{\frac{M}{s \cdot 0,03}} = \sqrt{\frac{5400}{1 \cdot 1000000 \cdot 0,03}} = 0,424 \text{ m}$$

folgt. Giebt man daher jedem der beiden Balken eine Höhe von 0,212 m und den Zähnen eine Tiefe $\delta = 0,024$ m, so hat man für die Träger an den Enden das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{12} 0,180 \frac{0,424^3 - 0,024^3}{0,212} = 0,005391$$

und die reducirte Querschnittsfläche jeder Querschnittshälfte

$$f = \frac{1}{2} \cdot 0,180 \left(0,212 - \frac{0,012}{0,212} 0,012 \right) = 0,09 \cdot 0,211 = 0,019.$$

Da ferner für die Enden des Trägers

$$V = q \frac{l}{2} = 1200 \cdot 3 = 3600 \text{ kg}$$

ist, so erhält man die Schubspannung daselbst pro Quadratmeter zu

$$\sigma = \frac{1}{b} \frac{f}{W} Q = \frac{1}{0,180} \frac{0,019}{0,005391} 3600 = \frac{68400}{0,970} = 70516 \text{ kg}$$

oder pro 1 qmm $\sigma = 0,07$ kg, eine Beanspruchung, welche das Holz noch mit Sicherheit verträgt. Giebt man den Zähnen eine Länge $\lambda = 0,200$ m, macht man also

$$n = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{0,200}{0,024} = 8,33,$$

so werden die Hirnenden der Zähne mit

$$s = n \sigma = 8,33 \cdot 0,07 = 0,56 \text{ kg}$$

gedrückt.

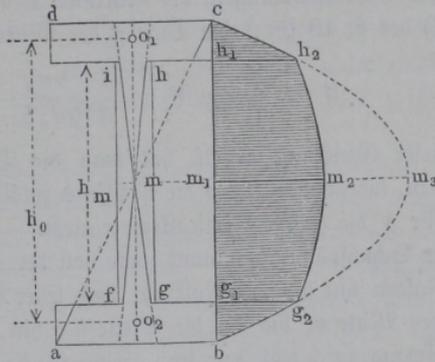
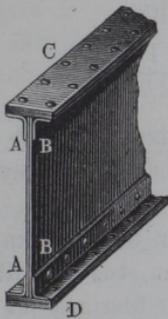
§. 51. **Blecbalken.** Da bei allen der Biegung unterworfenen Balken das Material um so vorteilhafter ausgenutzt wird, in je größerer Entfernung von der neutralen Axe dasselbe angebracht ist, so ist man bei allen größeren Trägern, wie sie für Brücken und Ueberdachungen ausgeführt werden, dazu übergegangen, das den Zug bezw. Druck vornehmlich aufnehmende Material in zwei zu beiden Seiten der neutralen Axe angeordneten Längsbändern oder sogenannten Gurtungen (Streckbäumen) unterzubringen. Diese Gurtungen, welche gewissermaßen den Flanschen der I förmigen Träger entsprechen, sind durch zwischen denselben anzubringende Füllungslieder

derart mit einander in Verbindung zu bringen, daß das ganze System sich wie ein einziger Balken gegen die Biegung verhält, und jede Gurtung dadurch verhindert ist, sich selbständig wie ein einfacher Balken durchzubiegen.

Das einfachste und zuerst hierzu angewandte Füllungs- oder Zwischen- glied besteht in einer verticalen Blechwand *AB*, Fig. 208, welche aus Eisenblechtafeln von 6 bis 25 mm Stärke zusammengesetzt und oben und unten mittelst Winkleisen mit den aus gewalzten Eisenplatten bestehenden

Fig. 208.

Fig. 209.



Gurtungen *C* und *D* vernietet ist. Bezeichnet man mit h_m die Höhe und d die Dicke dieser mittleren Blechwand, und mit b die Breite und d_g die Dicke des als Rechteck zu denkenden Querschnittes einer jeden Gurtung, so ist der ganze Trägerquerschnitt durch

$$F = h_m d + 2 b d_g = F_m + 2 F_g \dots \dots \dots (1)$$

gegeben, wenn man mit F_m den Querschnitt der Mittelwand und mit F_g den einer jeden Gurtung bezeichnet.

Nach dem in §. 47 Gesagten ist die halbe reducirte Querschnittsfläche $f_m = m h i$ der Mittelwand eines I förmigen Querschnittes, Fig. 209, bei geringer Dicke der Mittelwand gegen diejenige $f_g = d c h i$ einer Gurtung nur gering, so daß in allen Fällen der Praxis f_m gegen f_g vernachlässigt und

$$f = f_g = F_g = b d_g \dots \dots \dots (2)$$

gesetzt werden kann.

Nimmt man demgemäß an, daß eine Gurtung in allen Punkten ihres Querschnittes einer und derselben Spannung ausgesetzt ist, so hat man den Schwerpunkt aller dieser Spannungen in demjenigen o des Gurtungsquerschnittes anzunehmen und erhält daher das Widerstandsmoment des Querschnittes zu

$$W = F_g \cdot o_1 o_2 = b d_g (h_m + d_g) = b d_g h_0 \dots (3)$$

wenn man die Entfernung $o_1 o_2 = h_m + d_g$ zwischen den Mitten der Gurtungsquerschnitte mit h_0 bezeichnet.

Mit Hülfe dieser Formeln bestimmt sich nun für irgend welchen Querschnitt des Blechbalkens, welcher dem Bieugungsmomente M und der Verticalkraft V ausgesetzt ist, die größte Bieugungsspannung in den Gurtungen zu

$$s = \frac{M}{W} = \frac{M}{b d_g h_0} = \frac{M}{F_g h_0} \dots (4)$$

und die Schubspannung in der neutralen Aze pro Flächeneinheit, wenn man in (7) des §. 48 für b die Dicke d der Mittelwand setzt:

$$\sigma = \frac{1}{d} \frac{f}{W} V = \frac{1}{d} \frac{b d_g}{b d_g h_0} V = \frac{V}{d h_0} \dots (5)$$

Dieser Gleichung gemäß hat man die Dicke d der Blechwand zu bestimmen, indem man für σ die höchstens zulässige Schubspannung des Eisens und für V die größte Verticalkraft einsetzt.

Die Schubspannung nimmt zwar von der neutralen Aze nach den äußersten Fasern hin bis auf Null ab, doch lehrt die Figur, daß diese Abnahme von der Mitte m bis an die Stelle $h i$ hin, wo die Gurtung sich an die Mittelwand anschließt, nur sehr gering ist, da der die Schubspannungen der Mittelwand darstellende Parabelbogen $h_2 m_2 g_2$ sehr flach ist. Man kann daher mit genügender Genauigkeit die Schubspannung in $h i$ gleich derjenigen nach (5) bestimmten in der neutralen Aze voraussetzen.

Um nun auch den Gurtungsquerschnitt F_g zu bestimmen, hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der größte Werth des Bieugungsmomentes M mit dem größten Werthe der Verticalkraft V in demselben Querschnitte zusammentrifft oder nicht.

Der letztere Fall stellt sich ein bei einem auf zwei Stützen frei aufliegenden, dazwischen belasteten Träger, der erste Fall bei einem an den Enden eingeklemmten Balken, sowie bei einem an dem einen Ende eingemauerten Consolträger. Es mögen diese beiden Fälle hier gesondert betrachtet werden.

Liegt ein Blechbalken von der Länge l frei auf zwei Stützen auf, und ist derselbe etwa durch eine gleichmäßig vertheilte Belastung $q l$ angegriffen, so tritt das größte Bieugungsmoment $M = \frac{q l^2}{8}$ in der Mitte auf, während die größte Verticalkraft in den Querschnitten durch die Stützen wirkt, wo sie durch $V = q \frac{l}{2}$ dargestellt ist. In Folge des Momentes tritt in den Gurtungen des mittleren Querschnittes eine Bieugungsspannung nach (4) von

$$s = \frac{M}{W} = \frac{1}{8} \frac{q l^2}{F_g h_0} \dots \dots \dots (6)$$

auf, während in diesem Querschnitte die Schubspannung in allen Punkten gleich Null ist. Die Schubspannung erreicht dagegen ihr Maximum in den Querschnitten durch die Stützen nach (5) im Betrage

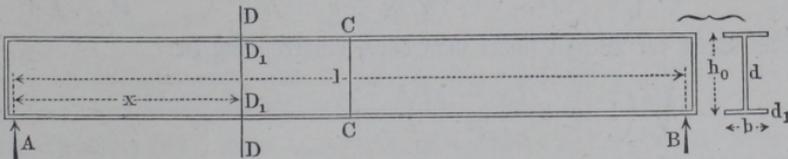
$$\sigma = \frac{V}{d h_0} = \frac{1}{2} \frac{q l}{d h_0}, \dots \dots \dots (7)$$

während in diesen Querschnitten die Biegungsspannung gleich Null ist. Man kann daher bei einer angenommenen oder vorgeschriebenen Höhe h_0 des Trägers aus (5) die Dicke d der Mittelwand und aus (4) die Größe F_g des Gurtungsquerschnittes in der Mitte berechnen, indem man in beiden Formeln für σ bzw. s die für das Material höchstens zulässigen Werthe einsetzt.

Nach der Gleichung (4) würde der mit M proportionale Querschnitt F_g der Gurtung von dem für die Balkenmitte berechneten Werthe nach den Enden hin bis auf Null abnehmen dürfen, vorausgesetzt, daß in dem Balken überhaupt nur Biegungsspannungen vorkämen. Wegen der Schubspannungen ist eine derartige Verminderung des Gurtungsquerschnittes aber nicht angängig, ohne die Materialbeanspruchung übermäßig zu steigern, wie die folgende Untersuchung zeigt, für welche zunächst ein überall gleicher Querschnitt F_g der Gurtung vorausgesetzt sein mag.

Gesetzt, der auf zwei Stützen A und B ruhende gleichmäßig belastete Balken, Fig. 210, sei so angeordnet, daß den vorstehenden Formeln (6) und (7) gemäß sowohl die äußerste Biegungsspannung in der Mitte CC , als

Fig. 210.



auch die Schubspannung in der Mittelwand bei A und B gerade den noch zulässigen Werth s_1 für das Material erreicht, so daß man also hat

$$s_1 = \frac{1}{8} \frac{q l^2}{F_g h_0} = \frac{1}{2} \frac{q l}{d h_0} \dots \dots \dots (8)$$

In irgend welchem anderen Querschnitte DD im Abstände x von A wird offenbar die größte Spannung an denjenigen Stellen D_1 eintreten, in welchen die Mittelwand sich an die Gurtung anschließt, denn eine in dieser Anschlußfläche liegende Faser wird als zur Gurtung und zur Mittelwand gehörig, sowohl der Biegungsspannung s der ersteren wie auch der Schub-

spannung σ der letzteren unterworfen sein. Die maximale Anstrengung dieser Faser bestimmt sich daher nach (4) in §. 49 dem absoluten Werthe nach zu

$$s_{max} = \frac{s}{2} + \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \dots \dots \dots (9)$$

Hierin bedeuten s und σ die gedachten, in dem Querschnitte x bei D_1 und D_1 auftretenden Biegungs- und Schubspannungen. Man findet dieselben durch

$$s = \frac{M_x}{W} = \frac{q \frac{l}{2} x - q \frac{x^2}{2}}{F_g h_0} = \frac{q}{2 F_g h_0} (l - x) x$$

und

$$\sigma = \frac{V_x}{d h_0} = \frac{q \left(\frac{l}{2} - x\right)}{d h_0}.$$

Hieraus erhält man mit Rücksicht auf (8) auch

$$s = 4 \frac{l x - x^2}{l^2} s_1 \dots \dots \dots (10)$$

und

$$\sigma = \frac{l - 2x}{l} s_1, \dots \dots \dots (11)$$

so daß man mit diesen Werthen aus (9) die gesuchte größte Anstrengung der Faser in dem Querschnitte x bei D_1 erhält:

$$s_{max} = s_1 \left[2 \frac{l x - x^2}{l^2} + \sqrt{\left(\frac{l - 2x}{l}\right)^2 + \left(2 \frac{l x - x^2}{l^2}\right)^2} \right].$$

Den Werth der Wurzel findet man durch Ausrechnung zu:

$$\sqrt{\left(1 - 2 \frac{l x - x^2}{l^2}\right)^2} = 1 - 2 \frac{l x - x^2}{l^2},$$

und daher erhält man

$$s_{max} = s_1 \left(2 \frac{l x - x^2}{l^2} + 1 - 2 \frac{l x - x^2}{l^2} \right) = s_1.$$

Diese Rechnung besagt also, daß, wenn der Gurtungsquerschnitt der gemachten Voraussetzung gemäß überall dieselbe Größe hat, die absolut größte Spannung in allen Querschnitten ebenfalls denselben Werth s_1 annimmt, und zwar in denjenigen Fasern, in welchen die Mittelwand sich an die Gurtungen anschließt. Es geht hieraus hervor, daß es nicht gestattet ist, den Querschnitt der Gurtungen nach den Stützen hin zu verkleinern, weil sonst, wie man leicht erkennt, die vorstehende

Rechnung für jeden Querschnitt x in den Punkten D_1 eine Spannung $s_{max} > s_1$ liefern müßte, indem nunmehr bei der Zusammensetzung der Biegungsspannung s und der Schubspannung σ , wie sie durch (9) dargestellt ist, ein größerer Werth von s erscheint, als der unter der Annahme gleicher Gurtungsquerschnitte in (10) berechnete.

Wenn der Balken anderenfalls nicht frei aufliegt, sondern an den Enden eingespannt ist, so stellen sich die größte Biegungsspannung s und die größte Schubspannung σ in einem und demselben Querschnitte, nämlich an der Befestigungsstelle ein. Es genügt daher jetzt nicht mehr, wie im vorhergehenden Falle geschehen, den Gurtungsquerschnitt lediglich unter Berücksichtigung der Biegungsspannung s , und die Mittelwand mit Rücksicht auf die Schubspannung σ allein so festzustellen, daß jede dieser Spannungen höchstens den zulässigen Betrag s_1 annimmt. Man muß hier vielmehr die maximale Spannung in Betracht ziehen, welche sich in dem Querschnitte an der Befestigungsstelle und zwar wieder da einstellt, wo die Gurtung sich an die Mittelwand anschließt, indem an diesem Punkte die größte Biegungsspannung s mit der größten Schubspannung σ zusammentrifft. Diese größte resultirende Spannung s_{max} findet man wieder nach (9) zu

$$s_{max} = \frac{s}{2} + \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2},$$

in welchen Ausdruck man in jedem besonderen Falle

$$s = \frac{M}{W} = \frac{M}{F_g h_0} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{V}{d h_0}$$

einzuführen hat, so daß man erhält

$$s_{max} = \frac{M}{2 F_g h_0} + \sqrt{\left(\frac{V}{d h_0}\right)^2 + \left(\frac{M}{2 F_g h_0}\right)^2} \quad \dots \quad (12)$$

Aus der Belastungsart sind M und V für die Befestigungsstelle immer bekannt, und wenn noch die Trägerhöhe h_0 gegeben ist, so kann man aus der Gleichung (12), wenn $s_{max} = s_1$ gesetzt wird, von den beiden Größen F_g und d die eine bestimmen, wenn die andere beliebig angenommen wird. Da man hierbei hinsichtlich der Wahl der einen Größe noch vollkommen frei ist, so kann man noch eine andere Bedingung stellen, z. B. diejenige, die Verhältnisse so zu wählen, daß das Gewicht des Balkens, d. h. der Querschnitt $F = 2 F_g + h d$ ein Minimum wird. Um diese Aufgabe zu lösen, hätte man diesen Ausdruck für F nach d zu differentiiren, nachdem darin zunächst aus (12) der Gurtungsquerschnitt F_g als Function von d eingeführt worden ist, und in bekannter Weise zu verfahren.

In welchem Betrage die Anstrengung des Materials in dem vorliegenden Falle durch das Zusammentreffen der größten Schub- und der größten

Biegungsspannung vergrößert wird, ist aus der Gleichung (9) ersichtlich. Gesezt, man hätte den Trägerquerschnitt so bestimmt, daß die größte Biegungsspannung s an der Befestigungsstelle ebensowohl wie die größte Schubspannung σ daselbst gleich dem zulässigen Werthe s_1 wäre, so fände man mit $s = \sigma = s_1$ aus (9):

$$s_{max} = s_1 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \right) = 1,618 s_1 \dots (13)$$

Das Material würde daher an der mehrfach gedachten gefährdeten Stelle, wo die Mittelwand sich an die Gurtung anschließt, eine im Verhältnisse 1,618 mal zu große Anstrengung zu erleiden haben, und man hätte deshalb, um die Anspannung an dieser Stelle jedenfalls nicht über s_1 wachsen zu lassen, bei der Berechnung des Gurtungsquerschnittes nach (4) und der Stärke d der Mittelwand nach (5) nicht den Werth s_1 , sondern nur

$$\frac{1}{1,618} s_1 = 0,62 s_1 \dots (14)$$

als zulässig in Rechnung zu bringen.

Es ist klar, daß bei den Verbindungen der einzelnen Platten und Eiseisen mit einander durch Vernietung die an der betreffenden Stelle auftretenden Spannungen ebenfalls durch die Nietbolzen aufgenommen werden müssen. Danach ist auch ersichtlich, daß eine in horizontaler Richtung angeordnete Nietreihe, wie sie beispielsweise die Verbindung der Eiseisen mit der Mittelwand oder mit den Deckplatten der Gurtungen bewirkt, nur durch die horizontale Schubkraft beansprucht wird, welche nach §. 48 pro Längeneinheit durch

$$b \sigma = \frac{f}{W} V$$

zu bestimmen ist. Wird daher unter δ der Durchmesser der Nietbolzen und unter s' die zulässige Abscherungsspannung verstanden, so erhält man die Anzahl n der Nietbolzen für jede Längeneinheit der Fuge durch

$$n \frac{\pi \delta^2}{4} s' = \frac{f}{W} V \dots (15)$$

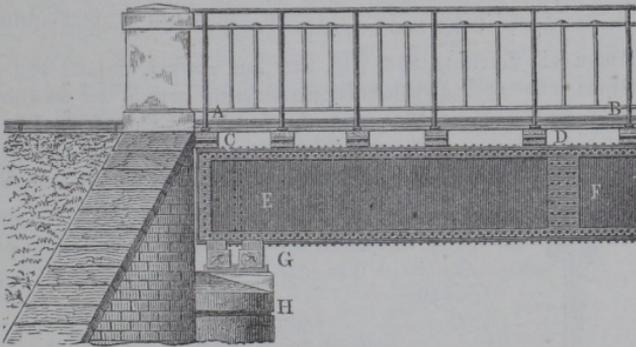
Dagegen sind die Nieten für verticale Nietfugen, wie sie z. B. bei dem Zusammenstoßen der die Mittelwand bildenden Platten entstehen, einer Einwirkung sowohl der horizontalen Biegungsspannung s wie auch der verticalen Schubspannung σ , also einer totalen Spannung gleich $\sqrt{s^2 + \sigma^2}$ ausgesetzt.

Ueber die Verhältnisse, welche für die Nietungen gelten, muß auf das in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 3 darüber Gesagte verwiesen werden. In Betreff der Gurtungsquerschnitte hat man bei den einer Zugspannung ausgesetzten Gurtungen die durch das Nietloch beanspruchte Querschnitts-

fläche $d_1 d$ als eine Verschwächung in Abzug zu bringen, während bei den gedrückten Gurtungen eine Schwächung durch die Nietlöcher nicht stattfindet, da die gut passenden Nietbolzen die Druckübertragung ebenso gut übernehmen, wie das Material der Gurtung. Jedenfalls wird man dafür sorgen, daß in irgend welchem Querschnitte jede Gurtung durch höchstens ein Nietloch verschwächt wird. Zu den Gurtungsquerschnitten werden bei der praktischen Ausführung der Rechnung außer den Durchschnitten der horizontalen Deckplatten auch die Querschnitte der beiden Winkeleisen gerechnet, welche diese Deckplatten mit der Mittelwand verbinden.

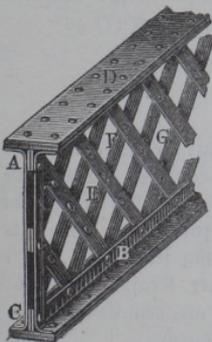
Eine einfache Blechträgerbrücke für Eisenbahnen ist theilweise in Fig. 211 dargestellt. Die ganze Bahn AB ruht hier mittelst Querschwellen $CD\dots$ auf sechs I förmigen Blechträgern wie EF von 1 bis 1,5 m Höhe, welche unter sich selbst wieder durch mehrere Querbalken von Eisenblech verbunden

Fig. 211.



sind. Die Hauptträger liegen auf Holzschwellen G , die durch eiserne Stühle auf den Pfeilern H ruhen. Bei einer von Egel entworfenen Eisenbahnbrücke über die Aar unweit Olten in der Schweiz hat man auch bogenförmige Blechträger angewendet. Diese Brücke besteht aus drei Oeffnungen von 31,5 m Spannung und 5,1 m Bogenhöhe, und jede Oeffnung wird durch fünf Blechbögen von 0,9 m Höhe und fünf unmittelbar unter der 7,2 m breiten zweigleisigen Bahn liegenden geraden Blechbalken von 0,6 m Höhe überspannt.

Fig. 212.



Anstatt der Blechwand hat man auch die Füllung zwischen den Gurtungen durch ein aus Diagonalstangen $AB, CD\dots$, Fig. 212, zusammengesetztes Gitterwerk gebildet, indem man diese Diagonalstäbe nicht nur mit den Eiseisen der

Gurtungen, sondern auch unter sich in den Kreuzungspunkten $E, F, G \dots$ vernietet. Die Wirkungsweise dieser Gitter kann in ähnlicher Art untersucht werden, wie die der weiter unten näher behandelten Fachwerksträger.

Beispiele: 1. Für eine Eisenbahnbrücke sollen die 3,6 m langen Querträger als Blechbalken konstruiert werden, und es sind die Dimensionen entsprechend einer Belastung des Querträgers gleich 24 000 kg zu ermitteln. Setzt man die Belastung als gleichmäßig über die Trägerlänge verteilt voraus, so ist das größte Biegemoment für die Mitte durch

$$M = 24\,000 \frac{3,6}{8} = 10\,800 \text{ mkg}$$

gegeben. Nimmt man für den Querträger eine ganze Höhe $h = \frac{l}{10} = 0,36$ m an und stellt als Abstand der Gurtungsschwerpunkte etwa die Höhe $h_0 = 0,32$ m in Rechnung, so erhält man mit einer zulässigen Spannung $s = 6$ kg pro Quadratmillimeter nach (6) die Größe des wirksamen Querschnittes für jede Gurtung:

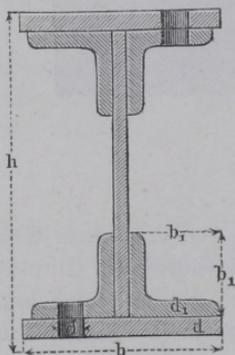
$$F_g = \frac{M}{s h_0} = \frac{10\,800}{6\,000\,000 \cdot 0,32} = 0,005625 \text{ qm} = 5625 \text{ qmm.}$$

Bildet man die Gurtung nach Fig. 213 aus einer Deckplatte von der Breite $b = 160$ mm und zwei gleichschenkeligen Eiseisen von $b_1 = 60$ mm Schenkellänge und $d_1 = 12$ mm Schenkelfstärke, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Verschwächung durch ein 20 mm weites Nietloch die erforderliche Dicke d der Deckplatte durch

$$F_g = 5625 = 2(60 + 48)12 - 20 \cdot 12 + (160 - 20)d$$

zu

$$d = \frac{5625 - 2352}{140} = 23,3 \text{ mm}$$



Dieser Querschnitt ist mit Rücksicht auf das oben Gesagte den Gurtungen überall zu geben.

Da die verticale Schubkraft an den Enden 12 000 kg beträgt, so ermittelt sich die geringste Stärke d_m der Blechwand, unter der Annahme einer höchstens zulässigen Schubspannung von 4 kg pro Quadratmillimeter, nach (7) zu

$$d_m = \frac{V}{\sigma h_0} = \frac{12\,000}{4\,000\,000 \cdot 0,32} = 0,0094 \text{ m,}$$

wofür man rund 10 mm annehmen wird.

Die Anstrengung der Nieten, welche die Eiseisen mit der Mittelwand verbinden, ist, wie diejenige der Zähne oder Dübel der verzahnten Balken, an den Enden des Balkens am größten. Nimmt man daher dasselbst für die Nietbolzen 25 mm Durchmesser, also einen Querschnitt von 491 qmm an, und setzt eine Schubspannung von 4 kg als zulässig voraus, so vermag jeder Niet, da er in zwei Querschnitten abgetheert werden würde, mit einer Kraft von $2 \cdot 4 \cdot 491 = 3928$ kg zu widerstehen. Da nun die Schubkraft an den Enden für eine Längeneinheit, d. h. etwa für $\lambda = 1$ mm Trägerlänge durch

$$\sigma d_m \lambda = \lambda \frac{V}{h_0} = 0,001 \frac{12\,000}{0,32} = 37,5 \text{ kg}$$

bestimmt ist, so kann daselbst die Entfernung zweier Rieten zu

$$\frac{3928}{37,5} = 104,7 \text{ mm}$$

angenommen werden. Nach der Mitte hin dürfen die Rieten wegen der geringeren Schubkraft weiter von einander entfernt gesetzt werden. Dasselbe gilt auch für diejenigen Rieten, welche die Gurtungsdeckplatten mit den Eiseisen verbinden, da diese Rieten einer in dem Maße geringeren Schubkraft ausgesetzt sind, in welchem die Größe f in der allgemeinen Formel (5) für die Deckplatte allein kleiner ist, als für die ganze Gurtung. Da einer der vorstehend berechneten Nietbolzen für die Eiseisen von 25 mm Stärke seine ganze Kraft auf die geringe Druckfläche von $10 \times 25 = 250$ qmm der Mittelwand zu übertragen hat, so erkennt man hieraus die Zweckmäßigkeit einer Vergrößerung dieser besagten Druckfläche, wie man sie etwa durch Unterlagsplatten erreichen kann, die an den Enden des Trägers zwischen den Eiseisen und der Mittelwand angebracht werden.

2. Ein Fußgängerbankett soll zur Seite einer eisernen Brücke durch an dem betreffenden Hauptträger befestigte Consolen von 1,6 m Ausladung unterstützt werden. Welche Dimensionen haben diese als Blechbalken auszuführenden Consolträger zu erhalten, wenn die auf einen entfallende gleichmäßig vertheilte Last 1000 kg beträgt, und die Consolen an der Befestigungsstelle eine Höhe von 0,32 m erhalten sollen.

Hier tritt das größte Biegemoment $M = 1000 \cdot \frac{1,6}{2} = 800$ mkg mit der größten Verticalkraft $V = 1000$ kg gleichzeitig an der Befestigungsstelle auf, und man hat daher, wenn die höchste Materialspannung den Werth $s_1 = 6$ kg per Quadratmillimeter nicht übersteigen soll, und $h_0 = 0,3$ m gesetzt wird, nach (12):

$$6 \cdot 1000\,000 = \frac{800}{0,6 F_g} + \sqrt{\left(\frac{1000}{d_m 0,3}\right)^2 + \left(\frac{800}{0,6 F_g}\right)^2}$$

Nimmt man auch hier wegen der Witterungseinflüsse die Dicke d_m der Mittelwand gleich 0,010 m, so schreibt sich diese Gleichung auch

$$\left(6\,000\,000 - \frac{8000}{6 F_g}\right)^2 = \frac{1\,000\,000^2}{9} + \left(\frac{8000}{6 F_g}\right)^2,$$

woraus

$$36 - \frac{1}{9} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 8}{6 \cdot 1000 F_g},$$

oder

$$F_g = \frac{0,016}{35,889} = 0,000446 \text{ qm} = 446 \text{ qmm.}$$

Wollte man die Dimensionen nach (14) unter Zugrundelegung einer Anstrengung $s = \sigma = 0,62$ $s_1 = 0,62 \cdot 6 = 3,72$ kg berechnen, so erhielt man mit diesem Werthe aus (4)

$$F_g = \frac{M}{s h_0} = \frac{800}{3,72 \cdot 1000\,000 \cdot 0,3} = 716 \text{ qmm,}$$

und aus (5)

$$d_m = \frac{V}{\sigma h_0} = \frac{1000}{3,72 \cdot 1000\,000 \cdot 0,3} = 0,0009 \text{ m,}$$

oder noch nicht 1 mm. Diese Anordnung würde, abgesehen davon, daß sie nicht ausführbar ist, ökonomisch vortheilhaft sein, weil bei derselben der Gesamtquerschnitt, also das Trägergewicht, wesentlich kleiner ausfallen würde ($F = 2 \cdot 716 + 300 \cdot 0,9 = 1702$ qmm), als bei der oben für eine Stärke $d_m = 10$ mm ermittelten Construction, für welche der Trägerquerschnitt an der Befestigungsstelle durch

$$F = 2 \cdot 446 + 300 \cdot 10 = 3892 \text{ qmm}$$

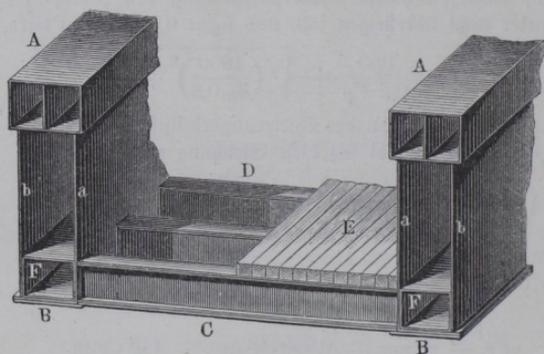
folgt. Mit Rücksicht auf das Kosten des Eisens pflegt man indessen die Blechstärken bei Brücken nicht unter 10 mm anzunehmen.

§. 52. **Röhrenträger.** Um bei größeren Brücken den Blechbalken auch gegen seitliche Ausbiegungen, wie sie durch Erschütterungen und durch den Winddruck angestrebt werden, eine größere Widerstandsfähigkeit zu geben, ist zuerst von N. Stephenson die kasten- oder röhrenförmige Gestalt der Träger angewendet worden, und es sind daraufhin die sogenannten Röhrenbrücken von N. Stephenson und W. Fairbairn entstanden.

Bei den Fairbairn'schen Ausführungen wird die Brücke von zwei parallelepipedischen Röhrenbalken getragen, während Stephenson die ganze Brücke zu einer parallelepipedischen Röhre gestaltete, in deren Innerem die Fahrbahn sich befand.

Eine einfache, durch zwei Röhrenträger AB getragene Brücke zeigt Fig. 214. Jeder der Träger ist hierbei aus zwei verticalen Blechwänden

Fig. 214.

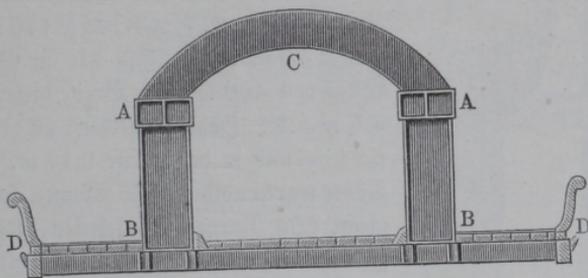


a und b gebildet, welche als Gurtungen oben und unten mit den Röhren A und B von viereckigem Querschnitte verbunden sind. Der unteren Gurtung B hat man dabei durch eine Bodenplatte und der oberen A durch eine eingekietete Zwischenwand die nöthige Versteifung gegeben. Die Brückenbahn E liegt hierbei auf einzelnen I förmigen Blechträgern C, D , welche beiderseits mit den inneren Wänden der Hauptträger vernietet sind. Auch verbindet man wohl die beiden Hauptträger, wie aus Fig. 215 ersichtlich, ober-

halb zur größeren Versteifung durch eiserne Bögen wie *C*, und ordnet seitlich der Hauptträger auf consolartig ausfragenden Blechträgern *BD* besondere Fußwege an.

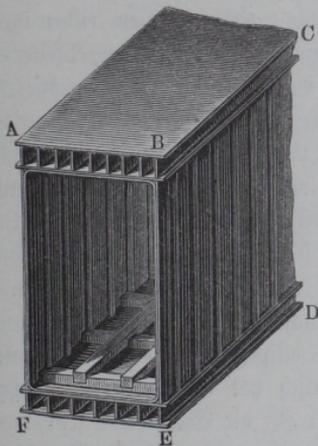
Die Construction einer Röhrenbrücke von Stephenson, welche die Fahrbahn ganz umschließt, ist aus Fig. 216 zu ersehen. Die ganze Brücke

Fig. 215.



besteht aus einem hohlen Parallelepiped *ABCD*, welches aus Blechstücken von 1,2 bis 4 m Länge, 0,6 m Breite und 10 bis 20 mm Dicke mittelst 25 mm starker Bolzen zusammen-genietet ist. Zur Erhöhung der Tragfähigkeit ist diese Röhre sowohl mit einem doppelten Boden wie auch mit einer doppelten Decke versehen, und die dadurch gebildeten Hohlräume *AB* und *EF* sind durch verticale Scheidewände in Zellen getheilt, um ein Einknicken der breiten horizontalen Platten zu verhindern. Auch den hohen Tragwänden, wie *BD*, hat man dadurch noch eine besondere Steifigkeit ertheilt, daß die in verticalen Stoßfugen zusammenstoßenden Blechplatten auf beiden Seiten mit \perp förmigen Laschen zusammen-genietet worden sind, welche innen und außen vorstehende verticale Versteifungsrippen bilden.

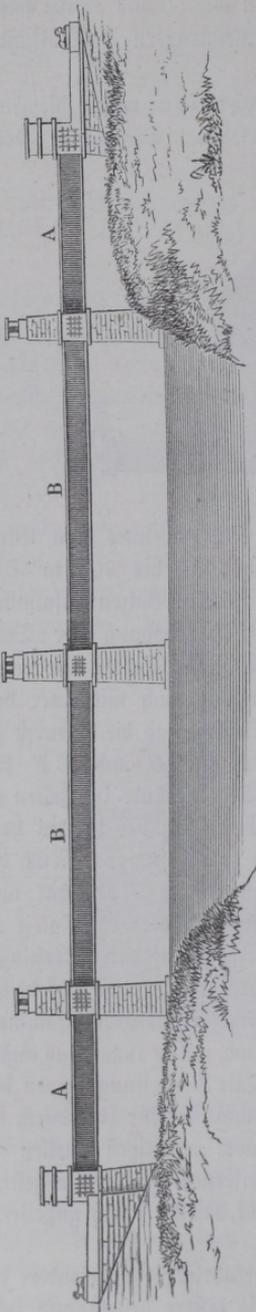
Fig. 216.



den. Die Figur zeigt auch die Quer- und Längsschwellen für eine durch die Röhre zu führende Eisenbahn. Uebrigens sind noch diejenigen Stellen der Röhre, wo dieselbe aufruhrt, von innen mit gußeisernen Rahmen abgesteift und ebenso sind die Wände der unteren Zellenreihe daselbst durch gußeiserne Träger gestützt.

Es gehören zu diesen Stephenson'schen Röhrenbrücken insbesondere die Conway-Brücke und die Britannia-Brücke. Die erstere besteht aus zwei

Fig. 217.



neben einander liegenden Röhren, wovon jede 129 m lang, 4,5 m breit, 6,85 m hoch an den Enden und 7,75 m hoch in der Mitte ist, und ein Gewicht von 1470 Tonnen (à 1000 kg) hat. Die Britannia-Brücke, welche wie die Telford'sche Kettenbrücke, über den Menai-Meerestrom führt, besteht aus vier Brückenöffnungen *ABBA*, Fig. 217, zwei von je 140 m und zwei von je 70 m Länge, und hat im Ganzen eine Länge von 460 m. Die Breite dieser Brücke ist 4,5 m, die Höhe derselben an den Enden 6,94 m und in der Mitte 9,14 m. Zu jeder Röhre waren nöthig 2875 Tonnen ebenes Eisenblech, 604 Tonnen Winkleisen, 425 Tonnen \perp Rippen, 340 Tonnen (882 000 der Zahl nach) Nieten, und außerdem noch 1016 Tonnen gußeiserne Rahmen u. s. w., so daß eine Röhre im Ganzen 5260 Tonnen wiegt.

Damit diese langen Röhrenbalken bei wechselnder Temperatur sich ungehindert ausdehnen und wieder zusammenziehen können, ruhen ihre Enden nicht unmittelbar auf den Pfeilern, sondern durch Vermittelung einer größeren Anzahl gußeiserner Walzen (bei der Britannia-Brücke 24 Paar von 0,15 m Durchmesser und 0,60 m Länge), welche sich zwischen einer auf dem Pfeiler befestigten gußeisernen Sohlplatte und einer eben solchen am Röhrenträger von unten befestigten Lagerplatte bewegen können.

Man hat auch den Röhrenträgern eine kreisrunde oder elliptische Querschnittsgestalt gegeben, namentlich hat Brunel cylindrische Blechröhrenträger für die Chepstow-Eisenbahnbrücke angewendet, an welchen die Brückenbahn aufgehängt ist. Die Kreisform des Querschnittes gewährt jedoch keine vortheilhafte Benutzung des Materials (s. §. 45), auch haben die Versuche von Fairbairn gezeigt, daß sich die Röhrenträger mit kreisrundem Querschnitte leicht zusammendrücken, wobei sie an den Enden breiter und niedriger, in der Mitte höher und

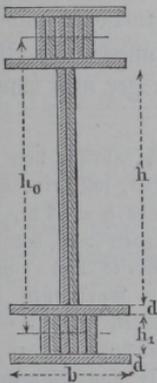
schmäler werden. Diesen Mangel einer Veränderung der Querschnittsform zeigen auch die Träger von elliptischen Querschnitten, wenn auch in geringerm Maße als die von kreisrunder Querschnittsgestalt.

Anmerkung. Bei den Festigkeitsversuchen, welche Hodgkinson an Röhren von kreisförmigen, elliptischen und rechteckigen Querschnitten angestellt hat, wurde nicht nur bestätigt, daß die letzteren unter übrigens gleichen Umständen mehr Stärke besitzen als die ersteren, sondern auch noch dargethan, daß die an beiden Enden ausliegende und in der Mitte belastete Röhre von oben herein, also durch Zerdrücken und nicht durch Zerreißen zerbricht. Es hat daher das Schmiedeeisen mit dem Holze die Eigenschaft gemein, daß es gegen Zerreißen mehr widersteht, als gegen Zerdrücken, während es bei dem Gußeisen umgekehrt ist. Deshalb versieht man auch die Decke der Röhre mit mehr Zellen, als den Boden.

Die Tragfähigkeit eines Röhrenträgers läßt sich wie diejenige eines Blechträgers von I förmigem Querschnitte berechnen, indem man als den Gurtungsquerschnitt denjenigen der den Boden und die Decke bildenden Zelleneinbauten und als Entfernung der Gurtungsschwerpunkte den Abstand der Mitten dieser Zellen ansieht.

Ist h die Höhe der Blechwände oder der Röhre im Lichten, und h_1 die lichte Höhe der Zellen, sowie b die Breite der Gurtungen und n die Anzahl der verticalen Zelleneinbauten, und nimmt man alle Blechstärken gleich d an, so hat man einen Gurtungsquerschnitt nach Fig. 218 zu

Fig. 218.



$$F_g = 2bd + nh_1d = (2b + nh_1)d, \dots (1)$$

den Abstand der Mitte der Gurtungen von einander

$$h_0 = h + h_1 + 2d \dots \dots \dots (2)$$

und den ganzen Querschnitt des Röhrenträgers

$$F = 2F_g + F_m = 2(2b + nh_1 + h)d, (3)$$

daher das Gewicht der ganzen Röhre von der Länge l bei dem specifischen Gewichte γ gleich

$$G = F\gamma l \dots \dots \dots (4)$$

Ist dann noch die Belastung durch die Brückenbahn und die bewegliche Last pro Längeneinheit gleich

k , so hat man bei voller Belastung der Brücke das Moment für die Mitte durch

$$M = \frac{ql^2}{8} = (k + F\gamma) \frac{l^2}{8}, \dots \dots \dots (5)$$

woraus der Gurtungsquerschnitt durch

$$M = (k + F\gamma) \frac{l^2}{8} = s_1 F_g h_0 \dots \dots \dots (6)$$

$$F_g = \frac{k + F\gamma}{s_1 h_0} \frac{l^2}{8} \dots \dots \dots (7)$$

und die Durchbiegung in der Mitte zu

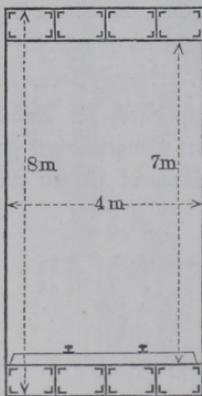
$$a = \frac{5}{384} \frac{(k + F\gamma) l^4}{E F_g h_0} \dots \dots \dots (8)$$

folgt.

Die Anwendung der Röhrenträger zu größeren Brücken findet heute nicht mehr statt, da die Verwendung des Materials bei denselben wenig vorthellhaft ist. Da nämlich bei fast allen Brücken die durch die Querträger aufgenommene Last auf die Hauptträger in einzelnen Punkten concentrirt übertragen werden muß, so erfordern die Blechwände an diesen Stellen Verstärkungen und es findet eine ungünstige mehr oder minder auf Biegung wirkende Beanspruchung der Construction zwischen den Anheftungspunkten der Querträger statt. Derselbe Uebelstand haftet den nach Fig. 212 ausgeführten engmaschigen Gitterträgern an, außerdem ist bei den letzteren die Untersuchung der Inanspruchnahme der einzelnen Gitterstäbe wegen deren vielfacher Vernietung mit einander eine schwierige und unzuverlässige. Diese Uebelstände sind vermieden bei den im Folgenden zu behandelnden Fachwerkconstructionen, welche in neuerer Zeit ganz allgemein für alle größeren Spannweiten die Blech-, Röhren- und engmaschigen Gitterbalken verdrängt haben. Nur für Zwischenconstructionen, z. B. für Schwellenträger und Querträger der Eisenbahnbrücken, sowie auch für Constructionen mit möglichst gleichmäßig vertheilter Belastung, z. B. kleine Chausséebrücken, Unterzüge in Speichern und Fabrikräumen u. finden die Blechträger noch häufigere Verwendung.

Beispiel. Für eine eingleisige Eisenbahn soll eine Röhrenbrücke von 80 m Spannweite ausgeführt werden. Der Röhrenträger, Fig. 219, solle eine äußere Höhe $H = 8$ m, eine innere Höhe $h = 7$ m, daher eine Höhe der Zellen in dem Boden und der Decke von $h_1 = 0,5$ m, sowie eine Breite von 4 m erhalten.

Fig. 219.



Wenn jede der beiden Gurtungen durch drei Zwischenwände in vier Zellen getheilt wird, und für die verticalen Blechwände wegen der Schubspannungen eine Blechstärke von 15 mm angenommen wird, so sind die Querschnittsdimensionen der Gurtungen unter der Bedingung zu ermitteln, daß die Verkehrslast $k = 4000$ kg pro laufenden Meter beträgt und die höchste Spannung den Betrag $s = 6$ kg pro Quadratmillimeter nicht übersteigt.

Zur Ausbildung der Gurtungen sind im Innern der Zellen 16 Winkleisen erforderlich, deren Schenkellänge zu 60 mm bei einer Stärke von 12 mm angenommen werde. Nach Abzug eines Nietloches für

die 20 mm dicken Nietbolzen verbleibt für jedes dieser Winkelleisen ein wirksamer Querschnitt von

$$(60 + 60 - 12 - 20) 12 = 1056 \text{ qmm} = 0,001056 \text{ qm},$$

daher für 16 Winkelleisen

$$16 \cdot 0,001056 = 0,0169 \text{ qm}.$$

Bezeichnet man mit d die gesuchte Stärke der Zellenwände, so hat man den wirksamen Querschnitt einer Gurtung

$$F_g = (2 \cdot 4 + 5 \cdot 0,5) d + 0,0169 = 10,5 d + 0,0169,$$

und den Querschnitt des ganzen Trägers

$$F = 2 F_g + 2 \cdot 7 \cdot 0,015 = (21 d + 0,2438) \text{ qm}.$$

Nimmt man das spezifische Gewicht 7,5 des Eisens mit Rücksicht auf Niete und Verstärkungen um 20 Proc. größer, also zu $1,2 \cdot 7,5 = 9$ an, so erhält man das Trägergewicht pro laufenden Meter zu:

$$G = (21 d + 0,2438) 9000 \text{ kg} = \text{rot } 189\,000 d + 2200 \text{ kg}.$$

Das Maximalmoment in der Mitte findet sich, wenn man noch für die Schienen und Schwellen 200 kg für den laufenden Meter rechnet, zu:

$$M = (4000 + 200 + 2200 + 189\,000 d) \frac{80^2}{8} = 5120\,000 + 151\,200\,000 d.$$

Man erhält daher nach (6)

$$5\,120\,000 + 151\,200\,000 d = 6\,000\,000 \cdot (10,5 d + 0,0169) \cdot 7,5,$$

oder

$$5,120 - 0,7605 = 472,5 d - 151,2 d;$$

woraus

$$d = \frac{4,3595}{321,3} = 0,0136 = \text{rot } 14 \text{ mm}$$

folgt.

Mit diesem Werthe ergibt sich nun

$$F_g = 10,5 \cdot 0,014 + 0,0169 = 0,1639 \text{ qm}$$

und

$$G = 189\,000 \cdot 0,014 + 2200 = 4846 \text{ kg};$$

folglich erhält man nach (8) die Durchbiegung der belasteten Brücke in der Mitte bei einem Elasticitätsmodul $E = 20\,000$ (für Millimeter) zu:

$$a = \frac{5}{384} \frac{4200 + 4846}{20\,000 \cdot 1000^2 \cdot 0,1639 \cdot 7,5} 80^4 = \frac{9,046 \cdot 64}{18 \cdot 163,9} = 0,196 \text{ m}.$$

Fachwerke. Um bei der Ausführung größerer Träger das Material §. 53. möglichst vollständig auszunutzen, was nach dem früher Bemerkten nur bei gleichmäßiger Anstrengung aller Fasern eines Stückes durch Zug- oder Druckkräfte, nicht aber bei Biegungen möglich ist, sind die Fachwerke entstanden. Ein Fachwerksträger besteht im Allgemeinen aus zwei Stäben oder Stangen, den sogenannten Gurtungen, Längsbändern oder Streckbäumen, welche durch ein System von Zwischenstäben derart zu einem steifen Träger verbunden sind, daß in Folge der Belastung in allen Stäben nur Kräfte hervorgerufen werden, welche nach den Längsaxen

dieser Stäbe gerichtet sind, die letzteren daher nur auf einfachen Zug oder Druck, nicht aber auf Biegung beanspruchen. Um dies zu erreichen, müssen die einzelnen Glieder der Construction unter sich zu Dreiecken derartig verbunden sein, daß in den Ecken dieser Dreiecke, den sogenannten Knotenpunkten, eine gewisse Drehbarkeit der einzelnen Dreiecksseiten gegen einander wie um Charniere ermöglicht ist. Nur unter dieser Voraussetzung kann jedes einzelne Glied unter Einfluß der auf dasselbe wirkenden Zug- oder Druckkraft eine Längenänderung annehmen, ohne einen Zwang in Form einer Biegung auf die Nachbarglieder auszuüben, wie dies in dem Falle einer steifen, nicht drehbaren Verbindung in den Ecken der Fall sein müßte. Bei sehr vielen Constructionen bildet man in der That die Knotenpunkte zu Charnieren aus, in welchen ein Drehbolzen die in diesem Knoten zusammenstreffenden Glieder vereinigt. Bei größeren Spannweiten und Kräften dagegen würde sich oft die erforderliche Haltbarkeit durch einen einzigen Bolzen praktisch nicht erreichen lassen, in welchen Fällen man daher zu einer steifen Verbindung durch mehrere Nieten gezwungen ist. Hierdurch werden allerdings auf die in einem Knotenpunkte zusammenstreffenden Glieder durch die Längenänderung eines derselben biegende Einwirkungen ausgeübt, doch fallen dieselben im Verhältnisse zu der Gesamtanstrengung um so geringer aus, je größer die Längen der einzelnen Glieder und des ganzen Fachwerkes sind. Man kann daher bei allen größeren Constructionen von diesen Biegungen, deren Bestimmung sich übrigens der Rechnung entziehen würde, absehen, und es soll im Folgenden immer eine drehbare, charnierartige Verbindung in den Knotenpunkten vorausgesetzt werden. Jedenfalls muß bei der Ausführung des Fachwerkes sorgsam darauf Bedacht genommen werden, daß in jedem Knotenpunkte die geometrischen Axen der sämmtlichen von demselben ausgehenden Glieder oder Stäbe sich thatsächlich genau in einem Punkte schneiden.

Aus der gegebenen Bedingung, daß kein Glied einer anderen als einer axial gerichteten Kraft ausgesetzt sein soll, ergiebt sich weiter, daß die äußeren angreifenden Kräfte, also die Belastungen und Auflagerreactionen immer in den Knotenpunkten zum Angriffe gebracht werden müssen. Wenn zuweilen auch ein Glied, z. B. eine Stange, zwischen ihren Endpunkten von einer Kraft ergriffen wird, so ist es doch nöthig, daß die Richtung der Stange mit derjenigen dieser Kraft zusammenfällt, daß also beispielsweise eine Gewichtsbelastung in dieser Weise nur an einer verticalen Stange (Hängestange) angreifen darf, während horizontale oder geneigte Glieder nur in den End- oder Knotenpunkten belastet werden dürfen. Man erreicht bei den Fachwerksträgern für Brücken diese Belastungsart dadurch, daß man das Gewicht der Fahrbahn nebst der mobilen Belastung durch kleinere Quer- oder Zwischenträger aufnimmt, von welchen jeder an den beiden Enden mit

den correspondirenden Knotenpunkten von zwei parallelen Hauptfachwerksträgern in Verbindung steht, sei es, daß diese Querträger direct auf den Hauptträgern ruhen, oder daß durch verticale Pfosten oder Hängeeisen die Last der Querträger auf die Knotenpunkte übertragen wird. Hierbei hängt es von den örtlichen Verhältnissen, namentlich von der Höhenlage der Fahrbahn ab, ob die Belastung auf die Knotenpunkte der oberen oder der unteren Gurtung übertragen wird. Bei den Dachstühlen wird die durch das Eigengewicht der Deckfläche gebildete Belastung durch die Sparren auf die sogenannten Pfetten übertragen, welche, entsprechend den Querträgern der Brücken, direct die Knotenpunkte und zwar hier ausschließlich diejenigen des oberen Streckbaumes belasten, während unter Umständen auch noch durch verticale Hängeeisen das Gewicht von etwa zu tragenden Zwischendecken auf die Knotenpunkte übertragen wird.

Das Eigengewicht der das Fachwerk bildenden einzelnen Stangen wird natürlich bei allen nicht verticalen Gliedern immer eine Biegung derselben anstreben, doch wird diese Anstrengung im Verhältnisse zu der durch die Last der ganzen Construction erzeugten als gering zu vernachlässigen sein, da die einzelnen Glieder meistens nur geringe Längen erhalten. Man pflegt daher auch das Eigengewicht der Fachwerksconstruction als in den Knotenpunkten vereinigt zu denken, wie es im Folgenden immer geschehen soll. In Betreff der Vertheilung der Last pflegt man dieselbe, sowohl das Eigengewicht der Construction wie auch die zufällige oder Verkehrslast, als über die Horizontalprojection des Bauwerkes gleichmäßig vertheilt zu denken, und es sollen im Folgenden wieder unter p und k diese specifischen Belastungen und unter $q = p + k$ die Totalbelastung pro Längeneinheit des Fachwerksträgers verstanden werden. Hierbei muß bemerkt werden, daß eine gleichmäßige Vertheilung der Verkehrslast zwar bei den Brücken streng genommen nicht stattfindet, indem hierbei die Lasten der Fahrzeuge sich in den Berührungspunkten der Räder mit der Bahn concentriren, doch ist dieser Umstand nur für kleinere Brücken von einiger Bedeutung, in welchen Fällen man daher

Fig. 220.

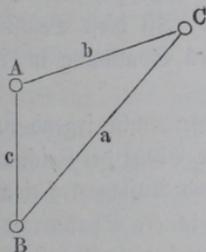
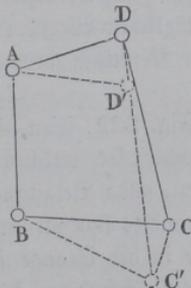


Fig. 221.



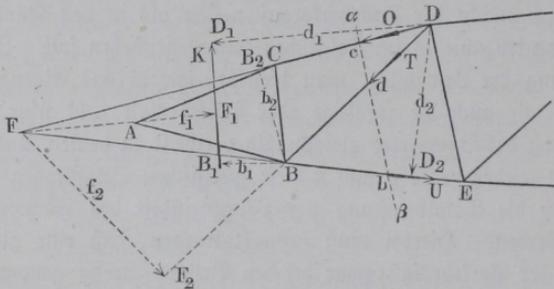
auch die jeweilige Lastvertheilung der Rechnung zu Grunde zu legen hat.

Aus dem Vorhergehenden folgt auch, warum die einzelnen Glieder eines Fachwerkes Dreiecke bilden müssen, denn nur in diesem Falle ist die relative Lage der einzelnen Knotenpunkte A, B und C , Fig. 220, durch

die Längen a , b und c der einzelnen Stücke unverrückbar festgestellt, und eine Formänderung des Dreiecks kann nur in Folge elastischer Verlängerungen und Verkürzungen dieser Stücke eintreten. Bei mehr als drei Seiten, z. B. bei dem Viereck $ABCD$, Fig. 221 (a. v. S.), dagegen ist vermöge der Drehbarkeit in den Eckpunkten die gegenseitige Lage der letzteren zu einander vollkommen unbestimmt, und es kann diese Construction sehr viele andere Lagen, wie z. B. $ABC'D'$, annehmen.

Um nun ein Fachwerk hinreichend fest auszuführen, damit es den auf dasselbe wirkenden äußeren Kräften, welche in jedem Falle der Ausführung gegeben sind, mit genügender Sicherheit widerstehen kann, hat man für jedes Constructionsglied diejenige Anstrengung, Zug- oder Druckspannung, zu ermitteln, welcher dieses Glied in dem für dasselbe ungünstigsten Belastungszustande ausgesetzt ist. Kennt man diese Anstrengung, so ist es nach den in Thl. I, Abschn. IV angegebenen Regeln leicht, die Querschnittsdimensionen für das Element so zu bestimmen, daß dasselbe die gefundene Spannung mit Sicherheit zu äußern vermag. Wie sich aus dem Folgenden ergeben wird,

Fig. 222.



tritt diese ungünstigste Anstrengung der einzelnen Glieder keineswegs für alle verschiedenen Stücke bei derselben Belastung ein, und es ist daher nöthig, vor der gedachten Ermittlung der betreffenden Anstrengung in einem Gliede denjenigen Belastungszustand des ganzen Fachwerkes festzustellen, für welchen jene Anstrengung den größtmöglichen Werth erreicht. Ist diese Belastung festgestellt, so gelangt man zur Kenntniß der gesuchten Spannung im Allgemeinen in folgender Weise.

Gelegt A, B, C, D, E, \dots , Fig. 222, seien die Knotenpunkte irgend eines wie vorstehend beschriebenen Fachwerkes, welches in der Ebene der Zeichnung ganz beliebigen äußeren Kräften, etwa Belastungen und Auflagerreactionen, ausgesetzt sein mag, und es handele sich darum, die innere Spannkraft zu bestimmen, welche beispielsweise in der Stange BD durch diese Belastungen hervorgerufen wird. Man denkt sich dann durch einen beliebigen ebenen

oder gekrümmten Schnitt, etwa in der Richtung $\alpha\beta$, das ganze Fachwerk in zwei Theile zerlegt, und betrachtet z. B. in der Figur denjenigen $AcdB$. Wenn man an den Schnittstellen c , d und b der durchschnittenen Glieder solche Kräfte O , T , U angebracht denkt, welche der Richtung und Größe nach genau mit denjenigen inneren Spannkräften übereinstimmen, die vor der Durchschneidung von dem anderen Theile des Fachwerkes $cDEbd$ auf das betrachtete Stück $AcdB$ ausgeübt wurden, so wird offenbar an dem Gleichgewichtszustande des letzteren nichts geändert. Man hat daher lediglich die Gleichgewichtsbedingungen für den betreffenden Fachwerkstheil $AcdB$ zu untersuchen, welcher außer den Spannungen O , T und U noch gewissen äußeren, auf dieses Stück wirkenden Kräften ausgesetzt ist. Diese letzteren Kräfte können nach dem Vorangehenden nur in den Knotenpunkten wie A , B , C angreifen und sämmtlich in der Zeichnungsebene liegen; dieselben lassen sich, als bekannte Kräfte, jederzeit zu einer Mittelkraft zusammensetzen, welche im Allgemeinen nicht durch einen Knotenpunkt gehen wird, und welche in der Figur etwa durch K der Richtung und Größe nach vorgestellt sein mag.

Es handelt sich also jetzt einfach darum, die drei der Richtung nach bekannten Kräfte O , T und U ihrer Größe nach so zu bestimmen, daß sie mit der bekannten Kraft im Gleichgewichte sind; mit anderen Worten, die Kraft K nach den drei Richtungen von O , T und U zu zerlegen. Diese Aufgabe ist immer in bestimmter Weise zu lösen, vorausgesetzt, daß nicht etwa drei der Kräfte sich in einem Punkte schneiden, was hier nicht vorausgesetzt werden soll.

Die gedachte Aufgabe kann nach Thl. I analytisch dadurch gelöst werden, daß man die Summe der verticalen und die Summe der horizontalen Componenten aller Kräfte, sowie die Summe von deren Momenten um einen beliebigen Punkt einzeln gleich Null setzt, und die drei dadurch erhaltenen Gleichungen, in denen O , T und U als Unbekannte vorkommen, nach diesen Größen auflöst. Diese Lösung, die immer zum Ziele führt, ist zwar nicht schwierig, aber umständlich in der Ausführung, da die Auflösung der drei Gleichungen wegen der in ihnen vorkommenden trigonometrischen Functionen zu Unbequemlichkeiten der Rechnung führt.

Man kann aber noch in einfacherer Art zur Bestimmung der gesuchten Spannungen O , T und U gelangen, und zwar ebensowohl durch Rechnung wie auf graphischem Wege. Wählt man nämlich zum Momentenmittelpunkte den Durchschnitt von zweien der unbekanntem drei Kräfte, so ist hierfür das Moment dieser beiden Kräfte gleich Null, und man erhält eine Gleichung zwischen der dritten Kraft und der Mittelkraft K der äußeren Kräfte, woraus die dritte Kraft ohne Weiteres folgt. So z. B. erhält man

für die Spannkraft O die Momentengleichung in Bezug auf den Durchschnittspunkt B von T und U :

$$K.BB_1 = O.BB_2, \text{ also } O = K \frac{b_1}{b_2},$$

wenn die Abstände BB_1 mit b_1 und BB_2 mit b_2 bezeichnet werden. In gleicher Weise liefert der Durchschnittspunkt D zwischen O und T für U die Gleichung:

$$K.DD_1 = U.DD_2, \text{ oder } U = K \frac{d_1}{d_2}$$

und endlich der Durchschnittspunkt F zwischen O und U für T die Gleichung:

$$K.FF_1 = T.FF_2, \text{ also } T = K \frac{f_1}{f_2}.$$

Man erhält also jede der gesuchten Kräfte direct proportional mit der Mittelkraft K , und zwar ist das Verhältniß durch zwei Gerade wie b_1 und b_2 , d_1 und d_2 , f_1 und f_2 gegeben, welche man entweder unmittelbar aus der Zeichnung abgreifen oder auch leicht aus den Längen und Neigungen der einzelnen Constructionsglieder durch Rechnung bestimmen kann. Diese Methode der statischen Momente ist zuerst von Ritter aufgestellt und in dessen Werke*) consequent durchgeführt worden, worauf wegen des Näheren verwiesen werden mag. Bei der Führung des Schnittes $\alpha\beta$ hat man nur darauf zu achten, daß man nicht mehr als drei Constructionsglieder durchschneidet, deren Spannungen noch unbekannt sind.

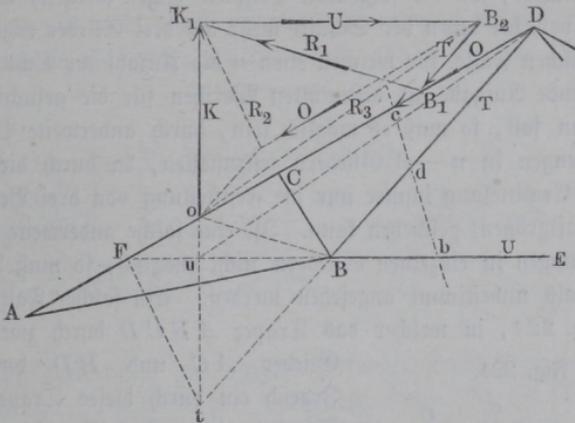
Die Feststellung der Richtungen dieser Spankräfte, d. h. die Bestimmung, ob dieselben die Constructionstheile auf Zug oder Druck beanspruchen, ist immer leicht aus ihrer Drehungsrichtung zu bewirken. Beispielsweise sucht die Kraft K das abgeschchnittene Stück in der Figur um den Punkt B rechts um zu drehen, folglich muß die Kraft O im linksdrehenden Sinne auf das betrachtete Stück ACB wirken, d. h. Cc auf Druck beanspruchen. Ebenso findet in Bb ein Zug statt wegen des linksdrehenden Sinnes, welchen U in Bezug auf D haben muß, und BD wird auf Druck in Anspruch genommen, da die Kraft K um den Punkt F linksdrehend wirkt, folglich zum Gleichgewichte eine rechtsdrehende Spannung T in d erfordert.

Will man die unbekanntten Spankräfte auf graphischen Wege bestimmen, so ist die Ermittlung nicht minder einfach. Es sei wieder durch einen Schnitt bc , Fig. 223, ein Stück $ACBbdc$ von einem beliebigen Fachwerke

*) Elementare Theorie u. Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructions von Aug. Ritter, 1863.

getrennt und die Resultirende aller äußeren Kräfte durch K dargestellt. Vier Kräfte, wie K , O , T und U können nur im Gleichgewichte sein, wenn irgend zwei von ihnen eine Mittelkraft geben, welche mit der Mittelkraft der beiden anderen in derselben Geraden gleich und entgegengesetzt ist. Denkt man sich daher die gegebene Kraft K mit einer der unbekanntenen Spannungen, z. B. O , zu einer Resultirenden zusammengesetzt, welche bekanntlich durch den Schnittpunkt o geht, so muß diese Resultirende auch den Durchschnitt B der beiden anderen Spannungen T und U in sich aufnehmen, da deren Mittel-

Fig. 223.

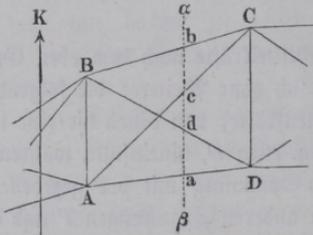


kraft durch diesen Punkt B geht, und beide Mittelkräfte nach dem eben Gesagten in einander fallen. Daraus ergibt sich ohne Weiteres die folgende Construction. Man zerlegt K in zwei Seitenkräfte, von denen die eine in die Richtungslinie der zu suchenden Spannung, etwa O , hineinfällt, während die andere von dem Durchschnitte o dieser Spannung mit der gegebenen Kraft K nach dem Durchschnitte B der beiden anderen Spannungen T und U gerichtet ist. Trägt man beispielsweise von dem Durchschnittpunkte o zwischen K und O die Strecke $oK_1 = K$ auf, und zieht durch K_1 eine Parallele K_1B_1 zu oB , so erhält man in oB_1 die von K in dem Stücke CD erzeugte Kraft, welcher in der Schnittstelle c eine entgegengesetzte Kraft B_1o das Gleichgewicht hält, d. h. das Glied CD wird durch die Kraft $O = B_1o$ gedrückt. Das Dreieck oB_1K_1 liefert ferner in der dritten Seite B_1K_1 die andere Componente R_1 , welcher die beiden Spannkraft U und T das Gleichgewicht halten müssen; man hat daher nur nöthig, diese Kraft $B_1K_1 = R_1$ nach den Richtungen von U und T zu zerlegen, indem man durch K_1 eine Parallele mit BE und durch B_1 eine Parallele mit BD zieht. Man erhält dann $U = K_1B_2$ als eine in BE wirkende Zugspannung, während $T = B_2B_1$ als Druckspannung in der Strebe DB sich ergibt. Man

gelangt natürlich zu denselben Resultaten, wenn man die Kraft K nach der Richtung von T oder U und der entsprechenden Verbindungslinie tF und bezw. uD zerlegt, in welchen Verbindungslinien zwei andere Mittelkräfte R_2 und R_3 wirken. Die betreffenden Constructionen sind in der Figur punkirt angegeben. Man wird natürlich in jedem einzelnen Falle die am bequemsten ausführbare Zerlegung vornehmen.

Im Vorstehenden wurde immer vorausgesetzt, daß das Fachwerk sich in zwei Theile durch einen Schnitt zerlegen lasse, welcher nur drei Constructionsglieder trifft. Diese Bedingung ist aber nicht immer erfüllt, es kommen vielmehr, wie die folgenden Beispiele zeigen werden, vielfach Constructionen vor, bei denen der Schnitt mehr als drei Glieder trennt. Wenn in einem solchen Falle, für welchen etwa n die Anzahl der Schnittstellen ist, die vorliegende Aufgabe zu bestimmten Werthen für die gesuchten Spannkraften führen soll, so muß es möglich sein, durch anderweite Bedingungen die Spannungen in $n - 3$ Gliedern festzustellen, da durch die vorstehend angegebene Ermittlung immer nur die Feststellung von drei Bestimmungsstücken (Kraftgrößen) geschehen kann. Ist eine solche anderweite Feststellung der Spannungen in einzelnen Gliedern nicht möglich, so muß die Aufgabe überhaupt als unbestimmt angesehen werden. Ein solcher Fall liegt z. B. vor in Fig. 224, in welcher das Trapez $ABCD$ durch zwei diagonale

Fig. 224.

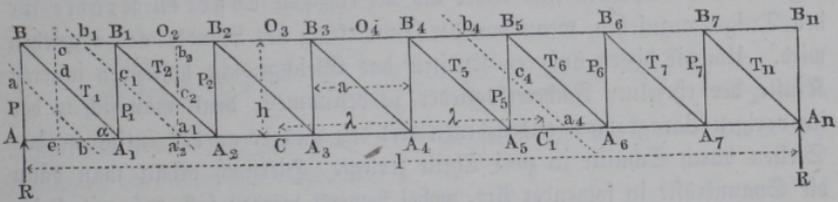


Glieder AC und BD durchsetzt ist. Irgend ein durch dieses Trapez geführter Schnitt wie $\alpha\beta$ trifft vier Glieder in a, b, c, d und es ist klar, daß die drei allgemeinen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der Kräfte in einer Ebene unzureichend sind zur Bestimmung der vier unbekanntenen Kräfte an den Schnittstellen. Man würde demnach auch, wenn man etwa nach der obigen Methode der stati-

sehen Momente den Durchschnitt zweier der Kräfte als Momentenmittelpunkt annehmen wollte, eine Momentengleichung erhalten, welche noch die beiden anderen Kräfte als Unbekannte enthielte, folglich eine Bestimmung derselben nicht zuließe. Dieser Fall hat ein besonderes Interesse wegen seines häufigen Vorkommens bei Fachwerksträgern für Brücken, bei denen in Folge der Bewegung der Last gewisse Glieder abwechselnd gezogen und gedrückt werden. Wenn man in solchen Fällen die beiden Diagonalglieder AC und BD ihrer Anordnung zufolge mit der Fähigkeit begabt denkt, nur Zugkräften aber keinen Druckkräften widerstehen zu können, so wird dadurch die erwähnte Unbestimmtheit gehoben, indem diejenige Diagonale, von welcher bei der vorausgesetzten Belastungsart eine Druckwirkung erfordert würde, als

nicht vorhanden angesehen werden muß, und man es daher nur mit drei Gliedern zu thun hat, deren Spannungen nach dem Vorgehenden immer in bestimmter Art ermittelt werden können. Das Nähere über die Wirkung solcher sogenannter Gegenstreben wird in dem Nachfolgenden aus den einzelnen Beispielen sich ergeben, welche nunmehr näher ins Auge gefaßt werden sollen.

Fachwerksträger mit parallelen Gurtungen. Eine für Brücken- §. 54.
bauten und ähnliche Ausführungen häufige Construction stellen die Fachwerksträger mit parallelen Gurtungen, Parallelträger, dar. Ein solcher Träger besteht in seiner einfachsten Anordnung aus zwei horizontalen Streckbäumen oder Gurtungen AA_n und BB_n , Fig. 225, welche in
Fig. 225.



gleichen Abständen durch eine Anzahl verticaler Ständer oder Pfosten $A_1 B_1, A_2 B_2 \dots$ mit einander verbunden sind. In die so entstehenden rechteckigen Felder sind ferner diagonale Stangen $A_1 B, A_2 B_1, A_3 B_2 \dots$ eingesetzt, welche Streben oder Bänder genannt werden, je nachdem sie gedrückt oder gezogen werden. Zwei solcher Träger, welche, an den Enden bei A und A_n auf festen Pfeilern aufliegend, parallel neben einander die zu überbrückende Deffnung überspannen, tragen die Last der Brückenbahn in oben besprochener Art mit Hilfe von Querträgern, die in den unteren oder oberen Knotenpunkten $A, A_1, A_2 \dots$ bzw. $B, B_1, B_2 \dots$ auf den Hauptträgern aufliegen. Es möge zunächst eine Belastung der unteren Knotenpunkte A vorausgesetzt werden. Ist die ganze der Rechnung zu Grunde zu legende Spannweite oder horizontale Entfernung AA_n der beiden Stützen durch l ausgedrückt, so soll die Länge a jedes Trägerfeldes, bei n Feldern also $a = \frac{l}{n}$, als Einheit angenommen werden, indem die auf ein solches Feld entfallende totale Belastung durch q bezeichnet werde, welche sich zusammensetzt aus dem Eigengewichte p und der Verkehrslast k eines Brückenfeldes von der halben Breite der Brücke. Es ist ersichtlich, daß jeder Knotenpunkt zwischen den Stützen eine Belastung gleich q , dagegen jeder der Endpunkte A und A_n nur eine Belastung gleich $\frac{q}{2}$ empfängt, wenn, wie

zunächst angenommen werden soll, die ganze Brücke gleichförmig mit der Verkehrslast nk bedeckt ist. Für diesen Fall bestimmen sich die Druckkräfte auf die Stützen A und A_n und die denselben gleichen und entgegengesetzten Reactionen der Pfeiler zu je $\frac{nq}{2}$. Man kann indessen bemerken,

daß von jeder Pfeilerreaction ein Theil gleich $\frac{q}{2}$ direct durch die in A und A_n wirkende Belastung im Gleichgewichte gehalten wird, so daß man sich vorzustellen hat, der Träger werde an jedem Ende durch eine vertical aufwärts gerichtete Reaction

$$R = \frac{n-1}{2} q \dots \dots \dots (1)$$

angegriffen. Diese Reactionen und die Belastungen q der $n-1$ zwischenliegenden Knotenpunkte sind daher als die einzigen äußeren Kräfte für den Träger anzusehen, wenn von der Einwirkung des Winddruckes abgesehen wird. Um die diesen äußeren Kräften das Gleichgewicht haltenden inneren Kräfte der einzelnen Fachwerksglieder zu bestimmen, denkt man sich in der im vorigen Paragraphen angegebenen Art den Träger an den entsprechenden Stellen durch Schnitte in zwei Theile zerlegt. Hiernach erhält man dann die Spannkkräfte in folgender Art, wobei bemerkt werden soll, daß mit P die Kräfte in den Pfosten, mit T die in den Diagonalen und mit O die in den oberen, mit U die in den unteren Gurtungstheilen bezeichnet werden sollen.

Ein Schnitt nach ab schneidet von dem Träger das Dreieck aAb ab, auf welches als einzige äußere Kraft die Pfeilerreaction

$$R = \frac{n-1}{2} q$$

wirkt, welcher Kraft daher die in a wirkende Druckkraft

$$-R = -\frac{n-1}{2} q$$

das Gleichgewicht hält; mit anderen Worten, der Endpfosten AB wird durch eine Kraft

$$P = R = \frac{n-1}{2} q \dots \dots \dots (2)$$

auf Druck beansprucht. In dem Gurtungstheile AA_1 findet keinerlei Spannung statt, da eine horizontale Kraft nicht vorhanden ist, welche aufgehoben werden müßte.

Ein Schnitt nach cde liefert zwei Kräfte O_1 in c und T_1 in d , welche sich durch die Momentengleichungen in Bezug auf A_1 und B_1 als Drehpunkte bestimmen, und zwar folgt für A_1 als Momentenmittelpunkt:

$$R a + O_1 h = 0; O_1 = - R \frac{a}{h} = - \frac{a}{h} \frac{n-1}{2} q \dots (3)$$

wenn mit h die verticale Entfernung der Schwerpunkte beider Gurtungen bezeichnet wird. Das negative Zeichen in (3) deutet darauf hin, daß die Spannkraft O_1 in c nach links gerichtet, die Gurtung B, B_1 also gedrückt ist. In gleicher Weise erhält man für den Mittelpunkt der Momente in B_1 :

$$R a = T_1 a \sin \alpha,$$

woraus

$$T_1 = \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{n-1}{2 \sin \alpha} q \dots (4)$$

folgt, wenn $\alpha = B A_1 A$ die Neigung der Diagonalen gegen den Horizont bedeutet.

Weiter ergibt ein Schnitt $a_2 c_2 b_2$ für den Mittelpunkt der Momente in A_2 aus

$$R 2 a - q a = O_2 h; O_2 = \frac{R 2 a - q a}{h} = \frac{M_2}{h},$$

wenn man das Biegemoment des Balkens in A_2 $R 2 a - q a$ mit M_2 bezeichnet, oder man hat allgemein

$$O_v = \frac{M_v}{h} \dots (5)$$

Es ist ohne Weiteres klar, daß die Spannung U_2 in dem unteren Gurtungsstücke $A_1 A_2$ der Spannung O_1 in $B B_1$ der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt ist, wie man durch einen Schnitt nach $a_1 c_1 b_1$ erkennt, wenn man B_1 als Momentenmittelpunkt annimmt, wodurch man aus

$$R a = U_2 h; U_2 = R \frac{a}{h} = - O_1 = - \frac{M_1}{h}$$

erhält. Dies geht auch schon daraus hervor, daß von den fünf das Stück $A A_1 a_1 c_1 b_1 B$ angreifenden Kräften R, O_1, P_1, U_2 und q (in A_1) die beiden O_1 und U_2 horizontal, die übrigen drei vertical gerichtet sind, und aus dieser Betrachtung folgt daher auch für die Kraft P_1 in dem Pfosten $A_1 B_1$:

$$P_1 = R - q = V_1, \dots (7)$$

wenn mit V_1 die verticale Scheerkraft in A_1 bezeichnet wird.

Da die letztere Betrachtung für jedes andere Balkenfeld, also z. B. für den Schnitt $a_4 c_4 b_4$, in gleicher Weise gilt, und man dafür

$$U_6 = - O_5 = - \frac{M_5}{h} \text{ und } P_5 = R - 5 q = V_5$$

erhält, so kann man allgemein schreiben:

$$U_{\nu+1} = - O_{\nu} = \frac{M_{\nu}}{h} = q \frac{a}{h} \nu \frac{n - \nu^*}{2}, \dots \quad (8)$$

$$P_{\nu} = R - \nu q = V_{\nu} = q \frac{n - 1 - 2\nu}{2} \dots \quad (9)$$

Aus der Anstrengung der Pfosten ergibt sich nun ohne Weiteres wieder die Spannkraft der Diagonalen, denn es ist klar, daß in irgend einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung, wie z. B. in B_5 , die verticale Componente der Strebenkraft $T_6 \sin \alpha$ gerade gleich der Kraft P_5 in dem daselbst sich anschließenden Pfosten sein muß. Man hat daher

$$T_6 = \frac{P_5}{\sin \alpha'}$$

oder allgemein

$$T_{\nu} = \frac{P_{\nu-1}}{\sin \alpha} = \frac{V_{\nu-1}}{\sin \alpha} \dots \dots \dots \quad (10)$$

Demgemäß erhält man nach (9) für das letzte Feld die Spannung im Pfosten $A_7 B_7$ zu

$$P_{n-1} = R - (n - 1) q = - \frac{n - 1}{2} q = - R,$$

während in dem Endpfosten $A_n B_n$ die Kraft gleich Null ist. Ebenso ist die Spannung in dem letzten Stücke der oberen Gurtung $B_7 B_n$ nach (5) gleich Null, während die Strebenkraft in $A_n B_7$ zu

$$T_n = \frac{P_7}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

sich ergibt. Aus (5) und (8) erkennt man zunächst, daß die Spannung in den Gurtungen in der Mitte, wo das Moment M ein Maximum ist, den größten Werth und zwar oben links und unten rechts von dem mittleren Pfosten $A_4 B_4$ annimmt. Da ferner in diesem Pfosten die Verticalkraft V ihre Richtung umkehrt, indem dieselbe links von $A_4 B_4$ aufwärts und rechts von $A_4 B_4$ abwärts gerichtet ist, so folgt aus (9) und (10) auch ein entgegengesetzter Sinn für die Kräfte in den Pfosten und Streben zu beiden Seiten dieses mittleren Querschnittes. Während z. B. die Diagonale $A_4 B_3$ durch die Kraft

*) Das Biegemoment M_{ν} in dem um ν Felder vom Auflager entfernten Knotenpunkte bestimmt sich bei voller Belastung des Trägers zu

$$\begin{aligned} M_{\nu} &= R \nu a - q [a + 2a + 3a + \dots + (\nu - 1)a] = q \frac{n-1}{2} \nu a - q \frac{\nu-1}{2} \nu a \\ &= q a \nu \frac{n-\nu}{2} \dots \dots \dots \quad (8^a) \end{aligned}$$

$$T_4 = \frac{R - 3q}{\sin \alpha} = \frac{q}{2 \sin \alpha}$$

gezogen wird, ist die folgende Diagonale $A_5 B_4$ einer ebenso großen Druckkraft

$$T_5 = \frac{R_1 - 4q}{\sin \alpha} = - \frac{q}{2 \sin \alpha} = - T_4$$

ausgesetzt. Der mittlere Pfosten $A_4 B_4$ wird durch die verticale Componente von T_5 mit $\frac{q}{2}$ gezogen, indem dieser Pfosten im Gleichgewichte ist, unter dem Einflusse der im unteren Knotenpunkte A_4 angreifenden Belastung q und der in A_4 und B_4 nach oben wirkenden gleichen verticalen Componenten der Diagonalspannungen T_4 und T_5 , von denen diejenige von T_4 direct durch die Last q aufgenommen wird, während die Componente von T_5 erst durch Vermittelung des Pfostens auf den Lastpunkt übertragen wird, daher in dem Pfosten eine Spannung $\frac{q}{2}$ hervorruft. Wenn man annimmt, daß die Belastung q nicht in den unteren Knotenpunkten A , sondern in den oberen B angreift, so findet sich sogleich, daß dadurch in den Spannungen der einzelnen Fachwerksglieder nur insofern eine Aenderung eintritt, als jeder der inneren Pfosten noch außerdem einer zusätzlichen rückwirkenden Pressung im Betrage q ausgesetzt ist, während für die Endpfosten AB und $A_n B_n$ diese Vermehrung natürlich nur den Betrag $\frac{q}{2}$ hat. Demgemäß bestimmt sich z. B. in dem Pfosten AB die rückwirkende Pressung in dem Falle der Belastung des oberen Streckbaumes zu $P = R + \frac{q}{2} = \frac{n}{2} q$, während sie in dem letzten Stiele $A_n B_n$ nun nicht gleich Null, sondern gleich $\frac{q}{2}$ anzunehmen ist. Ebenso ist der mittlere Pfosten $A_4 B_4$ in diesem Falle nicht einer Zug-, sondern einer Druckspannung $\frac{q}{2}$ ausgesetzt. Für die Kräfte in den Gurtungen und Diagonalen jedoch macht es gar keinen Unterschied, ob der obere oder untere Streckbaum zur Aufnahme der Belastung dient, oder ob die Brückenbahn zwischen beiden an den verticalen Pfosten befestigt ist. In dem letzteren Falle gelten offenbar für die Pfostenstücke oberhalb der Fahrbahn diejenigen Spannungen, welche vorstehend unter Zugrundelegung einer Belastung des unteren Streckbaumes gefunden wurden, während für die unterhalb der Fahrbahn befindlichen Stücke der Pfosten für jeden inneren Stiel noch eine rückwirkende Pressung von q und für jeden Endstiel von $\frac{q}{2}$ hinzuzufügen ist, wie dies einer Belastung der oberen Gurtung entsprechen würde.

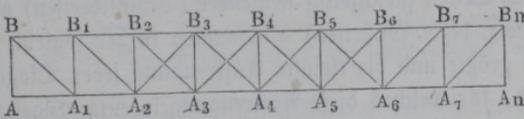
Aus dem Bemerkten ergibt sich, daß bei der in der Figur angenommenen Anordnung die Stiele links von der Mitte gedrückt und rechts von der Mitte gezogen werden, und daß umgekehrt die Diagonalen links von der Mitte als Zugbänder und rechts von der Mitte als Druckstreben wirken, welches Verhalten man so ausdrücken kann, daß bei einem Träger wie der vorliegende ist, in jeder Hälfte die Diagonalen gezogen werden, wenn sie nach dem zugehörigen Stützpunkte hin ansteigen, dagegen einer Pressung unterliegen, wenn sie nach der Mitte hin, also von dem zugehörigen Stützpunkte weg, ansteigen.

Derjenige Querschnitt, in welchem dieser Wechsel zwischen Zug- und Druckkräften in den Pfosten und Diagonalen eintritt, ist nach dem Vorhergehenden dadurch charakterisirt, daß in ihm die Verticalkraft V ihr Zeichen ändert oder durch Null geht, also in ihm auch das größte Moment M_{max} stattfindet. Dieser Querschnitt ist in der Mitte des Trägers nur dann gelegen, wenn, wie im Vorstehenden immer vorausgesetzt wurde, der Balken über seine ganze Länge gleichmäßig belastet ist. Wenn man dagegen eine nur theilweise Beschwerung des Trägers durch die mobile Belastung annimmt, so fällt dieser Querschnitt des Maximalmomentes nicht mehr mit der Mitte zusammen. Es ist vielmehr in §. 36 gezeigt worden, daß bei dem Auffahren der mobilen Last auf den Träger etwa in der Richtung von A nach A_n , der gedachte Querschnitt für $V = 0$ oder $M = M_{max}$ aus der Trägermitte der ankommenden Last entgegenght, bis er mit dem Anfangspunkte derselben in C in einem Abstände λ links von der Mitte zusammentrifft, um dann beim weiteren Fortschreiten der Last mit dieser zugleich nach der Mitte A_4 und über diese hinaus bis zum Abstände $\lambda = A_4 C_1$ sich zu bewegen und schließlich nach der Mitte zurückzukehren, sobald die ganze Trägerlänge mit der Last gleichmäßig bedeckt ist. Hieraus folgt daher, daß auch derjenige Querschnitt, in welchem ein Wechsel zwischen Zug- und Druckspannung der Füllungstheile eintritt, je nach der Bewegung der Last seine Lage innerhalb der Strecke CC_1 verändert, oder daß die Pfosten und Diagonalen zu jeder Seite der Mitte in einem Abstände λ ebensowohl auf Druck wie auf Zug in Anspruch genommen werden.

Einen derartigen Wechsel in der Anstrengung der Diagonalen bald auf Zug bald auf Druck muß man nun mit Rücksicht auf die Verbindungen in den Knotenpunkten thunlichst vermeiden, und man pflegt die Anordnung so zu treffen, daß sämtliche Diagonalen entweder nur auf Druck oder nur auf Zug angesprochen werden können. Insbesondere pflegt man bei der Verwendung von Schmiedeeisen die Diagonalen immer so anzuordnen, daß sie als Bänder oder Zuganker zur Wirkung kommen, während man

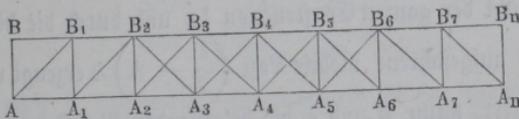
bei hölzernen Fachwerksträgern die Diagonalen meist als Druckstreben zur Wirkung bringt. Um dies zu erreichen, hat man nur das vorstehend ausgesprochene Gesetz zu berücksichtigen, wonach die Diagonalen in jedem der beiden Theile, in welche der Träger durch den Querschnitt des Maximalmomentes getheilt wird, entweder gezogen oder gedrückt werden, je nachdem sie nach dem zugehörigen Auflager hin ansteigen oder abfallen. Sollen daher die Diagonalen nur gezogen werden, so hat man sie nach Fig. 226 von dem unteren Knotenpunkte A_4 aus beiderseits nach den Auflagern hin

Fig. 226.



ansteigen zu lassen, wie $A_4 B_3$ und $A_4 B_5$, während eine Anordnung wie Fig. 227, bei welcher die Diagonalen von dem mittleren oberen Knotenpunkte nach den Auflagern hin abfallen, die Diagonalen als Druckstreben zur Wirkung bringt. Mit Rücksicht auf die angeführte, durch die Beweg-

Fig. 227.



lichkeit der Last erzeugte Verschiebung des Maximalmomentenquerschnitts aus der Mitte hat man daher, wenn die Diagonalen nur in einer Richtung widerstandsfähig sind, den mittleren Feldern bis zum Abstände λ zu jeder Seite der Mitte, Diagonalglieder nach beiden Richtungen, sogenannte Kreuz- oder Gegenstreben, zu geben, wie dies in den Figuren angedeutet ist. Selbstverständlich wird von diesen in den mittleren Feldern angeordneten gekreuzten Diagonalen immer nur die eine in Spannung versetzt, diejenige nämlich, in welcher eine solche Anstrengung (Zug oder Druck) hervorgerufen wird, gegen welche die Diagonalen vermöge ihrer Anordnung überhaupt nur reagiren können. Würde man annehmen müssen, daß diese Kreuzstangen eben so gut gegen Druck- wie Zugkräfte reagiren könnten, so würde nach dem im vorhergehenden Paragraphen Bemerkten die in jeder einzelnen Stange auftretende Kraft unbestimmt sein. Bei den schmiedeeisernen Fachwerken darf man annehmen, daß die Diagonalen von flacher bandförmiger Gestalt Druckkräften nicht zu widerstehen vermögen, indem sie zufolge ihrer größeren Länge einer seitlichen Ausbiegung unterworfen sind, weshalb man bei schmiedeeisernen Fachwerken solche Diagonalen als Zugbänder nach Fig. 226 anzuordnen hat. Bei hölzernen und gußeisernen,

zwischen die Gurtungen gespreizten Diagonalen sind dieselben wesentlich geeignet, Druckkräften zu widerstehen, und erfordern dieselben daher die durch Fig. 227 dargestellte Anordnung. Sollen schmiedeeiserne Fachwerksglieder, wie die oberen Gurtungstheile und Pfosten, druckfähig sein, so hat man natürlich denselben geeignete Querschnitte zu geben, welche vermöge ihrer Form die obgedachte seitliche Ausbiegung nicht zulassen, worüber später noch Näheres angegeben werden wird.

Die Anzahl der mittleren Felder, welche mit Gegenstreben zu versehen sind, findet man dadurch, daß man für das System einfacher, von der Mitte aus nach beiden Seiten gleichzeitig steigender (Schmiedeeisen) oder gleichzeitig abfallender (Holz, bezw. Gußeisen) Diagonalen in der sogleich zu besprechenden Weise die größte und die kleinste Anstrengung jeder Diagonale ermittelt und jedes Feld, für welches diese Anstrengungen entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, mit einer Gegenstrebe versehen. Man kann zu dieser Bestimmung auch durch Berechnung der in Fig. 225 mit λ bezeichneten Entfernung $A_4C = A_4C_1$ gelangen, um welche der Querschnitt des Maximalmomentes unter dem Einflusse der mobilen Last sich aus der Mitte verschiebt. Man findet diese Größe λ nach dem im §. 36 darüber Angeführten durch Gleichsetzung der beiden entgegengesetzten abschneerenden Kräfte, welche in C durch das Eigengewicht der ganzen Construction lp und durch die bis zum Punkte C von A aus aufgefahrene mobile Last $\left(\frac{l}{2} - \lambda\right)k$ erzeugt werden. Diese Bedingung liefert, wenn p und k die betreffenden Belastungen pro Längeneinheit vorstellen:

$$\frac{pl}{2} - p\left(\frac{l}{2} - \lambda\right) = k\left(\frac{l}{2} - \lambda\right)\frac{\frac{l}{2} - \lambda}{2l},$$

oder, wenn $\frac{l}{2} - \lambda = AC = A_nC_1 = c$ gesetzt wird:

$$c^2 + 2\frac{p}{k}lc = \frac{p}{k}l^2.$$

Setzt man noch das Verhältniß

$$\frac{\text{Eigengewicht}}{\text{Verkehrslast}} = \frac{p}{k} = n,$$

so folgt aus der gefundenen Gleichung:

$$\begin{aligned} c &= \left(\frac{l}{2} - \lambda\right) = -nl + \sqrt{(n^2 + n)l^2} \\ &= l(-n + \sqrt{n^2 + n}) \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

Hieraus erhält man für:

$n = \frac{p}{k} =$	1	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$c = \frac{l}{2} - \lambda =$	0,414 l	0,366 l	0,348 l	0,325 l	0,290 l	0,232 l
$\lambda =$	0,086 l	0,134 l	0,152 l	0,175 l	0,210 l	0,268 l

Hätte man z. B. für einen Träger von 30 m Spannweite $n = \frac{p}{k} = 0,3$, so würde $\lambda = 0,175 \cdot 30 = 5,25$ m folgen, und wenn der ganze Träger in 10 Felder von je 3 m Länge abgetheilt wäre, so müßten auf jeder Seite von der Mitte zwei, also im Ganzen vier Felder mit Gegenstreben versehen werden.

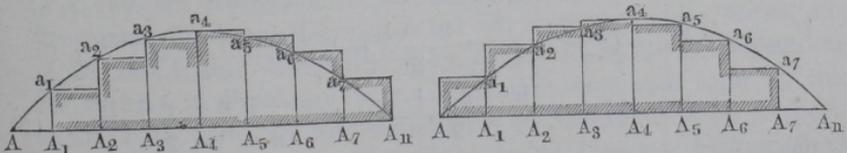
Bisher wurde immer eine volle Belastung des Trägers über seine ganze Länge angenommen und es bleibt daher noch zu untersuchen, ob dieser Belastungszustand auch der ungünstigste ist, welchem die größte Anstrengung der einzelnen Fachwerksglieder entspricht. In Betreff der Gurtungen ist dies allerdings der Fall, denn da nach (8) an irgend einem Pfosten A_ν die Spannung der rechts unten bzw. links oben sich anschließenden Gurtung

$$U_{\nu+1} = O_\nu = \frac{1}{h} M_\nu,$$

ist, und da nach §. 36 das Biegemoment M in irgend einem Querschnitte seinen absolut größten Werth bei der vollen Belastung des Balkens erreicht, so folgt, daß die Gurtungen in allen Querschnitten ihre größten Spannungen bei voller Belastung des ganzen Trägers annehmen. Man kann daher die in §. 36 für die größten Momente angegebene Parabel ebenfalls als eine Darstellung für die Spannkraft in den Gurtungen und für die den Gurtungen zu gebenden Querschnitte ansehen. Wenn man nämlich in den Figuren 228 und 229 über

Fig. 228.

Fig. 229.



$AA_n = l$ die Parabeln aufträgt, für welche die Ordinaten in den Knotenpunkten $A, A_1, A_2 \dots$ gleich den zugehörigen Momenten M, M_1, M_2 des Fachwerksträgers, Fig. 225, bei voller Belastung sind, so ist nach dem Vorstehenden klar, daß jede dieser Ordinaten, z. B. $A_3 a_3$, auch ein Maß

abgiebt für die Spannung also den Querschnitt der unteren Gurtung in dem Felde rechts von $A_3 B_3$ und der oberen Gurtung in dem Felde links von $A_3 B_3$, weil nach (8)

$$U_4 = O_3 = \frac{1}{h} M_3 \text{ ist.}$$

Wenn man daher annimmt, daß die Querschnitte der Gurtungen, die innerhalb der einzelnen Felder constant sein müssen, von Knotenpunkt zu Knotenpunkt sich den daselbst auftretenden Spannungen gemäß ändern, so erkennt man, daß durch die schraffirten, aus einzelnen Rechtecken zusammengesetzten Flächen in Fig. 228 der Materialaufwand der unteren und in Fig. 229 derjenigen der oberen Gurtung graphisch veranschaulicht wird.

In Betreff der Anstrengungen, welchen die Füllungsglieder, die Pfosten und Diagonalen, ausgesetzt sind, erkennt man aus (9) und (10), daß diese mit der Verticalkraft V proportionalen Anstrengungen P und T ihre äußersten Werthe gleichzeitig mit den größten und kleinsten Werthen der Verticalkraft V annehmen. Nun ist aber in §. 36 gezeigt worden, daß in irgend einem Querschnitte die Verticalkraft V den größten positiven Werth annimmt, wenn die ganze Strecke zwischen diesem Querschnitte und dem jenseitigen Stützpunkte mit der beweglichen Last bedeckt ist, während der größte negative Werth von V sich einstellt, wenn die Strecke zwischen dem Querschnitte und dem diesseitigen Stützpunkte belastet ist. Will man also für irgend einen Knotenpunkt, z. B. für A_3 , Fig. 225, die größte positive oder aufwärts gerichtete Verticalkraft V_{max} finden, so hat man die Strecke $A_3 A_n$ als mit der mobilen Belastung bedeckt anzunehmen, und nach den bekannten Regeln die Scheerkraft in diesem Querschnitte als die aus der Gesamtbelastung des Trägers resultirende Auflagerreaction in A , vermindert um das Eigengewicht des Stückes $A A_3$ zu bestimmen. Ebenso findet man die kleinste Schubkraft für A_3 unter der Annahme, daß die bewegliche Last die Strecke von A bis A_3 bedeckt.

Für das v te Feld, von dem Auflager A an gerechnet, findet man demnach die äußersten Scheerkräfte:

$$\begin{aligned} V_{v,max} &= R_v - (v-1)p = \frac{n-1}{2}p + \frac{1+2+\dots+n-v}{n}k \\ &\quad - (v-1)p = \frac{n-2v+1}{2}p + \frac{n-v}{n} \frac{n-v+1}{2}k. \quad (12) \end{aligned}$$

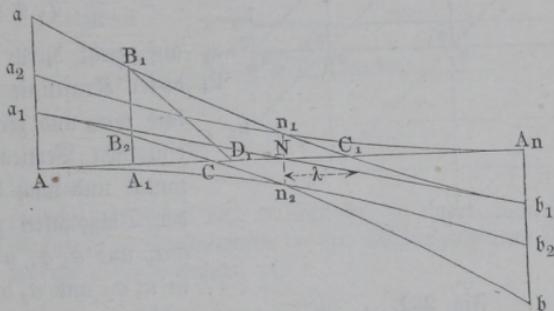
und

$$\begin{aligned} V_{v,min} &= R_v - (v-1)q = \frac{n-1}{2}p + \frac{n-1+n-2+\dots+n-v+1}{n}k \\ &\quad - (v-1)p - (v-1)k = \frac{n-2v+1}{2}p - v \frac{v-1}{2n}k. \quad (13) \end{aligned}$$

Aus diesen Grenzwertben der Scheerkraft V findet man daher nach (9) und (10) die äußersten Inanspruchnahmen P der Pfosten und T der Diagonalen.

Nach dem in §. 36 über die Maxima und Minima der verticalen Scheerkräfte Angeführten ist es nun auch leicht, die Anstrengungen der Füllungs-glieder graphisch zu veranschaulichen. Trägt man nämlich auf einer Aze $AA_n = l$, Fig. 230, die Strecke $Aa_1 = A_n b_1 = p \frac{l}{2}$ ab und zieht die Gerade $a_1 N b_1$, so erhält man in dieser das Diagramm für die aus dem Eigengewichte herrührenden Scheerkräfte. Ferner erhält man die Begrenzung

Fig. 230.



der maximalen Schubkräfte, welche durch die mobile Belastung k erzeugt werden, in den beiden Parabeln $a_2 n_1 A_n$ und $A_n n_2 b_2$, die ihren Scheitel bezw. in A_n und A haben, und deren zur Scheiteltangente AA_n senkrechte Ordinaten $Aa_2 = A_n b_2 = k \frac{l}{2}$ sind. Eine Vereinigung dieser beiden

Diagramme für p und k durch Addition der Ordinaten führt dann zu den beiden Curven $a_1 C_1 b_1$ und $a_1 C b$ derart, daß $a_1 C_1 b_1$ den größten und $a_1 C b$ den kleinsten Schubkräften entspricht. Zeichnet man auf der Aze AA_n die den Knotenpunkten $A_1, A_2 \dots$ entsprechenden Ordinaten, so findet man für jeden Knotenpunkt wie A_1 zwei verschiedene Schubkräfte $A_1 B_1$ und $A_1 B_2$. Von diesen ist die größere $A_1 B_2$ der Dimensionierung des Pfostens zu Grunde zu legen. Zieht man dann noch durch B_1 eine Gerade $B_1 D_1$ unter dem Neigungswinkel α der Diagonalen gegen die Horizontale, so giebt $B_1 D_1$ das Maß für die in der Diagonale wirkende Kraft $\frac{V}{\sin \alpha}$, welche von dem unbelasteten Knotenpunkte des Pfostens $A_1 B_1$ ausgeht. Das Diagramm giebt in der Strecke CC_1 zwischen den Durchschnittpunkten der Aze mit den beiden Curven der maximalen Schubkraft

ebenfalls die Länge 2λ in der Mitte des Trägers, für welche Gegenstreben anzuordnen sind, da in dieser Strecke die beiden gedachten Schubkräfte entgegengesetzte Vorzeichen annehmen.

Nach dem Vorstehenden ist es nun auch leicht, die Anstrengungen der einzelnen Glieder des Fachwerkes aus der Construction eines einfachen Kräftepolygons zu entnehmen. Nimmt man wieder volle Belastung des Trägers,

Fig. 231.

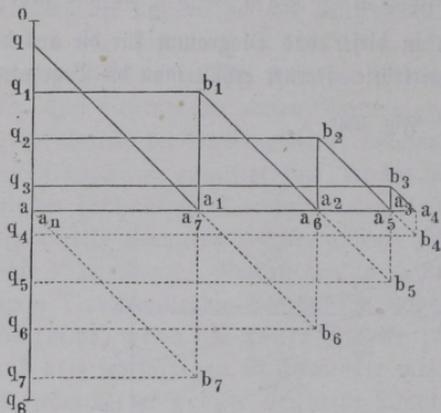


Fig. 232.

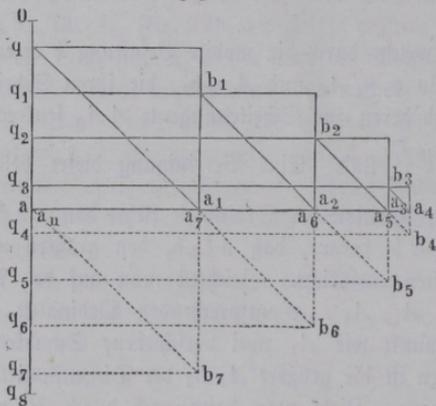


Fig. 225, an, und trägt in Fig. 231 und 232 auf einer Verticallinie von o bis q_8 die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte gleich

$$\frac{q}{2}, q, q \dots \frac{q}{2}$$

auf, zieht durch die Mitte a dieser Kraftlinie die Horizontale aa_4 und zerlegt nun die einzelnen Verticalkräfte horizontal und nach der Richtung der Diagonalen z. B. aq in aa_1 und a_1q , $aq_1 = a_1b_1$ in a_1a_2 und a_2b_1 u. s. f., so erhält man das Diagramm in Fig. 231, wenn die unteren Knotenpunkte belastet sind, während Fig. 232 für die Anordnung gilt, bei der die Fahrbahn auf der oberen Gurtung ruht. Die Vergleichung der in die einzelnen Strecken eingezeichneten Bezeichnung mit der übereinstimmenden in Fig. 225 läßt ohne Schwierigkeit die Anstrengung jedes einzelnen Gliedes bei voller Belastung erkennen. Will man dann auch

die größten Spannungen der Pfosten und Diagonalen bei theilweiser Belastung kennen lernen, so kann in der vorgedachten Weise die Fig. 230 hierzu dienen, wenn man in derselben die Verticalkraft Aa in den Auslagern gleich $aq = aq_7$ der Figuren 231 und 232 macht, u. s. f.

Das hier erörterte Fachwerkssystem mit rechtwinkligen Dreiecken und Zugstreben heißt das Mohrié'sche; bei dem Howe'schen Systeme wirken

die Diagonalen als Druckstreben. Die Höhe h derartiger Träger pflegt man in der Praxis etwa gleich $\frac{1}{10}$ der Spannweite l zu wählen, und den Diagonalen meist eine Neigung unter 45° gegen den Horizont zu geben, da sich leicht zeigen läßt, daß bei einer solchen Neigung der Diagonalen der Materialaufwand verhältnißmäßig am geringsten ausfällt. Nimmt man $\alpha = 45^\circ$ und $h = \frac{1}{10}l$, so erhält man die Anzahl der Felder gleich 10.

Beispiel. Für einen Fachwerksträger von 30 m Länge und 3 m Höhe zwischen den parallelen Gurtungen, welcher in 10 quadratische Felder abgetheilt ist, sollen die Spannungen der Glieder ermittelt werden, wenn das Eigengewicht der ganzen Brückenconstruction pro laufenden Meter mit 2 Tonnen und die Verkehrslast des Geleises mit 6 Tonnen angenommen wird.

Da das Gewicht der Brückenbahn auf zwei Träger sich vertheilt, so erhält man für jeden Knotenpunkt

$$p = \frac{1}{2} 3 \cdot 2 = 3 \text{ Tonnen}$$

und

$$k = \frac{1}{2} 3 \cdot 6 = 9 \text{ Tonnen}$$

also $q = 12$ Tonnen.

Legt man zunächst die Figur 233 zu Grunde, so findet man für die volle Belastung des Trägers die Spannungen in den Gurtungstheilen, wenn man in (8) für ν die Werthe 1 bis 9 einsetzt, zu:

$$O_1 = U_2 = q \frac{a}{h} \nu \frac{n-\nu}{2} = 12 \frac{3}{3} 1 \frac{10-1}{2} = 54 \text{ Tonnen,}$$

$$O_2 = U_3 = 12 \cdot 2 \frac{8}{2} = 96 \text{ Tonnen,}$$

$$O_3 = U_4 = 12 \cdot 3 \frac{7}{2} = 126 \text{ Tonnen,}$$

$$O_4 = U_5 = 12 \cdot 4 \frac{6}{2} = 144 \text{ Tonnen,}$$

$$O_5 = U_6 = 12 \cdot 5 \frac{5}{2} = 150 \text{ Tonnen,}$$

$$O_6 = U_7 = 12 \cdot 6 \frac{4}{2} = 144 \text{ Tonnen} = O_4 = U_5,$$

$$O_7 = U_8 = 12 \cdot 7 \frac{3}{2} = 126 \text{ Tonnen} = O_3 = U_4,$$

$$O_8 = U_9 = 12 \cdot 8 \frac{2}{2} = 96 \text{ Tonnen} = O_2 = U_3,$$

$$O_9 = U_{10} = 12 \cdot 9 \frac{1}{2} = 54 \text{ Tonnen} = O_1 = U_2,$$

Die Spannungen U_1 und O_{10} sind Null. Die äußersten Spannungen der Diagonalen finden sich aus den nach (12) und (13) zu ermittelnden Werthen von V_{max} und V_{min} .

Es möge entsprechend wie früher hinsichtlich der Schubkraft das positive Zeichen einer aufwärts gerichteten Kraft, also bei den Diagonalen in der Figur einer Zugkraft gegeben werden, so daß ein negatives Resultat eine Druckkraft andeutet. Man erhält, da hier

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$$

ist, dann die Strebekräfte

$$T = \frac{V}{\sin \alpha} = V \sqrt{2} = 1,414 V.$$

Nimmt man ferner eine Belastung der unteren Gurtungen an, so folgt für das erste Feld mit $\nu = 1$:

$$V_{1max} = \frac{n-2\nu+1}{2} p + \frac{n-\nu}{n} \frac{n-\nu+1}{2} k = \frac{9}{2} 3 + \frac{9}{10} \frac{10}{2} 9 = + 54 \text{ t} = P_{max};$$

$$T_{1max} = 1,414 \cdot 54 = + 76,36 \text{ t.}$$

$$V_{1min} = \frac{n-2\nu+1}{2} p - \nu \frac{\nu-1}{2n} k = \frac{9}{2} 3 - 0 = + 13,5 = P_{min};$$

$$T_{1min} = 1,414 \cdot 13,5 = + 19,09 \text{ t.}$$

Ebenso für die übrigen Felder

$$V_{2max} = \frac{7}{2} 3 + \frac{8}{10} \frac{9}{2} 9 = + 42,9 = P_{1max}; \quad T_{2max} = + 60,66 \text{ t.}$$

$$V_{2min} = \frac{7}{2} 3 - 2 \frac{1}{20} 9 = + 9,6 = P_{1min}; \quad T_{2min} = + 13,57 \text{ t.}$$

$$V_{3max} = \frac{5}{2} 3 + \frac{7}{10} \frac{8}{2} 9 = + 32,7 = P_{2max}; \quad T_{3max} = + 46,24 \text{ t.}$$

$$V_{3min} = \frac{5}{2} 3 - 3 \frac{2}{20} 9 = + 4,8 = P_{2min}; \quad T_{3min} = + 6,79 \text{ t.}$$

$$V_{4max} = \frac{3}{2} 3 + \frac{6}{10} \frac{7}{2} 9 = + 23,4 = P_{3max}; \quad T_{4max} = + 33,08 \text{ t.}$$

$$V_{4min} = \frac{3}{2} 3 - 4 \frac{3}{20} 9 = - 0,9 = P_{3min}; \quad T_{4min} = - 1,27 \text{ t.}$$

$$V_{5max} = \frac{1}{2} 3 + \frac{5}{10} \frac{6}{2} 9 = + 15 = P_{4max}; \quad T_{5max} = + 21,21 \text{ t.}$$

$$V_{5min} = \frac{1}{2} 3 - 5 \frac{4}{20} 9 = - 7,5 = P_{4min}; \quad T_{5min} = - 10,60 \text{ t.}$$

$$V_{6max} = - \frac{1}{2} 3 + \frac{4}{10} \frac{5}{2} 9 = + 7,5 = P_{5max}; \quad T_{6max} = + 10,60 \text{ t.}$$

$$V_{6min} = - \frac{1}{2} 3 - 6 \frac{5}{20} 9 = - 15 = P_{5min}; \quad T_{6min} = - 21,21 \text{ t.}$$

$$V_{7max} = - \frac{3}{2} 3 + \frac{3}{10} \frac{4}{2} 9 = + 0,9 = P_{6max}; \quad T_{7max} = + 1,27 \text{ t.}$$

$$V_{7min} = - \frac{3}{2} 3 - 7 \frac{6}{20} 9 = - 23,4 = P_{6min}; \quad T_{7min} = - 33,08 \text{ t.}$$

$$V_{8max} = -\frac{5}{2} \cdot 3 + \frac{2}{10} \cdot 3 \cdot 9 = -4,8 = P_{7max}; \quad T_{8max} = -6,79 \text{ t.}$$

$$V_{8min} = -\frac{5}{2} \cdot 3 - 8 \cdot \frac{7}{20} \cdot 9 = -32,7 = P_{7min}; \quad T_{8min} = -46,24 \text{ t.}$$

$$V_{9max} = -\frac{7}{2} \cdot 3 + \frac{1}{10} \cdot 2 \cdot 9 = -9,6 = P_{8max}; \quad T_{9max} = -13,57 \text{ t.}$$

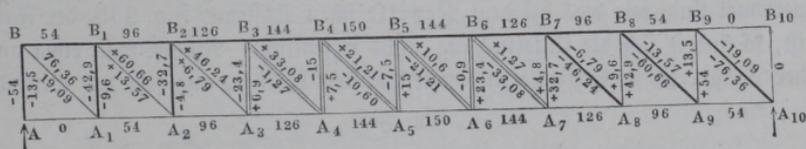
$$V_{9min} = -\frac{7}{2} \cdot 3 - 9 \cdot \frac{8}{20} \cdot 9 = -42,9 = P_{8min}; \quad T_{9min} = -60,66 \text{ t.}$$

$$V_{10max} = -\frac{9}{2} \cdot 3 + 0 = -13,5 = P_{9max}; \quad T_{10max} = -19,09 \text{ t.}$$

$$V_{10min} = -\frac{9}{2} \cdot 3 + 10 \cdot \frac{9}{20} \cdot 9 = -54 = P_{9min}; \quad T_{10min} = -76,36 \text{ t.}$$

Diese Zahlen, welche in die Fig. 233 eingetragen sind, zeigen, daß bei der dieser Figur entsprechenden Anordnung der Diagonalen die letzteren in den linken drei Endfeldern $A-A_3$ nur gezogen, in den rechtsliegenden drei Feldern A_7-A_{10} nur gedrückt und in den Mittelfeldern abwechselnd gedrückt

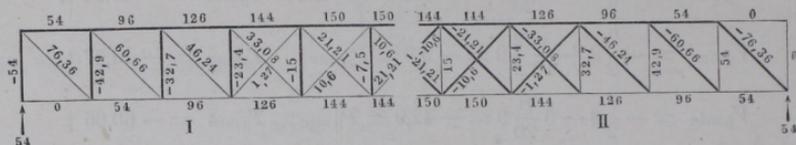
Fig. 233.



und gezogen werden, wie dies in der Figur durch schwache, starke und doppelte Linien angedeutet ist. Demgemäß werden auch die vier mittleren Stiele A_3, A_4, A_5, A_6 sowohl auf Druck wie auf Zug in Anspruch genommen, während die Stiele links A, A_1, A_2 nur gedrückt, diejenigen rechts A_7, A_8, A_9 nur gezogen werden. Will man daher den Träger so ausführen, daß die Diagonalen nur gezogen werden, so hat man dieselben von der Mitte aus zu beiden Seiten nach den Auflagern hin ansteigen zu lassen, also der linken Trägerhälfte Diagonalen, wie in Fig. 233 gerichtet, zu geben, dagegen für die rechte Hälfte des Trägers die Diagonalen nach der Richtung A_5B_6, A_6B_7 u. s. w. zu stellen. Es ist dann leicht ersichtlich, daß die Spannungszahlen der Fig. 233 in den drei Feldern rechts mit umgekehrten Zeichen für die so angeordneten Diagonalen gültig sein werden, z. B. wird die in dem neunten Felde angebrachte Diagonale A_8B_9 die entgegengesetzten Spannungen von denjenigen in A_9B_8 , d. h. also genau dieselben Spannungen auszuüben haben, wie die Diagonale A_2B_1 im zweiten Felde, wie dies auch schon aus der Symmetrie der nunmehr angewandten Trägerform sich ergibt. In den mittleren Feldern wird man dann gekreuzte Diagonalen anordnen, und es ist ebenfalls klar, daß z. B. die im fünften Felde in der Richtung A_4B_5 angebrachte Gegenstrebe diejenige Zugkraft 10,60 Tonn. ausüben wird, welche ohne diese Gegenstrebe von der einfachen Strebe A_5B_4 als Druckkraft geäußert werden müßte. In Folge einer solchen Anordnung des Trägers, von welchem in Fig. 234 I (a. f. S.) eine Hälfte gezeichnet ist, werden die Diagonalen in allen Feldern nur durch Zugkräfte in Anspruch genommen, und es ist klar, daß in Folge dessen die Stiele nur gedrückt, niemals gezogen werden können. Letzteres erkennt man sofort, wenn man den Kopf eines Stieles,

d. h. den oberen Knotenpunkt ins Auge faßt, auf welchen durch die Diagonalen nur a b w ä r t s gerichtete Kräfte ausgeübt werden.

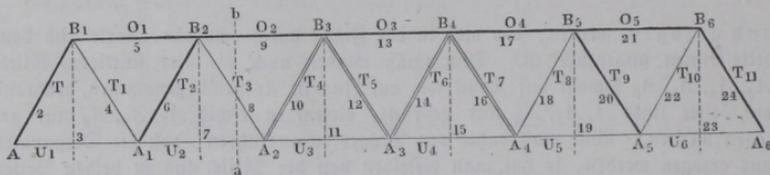
Fig. 234.



In gleicher Weise stellt Fig. 234 II die Anordnung von der Hälfte eines Trägers vor, in welchem die Diagonalen nur gegen Druckkräfte widerstandsfähig sind, in Folge dessen daselbst also die Stiele nur gezogen werden können. Die in Fig. 234 eingetragenen Spannungszahlen lassen sich ohne Weiteres aus Fig. 233 entnehmen.

§. 55. **Zusammengesetzte Fachwerkträger.** Wenn die Füllungs-glieder zwischen den Gurtungen des Fachwerkträgers nicht nach recht-winkligen, sondern nach anderen, etwa nach gleichschenkeligen Dreiecken an-geordnet sind, wie dies bei dem Reville'schen Systeme, Fig. 235, der Fall ist, so ändert sich die Untersuchung nicht wesentlich. Nimmt man etwa an, der Träger sei in den unteren Knotenpunkten belastet, und setzt zur Bestim-

Fig. 235.



mung der Spannungen in den Gurtungen die ganze Länge l des Trägers belastet voraus, so erhält man für irgend einen Schnitt ab die Spannung in der oberen Gurtung, wenn man A_2 als Mittelpunkt für die Momente annimmt, zu

$$O_2 = \frac{1}{h} (R \cdot 2a - qa),$$

und ebenso für den Mittelpunkt B_2 die Spannung der unteren Gurtung zwischen A_1 und A_2 zu:

$$U_2 = \frac{1}{h} \left(R_1 \frac{3}{2} a - q \frac{a}{2} \right),$$

also allgemein die Spannung in einem Gurtungsstücke

$$S = \frac{1}{h} M, \dots \dots \dots (1)$$

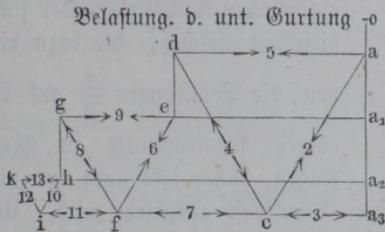
wenn M das Moment der äußeren Kräfte für den dem betreffenden Stücke

gegenüber liegenden Knotenpunkt der anderen Gurtung bedeutet. Ebenso findet man die Spannung T in irgend einem Zwischenstücke wie $A_2 B_2$ dadurch, daß für dieselbe die Verticalcomponente gleich der verticalen Scheerkraft V des Trägers in dem betreffenden zwischen den Endpunkten der Diagonale A_2 und B_2 gelegenen Trägerteile sein muß, zu

$$T = \frac{V}{\sin \alpha} \dots \dots \dots (2)$$

Es ist klar, daß auch hier für jedes der beiden Stücke, in welche der Träger durch den Maximalmomentenquerschnitt ($V = 0$) getheilt wird, das Gesetz gilt, wonach ein Zwischenglied gezogen oder gedrückt wird, je nachdem es in der Richtung von diesem Querschnitte aus nach dem zugehörigen Auflager hin ansteigt oder abfällt. Hieraus geht weiter hervor, daß die beiden Streben, welche von dem in diesem Grenzschnitt ($V = 0$) gelegenen Knotenpunkte nach beiden Seiten hin ausgehen, jederzeit gleichartigen Spannungen, Zug oder Druck, unterworfen sind, wie dies bei der vollen Belastung mit den mittleren Gliedern in der Figur $A_3 B_3$ und $A_3 B_4$ der Fall

Fig. 236.



ist, während in allen übrigen Knotenpunkten Zug- und Druckstreben abwechseln. Ebenso ist es klar, daß in denjenigen Gliedern ein Wechsel zwischen Druck und Zug sich einstellen wird, welche innerhalb der mittleren Strecke gelegen sind, um welche in Folge der Bewegung der Last der Maximalmomentenquerschnitt

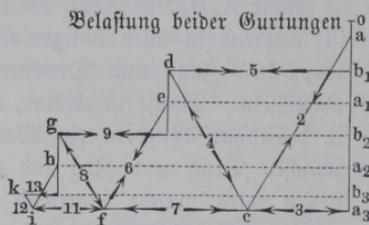
sich verschiebt. In diesen Beziehungen gelten daher die im vorhergehenden Paragraphen angeführten Bemerkungen.

Um die Spannungen der einzelnen Glieder für volle Belastung durch die Zeichnung zu finden, trägt man nach Fig. 236 auf der verticalen Kräfte-
linie oa_3 nach einander die Belastungen $\frac{q}{2} = oa$ in A , $q = aa_1$ in A_1 ,
 $q = a_1 a_2$ in A_2 und $\frac{q}{2} = a_2 a_3$ als die halbe Belastung des mittleren
Knotenpunktes A_3 auf, zieht durch a_3 die Horizontale $a_3 i$, und durch a eine
Parallele zur Strebe AB_1 , welche in $a_3 c$ die Zugkraft der unteren Gur-
tung AA_1 und in ca die Druckkraft in der Strebe AB_1 liefert. Letztere
Kraft zerlegt sich dann in da horizontal als Gurtungspressung in $B_1 B_2$
und den Diagonalzug cd in $B_1 A_1$. Setzt man diese letztere Kraft cd mit
der Belastung $q = de$ in A_1 zusammen zur Mittelkraft ce , so erhält man
durch Zerlegung dieser horizontal in cf und parallel mit $A_1 B_2$ in fe die
Kräfte in $A_1 A_2$ und $A_1 B_2$ u. s. w. Aus der Figur, in welcher die Span-

nungen mit denselben Ziffern bezeichnet sind wie die correspondirenden Glieder in Fig. 235, ist die Construction für die Hälfte des Trägers ersichtlich; die Spannungen in den entsprechenden Gliedern der anderen Balkenhälfte sind wegen der symmetrischen Anordnung von derselben Größe.

Man kann den Träger, Fig. 235, auch leicht so einrichten, daß beide Gurtungen gleichmäßig durch die Fahrbahn belastet werden, wenn man an den oberen Knotenpunkten B verticale Hängeschienen anbringt, von denen jede einen Querträger trägt. Hierdurch wird die Entfernung der letzteren auf die halbe Größe $\frac{a}{2}$ reducirt, und die Belastung jedes inneren Knotenpunktes der oberen wie der unteren Gurtung beträgt nur $\frac{q}{2}$, während die äußeren Knoten A und A_6 mit $\frac{q}{4}$ belastet sind. Bei dieser Anordnung ist die Berechnung der Spannungen der einzelnen Glieder in derselben Weise,

Fig. 237.



wie vorstehend, vorzunehmen, indem man zu beachten hat, daß die verticalen Hängestangen keine eigentlichen Fachwerksglieder sind, dieselben vielmehr nur dazu dienen, die Belastungen $\frac{q}{2}$ auf die

oberen Knotenpunkte zu übertragen, daher jede auch nur mit dieser Kraft gezogen, niemals aber einer Druckkraft ausgesetzt wird. Um für diesen Träger den Kräfteplan zu zeichnen, hat man daher nach Fig. 237 auf der verticalen Kräfteinie oa_3 die Belastungen

$$oa = \frac{1}{4} q, \quad ab_1 = b_1 a_1 = a_1 b_2 = b_2 a_2 = a_2 b_3 = \frac{1}{2} q \text{ und}$$

$$b_3 a_3 = \frac{1}{4} q$$

als die halbe Belastung von A_3 anzutragen, und nun in der angegebenen Weise die Kräfte durch Parallelen mit den Gurtungen und Diagonalen zu zerlegen. Auf diese Weise erhält man für jede Trägerhälfte in $oa_3 c d e f g h i k$ den Kräfteplan für die volle Belastung des Trägers, und es sind mit Rücksicht auf die in den Figuren 235 und 237 übereinstimmende Nummerirung diese Constructionen ohne weitere Erläuterung klar. Die so gefundenen Spannungen geben, wie schon mehrfach bemerkt, für die Gurtungen die größten Anstrengungen, während man die äußersten Zug- oder Druckspannungen in den Streben in der oben besprochenen Art durch Rechnung nach (2) oder durch die Zeichnung nach Fig. 230 zu ermitteln hat. Es ist klar,

daß bei diesem Trägersysteme die Diagonalen des mittleren Theiles ebenso wohl gegen Zug- wie Druckkräfte widerstandsfähig sein müssen.

Wenn man nach den Figuren 238 und 239 zwei Träger für dieselbe Spannweite $A A_6$ und von gleicher Höhe nach dem Neville'schen Systeme

Fig. 238.

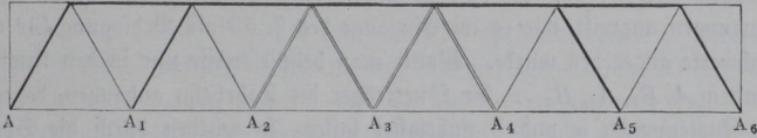
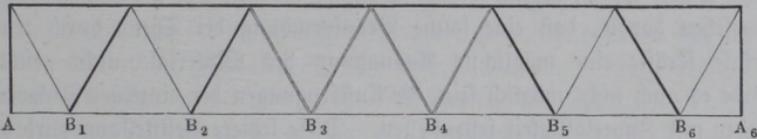


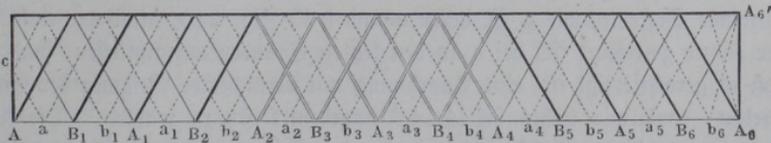
Fig. 239.



derart construirt denkt, daß die Knotenpunkte der Gurtungen beider Träger gegen einander um die halbe Fachlänge $\frac{a}{2}$ versetzt sind, so werden diese Träger sich in derselben Art berechnen lassen, und der Unterschied in der Anstrengung der Diagonalen wird nur darin beruhen, daß bei der vollen Trägerbelastung in Fig. 238 in der Mitte zwei Zugbänder, dagegen in Fig. 239 zwei Druckstreben zusammenstoßen. In den Figuren sind die gedrückten Streben durch stärkere Linien angedeutet als die durch schwache Linien dargestellten Zugbänder, während durch Doppellinien die abwechselnde Beanspruchung durch Zug oder Druck angedeutet ist.

Denkt man sich nun beide Träger zu einem einzigen nach Fig. 240 vereinigt, so erhält man ein zusammengesetztes Fachwerk, bei welchem jede

Fig. 240.



der Gurtungen mit doppelt so vielen Knotenpunkten behaftet ist, als bei den einfachen Trägern der Figuren 238 und 239. Man wendet derartige mehrfache Fachwerke bei langen und hohen Trägern an, für welche bei dem einfachen Systeme die Weite der Felder eine zu große werden, daher sehr schwere Hülfssträger zur Herstellung der Fahrbahn bedingen würde.

Man kann auch, falls die Entfernung der Knotenpunkte noch zu groß ist, die Vereinigung einer größeren Anzahl von einfachen Trägern vornehmen, und man würde z. B. ein vierfaches System erhalten, wenn man in den Mitten zwischen den Streben der Fig. 240 noch andere, nach den punkirt gezeichneten Linien einlegen würde. Jedenfalls muß dafür Sorge getragen werden, daß die Last in allen Knotenpunkten einer bezw. beider Gurtungen angreift, wie es im Eingange des §. 53 als Bedingung für alle Fachwerke angegeben wurde. Wollte man beispielsweise nur in den Knotenpunkten $A, B_1, A_2, B_2 \dots$ die Querträger der Fahrbahn anhängen, dagegen die Knotenpunkte a und b unbelastet lassen, so würden durch die Spannungen der in $a, b_1, a_2 \dots$ sich anschließenden Diagonalen die Gurtungstheile $AB_1, B_1A_1, A_1B_2 \dots$ auf Biegung in Anspruch genommen werden. Abgesehen davon, daß eine solche Beanspruchung der Theile durch transversale Kräfte eine möglichste Ausnutzung des Materials nicht gestattet, würde es auch nicht möglich sein, die Anstrengungen der einzelnen Fachwerksglieder mit Zuverlässigkeit festzustellen. Diese letztere Feststellung wird aber bei einem reinen Fachwerke von der in §. 53 geforderten Bedingung, dessen sämtliche Glieder nur Längenanstrengungen ausgesetzt sind, keinen Schwierigkeiten unterliegen. Man hat nur, wenn das Fachwerk etwa ein m faches, d. h. ein aus m einfachen Systemen zusammengesetztes ist, jedes einzelne Fachwerk als durch den m ten Theil der Last beansprucht nach dem Vorstehenden zu untersuchen, um die in den einzelnen Diagonalen wirkenden Kräfte zu erhalten, während natürlich in jedem Querschnitte der Gurtungen die Summe aller derjenigen Spannungen wirksam ist, welche für diesen Punkt aus allen einzelnen Systemen resultirt. Ein näheres Eingehen auf dieses Verfahren, welches im Vorstehenden hinreichend erläutert sein dürfte, soll hier unterbleiben.

Es mag noch bemerkt werden, daß eine consequente Durchführung des Princips, wonach kein Glied eines Fachwerkes in gegen seine Länge transversaler Richtung beansprucht werden soll, auch dazu führt die Endstreben einzelner Systeme, wie z. B. derer a und b in Fig. 240, nicht wie links in der Figur gezeichnet ist, bei c an den letzten Ständer anzuschließen, sondern daß es gerechtfertigt ist, eine Anordnung mit veränderter Neigung der Endstreben, etwa wie rechts bei $A_6 A_6'$ angedeutet ist, zu wählen. Die Anstrengungen dieser Endstreben wie $b_6 A_6'$ finden sich natürlich aus dem Kräfteplane in derselben Weise wie diejenigen aller anderen.

Die vorstehenden Betrachtungen ergeben auch, warum die engmaschigen Gitterträger, wie sie bei den ersten eisernen Brücken seiner Zeit vielfach zur Anwendung gekommen sind, z. B. bei der Ringzigbrücke zu Offenburg und der Dirschauener Weichselbrücke, als wenig rationelle Constructionen heute nicht mehr angewendet werden, ebenso wie die im §. 52 beschriebenen Blech-

röhrenbrücken keine Anwendung mehr finden. Die engmaschigen Gitterträger nach Fig. 212 werden sich ebenso wie die Blechträger nur für solche Fälle eignen, wo die Last nicht, wie bei Brücken, in einzelnen von einander entfernten Stellen concentrirt ist, sondern in nahe neben einander angebrachten Punkten aufruhet, wie bei Balkendecken, oder wo sie gleichmäßig vertheilt ist, wie etwa bei Waarenspeichern zc.

Es ergibt sich ohne Weiteres, daß es bei der Zusammensetzung mehrerer einfacher Fachwerkssysteme, wie sie in Fig. 240 angegeben ist, keinen wesentlichen Unterschied machen wird, ob man bei diesen Systemen nach Fig. 235 die verticalen Hängeschienen anordnet, welche die Belastung direct auf die oberen Knotenpunkte übertragen, oder ob man unter Weglassung dieser Hängestangen direct nur die unteren Knotenpunkte belastet. Man wird dementsprechend natürlich bei der Ermittlung der Spannungen in den einzelnen Gliedern entweder die Figuren 237 oder 236 zu Grunde zu legen haben.

Anstatt den zusammengesetzten Fachwerksträger aus Einzelträgern nach dem Neville'schen Systeme zu bilden, kann man selbstredend auch Mohr'sche

Fig. 241.



Fig. 242.



Fig. 243.

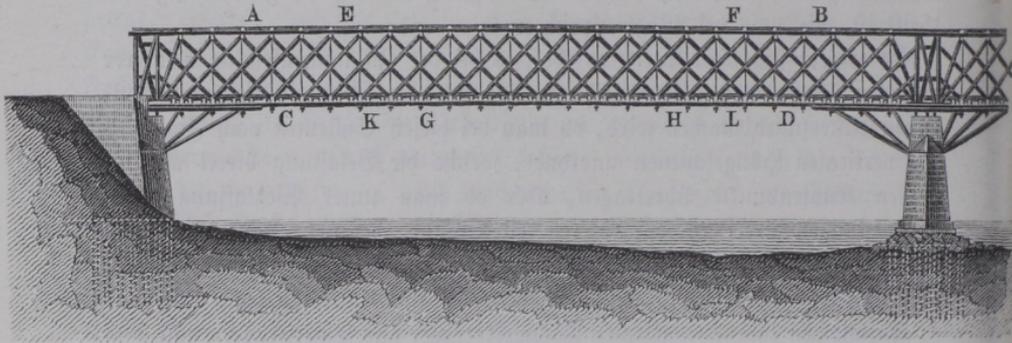


Träger dazu verwenden, deren Untersuchung nach dem im §. 54 Angeführten zu geschehen hat. So wird man beispielsweise die Anstrengungen in dem Fachwerksträger, Fig. 243, feststellen, wenn man die beiden Einzelträger, Fig. 241 und Fig. 242, aus denen er besteht, jeden für sich mit der halben Last behaftet untersucht.

Ein Beispiel für eine Brücke mit combinirten, aus vier Einzelsystemen bestehenden Fachwerksträgern zeigt Fig. 244 (a. f. S.). Jeder der zwei Hauptträger besteht aus den beiden Gurtungen AB und CD , von welchen jede aus drei neben einander liegenden Balken zusammengesetzt ist. Während nun die Streben CE und HF doppelt ausgeführt sind und sich gegen die äußeren Balken der Gurtungen stemmen, gehen die entgegengesetzten Streben wie GE und DF als einfache Hölzer zwischen jenen hindurch und stehen mit den mittleren Gurtungsbalken in Verbindung. Zur Vereinigung der Streben mit den Gurtungen sind in den Knotenpunkten $C, E, G \dots$ entsprechende Querhölzer angebracht, und die Verbindung der oberen mit den unteren Knotenpunkten ist durch je zwei schmiedeeiserne Ankerbolzen von

50 mm Stärke mittelst Schrauben bewirkt, deren Muttern auf entsprechenden Querbölkern ruhen. Man kann dieses System, welches häufig als das Howe'sche bezeichnet wird, auch als eine mehrfache Combination des

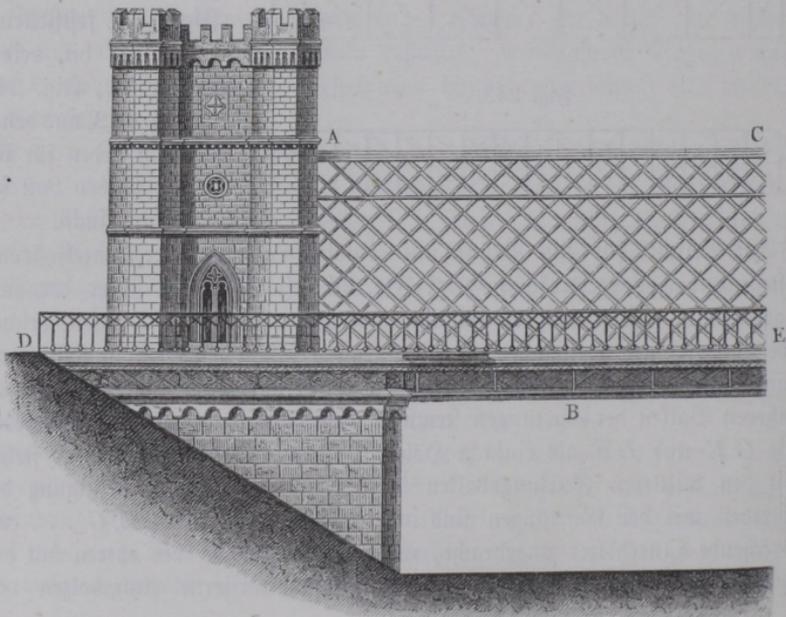
Fig. 244.



Neville'schen, Fig. 235, auffassen, da die verticalen Ankerbolzen nur befähigt sind, Zugwirkungen in sich aufzunehmen, wie sie durch die Uebertragung der unten angehängten Fahrbahn auf die oberen Knotenpunkte erzeugt werden.

In Fig. 245 ist noch ein Stück der Gitterbrücke über die Kinzig bei Offenburg dargestellt. Diese Brücke trägt neben dem doppelten Schienen-

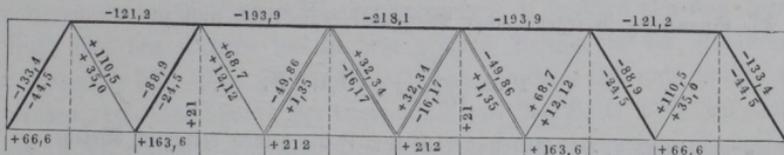
Fig. 245.



wege DE noch zwei Fußwege zu den Seiten, und besteht aus drei 6,25 m hohen und 71,12 m langen Gitterwänden wie ABC . Die Gitterstäbe, welche sich unter rechten Winkeln kreuzen, haben bei 21 mm Stärke 105 mm Breite und sind in den Kreuzungspunkten durch 30 mm starke Bolzen vernietet. Um die Festigkeit dieser Brücke zu erhöhen, hat man die Tragwände derselben nicht allein an jedem Ende 4 m lang aufgelagert, sondern auch noch mit den Pfeilern fest verankert. Zur seitlichen Versteifung sind diese Wände auch oben noch durch eiserne Schienen mit einander verbunden.

Beispiel. Die Spannungen der Glieder eines Fachwerksträgers nach Fig. 246 sollen ermittelt werden, wenn die ganze Trägerlänge 60 m und die Anzahl der Felder 12 beträgt, und die Belastung sowohl an die unteren wie oberen Knotenpunkte gehängt ist. Die Belastung des Trägers pro Meter Länge soll zu

Fig. 246.



1,4 Tonn. durch das Eigengewicht und zu 2,8 Tonn. durch die Verkehrslast angenommen werden.

Man findet hier, da die horizontale Entfernung zweier Lastpunkte gleich $\frac{60}{12} = 5$ m ist, die Belastung für jeden Knoten zu

$$p = 5 \cdot 1,4 = 7 \text{ t und } k = 5 \cdot 2,8 = 14 \text{ t, daher } q = 21 \text{ t.}$$

Setzt man die einzelnen Dreiecke als gleichschenkelige voraus, so ergibt sich die Trägerhöhe

$$h = 5 \operatorname{tg} 60^\circ = 5 \cdot 1,732 = 8,66 \text{ m.}$$

Für die volle Belastung hat man den Auflagerdruck zu jeder Seite

$$R = \frac{11}{2} \cdot 21 = 115,5 \text{ t.}$$

Die Biegemomente für die auf einander folgenden Knotenpunkte beider Gurtungen bestimmen sich nach der Gleichung (8a) in §. 54:

$$M = q a v \frac{n - v}{2},$$

wenn man darin $n = 12$ und $v = 1, 2, 3 \dots 11$ setzt, und aus diesen Momenten ergibt sich die betreffende Gurtungsspannung O oder U nach (1) zu

$$\frac{1}{h} M = \frac{M}{1,732 a} = 0,577 \frac{M}{a}.$$

Man erhält demgemäß

$$M_1 = qa \cdot 1 \frac{11}{2} = 21a \frac{11}{2} = 115,5a; \quad U_1 = 0,577 \cdot 115,5 = 66,6 \text{ t.}$$

$$M_2 = 21 \cdot 2 \frac{10}{2} a = 210a; \quad O_1 = 0,577 \cdot 210 = 121,2 \text{ t.}$$

$$M_3 = 21 \cdot 3 \frac{9}{2} a = 283,5a; \quad U_2 = 0,577 \cdot 283,5 = 163,6 \text{ t.}$$

$$M_4 = 21 \cdot 4 \frac{8}{2} a = 336a; \quad O_2 = 0,577 \cdot 336 = 193,9 \text{ t.}$$

$$M_5 = 21 \cdot 5 \frac{7}{2} a = 367,5a; \quad U_3 = 0,577 \cdot 367,5 = 212,0 \text{ t.}$$

$$M_6 = 21 \cdot 6 \frac{6}{2} a = 378a; \quad O_3 = 0,577 \cdot 378 = 218,1 \text{ t.}$$

Für die folgenden Spannungen ergeben sich die nämlichen Werthe in umgekehrter Reihenfolge.

Die Spannung in irgend einer Diagonale ergibt sich nun zu

$$T = \frac{V}{\sin 60^\circ} = 1,155 V,$$

worin man nach §. 54, (12) und (13) für V die beiden extremen Werthe

$$V_{max} = \frac{n-2\nu+1}{2} p + \frac{n-\nu}{n} \frac{n-\nu+1}{2} k$$

und

$$V_{min} = \frac{n-2\nu+1}{2} p - \nu \frac{\nu-1}{2n} k$$

zu setzen hat, entsprechend einer Belastung des einen oder anderen Theiles, in welche der gedachte Schnitt den Träger zerlegt. Demgemäß erhält man:

$$V_{1max} = \frac{11}{2} 7 + \frac{11}{12} \frac{12}{2} 14 = 115,5; \quad T_{1max} = 1,155 \cdot 115,5 = 133,4 \text{ t.}$$

$$V_{1min} = \frac{11}{2} 7 - 0 = 38,5; \quad T_{1min} = 1,155 \cdot 38,5 = 44,5 \text{ t.}$$

$$V_{2max} = \frac{9}{2} 7 + \frac{10}{12} \frac{11}{2} 14 = 95,67; \quad T_{2max} = 110,5 \text{ t.}$$

$$V_{2min} = \frac{9}{2} 7 - 2 \frac{1}{24} 14 = 30,33; \quad T_{2min} = 35,0 \text{ t.}$$

$$V_{3max} = \frac{7}{2} 7 + \frac{9}{12} \frac{10}{2} 14 = 77,0; \quad T_{3max} = 88,9 \text{ t.}$$

$$V_{3min} = \frac{7}{2} 7 + 3 \frac{2}{24} 14 = 21,0; \quad T_{3min} = 24,25 \text{ t.}$$

$$V_{4max} = \frac{5}{2} 7 + \frac{8}{12} \frac{9}{2} 14 = 59,5; \quad T_{4max} = 68,7 \text{ t.}$$

$$V_{4min} = \frac{5}{2} 7 - 4 \frac{3}{24} 14 = 10,5; \quad T_{4min} = 12,12 \text{ t.}$$

$$V_{5max} = \frac{3}{2}7 + \frac{7}{12} \frac{8}{2}14 = 43,17; \quad T_{5max} = 49,86 \text{ t.}$$

$$V_{5min} = \frac{3}{2}7 - 5 \frac{4}{24}14 = -1,17; \quad T_{5min} = -1,35 \text{ t.}$$

$$V_{6max} = \frac{1}{2}7 + \frac{6}{12} \frac{7}{2}14 = 28; \quad T_{6max} = 32,34 \text{ t.}$$

$$V_{6min} = \frac{1}{2}7 - 6 \frac{5}{24}14 = -14; \quad T_{6min} = -16,17 \text{ t.}$$

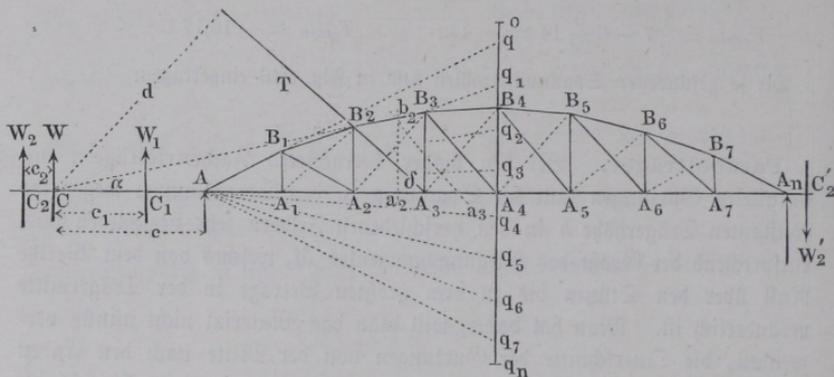
Die so gefundenen Spannungszahlen sind in Fig. 246 eingetragen.

Parabelträger. Bei den bisher betrachteten Fachwerkträgern mit §. 56. parallelen Gurtungen fällt die Spannung in den Streckbäumen wegen der constanten Trägerhöhe h in den verschiedenen Feldern sehr verschieden aus, entsprechend der Größe des Biegemomentes M , welches von dem Werthe Null über den Stützen bis zu dem größten Betrage in der Trägermitte veränderlich ist. Man hat daher, will man das Material nicht unnütz verwenden, die Querschnitte der Gurtungen von der Mitte nach den Enden hin in den einzelnen Knotenpunkten entsprechend zu verringern. Es erscheint aber sowohl aus constructiven wie aus theoretischen Gründen vortheilhaft, die Anordnung so zu treffen, daß die Spannkraften in den Gurtungen möglichst constant ausfallen, indem hierfür nicht nur die Ausführung der Gurtungen mit constantem Querschnitte erleichtert, sondern auch die Anstrengung der Zwischenglieder vermindert wird, welche letztere in dem Falle gleich Null werden würde, in welchem es möglich wäre, die Spannungen der Gurtungen überall von gleicher Größe zu erhalten. Letztere Bedingung ist zwar nicht zu erfüllen, wenigstens nicht bei einer einseitigen Belastung des Trägers, doch erscheint es zweckmäßig, solche Constructionen anzuwenden, bei denen für die volle Belastung, also für das Auftreten der größten Biegemomente dieser Zustand ganz oder nahezu erreicht wird.

Eine solche Construction ist durch den sogenannten Parabelträger gegeben, so genannt, weil die Knotenpunkte der einen Gurtung in einer Parabel gelegen sind, deren Verhältnisse sich aus dem Folgenden ergeben werden. Es sei die Aufgabe gestellt, einen Fachwerkträger von der Länge $AA_n = l$, Fig. 247 (a. f. S.), dessen untere Gurtung geradlinig ist, so anzuordnen, daß bei der vollen Belastung des Trägers die Spannkraft U der unteren Gurtung in allen Punkten dieselbe Größe hat. Es sei wieder eine Belastung des Trägers in jedem Knotenpunkte mit $q = p + k$ vorausgesetzt, und unter $a = \frac{l}{n}$ die Weite jedes der n gleich breiten Felder verstanden; ferner soll die Höhe des Trägers in der Mitte zwischen den Gurtungsschwerpunkten gleich h vorausgesetzt werden. Die Anzahl n der Felder

ist in der Figur als eine gerade vorausgesetzt, so daß in der Mitte ein Pfosten oder Knotenpunkt sich befindet, doch wird die Untersuchung bei einer ungeraden Anzahl von Feldern nicht wesentlich geändert, nur hat man in diesem Falle unter h nicht die Höhe der beiden mittleren Pfosten, sondern

Fig. 247.



die Scheitelordinate der betreffenden Parabel zu verstehen. Es bestimmt sich wieder der Druck für jedes Auflager bei der vollen Trägerbelastung zu

$$R_1 = R_2 = \frac{n - 1}{2} q \dots \dots \dots (1)$$

und das Biegemoment für die Mitte zu

$$\begin{aligned} M_{max} &= R \frac{n}{2} a - q \left(1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} - 1 \right) a = q \frac{n^2}{8} a \\ &= \frac{q}{a} \frac{l^2}{8} = q n \frac{l}{8} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Man erhält daher die Spannung U der unteren Gurtung in der Mitte, wenn man den oberen Knotenpunkt B_4 als Momentenmittelpunkt annimmt, zu

$$U = \frac{M_{max}}{h} = q \frac{n^2}{8} \frac{a}{h} = \frac{q}{a} \frac{l^2}{8h} = q n \frac{l}{8h} \dots \dots (3)$$

Unter der Annahme, daß $l = 8h$ ist, erhält man daher die größte Spannung in der unteren Gurtung zu $U = qn = Q$, d. h. gleich dem Gewichte des ganzen Trägers einschließlich seiner vollen Belastung.

In irgend einem anderen Felde, z. B. in dem Querschnitte durch den um ν Felder von A entfernten Knotenpunkt ist das Biegemoment durch

$$M_v = Rva - q(1 + 2 + \dots + v - 1)a = aq \left(\frac{n-1}{2} v - \frac{v-1}{2} v \right) \\ = aqv \frac{n-v}{2} \dots \dots \dots (4)$$

gegeben. Soll nun in diesem Querschnitte, in welchem die Höhe gleich y sein mag, die Spannung der unteren Gurtung denselben Werth U wie in der Mitte haben, so hat man nach (3) und (4) die Gleichung:

$$\frac{M_v}{y} = aqv \frac{n-v}{2y} = \frac{q}{a} \frac{l^2}{8h} \dots \dots \dots (5)$$

Setzt man hierin $an = l$, und den Abstand des betrachteten Querschnittes von A also $va = x$, so erhält man:

$$x \frac{l-x}{2y} = \frac{l^2}{8h}, \text{ oder } y = \frac{4h}{l^2} (l-x)x \dots \dots (6)$$

Diese Gleichung stellt eine Parabel*) mit verticaler Axe und der Pfeilhöhe h in der Mitte zwischen A und A_n vor, welche Pfeilhöhe, wie schon bemerkt worden ist, bei einer geraden Felderzahl mit der Höhe des Mittelpostens übereinstimmt. Man schließt daraus, daß die oberen Knotenpunkte B des Trägers in dieser Parabel gelegen sein müssen, wenn der Bedingung einer constanten Spannkraft in der unteren Gurtung genügt werden soll. Es kann bemerkt werden, daß diese Parabel mit derjenigen übereinstimmt, welche für den gleichförmig mit nq belasteten Träger die Momentenfläche begrenzt, vorausgesetzt, daß man den Maßstab so wählt, daß die Höhe h das Moment in der Mitte $M_{max} = q \frac{n^2}{8} a$ vorstellt.

Die obere Gurtung setzt sich zwischen den einzelnen Knotenpunkten aus geradlinigen Stücken zusammen, in denen, wie sich leicht ergibt, die Spannung O nicht von gleicher Größe sein kann. Bezeichnet man nämlich mit α den Winkel, welchen irgend eine dieser Parabelsehnen, z. B. B_2B_3 , mit dem Horizonte bildet, so findet man aus der Momentengleichung in Bezug auf den unteren Knotenpunkt A_2 $M = O_2 \cos \alpha \cdot y_2$, woraus mit Rücksicht auf (5) die Spannung der oberen Gurtung allgemein zu

$$O = \frac{M}{y \cos \alpha} = \frac{U}{\cos \alpha} \dots \dots \dots (7)$$

*) Um dies einzusehen, setze man zum Zwecke der Verlegung des Coordinatenanfangs von A nach B_4 in (5):

$$y = y_1 + h \text{ und } x = x_1 + \frac{l}{2},$$

so erhält man die Scheitelgleichung:

$$x_1^2 = - \frac{l^2}{4h} y. \quad (5^a)$$

folgt, d. h. es verhält sich überall die Spannung der oberen Gurtung zu der constanten Spannung U der unteren wie die Länge

$$\lambda = \frac{a}{\cos \alpha} \text{ der Parabelsehne zu der Weite } a \text{ des Feldes.}$$

Die größte Spannung in der oberen Gurtung ist daher größer als die Maximalspannung in der unteren Gurtung und zwar nimmt diese Spannung von der Mitte des Trägers nach beiden Enden hin an Größe zu. Nur bei einer ungeraden Felderzahl sind in dem mittleren Felde die Maximalspannungen der beiden daselbst parallelen Gurtungen gleich groß.

Die in den Feldern befindlichen Diagonalen $A_2 B_1, A_3 B_2 \dots$ sind bei der hier vorausgesetzten vollen Belastung keinerlei Spannungen ausgesetzt, wie man ohne Weiteres daraus erkennt, daß das Gleichgewicht für einen unteren Knotenpunkt wie A_3 wegen der Gleichheit der Kräfte in den beiden daselbst zusammenstoßenden Gurtungstheilen mit einer Spannung der Diagonale $A_3 D_2$ unverträglich ist, indem keine Kraft vorhanden ist, welche der horizontalen Componente einer solchen Strebenspannung das Gleichgewicht halten könnte. Ebenso ergibt sich, daß in den verticalen Pfosten wie $A_3 B_3$ keine andere Spannung stattfinden kann, als die durch die in dem unteren Knotenpunkte angebrachte Belastung q hervorgerufene, und es folgt also auch für die beiden in dem oberen Knotenpunkte B_3 unter den Winkeln α_2 und α_3 zusammentreffenden Gurtungstheile, daß die Differenz, von deren Verticalspannungen ebenfalls gleich der Kraft q in den Pfosten ist, daß man also

$$O_2 \sin \alpha_2 - O_3 \sin \alpha_3 = U (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3) = q \quad . \quad . \quad (8)$$

hat.

Man kann die Begrenzung des Parabelträgers auch als ein Seilpolygon betrachten, dessen Schlußlinie mit der unteren Gurtung zusammenfällt. In einem solchen Seilpolygone ist bekanntlich die vertical gemessene Ordinate y jedes Punktes ein Maß für das Moment M der äußeren Kräfte in diesem Punkte, und zwar ist dieses Moment durch $M = yH$ gegeben, wenn H den Horizontalzug oder die Polabstand des zugehörigen Kräftepolygons bedeutet. Wendet man diese Regel auf den mittleren Querschnitt A_4 an, für welchen nach (2) $M_{max} = \frac{q}{a} \frac{l^2}{8}$ gefunden wurde, und nimmt die Polabstand des Kräftepolygons $H = \frac{l}{2}$ an, so findet sich, daß die Ordinate y in der Mitte $A_4 B_4 = h$ nach dem Kräftemaßstabe eine Kraft

$$\frac{M_{max}}{H} = \frac{q}{a} \frac{l^2}{8 \frac{l}{2}} = \frac{q}{a} \frac{l}{4} = q \frac{n}{4}$$

vorstellen muß, wenn man die Gurtungen selbst als Seilpolygon auffassen will. Hieraus ergibt sich ohne Weiteres folgende Construction für die Verzeichnung des Trägers. Man wählt den Maßstab für die Kräfte so, daß die gegebene mittlere Trägerhöhe h eine Kraft gleich $q \frac{n}{4}$ ist, trägt daher in A_4 zu jeder Seite der horizontalen unteren Gurtung

$$A_4 o = A_4 q_n = q \frac{n}{2} = 2h$$

an, indem man auf dieser Kräftelinie die einzelnen Belastungen und zwar

$$o q = q_7 q_n = \frac{q}{2} \text{ und } q q_1 = q_1 q_2 = \dots q_6 q_7 = q$$

markirt, und wählt als Pol den Auflagerpunkt A im Abstände $\frac{l}{2}$ von der Kräftelinie. Dann erhält man in dem Polstrahle von A nach q direct das erste Gurtungsstück AB_1 , ferner in der durch B_1 mit dem folgenden Polstrahle Aq_1 gezogenen Parallelen die Gurtung $B_1 B_2$ des zweiten Feldes; in $B_2 B_3$ parallel mit Aq_2 das folgende Stück der oberen Gurtung u. s. w. Auf diese Weise erhält man nicht nur die einzelnen Höhen $A_1 B_1, A_2 B_2 \dots$ der Verticalstiele ohne Berechnung derselben nach (6), sondern gleichzeitig in den Polstrahlen $Aq, Aq_1, Aq_2 \dots$ die Größen der in den damit parallelen Gurtungsstücken auftretenden Kräfte, bezogen auf den zu Grunde gelegten Kräftemaßstab $h = q \frac{n}{4}$. Ebenso ergibt sich nach demselben Maßstabe die constante Spannung U der unteren Gurtung in der Strecke AA_4 , welche gleichzeitig auch die horizontale Componente der Pressungen in allen Stücken der oberen Gurtung vorstellt.

Diese Betrachtung der Trägerbegrenzung als Seilpolygon läßt auch noch in anderer Weise die schon oben gefundene Eigenschaft des Fachwerkes erkennen, wonach bei voller Belastung desselben in den Diagonalen keinerlei Spannung auftreten kann. Denkt man nämlich durch irgend ein Feld einen Schnitt wie $a_2 b_2$ geführt, so erhält man nach der bekannten Eigenschaft des Seilpolygons in dem Durchschnittspunkte C der beiden Endseile Aa_2 und $B_2 b_2$ einen Punkt, durch welchen die Mittelkraft aller auf das Balkenstück $a_2 A b_2$ wirkenden äußeren Kräfte hindurchgeht. Nimmt man daher diesen Punkt C als den Mittelpunkt der statischen Momente an, so folgt, da die Spannungen U und O_2 durch diesen Punkt hindurchgehen, daß in der mit durchschnittenen Diagonale $A_3 B_2$ keine Spannung stattfinden kann.

Aus der letzteren Betrachtung ergibt sich aber auch weiter, daß der mehr besprochene Zustand der vollständigen Spannungslosigkeit der Diagonalen an die Bedingung geknüpft ist, daß die Mittelkraft aller auf ein Trägerstück

wie $a_2 A b_2$ wirkenden äußeren Kräfte durch den besagten Schnittpunkt C der beiden durchschnittenen Gurtungstheile hindurchgehe. Diese Bedingung trifft nach dem Vorhergehenden nur bei einer gleichmäßig über den ganzen Träger ausgebreiteten Belastung zu, also sowohl für den voll mit $nq = n(p + k)$, wie für den ganz leeren nur durch sein Eigengewicht np belasteten Träger. Es ist klar, daß diesen beiden Zuständen die größten bezw. kleinsten Spannungen für sämtliche Gurtungstheile zukommen, und man erhält diese größten wie kleinsten Spannungen in den Polstrahlen desselben Kräftepolygons $A o q_n$, je nachdem man einen Kräftemaßstab zu Grunde legt, nach welchem die Pfeilhöhe $h = A_4 B_4$ der Kraft $q \frac{n}{4}$ oder $p \frac{n}{4}$ entspricht.

Denkt man jetzt den Träger einer einseitigen Belastung unterworfen, so werden auch in den Diagonalen und zwar wie sich ergeben wird, gleichzeitig in sämtlichen Diagonalen, Spannungen erzeugt. Um diesen Einfluß einer einseitigen oder beweglichen Belastung kennen zu lernen, sei vorausgesetzt, daß der Träger außer seinem Eigengewichte np einer Verkehrslast nur in einem einzigen Knotenpunkte etwa in A_6 unterworfen sein soll. Wie oben gezeigt worden, ging die Resultierende aller auf das Stück $a_2 A b_2$ wirkenden äußeren Kräfte durch den Schnittpunkt C , so lange die einseitige Last k in A_6 den Träger noch nicht beeinflusste. Diese Mittelkraft, aus der vertical aufwärts gerichteten Auflagerreaction in A und den Belastungen in A_1 und A_2 durch das Eigengewicht zusammengesetzt, ist in C , wie leicht zu sehen ist, ebenfalls vertical aufwärts gerichtet, so lange der Schnitt $a_2 b_2$ noch zwischen A und dem mittleren Querschnitte A_4 gelegen ist. Durch die nun in A_6 hinzutretende Belastung k wird die Auflagerreaction in A um einen gewissen Betrag Z_1 vergrößert, und wenn man diesen Zuwachs mit der gedachten in C wirkenden Mittelkraft W vereinigt, so erhält man die nunmehrige Resultierende aller äußeren Kräfte $W_1 = W + Z_1$, deren Angriffspunkt wegen der gleichen Richtung von W und Z_1 offenbar zwischen A und C , etwa in C_1 gelegen sein wird. Wählt man nun wieder, um das Gleichgewicht des Balkenstückes $a_2 A b_2$ zu prüfen, den Durchschnittpunkt C der Gurtungen zum Momentenmittelpunkte, so erhält man zur Bestimmung der Diagonalkraft T die Gleichung

$$W_1 \cdot c_1 = Td,$$

woraus

$$T = \frac{c_1}{d} W_1$$

folgt. Man erkennt auch leicht, daß diese Diagonalspannung eine Zugkraft sein, muß damit sie durch ihre das Stück $a_2 A b_2$ um C rechts drehende

Richtung im Stande ist, der links um drehenden Mittelkraft W_1 das Gleichgewicht zu halten.

Dieselbe Betrachtung wie für A_6 gilt natürlich für jeden Knotenpunkt, welcher jenseits der Schnittfläche, d. h. zwischen $a_2 b_2$ und A_n gelegen ist, jede dort aufgebrachte Belastung bringt in der Diagonale $A_3 B_2$ Zugspannungen hervor. Dagegen findet sich ebenso, daß eine diesseits des Schnittes, also zwischen $a_2 b_2$ und A , etwa in A_1 aufgesetzte Belastung in der Diagonale $A_3 B_2$ Druckspannungen hervorruft. Durch die Last k in A_1 wird nämlich das betrachtete Balkenstück $a_2 A b_2$ einer vertical abwärts wirkenden zusätzlichen Kraft Z_2 unterworfen, welche sich als Differenz von k und der hierdurch in A erzeugten Auflagerreaction, d. h. also gleich dem Auflagerdrucke ergibt, welchen die Last k in A_1 für sich allein in A_n hervorbringt. Setzt man diese in A_n wirkende Kraft Z_2 mit W in C zusammen, so erhält man eine Resultirende, welche links von C , etwa in C_2 wirkt, wenn sie aufwärts gerichtet ist (W_2), dagegen rechts von A_n etwa in C_2' angreift, falls sie abwärts zieht (W_2'), d. h. falls $Z_2 > W$ ist. In jedem der beiden Fälle sucht diese Mittelkraft das Balkenstück $a_2 A b_2$ um den Punkt C rechts um zu drehen, welchem Bestreben nur durch eine Druckkraft T der Strebe $A_3 B_2$ entgegengewirkt werden kann, für welche Kraft man ebenfalls aus $W_2 c_2 = T d$

$$T = \frac{c_2}{d} W_2$$

erhält.

Hieraus folgt, daß bei dem vorliegenden Träger eine Diagonale der größten positiven (Zug-) Kraft unterworfen ist, wenn sämtliche Knotenpunkte jenseits derselben zwischen dem Schnitte und A_n belastet sind, während die größte negative (Druck-) Kraft in der Diagonale bei einer Belastung sämtlicher diesseits zwischen dem Schnitte und A gelegenen Knotenpunkte eintritt. Diese beiden größten Anstrengungen müssen gleichen Werth haben, da für die volle Belastung des Trägers die Diagonalen im spannungslosen Zustande sich befinden.

Daß auch die verticalen Stiele durch die einseitigen Belastungen Spannungen unterworfen sind, welche zu den durch die Eigengewichtsbelastung p der unteren Knotenpunkte in ihnen erzeugten hinzutreten, ist ohne Weiteres klar, wenn man einen Knotenpunkt der geraden Gurtung z. B. A_3 ins Auge faßt. Das Gleichgewicht für denselben erfordert, daß, wenn durch die einseitige Belastung des Trägers in der Diagonale $A_3 B_2$ eine Spannung T_2 auftritt, in dem Stiele $A_3 B_3$ eine Spannung $T_2 \sin \delta$ hervorgerufen wird, welche zu der in demselben schon durch die Belastung von A_3 hervorgerufenen Zugspannung hinzutritt. Diese von T erzeugte Spannung ist, wie man leicht erkennt, eine Druckspannung, wenn die Diagonale gezogen

wird, und umgekehrt eine Zugspannung, sobald die Diagonale gepreßt wird. Wenn daher die Letztere der maximalen Zugspannung $+ T_{max}$ ausgesetzt ist, so tritt zu der für diesen Fall in $A_3 B_3$ vorhandenen Zugspannung $(p + k) = q$ noch die Druckspannung $- T_{2max} \sin \delta$ hinzu, so daß der Stiel $A_3 B_2$ einer Spannung

$$q - T_{max} \sin \delta$$

ausgesetzt ist, welche Zug oder Druck bedeutet, je nachdem dieser Werth positiv oder negativ ist. Andererseits ist bei Belastung aller links vom Schnitte befindlichen Knotenpunkte, für welchen Fall die Diagonale mit $- T_{max}$ gepreßt und der Knotenpunkt A_3 nur mit dem Eigengewichte p belastet ist, in dem Pfosten $A_3 B_3$ die stets positive also Zugspannung vorhanden

$$p + T_{2min} \sin \delta.$$

Denkt man sich einen Schnitt $a_3 b_2$ durch den Pfosten $A_3 B_3$ gelegt, so zeigt eine ähnliche Betrachtung, wie die hinsichtlich der Diagonale angestellte, daß die äußersten Anstrengungen des Pfostens $A_3 B_3$ erzeugt werden, wenn entweder alle Knotenpunkte $A_4, A_5 \dots A_{n-1}$ rechts vom Schnitte, oder alle Knotenpunkte A_1, A_2, A_3 links vom Schnitte mit der Verkehrslast bedeckt sind, und zwar erzeugen bei der Anordnung des Trägers nach der Figur die Belastungen rechts Druckspannungen, diejenigen links Zugspannungen in dem Pfosten.

Aus den vorstehenden Betrachtungen erkennt man leicht folgendes Verhalten. Wenn man den Träger durch irgend einen Schnitt, welcher außer den Gurtungen nur ein Zwischenglied trifft, in zwei Theile zerlegt denkt, so wird jede Belastung des einen Balkentheiles in dem Zwischengliede eine **Zugspannung** hervorrufen, sobald dieser Balkentheil den **unteren** Knotenpunkt des Zwischengliedes enthält, wogegen eine **Druckspannung** erzeugt wird, wenn der **obere** Knotenpunkt des Zwischengliedes mit dem belasteten Balkentheile verbunden ist.

Um die größte Anspannung in einer Diagonale wie $A_3 B_2$ zu bestimmen, hat man daher sämtliche jenseitigen Knotenpunkte $A_3, A_4, A_5 \dots A_n$ mit k belastet zu denken und kann von dem Eigengewichte p ganz absehen, da dasselbe Spannungen in den Diagonalen nicht hervorrufft. Bestimmt man dann durch Rechnung oder durch ein Seilpolygon die Größe des durch diese einseitige Belastung in A erzeugten Auflagerdruckes R_v , so erhält man die Diagonalkraft zu

$$T = R_v \frac{c}{d}, \quad \dots \dots \dots (9)$$

worin c und d die Abstände des Durchschnittspunktes C der beiden zugehörigen Gurtungstheile A_2A_3 und B_2B_3 bezw. von dem Auflager A , und von der Diagonalenrichtung A_3B_2 bedeuten. Diese Abstände wird man am einfachsten aus der Zeichnung entnehmen, die Auflagerreaction R_v erhält man für diesen Fall, je nachdem die eine oder andere Seite belastet ist, durch:

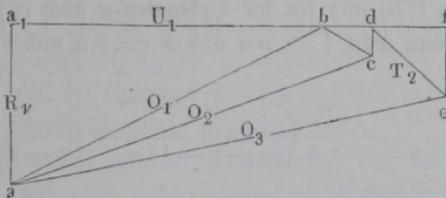
$$R_v = k \frac{1 + 2 + \dots + n - v - 1}{n} = k \frac{n - v}{n} \frac{n - v - 1}{2} \quad \dots \quad (10)$$

bezw.

$$R_v = k \frac{(n - 1) + (n - 2) + \dots + n - v}{n} = k \frac{v}{n} \frac{2n - v - 1}{2} \quad (11)$$

Aus dem gefundenen Auflagerdrucke R_v kann man übrigens auch durch ein KräftepolYGON nach Fig. 248 die Spannungen der Zwischenglieder er-

Fig. 248.



mitteln, welche der vorausgesetzten Belastung entsprechen. Macht man nämlich $aa_1 = R_v$, zieht durch a_1 die Horizontale a_1b und durch a die Parallelen ab, ac, ae zu den auf einander folgenden Stücken AB_1, B_1B_2, B_2B_3 der oberen

Gurtung, ferner durch b die zur Diagonale A_2B_1 Parallele bc , durch c die Linie cd vertical und durch d wieder parallel zu der Diagonale A_3A_2 , so liefert die Strecke de die gesuchte Spannung T_2 in der Diagonale A_3B_2 der Fig. 247. Diese Construction, welche leicht verständlich sein dürfte, hat man natürlich für jede Diagonale besonders zu führen, indem man dabei immer denjenigen Werth von R_v zu Grunde legt, welcher dem für die betreffende Diagonale ungünstigsten Belastungszustande entspricht. Wie man aus diesen Spannungen der Diagonalen diejenigen der Verticalsposten unter Berücksichtigung des Eigengewichtes findet, ist bereits besprochen, für die größte Anstrengung der Gurtungen hat man nach dem oben Angeführten überall die volle Belastung des Trägers voranzusetzen.

Die größte Anspannung einer Diagonale läßt sich auch mit Rücksicht auf das Gleichgewicht in dem oberen Knotenpunkte derselben bestimmen, welches erfordert, daß die algebraische Summe der horizontalen Componenten der Spannungen in den daselbst zusammenstoßenden Fachwerksgliedern gleich Null ist. Danach muß z. B. für die Diagonale A_3B_2 die Spannungskomponente $T_2 \cos \delta_2$ gleich der Differenz derjenigen Horizontalspannungen H_2 und H_3 sein, die in den oberen Gurtungen B_2B_1 und B_2B_3 sich bei

derjenigen Belastung des Trägers einstellen, welche die größte Anstrengung der Diagonale hervorruft. Für diesen Zustand, also wenn sämtliche Knotenpunkte rechts von dem ν ten Pfosten mit je k belastet sind, hat man offenbar, unter R_ν den durch k veranlaßten Auflagerdruck in A verstanden, die Horizontalspannung im $\nu - 1$ ten Felde $A_1 A_2$ gleich

$$H_{\nu-1} = \frac{1}{y_\nu} R_\nu \nu a$$

und diejenige im folgenden Felde $A_2 A_3$:

$$H_\nu = \frac{1}{y_{\nu+1}} R_\nu (\nu + 1) a,$$

folglich erhält man allgemein die größte bzw. kleinste Spannung in der ν ten Diagonale durch

$$T_\nu \cos \delta_\nu = \pm R_\nu a \left(\frac{\nu + 1}{y_{\nu+1}} - \frac{\nu}{y_\nu} \right).$$

Führt man hierin für R_ν nach (10) und für die Ordinaten y nach (6) die Werthe ein, so erhält man, wenn man $l = na$ und $x = \nu a$ und bezw. $(\nu + 1) a$ setzt:

$$\begin{aligned} T_\nu \cos \delta_\nu &= \pm k \frac{n - \nu}{n} \frac{n - \nu - 1}{2} \frac{l^2}{4h} \left(\frac{1}{(n - \nu - 1)a} - \frac{1}{(n - \nu)a} \right) \\ &= \pm \frac{k}{2n} \frac{l^2}{4h} \frac{1}{a} = \pm k \frac{l}{8h} \end{aligned}$$

oder

$$T = \pm \frac{k}{\cos \delta} \frac{l}{8h} = \pm \frac{k}{a} \frac{a}{\cos \delta} \frac{l}{8h} = \pm \kappa \lambda \frac{l}{8h}, \dots (12)$$

wenn $\kappa = \frac{k}{a}$ die Verkehrsbelastung pro laufenden Meter und $\lambda = \frac{a}{\cos \delta}$ die Länge der Diagonale ist.

Für den Fall, daß man der Construction das Verhältniß $l = 8h$ zu Grunde legt, erhält man für die Maximalspannung der Diagonalen die einfache Beziehung $T = \kappa \lambda$, d. h. für diesen Fall ist die Maximalspannung jeder Diagonale gleich der auf eine Länge gleich derjenigen der Diagonale ausgebreiteten Verkehrslast, bei einem anderen Verhältniße von $l:h$ hat man dieses Gewicht mit dem Bruche $\frac{l}{8h}$ zu multipliciren, um die größte Diagonalspannung zu erhalten.

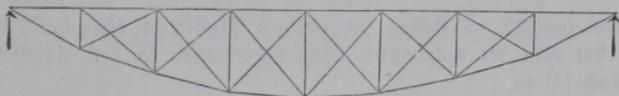
Wenn man in dem Träger der Fig. 247 die Diagonalen entsprechend den punktirten Linien von rechts nach links abfallend anstatt ansteigend anbringt, so gelten die sämtlichen vorstehend angestellten Betrachtungen

auch für diesen Träger mit dem einzigen Unterschiede, daß nunmehr eine einseitige Belastung in der Diagonale irgend eines Feldes einen Druck erzeugt, wenn sie bei der ursprünglichen Anordnung eine Zugkraft hervorrief und umgekehrt. Im Besonderen wird daher beispielsweise in der Diagonale $A_2 B_3$ durch jede rechts aufgebrauchte Belastung Druck, durch jede Belastung eines links gelegenen Feldes Zug hervorgerufen, wie man in derselben Art wie vordem aus der Betrachtung der Richtung erkennt, in welcher die Resultirende aller äußeren Kräfte das Balkenstück $a_2 A b_2$ um den Schnittpunkt C zu drehen strebt.

Hieraus folgt nun, daß man durch Anwendung gekreuzter Streben in den einzelnen Feldern erreichen kann, daß die Streben sämtlich nur durch Zug- oder nur durch Druckkräfte angegriffen werden, je nachdem man die Streben nur gegen die eine oder die andere Beanspruchung widerstandsfähig macht. In dieser Hinsicht kann auf das in den vorhergehenden Paragraphen gelegentlich der Träger mit parallelen Gurtungen Gesagte verwiesen werden. Hierbei ist nur zu bemerken, daß, während bei den Parabelträgern nur die mittleren Felder der Gegenstreben bedürfen, bei den Parabelträgern in allen Feldern Gegenstreben erforderlich sind, weil bei einfachen Streben dieselben in allen Feldern abwechselnd Zug- und Druckspannungen ausgesetzt sind.

Es bedarf nur der Erwähnung, daß die vorstehende Untersuchung sich nicht wesentlich ändert, wenn der Parabelträger nach Fig. 249 die obere

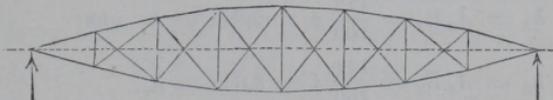
Fig. 249.



Gurtung geradlinig begrenzt erhält. Selbstredend wird dann diese gerade Gurtung mit konstanter Kraft gedrückt, und die parabelförmige untere Gurtung wie eine Kette gezogen, und es werden die Pfosten durch die nunmehr auf der oberen Gurtung angebrachte Fahrbahn auf Druck beansprucht.

Denkt man sich ferner zwei Träger wie die Figuren 247 und 249, deren Spannweiten, Höhen und Belastungen gleich groß sind, mit ihren geraden

Fig. 250.



Gurtungen auf einander gelegt, so kann man in den vereinigten Balken die geraden Gurtungen beseitigen, da deren Spannungen gleich groß und ent-

gegengesetzt sind und man gelangt zu der Trägerform Fig. 250 (a. v. S.). Auch für diesen Doppelparabelträger, auch wohl Fischbauchträger genannt, gelten die vorstehend entwickelten Gesetze, und es sind hier in jedem Felde nicht nur die horizontalen Componenten der Gurtungsspannungen, sondern wegen der symmetrischen Trägerform diese Spannungen selbst in der oberen und unteren Gurtung von gleicher Größe, wenn der ganze Träger gleichmäßig belastet ist.

Beispiel. Für einen Parabelträger von 36 m Länge, welcher in neun gleiche Felder von 4 m Länge getheilt ist, sollen die größten Spannungen der einzelnen Fachwerkglieder unter der Voraussetzung ermittelt werden, daß die untere gerade Gurtung in jedem Knotenpunkte durch das Eigengewicht mit $p = 4$ Tonnen und durch die Verkehrslast mit $k = 12$ Tonnen belastet wird, und daß die Höhe des Trägers in dem mittleren Felde ebenfalls zu 4 m angenommen wird.

Bei der vollen Belastung des Trägers ermittelt sich die Auflagerreaction an jedem Ende zu

$$R = \frac{n-1}{2} q = \frac{8}{2} (4 + 12) = 64 \text{ Tonnen,}$$

und das größte Moment für das Mittelfeld $A_4 A_5$, Fig. 251, zu

$$M_4 = R \cdot 4a - qa(1 + 2 + 3) = 256a - 96a = 160a = 640 \text{ Meter-tonnen,}$$

so daß man die größte Spannung in den horizontalen Gurtungen des Mittelfeldes:

$$O_5 = U_5 = \frac{M_4}{h_4} = \frac{640}{4} = 160 \text{ Tonnen}$$

erhält. Um zunächst die Höhen der übrigen Pfosten $A_1 B_1, A_2 B_2 \dots$ zu bestimmen, hat man die maximalen Biegemomente in den einzelnen Knotenpunkten nach (4) zu

$$M_1 = q \cdot 1 \cdot \frac{9-1}{2} a = 64a,$$

$$M_2 = q \cdot 2 \cdot \frac{9-2}{2} a = 112a,$$

$$M_3 = q \cdot 3 \cdot \frac{9-3}{2} a = 144a;$$

daher folgen die Höhen der Pfosten proportional mit den Momenten zu

$$h_1 = A_1 B_1 = \frac{64}{160} k_4 = \frac{64}{160} 4 = 1,6 \text{ m} = h_8,$$

$$h_2 = A_2 B_2 = \frac{112}{160} 4 = 2,8 \text{ m} = h_7 \text{ und}$$

$$h_3 = A_3 B_3 = \frac{144}{160} 4 = 3,6 \text{ m} = h_6,$$

wonach sich die obere Gurtung zeichnen läßt. Wegen der ungeraden Anzahl der Felder stimmt die Höhe h_4 des mittleren Feldes nicht mit der Scheitelhöhe h überein, vielmehr erhält man dieselbe aus der Proportion:

$$h : h - h_4 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 : \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 81 : 1$$

zu

$$h = \frac{81}{80} h_4 = 4,05 \text{ m.}$$

Für die Neigungswinkel der einzelnen Theile der oberen Gurtung hat man:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_1}{a} = 0,4; \quad \alpha = 21^\circ 49' = \alpha_9,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h_2 - h_1}{a} = 0,3; \quad \alpha_1 = 16^\circ 42' = \alpha_8,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{h_3 - h_2}{a} = 0,2; \quad \alpha_2 = 11^\circ 19' = \alpha_7,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{h_4 - h_3}{a} = 0,1; \quad \alpha_3 = 5^\circ 43' = \alpha_6.$$

Dementsprechend ergeben sich nun die Druckspannungen der oberen Gurtung zu

$$O_1 = \frac{U}{\cos 21^\circ 49'} = \frac{160}{0,9283} = 172,4 t = O_9,$$

$$O_2 = \frac{U}{\cos 16^\circ 42'} = \frac{160}{0,9577} = 167,05 t = O_8,$$

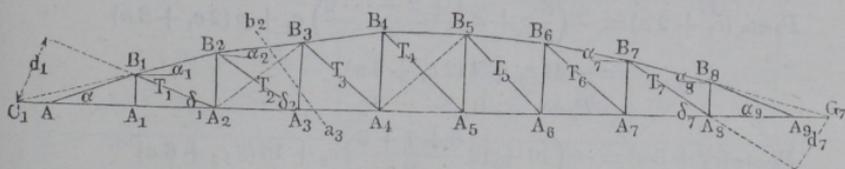
$$O_3 = \frac{U}{\cos 11^\circ 19'} = \frac{160}{0,9806} = 163,2 t = O_7,$$

$$O_4 = \frac{U}{\cos 5^\circ 43'} = \frac{160}{0,9950} = 160,8 t = O_6,$$

$$O_5 = U = 160 t.$$

Um die größten Anstrengungen T der Streben zu ermitteln, seien zunächst nur einfache Diagonalen nach Fig. 251 angenommen, welche sowohl Druck- wie

Fig. 251.



Zugkräften widerstehen können. Es bestimmen sich zuvörderst die Längen λ der Diagonalen zu:

$$\lambda_1 = \sqrt{a^2 + h_1^2} = \sqrt{16 + 2,56} = 4,308 \text{ m,}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{a^2 + h_2^2} = \sqrt{16 + 7,84} = 4,883 \text{ m} = \lambda_7,$$

$$\lambda_3 = \sqrt{a^2 + h_3^2} = \sqrt{16 + 12,96} = 5,382 \text{ m} = \lambda_6,$$

$$\lambda_4 = \sqrt{a^2 + h_4^2} = \sqrt{32} = 5,657 \text{ m.}$$

Da man ferner

$$x = \frac{k}{a} = \frac{12}{4} = 3 t \quad \text{und} \quad \frac{l}{8h} = \frac{36}{8 \cdot 4,05} = 1,111$$

hat, so erhält man nach (12):

$$T_1 = \pm 4,308 \cdot 3 \cdot 1,111 = \pm 14,36 t,$$

$$T_2 = \pm 4,888 \cdot 3,333 = \pm 16,277 t = T_7,$$

$$T_3 = \pm 5,382 \cdot 3,333 = \pm 17,94 t = T_6,$$

$$T_4 = \pm 5,657 \cdot 3,333 = \pm 18,86 t = T_5.$$

In Betreff der verticalen Pfosten denkt man sich den Träger durch Schnitte wie $a_3 b_2$ zerlegt und wählt den Durchschnitt der beiden durchschnittenen Gurtungen $A_3 A_4$ und $B_2 B_3$ zum Mittelpunkt der Momente. Dann erzeugen alle links von dem Schnitte angebrachten Belastungen Zugspannungen, und alle rechts angebrachten Druckspannungen in den Pfosten und zwar darf hier das Eigengewicht p nicht vernachlässigt werden, wie es bei der Ermittlung der Diagonalspannungen geschehen konnte. Bezeichnet man die Abstände der gedachten Schnittpunkte der Gurtungen von A und bezw. von A_0 mit c_1, c_2, c_3 und c_7, c_6, c_5 , so findet man zunächst:

$$c_1 = h_1 \cotg \alpha_1 - a = \frac{1,6}{0,3} - 4 = 1,333 \text{ m} = c_7,$$

$$c_2 = h_2 \cotg \alpha_2 - 2a = \frac{2,8}{0,2} - 8 = 6 \text{ m} = c_6,$$

$$c_3 = h_3 \cotg \alpha_3 - 3a = \frac{3,6}{0,1} - 12 = 24 \text{ m} = c_5.$$

Hiernach erhält man nun die Spannungen P in den Pfosten durch:

$$P_{1max} = 0 + p + k = 16 t,$$

$$P_{1min} = 0 + p = 4 t,$$

$$\begin{aligned} P_{2max}(c_1 + 2a) &= -\left(\frac{8}{2}p + k \frac{8+7}{9}\right)c_1 + (p+k)(c_1 + a + c_1 + 2a) \\ &= -36c_1 + 16(2c_1 + 3a), \end{aligned}$$

$$P_{2max} = \frac{234,66 - 48}{9,33} = + 20 t;$$

$$\begin{aligned} P_{2min}(c_1 + 2a) &= -\left(\frac{8}{2}p + k \frac{1+2+\dots+6}{9}\right)c_1 + p(2c_1 + 3a) \\ &= -44c_1 + 4(2c_1 + 3a), \end{aligned}$$

$$P_{2min} = 0;$$

$$\begin{aligned} P_{3max}(c_2 + 3a) &= -\left(16 + 12 \frac{8+7+6}{9}\right)c_2 + 16(3c_2 + 6a) \\ &= 4c_2 + 96a, \end{aligned}$$

$$P_{3max} = + 22,75 t;$$

$$\begin{aligned} P_{3min}(c_2 + 3a) &= -\left(16 + 12 \frac{1+2+\dots+5}{9}\right)c_2 + 4(3c_2 + 6a) \\ &= -24c_2 + 24a = -2,75, \end{aligned}$$

$$P_{3min} = - 2,75 t;$$

$$\begin{aligned} P_{4max}(c_3 + 4a) &= -\left(16 + 12 \frac{8+7+6+5}{9}\right)c_3 + 16(4c_3 + 10a) \\ &= 13,33c_3 + 160a, \end{aligned}$$

$$P_{4max} = + 24 t;$$

$$P_{4min} (c_3 + 4a) = - \left(16 + 12 \frac{1+2+\dots+4}{9} \right) c_3 + 4(4c_3 + 10a)$$

$$= - 13,33 c_3 + 40 a,$$

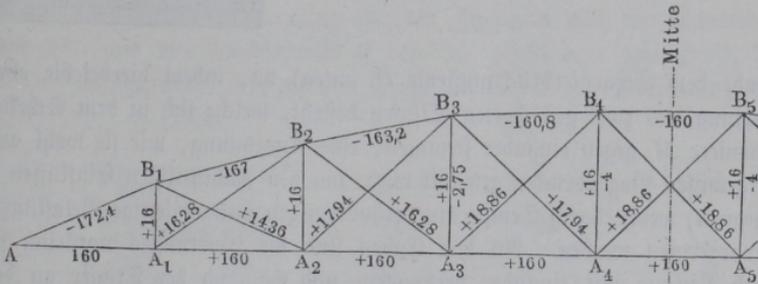
$$P_{4min} = - 4 t.$$

Eine weitere Fortsetzung der Rechnung ergibt die Werthe $P_5 = P_4$, $P_6 = P_3$, $P_7 = P_2$ und $P_8 = P_1$.

Die hier für T und P gefundenen Werthe haben ihre Gültigkeit für den Träger Fig. 251, welcher mit einfachen, gegen Zug und Druck wirksamen Streben versehen ist. Wendet man dagegen Kreuzstreben an, welche nur Zugkräften zu widerstehen vermögen, so können von den für T gefundenen Spannungszahlen nur die positiven Werthe gültig sein, und es ist auch ersichtlich, daß irgend eine der entgegengesetzten Streben, wie z. B. $A_2 B_3$ im dritten Felde, genau so beansprucht wird, wie die mit ihr symmetrisch gelegene Hauptstrebe $A_7 B_6$ im siebenten Felde, da für beide Streben die Rechnung zu demselben Ansätze und Resultate führt.

Ebenso erkennt man, daß für die Spannungen P in den verticalen Pfosten nur die Minima, welche Druckkräfte bedeuten, Gültigkeit haben, denn durch die Wirkung der Diagonalen, welche nur Zugkräfte äußern können, kann in den Verticalen niemals eine absolute, sondern nur eine rückwirkende Spannung hervorgerufen werden. Die größten Zugspannungen finden dagegen in den Pfosten statt, wenn der Träger über seiner ganzen Länge mit der Verkehrslast bedeckt ist, für welchen Fall in jedem Pfosten eine Zugspannung von $p + k = 16 t$ hervorgerufen wird. Demgemäß sind die Spannungszahlen in die schematische Figur 252 eingetragen. In welcher Weise man Zug- und Druckspannungen,

Fig. 252.



d. h. die Plus- und Minuszeichen für die Diagonalen bei Anwendung von Druckstreben sowie für die Gurtungen und Pfosten zu vertauschen hat, wenn die gerade Gurtung oben liegt, ist leicht zu entscheiden.

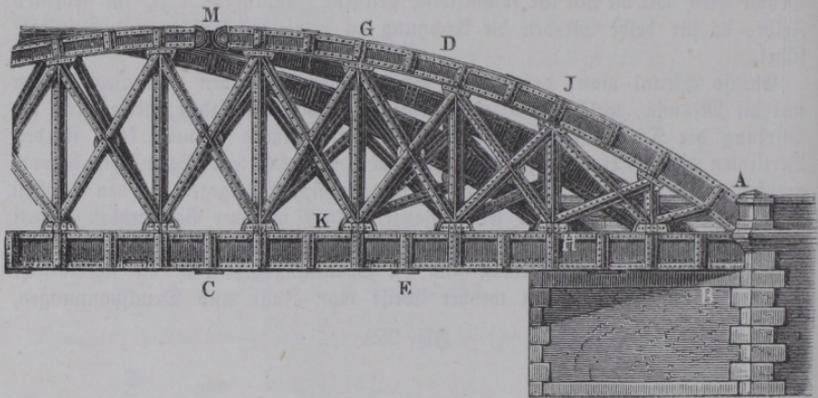
Brückenträger mit parabelförmiger Gurtung sind in größerem Maßstabe zuerst von Brunel ausgeführt. Dahin gehört beispielsweise die Windsorbrücke*) mit einer lichten Spannweite von 57,25 m und einer Höhe der Träger in der Mitte von 7,6 m. Die obere Gurtung hat dabei die Form eines aus Blechplatten gebildeten gleichschenkeligen Dreiecks mit horizontaler

*) Zeitschr. f. Bauwesen von Erbkam, 1861. S. 111.

oben liegender Basis, während für die untere Gurtung und für die Verticalen die doppelt T förmige Querschnittsgestalt gewählt ist; die mit Keilvorrichtungen zum Anspannen versehenen gekreuzten Diagonalen bestehen aus flachen Zugschienen. Bei der gleichfalls von Brunel ausgeführten Saltashbrücke bei Plymouth haben die Träger bei 139 m Spannweite in der Mitte 17 m Höhe erhalten, und es ist auch für die untere Gurtung nach Art der Fischbauchträger eine gekrümmte Form gewählt worden.

In Fig. 253 ist ein Theil der schiefen Eisenbahnbrücke abgebildet, welche zu Dudenarden über die Schelde führt. Diese Brücke gehört in gewissem

Fig. 253.



Grade dem Scharnierbrückensysteme (s. unten) an, indem hierbei die obere Gurtung aus zwei gesonderten Stücken besteht, welche sich in dem Scheitelscharniere *M* gegen einander stemmen, eine Anordnung, wie sie wohl auch bei gewissen Bogenbrücken gewählt wird, um den nachtheiligen Einflüssen zu begegnen, welche durch Temperaturveränderungen und einseitige Belastungen hervorgerufen werden. An den Enden sind die Gurtungen natürlich fest durch Nietung mit einander verbunden, und während der Träger an dem einen Ende fest auf dem Pfeilerkopfe *B* aufliegt, ist dem anderen Ende wegen der Temperaturveränderungen mittelst untergelegter Walzen eine kleine Verschiebung auf dem Pfeiler gestattet. Die Länge eines Trägers beträgt 27,8 m bei einer Höhe von 6 m in der Mitte. Die Gurtungen sind aus Eisenblech von 10 bis 13 mm Dicke mit doppelt T förmigem Querschnitte hergestellt und mit den verticalen Pfosten *KG*, *JH* und diagonalen Zugbändern *DH*, *DK* fest vernietet. Diese Brücke hat noch die Eigenthümlichkeit, daß zwischen den die Hauptträger verbindenden Querträgern Ziegelgewölbe ausgeführt sind, welche ein über 0,5 m dickes Schotterbett für die Bahnschwellen tragen.

Eine sehr schöne Brücke mit Parabelträgern ist die über die Brahe bei Czerek*) geführte schiefe Eisenbahnbrücke. Dieselbe überspannt jede der beiden $63,56' = 19,95$ m im Lichten weiten Deffnungen unter einem Winkel von $58^{\circ} 29'$ gegen die Stromrichtung, wonach den beiden Parabelträgern, welche für jedes Geleise aufgestellt sind, eine Länge von $81' = 25,4$ m zwischen den Auflagerpunkten und der Parabel, nach welcher die obere Gur tung angeordnet ist, eine Pfeilhöhe zwischen den Schwerpunkten der Gur tungen von $\frac{l}{8} = 3,2$ m gegeben worden ist.

Fig. 254.

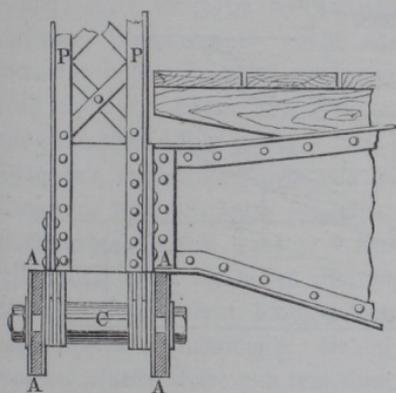
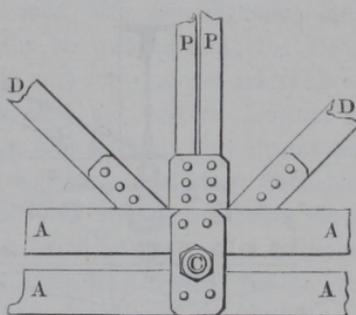


Fig. 255.



Während die untere Gur tung oder der Zugbaum nach den Figuren 254 und 255 aus vier Flachschienen *A* von 26×130 mm gebildet ist, durch deren Zwischenraum horizontale Diagonalstangen zur Herstellung eines

Fig. 256.

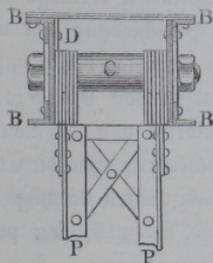
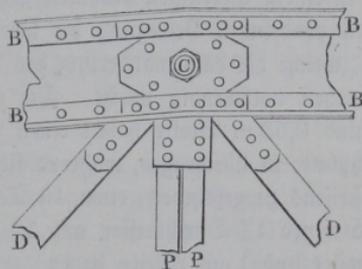


Fig. 257.

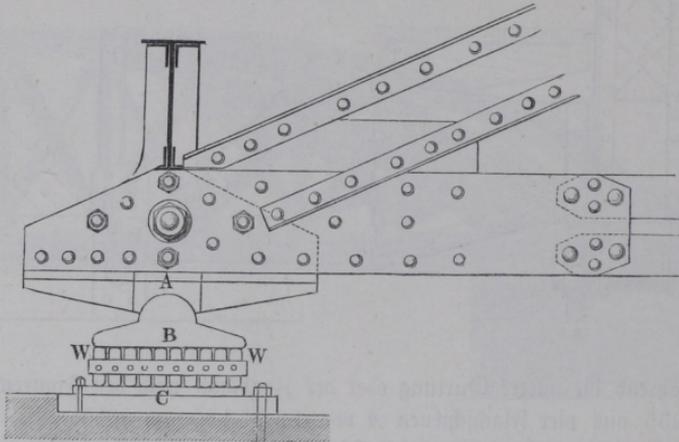


Kreuzverbandes unterhalb der Fahrbahn hindurchgehen, ist der oberen Gur tung ein druckfähiger Querschnitt durch zwei \square förmige Balken *B* von 0,314 m Höhe, Fig. 256 und Fig. 257, gegeben, welche oberhalb durch Gitter-

*) E. Schwedler's Aufsatz in Erbkam's Zeitschr. f. Bauwesen 1861.

stäbe gegen einander versteift sind. Desgleichen sind die verticalen Pfosten *P* aus je vier Eeisen mit zwischengelegtem Gitter gebildet, während die Diagonalen *D* aus je zwei Flachschienen von 10×105 mm bestehen. Die Verbindung der Gurtungen mit den Zwischengliedern ist, wie aus den Figuren 254 bis 257 ersichtlich ist, überall durch Bolzen *C* von 52 mm Dicke gebildet, in deren Axen die Schwerlinien der verbundenen Theile sich kreuzen. Auch hier sind die Trägerenden jeder Oeffnung auf einer Seite durch ein festes Auflager auf dem Pfeiler gestützt, während jedes der anderen Enden mit Hülse eines gußeisernen Schuhs *A*, Fig. 258, und einer Platte *B* auf eine Anzahl (10) von Walzensegmenten *W* drückt, welche auf der

Fig. 258.



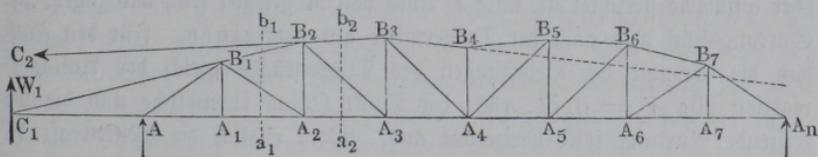
Stützplatte *C* des Landpfeilers ruhen. Diese Walzensegmente, mit ihren Zapfen in einem viereckigen Rahmen gehalten, gestatten vermöge der ihnen möglichen pendelnden Bewegung die horizontale Verschiebung von ungefähr 30 mm, welche die Längenänderung des Trägers in Folge der Temperaturschwankungen nothwendig macht. Die zehn Walzen von 0,118 m Durchmesser und 0,52 m Breite haben einen Maximaldruck von 36 Tonnen auf die Stützplatte zu übertragen, während sie mit Sicherheit, ohne die Elasticität des Gußeisens zu gefährden, etwa 46 Tonnen auszuhalten vermögen, nämlich 1 Etr. pro 1" Durchmesser und 1" Breite, d. h. ca. 7,5 kg pro 1 cm Durchmesser und 1 cm Breite, daher

$$10 \cdot 52 \cdot 11,8 \cdot 7,5 = 46\,000 \text{ kg.}$$

§. 57. **Schwedler'sche Träger.** Im vorhergehenden Paragraphen wurde gefunden, daß bei dem Parabelträger, dessen Form aus der Bedingung einer constanten Spannung in der geraden Gurtung folgte, die Dia-

gonalen bei der vollen Belastung gar keiner Spannung unterworfen sind, während durch die einseitigen Belastungen jede Diagonale einer größten positiven und einer größten negativen Spannung von demselben Betrage ausgesetzt wird. Der letztere Umstand macht daher die Anordnung von Gegenstreben in allen Feldern nöthig, wenn man die Bedingung stellt, daß die Diagonalen nur in einem Sinne, entweder nur auf Zug oder nur auf Druck angesprochen werden sollen. Man kann das letztere indessen auch erreichen, ohne gekreuzte Streben anwenden zu müssen. Soll z. B. in einem beliebigen Felde, in welchem nur eine Diagonale angebracht ist, die letztere in allen Fällen nur durch Zugkräfte angegriffen werden, so hat man nur nöthig, durch die Form des Trägers dafür zu sorgen, daß bei derjenigen einseitigen Belastungsart, welche nach dem Vorstehenden die größte Druckspannung in der Diagonale hervorzurufen sucht, diese Druckspannung gleich Null ausfällt. Wenn diese Bedingung für die größte negative Spannung erreichbar, also $-T_{max} = 0$ ist, so wird offenbar jede andere in der Diagonale auftretende Spannung positiv sein, mit anderen Worten, die Diagonale wird nur durch Zugkräfte angegriffen werden. Nun ist aus dem Vorhergehenden aber leicht zu erkennen, daß die vorausgesetzte Bedingung erfüllt ist, sobald die beiden Gurtungsstücke des betreffenden Feldes sich in einem Punkte schneiden, durch welchen auch die Resultirende aller derjenigen äußeren Kräfte hindurchgeht, die auf das Trägerstück wirken, das zwischen dem betrachteten Felde und dem einen Stützpunkte gelegen ist. Sollen z. B. in der Diagonale A_2B_1 , Fig. 259, nur Zugspannungen auftreten, so denkt man sich diejenige Belastung, welche in dieser Diagonale das Minimum der

Fig. 259.



Spannung, d. h. die größte Druckspannung zu erzeugen strebt, welcher Zustand bekanntlich durch eine Belastung aller links gelegenen Knotenpunkte, jedes durch k , dargestellt ist. Denkt man nun durch die Diagonale einen Schnitt $a_1 b_1$ gelegt, so muß das Balkenstück $a_1 A b_1$ im Gleichgewichte sein unter dem Einflusse aller äußeren darauf wirkenden Kräfte und der drei Spannungen U_2 , O_2 und T_1 der durchschnittenen Glieder. Die beiden Spannungen U_2 und O_2 haben eine durch ihren Schnittpunkt C_1 gehende Mittelkraft, und wenn die Resultirende W_1 aller äußeren Kräfte ebenfalls durch diesen Punkt C_1 geht, so fällt die Spannung T_1 der Diagonale gleich

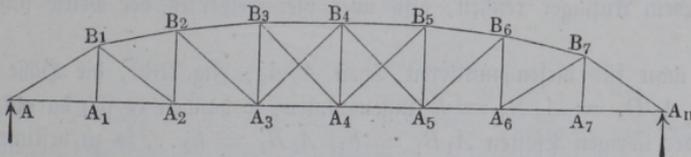
Null aus, wie man findet, wenn man die Summe der statischen Momente aller vier Kräfte W_1 , U_2 , O_2 und T_1 in Bezug auf C_1 gleich Null setzt. Um daher der gestellten Bedingung zu genügen, hat man nur nöthig, den Durchschnittspunkt C_1 der geraden Gurtung mit der Resultirenden W_1 aller auf das betrachtete Balkenstück wirkenden äußeren Kräfte zu bestimmen, und der oberen Gurtung B_1B_2 eine durch diesen Punkt gehende Richtung zu geben. Wäre etwa die Höhe des Verticalständers $A_2B_2 = h_2$ gegeben, so erhielte man durch die so gefundene Richtung B_2C_1 die Höhe $A_1B_1 = h_1$ des vorhergehenden Pfostens. Bestimmt man in derselben Art den Durchschnittspunkt C_2 , in welchen die gerade untere Gurtung von der Resultirenden W_2 aller auf das Balkenstück a_2Ab_2 wirkenden äußeren Kräfte getroffen wird, so erhält man in der Verbindungslinie von C_2 mit B_2 die Richtung und den Knotenpunkt B_3 der Gurtung B_2B_3 . Ebenso kann man die rechts von B_3 gelegenen Knotenpunkte bestimmen.

Es kann hierbei bemerkt werden, daß jede einzelne der besagten Resultirenden, wie W_2 , die Mittelkraft ist aus der in A vertical aufwärts gerichteten jedesmaligen Lagerreaction R , und den vertical abwärts wirkenden zwischen A und dem Durchschnitte angebrachten Belastungen von $q = p + k$ für jeden Knotenpunkt. Diese Mittelkraft ist daher gleich der in dem betrachteten Querschnitte wirkenden verticalen Scheerkraft V . Der Angriffspunkt C dieser Resultirenden liegt nach den bekannten Gesetzen, welche für die Zusammensetzung paralleler entgegengesetzter Kräfte gelten, immer außerhalb der Kräfte, und zwar auf der Seite der größeren von ihnen. So lange daher die Stützenreaction R an Größe die Summe der gedachten Belastungen q übertrifft, d. h. so lange die verticale Scheerkraft V positiv oder aufwärts gerichtet ist, muß C links von A gelegen sein, das zugehörige Gurtungsstück also nach der Trägermitte hin ansteigen. Für den Fall, daß die Summe der Belastungen des Trägerstückes gleich der Auflagerreaction also $V = 0$ ist, rückt der Punkt C ins Unendliche und die betreffende Gurtung fällt horizontal aus. Wird endlich die Mittelkraft W oder die Scheerkraft V negativ, so erscheint der besagte Schnittpunkt C auf der anderen Seite des Querschnittes und die Gurtung des Trägers wird an dieser Stelle nach der Mitte hin abfallen. Dieses Verhalten stellt sich in der Figur in dem Felde A_3A_4 ein, indem hier vorausgesetzt ist, daß in dem Pfosten A_3B_3 ein Wechsel der Scheerkraft V stattfindet, derart, daß diese Kraft daselbst positiv ist, wenn nur die Knotenpunkte A_1 und A_2 mit je q belastet sind, während bei einer Belastung auch von A_3 eine negative Schubkraft in dem Felde A_3A_4 erzeugt wird. Man erkennt daraus, daß in Folge dessen der Träger nach der Mitte hin eine geringere Höhe h_4 erhält, als in dem links davon entfernten Knotenpunkte A_3 . Gesezt A_4B_4 wäre der mittlere Pfosten, so läßt sich auch für die rechte Trägerhälfte A_4A_n durch eine

ganz ähnliche Betrachtung, wie sie hier angeführt ist, die Form der oberen Gurtung unter der Bedingung feststellen, daß die Diagonalen nur gezogen werden sollen, für welchen Fall man natürlich die Diagonalen von der Mitte aus nach der entgegengesetzten Richtung, d. h. nach dem jenseitigen Auflager A_n ansteigen lassen muß.

Die in solcher Art festgestellte Trägerform hat den Uebelstand, daß in der Mitte, wo das Biegemoment ein Maximum ist, die Spannung der Gurtung wegen der daselbst verminderten Höhe eine beträchtliche und nach beiden Seiten hin schnell abnehmende ist, sowie daß die Ausführung des Trägers eine schwierige wird. Diese Uebelstände sind bei dem Schwedler'schen Träger dadurch beseitigt, daß der mittlere Theil des Trägers zwischen den beiden höchsten Verticalen $A_3 B_3$ und $A_5 B_5$ mit parallelen Gurtungen nach Fig. 260 versehen wird. In Folge dessen wird in diesen mittleren Feldern die Bedingung, daß die Diagonalen Druckkräften gar nicht ausgesetzt seien, nicht mehr erfüllt sein, und man hat daher, wie bei den Parallel-

Fig. 260.



trägern, in diesen mittleren Feldern gekreuzte Diagonalen anzubringen, wenn dieselben nur in einer Richtung widerstandsfähig sind. Für diesen mittleren Trägertheil mit parallelen Gurtungen gelten überall die in §. 54 über Parallelträger angeführten Beziehungen, und man kann überhaupt den Schwedlerträger als einen Parallelträger ansehen, bei welchem die obere Gurtung beiderseits so nach der unteren herabgezogen ist, daß der mehrerwähnten Bedingung genügt wird, wonach in den Seitenfeldern die einfachen Diagonalen nur gezogen werden.

Die Erstreckung dieses mittleren Stückes zu jeder Seite der Trägermitte, also die Anzahl der mit Gegenstreben zu versehenen Felder, erhält man wieder durch Ermittlung der Strecke, auf welcher die Verticalkraft ihre Richtung ändert, d. h. den Werth Null annehmen kann. Bezeichnet n die ganze Anzahl der im Träger vorhandenen Felder von der Länge a , und ist ν die Anzahl der Felder zwischen dem Auflager A und dem Pfosten $A_\nu B_\nu$, so erhält man den Auflagerdruck R_ν in A , wenn der Träger auf der Strecke $A A_\nu$ mit der beweglichen Last bedeckt ist, zu:

$$R_\nu = \frac{n-1}{2} p + \frac{n-1+n-2+\dots+n-\nu}{n} k = \frac{n-1}{2} p + \left(1 - \frac{\nu+1}{2n}\right) \nu k. \quad (1)$$

und folglich die verticale Scheerkraft in dem auf den Pfosten A_v folgenden Felde zu:

$$V_v = R_v - v(p + k) = \frac{n-1}{2} p - \frac{v+1}{2n} vk - vp \dots (2)$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich Null, so erhält man

$$n(n-1)p = (v+1)vk + 2nvp,$$

woraus sich

$$v = -\left(\frac{1}{2} + n\frac{p}{k}\right) + \sqrt{n(n-1)\frac{p}{k} + \left(\frac{1}{2} + n\frac{p}{k}\right)^2} \dots (3)$$

ergibt.

Aus dieser Gleichung findet sich die Anzahl der in der Mitte mit parallelen Gurtungen und daher mit Gegenstreben zu versehenen Felder. Beispielsweise erhält man für $n = 10$ und $p = \frac{1}{3}k$ für v den Werth

$$v = -3,83 + \sqrt{30 + 3,83^2} = 2,81,$$

woraus sich ergibt, daß die parallelen Gurtungen bis zum dritten Pfosten neben jedem Auflager reichen, also über vier Felder in der Mitte sich erstrecken.

Hat man für diesen mittleren Theil A_3A_5 , Fig. 260, die Höhe der Pfosten $A_3B_3 = A_5B_5 = h$ angenommen, so handelt es sich darum, die Höhen der übrigen Pfosten $A_1B_1 = h_1$, $A_2B_2 = h_2 \dots$ so zu bestimmen, daß der im Eingange erwähnten Bedingung Genüge gethan wird. Um etwa die Höhe $h_2 = A_2B_2$ zu ermitteln, denkt man sich die beiden Knotenpunkte A_1 und A_2 von der Verkehrslast angegriffen und bestimmt den Durchschnittspunkt C_2 , in welchem die Resultirende aller auf A_2AB_2 wirkenden äußeren Kräfte die horizontale Gurtung schneidet, welcher Punkt die Richtung B_3B_2 und also die Höhe A_2B_2 ergibt. Die Festsetzung dieses Punktes durch ein graphisches Verfahren bietet keine Schwierigkeit dar. Will man den Punkt C durch Rechnung bestimmen, so bezeichne man wieder mit v die Anzahl der belasteten Felder, also ist hier für A_2 $v = 2$ anzunehmen, und bestimme nach (1) die Größe des Auflagerdrucks R_v für diese vorausgesetzte Belastung. Bezeichnet nun $c = AC$ die Entfernung des gesuchten Schnittpunktes C von dem Auflager A , so gilt die Momentengleichung in Bezug auf den Punkt C :

$$R_v c = (p + k)(c + a + c + 2a + \dots c + va) = q\left(vc + \frac{v+1}{2}va\right) (4)$$

woraus

$$c = \frac{\frac{v+1}{2}vaq}{R_v - qa} \dots \dots \dots (5)$$

folgt. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel für $v = 1, 2, 3 \dots$ findet man die Abstände c und damit die Höhen sämtlicher Pfosten $h_1, h_2, h_3 \dots$, wenn die Höhe h der mittleren gegeben ist. Daß diese Verticalpfosten hier andere Werthe annehmen, als bei dem Parabelträger, ist selbstredend; ebenso ist es klar, daß bei diesem Träger für den Zustand der gleichförmigen Belastung die Spannung der unteren Gurtung nicht mehr in allen Feldern von gleicher Größe ist, wie es bei dem Parabelträger der Fall ist. Die Bestimmung der größten Anstrengungen der Gurtungen und Zwischentheile geschieht in derselben Art, wie vorstehend für den Parabelträger und für den Parallelträger gezeigt worden ist.

Bezeichnet

$$M_v = q \frac{n-1}{2} v a - q (1 + 2 \dots v - 1) a = q \frac{n-v}{2} v a. \quad (6)$$

das Biegemoment für den Querschnitt durch den v ten Verticalständer für den Fall, daß der Träger über seine ganze Länge mit der Verkehrslast bedeckt ist, so findet man die Zugspannung U_{v+1} der unteren Gurtung in dem auf diesen Pfosten folgenden Felde zu

$$U_{v+1} = \frac{1}{h_v} M_v = q \frac{n-v}{2} v \frac{a}{h_v}, \dots \dots \dots (7)$$

unter h_v die Höhe des v ten Pfostens verstanden. Für die Spannung O_v der oberen Gurtung in dem v ten Felde, d. h. dem Pfosten $A_v B_v$ vorhergehenden Felde, deren Neigung gegen den Horizont α_v sein mag, findet man dann ebenfalls zu

$$O_v = \frac{1}{\cos \alpha_v} \frac{M_v}{h_v} = \frac{U_{v+1}}{\cos \alpha_v} = \frac{1}{\cos \alpha_v} \frac{n-v}{2} v \frac{a}{h_v} \dots \dots (8)$$

Da nun $\frac{a}{\cos \alpha_v}$ die Länge λ des betreffenden Gurtungsstückes bedeutet, so kann man wie beim Parabelträger auch allgemein

$$O_v = \frac{\lambda}{a} U_{v+1} \dots \dots \dots (9)$$

schreiben, welche Gleichung für jede Hälfte des Trägers unter der Voraussetzung gilt, daß die Zählung der Felder von dem zugehörigen Auflagerpunkte nach der Mitte hin geschieht.

Ist, wie in der Figur, die Zahl der Felder eine gerade, so sind die Maximalspannungen der unteren sowohl wie der oberen Gurtung in den beiden mittleren Feldern je unter sich gleich. Wenn dagegen die Felderzahl eine ungerade ist, so ist in dem mittleren Felde die Spannung $U_{\frac{n+1}{2}}$ gleich derjenigen der oberen Gurtung $O_{\frac{n+1}{2}}$, und da die Kreuzdiagonalen

dieses Feldes bei voller Belastung des Trägers keiner Anstrengung ausgesetzt sind, so ist auch die Spannung der Obergurtung in jedem der beiderseits anstoßenden Felder ebenso groß wie in dem mittleren.

Die größte Spannung einer Diagonale kann man wie bei dem Parabelträger dadurch finden, daß man die Momentengleichung in Bezug auf den Durchschnitt C der beiden Gurtungen ansetzt, welche dem von der Diagonale eingenommenen Felde angehören. Es läßt sich diese maximale Spannung aber auch direct finden, ohne daß man die Abstände c und d dieses Schnittpunktes von dem Auflager und der Diagonalenrichtung kennt. Denkt man sich nämlich den Balken im v ten Felde, z. B. im dritten Felde durchschnitten und den ungünstigsten Belastungszustand, d. h. eine Belastung aller Knotenpunkte rechts vom Schnitte A_3 bis A_7 vorausgesetzt, so hat man, unter T_v die Diagonalspannung und unter δ_v den Winkel der Diagonale B_2A_3A gegen den Horizont verstanden, wegen des Gleichgewichts im oberen Knotenpunkte B_2 die Gleichheit der Horizontalkräfte:

$$T_v \cos \delta_v = H_v - H_{v-1}, \dots \dots \dots (10)$$

wenn mit H_v und H_{v-1} die horizontalen Spannungskomponenten bezeichnet werden, welche bei der vorausgesetzten Belastung bezw. in B_2B_3 und B_2B_1 sich einstellen. Nun findet sich aber für diesen Zustand, für welchen der Auflagerdruck in A durch

$$R_v = p \frac{n-1}{2} + k \frac{1+2+\dots+n-v}{n} \dots \dots \dots (11)$$

gegeben ist, die Horizontalspannung

$$H_v = \frac{1}{h_v} [R_v v a - p(1+2+\dots+v-1)a] \dots \dots (12)$$

und

$$H_{v-1} = \frac{1}{h_{v-1}} [R_v(v-1)a - p(1+2+\dots+v-2)a], \quad (13)$$

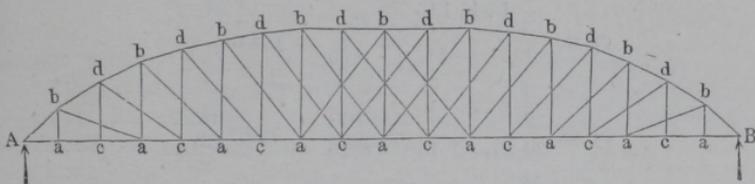
wodurch man nach (10) die gesuchte Maximalspannung T_v der Diagonale findet. Desgleichen ergibt sich für den Pfosten A_2B_2 die größte Spannung gleich der für denselben Belastungszustand ermittelten algebraischen Summe der Verticalkomponenten der in den drei Gliedern B_1B_2 , B_3B_2 und B_2A_3 auftretenden Spannungen u. s. f.

Auch diese Träger können, um die Entfernungen der Knotenpunkte bei großen Spannweiten nicht zu groß und die Diagonalen nicht zu steil zu erhalten, mit mehrfachen Systemen von Zwischengliedern versehen werden, wie dies beispielsweise bei den Trägern der Elbbrücke in der Berlin-Lehrter-Eisenbahn*) geschehen ist. Fig. 261 zeigt das System eines solchen Trägers,

*) Erbkam, Zeitschr. f. Bauwesen, 1868, S. 517.

welcher bei einer Entfernung der Stützen von 210' (65,9 m) 16 Felder von 12' (3,766 m) und zwei Endfelder von je 9' (2,825 m) erhalten hat.

Fig. 261.



Das System des Fachwerks ist ein doppeltes, und man hat bei der Berechnung eines solchen Trägers jedes der beiden Systeme $Aabab \dots B$ und $Ac dcd \dots B$ für sich zu berechnen und die für die einzelnen Gurtungsteile erhaltenen Spannungszahlen entsprechend zu addiren.

Beispiel. Für eine Spannweite von 32 m soll ein in der Mitte 4 m hoher Schwedlerträger aus 8 Feldern bestehend angeordnet werden. Für denselben sollen die Form und die größten Spannungen der Glieder unter der Voraussetzung ermittelt werden, daß das Eigengewicht der Construction pro laufenden Meter 1 Tonne und die Verkehrslast für dieselbe Länge 2,5 Tonnen beträgt?

Hier ist die horizontale Weite jedes der $n = 8$ Felder durch $a = \frac{32}{8} = 4$ m, daher die Belastung eines Knotenpunktes durch $p = 4$ t, $k = 10$ t und bezw. $q = p + k = 14$ t gegeben. Um die Höhen der Pfosten $A_1B_1, A_2B_2 \dots$,

Fig. 262.

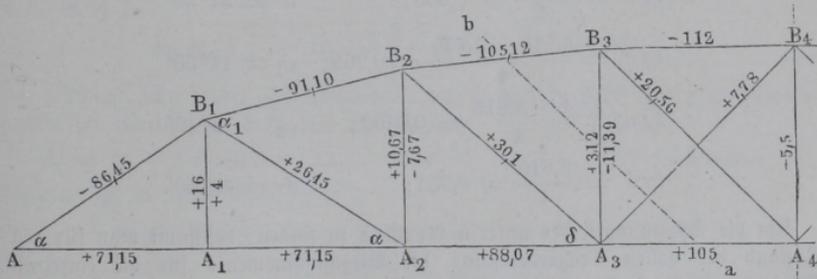


Fig. 262, zu bestimmen, findet sich zunächst der Auflagerdruck in A , für den Fall, daß nur der Knotenpunkt A_1 durch die Verkehrslast angegriffen wird, zu

$$R_1 = \frac{n-1}{2} p + \frac{n-1}{n} k = \frac{7}{2} 4 + \frac{7}{8} 10 = 22,75 \text{ t.}$$

Ebenso erhält man diese Auflagerdrucke für die Belastung der zwei Knotenpunkte A_1 und A_2 , bezw. der drei Punkte A_1, A_2 und A_3 zu

$$R_2 = \frac{7}{2} 4 + \frac{7+6}{8} 10 = 30,25 \text{ t und}$$

$$R_3 = \frac{7}{2} 4 + \frac{7+6+5}{8} 10 = 36,5 \text{ t.}$$

Mit diesen Werthen bestimmen sich daher nach (5) die Abstände c_1, c_2 und c_3 von A , in welchen die horizontale Gurtung von den oberen Gurtungsstücken $B_1 B_2, B_2 B_3$ und $B_3 B_4$ getroffen wird, zu

$$c_1 = \frac{\frac{2}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 14}{22,75 - 14} = \frac{56}{8,75} = 6,4 \text{ m,}$$

$$c_2 = \frac{\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 14}{30,25 - 2 \cdot 14} = \frac{168}{2,25} = 74,67 \text{ m,}$$

$$c_3 = \frac{\frac{4}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 14}{36,5 - 3 \cdot 14} = -\frac{336}{5,5} = -61,1 \text{ m.}$$

Der negative Werth von c_3 deutet an, daß die obere Gurtung zwischen A_3 und A_4 horizontal zu machen, und daß daher ein Feld zu jeder Seite der Mitte mit Gegenstreben zu versehen ist.

Wenn nun dem Pfosten $A_3 B_3$ die verlangte Höhe $h_4 = h_3 = 4 \text{ m}$ gegeben wird, so erhält man

$$h_2 = h_3 \frac{c_2 + 2a}{c_2 + 3a} = 4 \frac{74,67 + 8}{74,67 + 12} = 3,815 \text{ m}$$

und

$$h_1 = h_2 \frac{c_1 + a}{c_1 + 2a} = 3,815 \frac{6,4 + 4}{6,4 + 8} = 2,755 \text{ m.}$$

Hieraus folgen nun weiter die Neigungen der Gurtungen und Streben gegen den Horizont aus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,755}{4} = 0,689; \quad \alpha = 34^\circ 35'$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3,815 - 2,755}{4} = 0,265; \quad \alpha_1 = 14^\circ 50'$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{4 - 3,815}{4} = 0,0462; \quad \alpha_2 = 2^\circ 40'$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{3,815}{4} = 0,954; \quad \delta = 43^\circ 40'.$$

Um die Spannungen der unteren Gurtung zu finden, bestimmt man für den Zustand der vollen Trägerbelastung die Biegemomente für die einzelnen Knotenpunkte (s. S. 54, Gleichung 8a):

$$M_1 = q a v \frac{n-v}{2} = 14 \cdot 4 \cdot \frac{7}{2} = 196 \text{ mt.}$$

$$M_2 = 14 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{6}{2} = 336 \text{ mt.}$$

$$M_3 = 14 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} = 420 \text{ mt.}$$

$$M_4 = 14 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 448 \text{ mt.}$$

Hieraus findet man die Gurtungskräfte für die einzelnen Felder, wenn man immer den unteren Knotenpunkt A für die Bestimmung der Spannungen O

und den oberen Knotenpunkt B für die Spannungen U zum Mittelpunkte der Momente annimmt. Danach erhält man für AA_1 mit dem Momentenmittelpunkte in B_1 :

$$U_1 = \frac{M_1}{h_1} = \frac{196}{2,755} = 71,15 \text{ t.}$$

Ebenso groß ist auch U_2 in A_1A_2 , da in A_1 die Horizontalkraft sich nicht ändern kann, insofern hier kein geneigtes Glied zur Aufnahme einer horizontalen Componente sich anschließt. Wählt man A_1 zum Momentenmittelpunkte, so folgt aus $M_1 = O_1 h_1 \cos \alpha$ die Spannung:

$$O_1 = \frac{M_1}{h_1 \cos \alpha} = \frac{196}{2,755 \cdot \cos 34^\circ 35'} = \frac{196}{2,755 \cdot 0,823} = 86,45 \text{ t.}$$

In ähnlicher Art erhält man:

$$U_3 = \frac{M_2}{h_2} = \frac{336}{3,815} = 88,07 \text{ t.}$$

$$O_2 = \frac{M_2}{h_2 \cos \alpha_1} = \frac{336}{3,815 \cdot \cos 14^\circ 50'} = \frac{336}{3,815 \cdot 0,9667} = 91,10 \text{ t.}$$

$$U_4 = \frac{M_3}{h_3} = \frac{420}{4} = 105 \text{ t.}$$

$$O_3 = \frac{M_3}{h_3 \cos \alpha_2} = \frac{420}{4 \cdot \cos 2^\circ 40'} = \frac{420}{4 \cdot 0,9989} = 105,12 \text{ t.}$$

$$O_4 = \frac{M_4}{h_4} = \frac{448}{4} = 112 \text{ t.}$$

Die größte Spannung der Strebe A_2B_1 findet sich bei einer Belastung des rechten Trägerstückes bis zum Knotenpunkte A_2 , für welchen Fall der Auflagerdruck in A zu

$$R_1 = 4 \frac{7}{2} + 10 \frac{1+2+3+\dots+6}{8} = 40,25 \text{ t.}$$

sich bestimmt. Da ferner der Abstand d_1 der Diagonale A_2B_1 von dem Schnittpunkte der Gurtungen AA_2 und B_1B_2 durch

$$d_1 = (c_1 + 2a) \sin \alpha = 14,4 \cdot \sin 34^\circ 35' = 14,4 \cdot 0,567 = 8,165 \text{ m}$$

bestimmt ist, so findet sich T_1 aus

$$T_1 d_1 = R_1 c_1 - p(c_1 + a) = 40,25 \cdot 6,4 - 4 \cdot 10,4 = 216,0$$

zu

$$T_1 = \frac{216}{8,165} = 26,45 \text{ t.}$$

In gleicher Weise hat man für die Belastung des rechten Trägerteils bis einschließlich A_3 den Auflagerdruck in A gleich:

$$R_2 = 4 \frac{7}{2} + 10 \frac{1+2+3+\dots+5}{8} = 32,75 \text{ t,}$$

und den betreffenden Hebelarm

$$d_2 = (c_2 + 3a) \sin \delta = (74,67 + 12) \sin 43^\circ 40' = 86,67 \cdot 0,690 = 59,80 \text{ m,}$$

so daß man aus

$$T_2 d_2 = 32,75 \cdot 74,67 - 4(2 \cdot 74,67 + 3 \cdot 4) = 1800$$

erhält.

$$T_2 = \frac{1800}{59,8} = 30,1 \text{ t}$$

Die Diagonale A_4B_3 erreicht ihre größte Spannung, wenn alle Knotenpunkte rechts bis zu A_4 einschließlich belastet sind, während die Gegenstrebe A_3B_4 bei einer Belastung aller Knoten von A bis A_3 am stärksten gezogen wird. Man findet diese Spannungen für dieses Feld wie bei den Parallelträgern, indem man die betreffende verticale Scheerkraft gleich der verticalen Componente der Diagonalkraft setzt. Daher findet sich für A_4B_3 die Spannung T_3 aus

$$T_3 \sin 45^\circ = 4 \frac{7}{2} + 10 \frac{1+2+3+4}{8} - 3 \cdot 4 = 14,5 \text{ t}$$

zu

$$T_3 = \frac{14,5}{0,7071} = 20,56 \text{ t,}$$

und für A_3B_4 die größte Spannung T_3' aus

$$T_3' \sin 45^\circ = -4 \frac{7}{2} - 10 \frac{7+6+5}{8} + 3 \cdot 14 = 5,5$$

zu

$$T_3' = \frac{5,5}{0,7071} = 7,78 \text{ t.}$$

Für den Pfosten A_1B_1 ergeben sich zunächst wieder die größte und die kleinste Spannung zu resp.

$$P_{1max} = + p + k = 16 \text{ t}$$

und

$$P_{1min} = + p = 4 \text{ t,}$$

da die in A_1 wirkende Belastung lediglich durch den Pfosten A_1B_1 aufgenommen werden muß.

Für A_2B_2 hat man einmal die Knotenpunkte $A_3A_4 \dots A_7$ und das andere Mal diejenigen A_1 und A_2 mit je k belastet zu denken, und erhält für den Durchschnitt zwischen AA_2 und B_1B_2 im Abstände $c_1 = 6,4 \text{ m}$ von A als Momentenmittelpunkt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} -P_{2min} (c_1 + 2a) &= \left(p \frac{7}{2} + k \frac{1+2+3+4+5}{8} \right) c_1 - p (c_1 + a + c_1 + 2a) \\ &= 209,6 - 99,2 = 110,4, \end{aligned}$$

woraus

$$P_2 = - \frac{110,4}{14,4} = - 7,67 \text{ t}$$

Druckspannung folgt, und

$$\begin{aligned} -P_{2max} (c_1 + 2a) &= \left(p \frac{7}{2} + k \frac{7+6}{8} \right) c_1 - q (c_1 + a + c_1 + 2a) \\ &= 193,6 - 347,2 = - 153,6, \end{aligned}$$

daher

$$P_{2max} = \frac{153,6}{14,4} = 10,67 \text{ t}$$

Zugspannung.

Ebenso erhält man für A_3B_3 , wenn der Schnittpunkt von AA_3 und B_2B_3 im Abstände $c_2 = 7,67$ von A als Momentenmittelpunkt und eine Belastung von $A_4, A_5 \dots A_7$ angenommen wird:

$$\begin{aligned} -P_{3min} (c_2 + 3a) &= \left(p \frac{7}{2} + k \frac{1+2+3+4}{8} \right) c_2 - p (3c_1 + a + 2a + 3a) \\ &= 1978,75 - 992 = 986,75, \end{aligned}$$

daher

$$P_{3min} = - \frac{986,75}{86,67} = - 11,39 \text{ t}$$

Druckspannung.

Wenn andererseits die Knotenpunkte A_1 , A_2 und A_3 belastet werden, so hat man zu beachten, daß der Schnitt nach ab die nunmehr mit $T_3' = 7,78 \text{ t}$ gezogene Diagonale A_3B_4 trifft, so daß man auch deren verticale Componente $T_3' \sin 45^\circ = 5,5 \text{ t}$ in der Gleichgewichtsgleichung zu berücksichtigen hat. Mit Rücksicht hierauf erhält man:

$$\begin{aligned} - (P_{3max} + 5,5) (c_2 + 3a) &= \left(p \frac{7}{2} + k \frac{7+6+5}{8} \right) c_2 - q (3c_2 + 6a) \\ &= 36,5 \cdot 74,67 - 14 \cdot 248 = 2725,33 - 3472 = - 746,67, \end{aligned}$$

woraus

$$P_{3max} = \frac{746,67}{86,67} - 5,5 = 3,12 \text{ t}$$

Zug folgt.

Der mittlere Pfosten A_4B_4 kann nur durch Druckkräfte beansprucht werden, da die horizontale Gurtung in B_4 verticale Kräfte nicht aufnehmen kann und die in B_4 sich anschließenden beiderseits abfallenden Diagonalen nicht druckfähig sind, was in dem Falle eines in A_4B_4 auftretenden Zuges der Fall sein müßte. Die größte Druckkraft findet in A_4B_4 statt, wenn die Diagonale A_3B_4 ihrem größten Zuge

$$T_3' = \frac{5,5}{\sin 45^\circ} = 7,78 \text{ t}$$

ausgesetzt ist, in welchem Falle der Pfosten mit

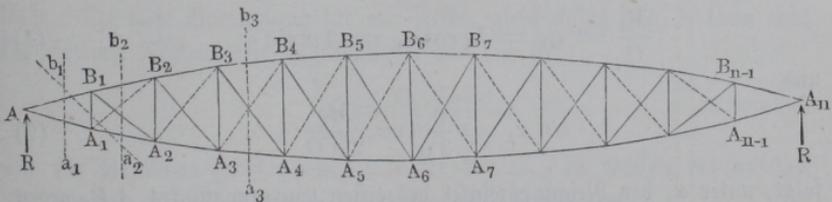
$$P_{4max} = 5,5 \text{ t}$$

auf Druck beansprucht wird.

Die ermittelten Spannungszahlen, welche für die andere Trägerhälfte der Symmetrie wegen ebenso groß ausfallen, sind in Fig. 262 eingetragen.

Pauli'sche Träger. Eine andere Trägerform ist die von v. Pauli §. 58. angegebene, Fig. 263, welche u. a. bei der Mainzer Rheinbrücke zur An-

Fig. 263.



wendung gekommen ist. Dieser Träger stimmt mit dem Fischbauchträger, Fig. 250, darin überein, daß er symmetrisch zu der Horizontalen AA_n durch die Auflager gebildet ist, folglich eine gerade neutrale Axe hat. Er unterscheidet sich aber von den Parabelträgern in der Gestalt der Gurtungen, für deren Form nämlich das Princip aufgestellt ist, daß die Spannungen

Feldes zu erhalten. Es ist klar, daß der Symmetrie wegen die Spannung U_1 in der unteren Gurtung $A A_1$ ebenfalls gleich O ist, denn für B_1 als Momentenmittelpunkt hat man gleichfalls

$$M_1 = q_1 U_1 = q_1 O.$$

Denkt man jetzt das zweite Feld nach $a_2 b_2$ durchschnitten, so hat man für A_2 als Momentenmittelpunkt:

$$\frac{M_2}{O} = q_2 = h_2 \cos \alpha_2 = h_1 \cos \alpha_2 + 2 a \sin \alpha_2, \quad \dots \quad (3)$$

woraus α_2 und h_2 berechnet werden können. Beschreibt man wieder um die Mitte D_2 des Pfostens $A_2 B_2$ einen Kreis mit dem Halbmesser $\frac{Q_2}{2}$, so erhält man in den Tangenten an denselben von A_1 und B_1 die Gurtungen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$. In dieser Weise lassen sich die Höhen sämtlicher Pfosten bis zum mittleren $A_6 B_6$ bestimmen, wonach man die zweite Trägerhälfte symmetrisch zur ersten zu zeichnen hat.

Hierdurch erreicht man zwar, daß die Spannung in allen Theilen der oberen Gurtung, vorausgesetzt, daß die Felderzahl n eine gerade ist, denselben Betrag O annimmt, es ist aber leicht aus der Figur zu erkennen, daß die Spannungen in den unteren Gurtungstheilen, mit Ausnahme des ersten und letzten Stückes $A A_1$ und $A_{n-1} A_n$ von anderer Größe sind. Denkt man sich nämlich durch den ersten Pfosten einen Schnitt $a_2 b_1$, so hat man für den Knotenpunkt A_1 , wie oben bemerkt:

$$M_1 = O q_1 = O h_1 \cos \alpha_1,$$

während für den Knotenpunkt B_1 als Mittelpunkt die Gleichung gilt:

$$M_1 = U_2 h_1 \cos \alpha_2,$$

woraus

$$\frac{U_2}{O} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}$$

folgt. Da diese Betrachtung für alle Felder gleichmäßig gilt, so kann man für die linke Trägerhälfte allgemein für das v te Feld:

$$\frac{U_v}{O} = \frac{\cos \alpha_{v-1}}{\cos \alpha_v}, \quad \dots \quad (4)$$

und für die rechte Hälfte von der Mitte bis A_n , in welcher die Streben nach entgegengesetzter Richtung ansteigend anzunehmen sind:

$$\frac{U_v}{O} = \frac{\cos \alpha_{v+1}}{\cos \alpha_v}, \quad \dots \quad (4^a)$$

schreiben. Hieraus erkennt man, daß die Spannungen in der unteren Gurtung überall kleiner sind als in der oberen, und nach der Mitte hin in dem Maße wie das Verhältniß:

$$\frac{\cos \alpha_{\nu-1}}{\cos \alpha_{\nu}} \text{ bzw. } \frac{\cos \alpha_{\nu+1}}{\cos \alpha_{\nu}}$$

zunehmen. Es folgt daraus auch weiter, daß die Diagonalen bei diesem Träger für den Fall der gleichmäßigen Belastung keineswegs, wie bei dem Parabelträger, ganz ohne Spannung sind, denn denkt man sich durch irgend ein Feld einen Schnitt wie $a_3 b_3$, Fig. 263, gelegt, so erhält man durch Gleichsetzung der horizontalen Kraftcomponenten, wenn noch β_{ν} die Neigung der Diagonale gegen den Horizont und T_{ν} die Diagonalkraft ist:

$$U_{\nu} \cos \alpha_{\nu} + T_{\nu} \cos \beta_{\nu} = O \cos \alpha_{\nu},$$

oder mit Rücksicht auf (4):

$$T_{\nu} = O \frac{\cos \alpha_{\nu} - \cos \alpha_{\nu-1}}{\cos \beta_{\nu}} \dots \dots \dots (5)$$

Da dieser Werth positiv ist, so erkennt man, daß die Diagonalen bei der in der Figur vorausgesetzten Stellung derselben Zugspannungen ausgesetzt sind.

Wenn man dieselbe Untersuchung auch für die entgegengesetzte, in der Fig. 263 punktirte Stellung der Diagonalen anstellt, so wird man in derselben

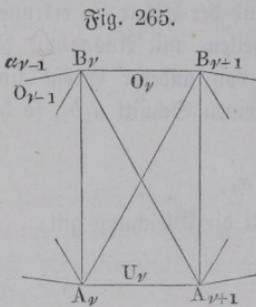


Fig. 265.

Art finden, daß die Diagonalen gedrückt werden, und daß für diesen Fall die Spannungen der unteren Gurting constant sind, während diejenigen der oberen Gurting kleiner ausfallen und gemäß den Gleichungen (4) von beiden Enden nach der Mitte hin zunehmen.

Es kann noch bemerkt werden, daß bei einer ungeraden Felderzahl n in dem Mittelfelde, in welchem die Gurtingen horizontal gerichtet sind, Fig. 265, die obere Gurting ebenfalls eine kleinere Spannung annehmen wird, als der constante Werth O in den übrigen Stücken dieser oberen Gurting be- trägt. Man erkennt nämlich leicht, daß die in dem Mittelfelde angebrachten Diagonalen bei der gleichmäßigen Belastung des ganzen Trägers keiner An- spannung ausgesetzt sein können, da für jede Trägerhälfte die verticale Scheerkraft gleich Null ist. Für den Knotenpunkt B_{ν} erfordert daher das Gleichgewicht die Gleichheit der horizontalen Componenten:

$$O_{\nu} = O_{\nu-1} \cos \alpha_{\nu-1} = O \cos \alpha_{\nu-1} \dots \dots \dots (6)$$

Für dieses Mittelfeld ist dann natürlich in Uebereinstimmung mit (4) die Spannung U_{ν} der unteren Gurting gleich der der oberen O_{ν} .

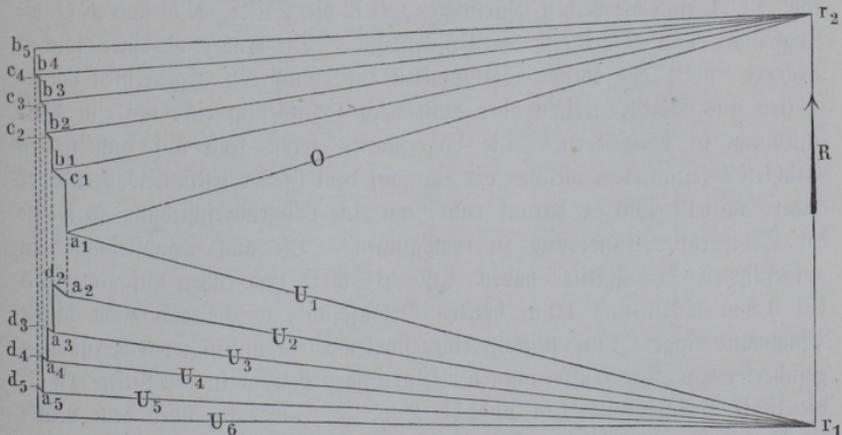
Aus der vorstehenden Untersuchung hat sich ergeben, daß die für den Pauli'schen Träger gestellte Bedingung einer durchweg gleichen Maximalspannung in allen Gurtingstheilen in aller Strenge

nicht erfüllbar ist, wenn man nicht etwa die Diagonalen für Zug- und Druckkräfte gleichzeitig widerstandsfähig machen will. Die Verschiedenheit der Gurtungsspannungen ist indessen im Allgemeinen nur gering und immer kleiner als sie bei dem Parabelträger ist, wie die unten folgende graphische Darstellung noch ersichtlich machen wird. Die Anstrengungen der Diagonalen sind bei voller Belastung des Trägers ebenfalls nur unbedeutend. Was die ungünstigsten Beanspruchungen derselben bei einseitigen Belastungen anbetrifft, so gelten hierfür die schon in den früheren Paragraphen angegebenen Regeln für den Träger mit parallelen Gurtungen und den Parabelträger. Wie bei dem letzteren findet man, daß alle Diagonalen sowohl Zug- wie Druckkräften ausgesetzt sind, und man daher auch in allen Feldern gekreuzte Diagonalen anzuordnen hat, wenn dieselben nur in einer Richtung widerstandsfähig sind. Wird bei diesen Trägern die Fahrbahn in der neutralen Ase angebracht, so hat man jeden unteren und jeden oberen Knotenpunkt mit demselben Gewichte $\frac{p}{2}$ bzw. $\frac{q}{2}$ belastet zu denken.

Um die Spannungen in den Gurtungen graphisch darzustellen, trägt man, Fig. 266, auf einer Verticalen die Größe des Stützdruckes für volle Belastung

$$r_1 r_2 = R = \frac{n-1}{2} q$$

Fig. 266.



auf und zieht durch die Endpunkte r_1 und r_2 Parallelen zu den Gurtungen AA_1 und AB_1 der Fig. 263, um in $r_1 a_1 = a_1 r_2 = O = U_1$ die Spannungen in den ersten Feldern zu erhalten. Zieht man ferner durch r_1 Parallelen mit sämtlichen unteren und durch r_2 Parallelen mit allen oberen Gurtungen, macht wegen der gleichen Spannungen in der oberen Gurtung

$$r_2 b_1 = r_2 b_2 = r_2 b_3 \dots = r_2 a_1 = O$$

und legt durch die Endpunkte $a_1, b_1, b_2 \dots$ verticale Linien entsprechend den Pfosten und die geneigten Linien $b_1 c_1, b_2 c_2, b_3 c_3$ parallel mit den Diagonalen, so erhält man die Spannungen, welche bei der vollen Belastung sich in den Pfosten und Diagonalen einstellen. Es ist z. B. $b_1 c_1$ die Spannung der Diagonale $B_1 A_2$. Zerlegt man ferner $r_1 a_1 = U_1$ nach der Richtung der Verticalen und der folgenden Gurtung, so erhält man in $r_1 a_2$ die Spannung U_2 . Ebenso ergibt sich $U_3 = r_1 a_3$, wenn man die Diagonalenspannung $c_1 b_1$ in a_2 gleich $a_2 d_2$ anträgt, und von d_2 eine Verticallinie bis zum Schnitt mit der zum dritten Gurtungstheile Parallelen $r_1 a_3$ zieht u. s. f.

Bei den Pauli'schen Brücken ist die obere Gurtung kastenförmig aus Eisenblechplatten zusammengenietet, während die untere gezogene Gurtung aus über einander gelegten Eisenschienen besteht. Die Säulen oder Pfosten, mit denen die Fahrbahn verbunden ist, sind zur Erzeugung der Druckfähigkeit mit gerippten Querschnitten ausgeführt, während die Diagonalen als Bänder dargestellt sind, da dieselben nur durch Zugkräfte angespannt werden. Nach dem Pauli'schen Systeme sind unter anderen die Eisenbahnbrücke über die Isar bei Großhesele und die Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Mainz ausgeführt. Die letztere besteht aus 4 Hauptöffnungen von je 90 m Weite und aus 6 Fluthöffnungen von je $33\frac{1}{2}$ m Weite, an welche sich dann noch 22 Oeffnungen von kleinerer Weite anschließen, so daß die ganze Brücke 1028,6 m lang ausfällt. Die Figuren 267 und 268 stellen die Seitenansicht und den Grundriß einer Hauptöffnung vor, AMA und ACA sind die beiden Gurtungen, DE die Stiele, EF und EG die Zugbänder und BCB ist die Brückenbahn. Die Enden A eines solchen Trägers ruhen mit ebenen Stahlplatten auf cylindrisch abgedrehten Lagerplatten aus Stahl, greifen aber auch noch zahnförmig ein, um eine Verschiebung zu verhindern. Die Lagerplatten selbst sind auf gußeisernen Stählen befestigt, von welchen der eine auf dem Pfeiler festsetzt, während der andere mittelst Walzen darauf ruht, um eine Längenverschiebung in Folge der Temperaturveränderung zu ermöglichen. Die aus Sandsteinquadern aufgeführten Strompfeiler haben 4,25 m Stärke und ruhen auf einer 3,5 bis 3,8 m dicken und 10 m breiten Betonschicht, welche von einer dicken Pfahlwand eingefast und mittelst einer starken Steinschüttung vor Zerstörung gesichert wird. Die Entfernung der Gurtungen beträgt in der Mitte 15 m, die lichte Brückenweite 4 m und die Höhe der Fahrbahn über dem Nullpunkte des Pegels 15,1 m. Die Constructionshöhe, gemessen von der Fahrbahn bis zur Unterkante der Träger, mißt 1 m.

Die Querdimensionen der Constructionstheile sind so gewählt, daß durch das Eigengewicht der Brücke und die dreifache größte Verkehrsbelastung eine Spannung von 16 kg pro 1 qmm erzeugt wird, welcher hohe Werth nur deswegen als zulässig angenommen werden durfte, weil jedes einzelne Stück vor seiner Verwendung durch eine Anstrengung bis zu dem angegebenen

Fig. 267.

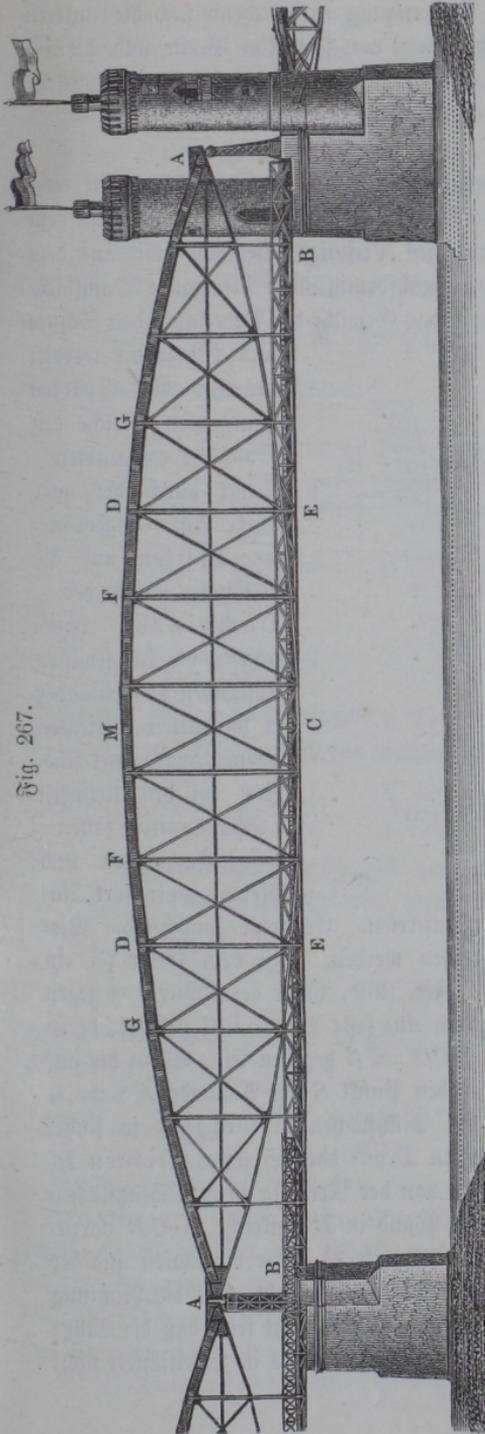
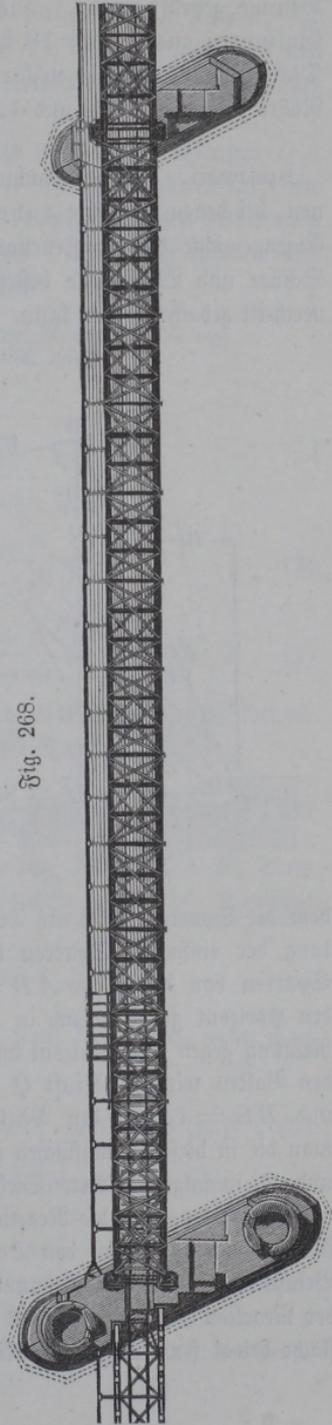


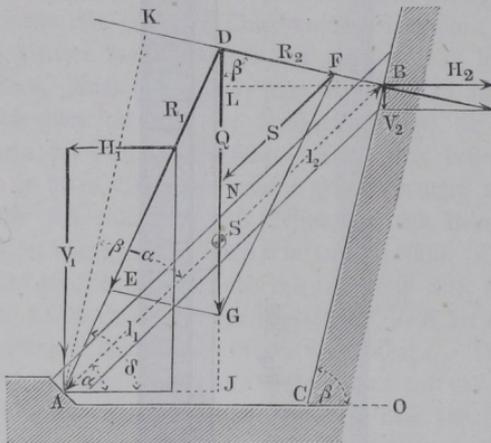
Fig. 268.



Betrage geprüft wurde. Dieser Anstrengung entsprechend sind die unteren Gurtungen aus $9 \cdot 2 = 18$ Blechbändern von je 0,2 m Breite und 12 mm Dicke zusammengesetzt, während jeder Druckbaum aus einer rechteckigen Röhre von 1 m Weite und 12 mm Wandstärke besteht.

§. 59. Sparren. Zu den Fachwerken hat man auch die Dachstühle zu rechnen, bei denen nur eine ruhende Belastung wirksam ist, welche, aus dem Eigengewichte der Construction incl. des Deckungsmaterials sowie aus dem Schnee und Winddrucke bestehend, gleichförmig über die ganze Dachfläche vertheilt gedacht werden kann. Durch das Gewicht der Bedeckung, den Schnee

Fig. 269.



und Winddruck werden zunächst die Sparren angegriffen, welche den auf sie ausgeübten Druck durch die quer unter ihnen angeordneten Pfetten auf die Knotenpunkte der Dachbinder übertragen, die in gewissen Abständen von einander in parallelen verticalen Ebenen angeordnet sind. Nur bei den kleinsten Spannweiten fallen diese Dachbinder und Pfetten ganz fort, in-

dem die Sparren selbst als Träger auftreten. Es möge zunächst die Wirkung der einfachen Sparren besprochen werden. Zu dem Ende sei ein Sparren von der Länge $AB = l$, Fig. 269, unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt, und in B gegen eine feste Wand BC gestützt, deren Neigung gegen den Horizont durch $BCO = \beta$ gegeben sei. Wenn die auf den Balken wirkende Kraft Q durch den Punkt S im Abstände $AS = l_1$ und $BS = l_2$ von den Mitteln der Stützflächen hindurchgeht, so findet man die in diesen Stützflächen erzeugten Druck- oder Stützreaktionen R_1 und R_2 in folgender Art. Sieht man von der Reibung in den Stützflächen ab, so hat man sich die Reaction der Wand in B senkrecht zu CB vorzustellen, und wenn man den Durchschnittspunkt D dieser Normalen und der Belastung Q mit dem Fußpunkte A verbindet, so giebt AD die Richtung der Reaction R_1 in A an. Es möge etwa vorausgesetzt sein, daß die Stützfläche bei A senkrecht zu der Richtung AD stehe, was in Wirklichkeit nicht

gerade nothwendig ist, da wegen der hier nicht berücksichtigten Reibung das Gleichgewicht auch noch bestehen bleibt, wenn die Druckrichtung AD von der Normalen zur Stützfläche um einen Winkel abweicht, welcher nicht größer ist, als der zugehörige Reibungswinkel.

Zerlegt man nun die Belastung $DG = Q$ nach den Richtungen DA und DB , so erhält man in den Componenten DE und DF die Druckkräfte in A und B , also auch die ihnen gleichen und entgegengesetzten Reactionen R_1 und R_2 in den Stützpunkten A und B . Zur Bestimmung dieser Kräfte hat man für den Mittelpunkt der Momente in A :

$$Q \cdot AJ = R_2 \cdot AK \text{ oder } Q l_1 \cos \alpha = R_2 l \cos (\beta - \alpha),$$

folglich die Reaction der Wand:

$$R_2 = Q \frac{l_1}{l} \frac{\cos \alpha}{\cos (\beta - \alpha)}, \quad \dots \quad (1)$$

deren horizontale und verticale Componenten daher durch:

$$H_2 = R_2 \sin \beta = Q \frac{l_1}{l} \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos (\alpha - \beta)} = H \dots \quad (2)$$

und

$$V_2 = R_2 \cos \beta = Q \frac{l_1}{l} \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos (\beta - \alpha)} = H \cotg \beta \dots \quad (3)$$

ausgedrückt sind. In dem unteren Stützpunkte A muß die Horizontalkraft $H_1 = H_2 = H$ sein, während man daselbst die Verticalkraft zu:

$$V_1 = Q - V_2 = Q \left(1 - \frac{l_1}{l} \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos (\beta - \alpha)} \right) = Q - H \cotg \beta \quad (4)$$

findet. Für die Reaction R_1 hat man aus dem Dreieck DGF , wenn $\delta = JAD$ den Neigungswinkel dieser Reactionen gegen den Horizont bedeutet:

$$R_1 = Q \frac{\sin \beta}{\cos (\delta - \beta)} = \sqrt{V_1^2 + H^2}, \quad \dots \quad (5)$$

und zwar bestimmt sich der Neigungswinkel δ nach der Figur, wenn man BL horizontal zieht, aus:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{DJ}{AJ} = \frac{l \sin \alpha + l_2 \cos \alpha \cotg \beta}{l_1 \cos \alpha} = \frac{l}{l_1} \operatorname{tg} \alpha + \frac{l_2}{l_1} \cotg \beta \quad (6)$$

Um die Spannung S in dem Sparren zu bestimmen, hat man zu beachten, daß der letztere unter dem Einflusse der drei auf ihn wirkenden Kräfte Q , R_1 und R_2 im Gleichgewichte sein muß. Zerlegt man daher jede der Reactionen R_1 und R_2 in zwei Componenten nach der Axe AB des Sparrens, und nach verticaler Richtung, so müssen die beiden letzteren eine Summe gleich Q geben, während die beiden ersteren gleich und ent-

gegengesetzt sind und die Spannung S ergeben, mit anderen Worten: die Spannung S in dem Balken ergibt sich immer als die Mittelkraft aus der Reaction eines Stützpunktes und der Componente, welche man für diesen Punkt erhält, wenn man die Belastung Q in ihre beiden durch die Stützpunkte gehenden verticalen Componenten zerlegt. Diese Zerlegung von $R_2 = FD$ in $FN = S$ und $ND = Q_b$ ergibt nach der Figur:

$$\frac{S}{R_2} = \frac{\sin \beta}{\sin (90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha'}$$

also mit Bezug auf (1):

$$S = R_2 \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} = Q \frac{l_1}{l} \frac{\sin \beta}{\cos (\beta - \alpha)} \quad \dots \quad (7)$$

Für die verticale Componente Q_b in dem Stützpunkte B erhält man in gleicher Weise aus:

$$\begin{aligned} \frac{Q_b}{R_2} &= \frac{\sin (90^\circ - \beta + \alpha)}{\sin (90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos (\beta - \alpha)}{\cos \alpha} \\ Q_b &= R_2 \frac{\cos (\beta - \alpha)}{\cos \alpha} = Q \frac{l_1}{l} \quad \dots \quad (8) \end{aligned}$$

wie auch aus einer directen Zerlegung von Q in zwei durch A und B gehende Seitenkräfte sich ergeben würde. In gleicher Weise liefert eine Zerlegung von R_1 denselben Werth für S und eine verticale Kraft

$$Q_a = Q \frac{l_2}{l} \quad \dots \quad (9)$$

In den vorstehend gefundenen Formeln hat man $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ zu setzen, wenn, unter Voraussetzung einer gleichmäßigen vertheilten Last, der Angriffspunkt derselben in der Mitte zwischen A und B gelegen ist. Unter dieser Voraussetzung erhält man:

a) Für eine verticale Wandfläche BC , Fig. 270, mit $\beta = 90^\circ$:

$$R_2 = H = \frac{Q}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \dots \quad (1^a)$$

$$V_2 = 0 \text{ und } V_1 = Q \quad \dots \quad (4^a)$$

$$R_1 = Q \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha}\right)^2} \quad \dots \quad (5^a)$$

$$\operatorname{tg} \delta = 2 \operatorname{tg} \alpha \quad \dots \quad (6^a)$$

und

$$S = \frac{Q}{2 \sin \alpha} \quad \dots \quad (7^a)$$

b) Für $\beta = \alpha$, Fig. 271:

$$R_2 = \frac{Q}{2} \cos \alpha \dots \dots \dots (1^b)$$

$$H = \frac{Q}{4} \sin 2\alpha \dots \dots \dots (2^b)$$

$$V_2 = \frac{Q}{2} \cos^2 \alpha \dots \dots \dots (3^b)$$

$$V_1 = Q \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{2} \right) \dots \dots \dots (4^b)$$

$$R_1 = Q \sqrt{\left(\frac{\sin 2\alpha}{4} \right)^2 + \left(\frac{2 - \cos^2 \alpha}{2} \right)^2} \dots \dots \dots (5^b)$$

$$\text{tg } \delta = 2 \text{tg } \alpha + \text{cotg } \alpha \dots \dots \dots (6^b)$$

und

$$S = \frac{Q}{2} \sin \alpha \dots \dots \dots (7^b)$$

Fig. 270.

Fig. 271.

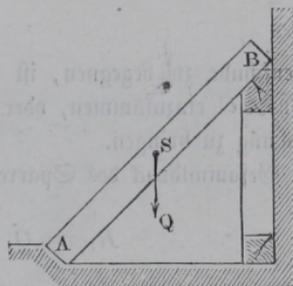
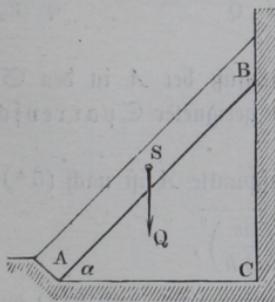
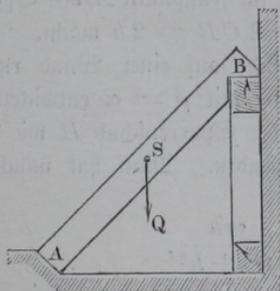


Fig. 272.

c) Für $\beta = 0$, Fig. 272:

$$R_1 = R_2 = V_1 = V_2 = \frac{Q}{2},$$

$$H = 0; \delta = 90^\circ \text{ und } S = 0 \text{ u. f. f.}$$



Die vorstehend unter a) angegebenen Formeln gelten für die Fälle, in welchen die Sparren gegen eine verticale Wand, Fig. 273 (a. f. S.), oder gegen andere symmetrische Sparren, Fig. 274 (a. f. S.), sich stützen. Setzt man hier noch die Dachhöhe $BC = h$ und die halbe Weite $AC = w$, so hat man mit $\text{tg } \alpha = \frac{h}{w}$ aus (1^a) den Sparrenschub

$$H = \frac{1}{2} Q \frac{w}{h}, \dots \dots \dots (10)$$

also direct mit der Spannweite und umgekehrt mit der Dachhöhe proportional. Dieser Sparrenschub fällt daher um so größer aus, je flacher das Dach ist, und wird z. B. für $h = \frac{w}{2}$, oder $\alpha = 26^\circ 34'$, gleich der gesammten Belastung Q des Sparrens. Um dem horizontalen

Fig. 273.

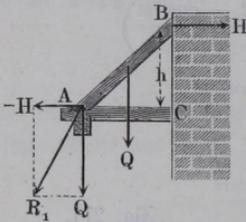
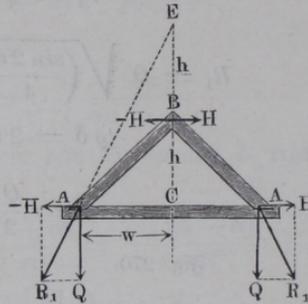


Fig. 274.



Sparrenschube zu begegnen, ist der Sparrenfuß bei A in den Spannbalken AC einzufächern, oder es ist ein geeigneter Sparrenschub in Anwendung zu bringen.

Der Gesamtdruck des Sparrens im Fußpunkte A ist nach (5^a):

$$R_1 = Q \sqrt{1 + \left(\frac{w}{2h}\right)^2},$$

und seine Neigung δ gegen den Horizont bestimmt sich nach (6^a) durch:

$$\text{tg } \delta = 2 \text{ tg } \alpha = \frac{2h}{w}.$$

Man findet hiernach die Richtung der Reaction im Fußpunkte A des Sparrens in der Geraden AE, sofern man $CE = 2 CB = 2h$ macht.

Wenn dagegen der Sparren am oberen Ende auf einer Wand ruht, Fig. 275 und Fig. 276, so gelten die unter b) mit $\beta = \alpha$ entwickelten Ausdrücke und es fällt in diesem Falle sowohl der Sparrenschub H wie die Spannung S kleiner aus, als im Vorhergehenden. Man hat nämlich hierfür:

$$H = \frac{Q}{2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{Q}{2} \frac{wh}{w^2 + h^2},$$

oder, wenn man mit q die Belastung des Sparrens pro Längeneinheit bezeichnet, und die Länge $l = \sqrt{w^2 + h^2}$ setzt:

$$H = \frac{q}{2} \frac{wh}{\sqrt{w^2 + h^2}}, \dots \dots \dots (10^b)$$

während bei dem sich anlehnenden Sparren der Figuren 273 und 274

$$H = \frac{q}{2} \frac{w \sqrt{w^2 + h^2}}{h} \dots \dots \dots (10^a)$$

gesetzt werden kann.

Man erkennt aus den Gleichungen (10^a) und (10^b), daß bei einer gegebenen Spannweite *w* und spezifischen Belastung *q* der Sparrenschub des Fig. 275.

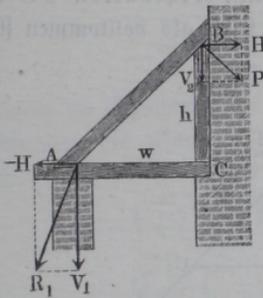
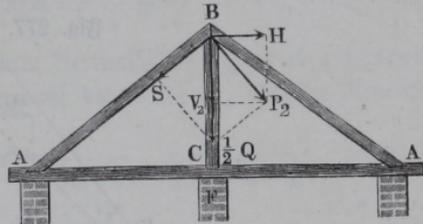


Fig. 276.



nur angelehnten Sparrens, Fig. 274, um so größer, der des gestützten Sparrens, Fig. 276, aber um so kleiner wird, je niedriger das Dach, d. h. je kleiner *h* gewählt wird.

Eine ähnliche Beziehung gilt hinsichtlich des Sparrendruckes *S*, welcher bei dem gestützten Sparren, Fig. 276, zu:

$$S = \frac{Q}{2} \sin \alpha = \frac{q}{2} h, \dots \dots \dots (11^b)$$

und bei dem nur angelehnten Sparren, Fig. 274, zu:

$$S = \frac{Q}{2 \sin \alpha} = \frac{q}{2} \frac{w^2 + h^2}{h} \dots \dots \dots (11^a)$$

folgt.

Der Verticaldruck des durch die Wand gestützten Balkens im Fußpunkte *A* beträgt nach (4^b):

$$V_1 = Q \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{2} \right),$$

während die stützende Wand bei dem einseitigen Sparren in Fig. 275 den Verticaldruck:

$$V_2 = \frac{Q}{2} \cos^2 \alpha$$

und in Fig. 276 den doppelten Druck:

$$V_2 = Q \cos^2 \alpha$$

empfangt.

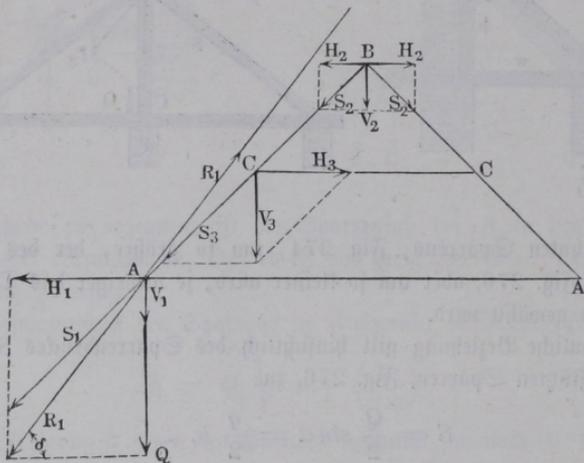
Damit die Säule BC in Fig. 275 durch den Horizontalschub H nicht umgestürzt werde, ist es nöthig, sie von rechts noch besonders durch eine Mauer zu stützen, während in Fig. 276 die beiderseits von den Sparren ausgeübten horizontalen Schubkräfte sich gegenseitig aufheben, wenn die Anordnung und Belastung symmetrisch vorausgesetzt werden. Die Richtung der Reaction im Fußpunkte ist nach (6^b) durch

$$\operatorname{tg} \delta = 2 \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \frac{2h}{w} + \frac{w}{h}$$

gegeben.

Wenn die Sparren AB , Fig. 277, durch einen Kehlbalken CC verbunden sind, so erhält man, wenn die Sparren selbst als vollkommen starr

Fig. 277.



angesehen werden, bei der Belastung der Längeneinheit durch das Gewicht q in A , B und C vertical abwärts wirkende Gewichte zu:

$$V_1 = \frac{1}{2} q l_1, \quad V_2 = \frac{1}{2} q l_2 \quad \text{und} \quad V_3 = \frac{1}{2} q l = \frac{Q}{2},$$

und aus der Zerlegung dieser Kräfte den horizontalen Schub im Scheitelpunkte B :

$$H_2 = \frac{1}{2} q l_2 \operatorname{cotg} \alpha, \dots \dots \dots (12)$$

und die Spannung in dem oberen Sparrenstücke BC :

$$S_2 = \frac{V_2}{\sin \alpha} = q \frac{l_2}{2 \sin \alpha} \dots \dots \dots (13)$$

Ebenso folgt für den Kehlbalken CC der Horizontalschub:

$$H_3 = \frac{1}{2} q l \cotg \alpha = \frac{Q}{2} \cotg \alpha, \dots (14)$$

sowie für das untere Sparrenstück CA die Kraft:

$$S_1 = S_2 + S_3 = S_2 + \frac{V_3}{\sin \alpha} = q \frac{l_2 + l}{2 \sin \alpha}, \dots (15)$$

und der Horizontalschub in A:

$$H_1 = S_1 \cos \alpha = q \frac{l_2 + l}{2} \cotg \alpha, \dots (16)$$

und für $l_1 = l_2 = \frac{1}{2} l$:

$$H_1 = \frac{3}{4} Q \cotg \alpha = \frac{3}{4} Q \frac{w}{h}.$$

Setzt man die Spannung S_1 mit dem Verticaldrucke V_1 in A zusammen, so erhält man die gesammte Wirkung auf die Stütze A, oder die Reaction daselbst:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{H_1^2 + (V_1 + S_1 \sin \alpha)^2} = \sqrt{H_1^2 + Q^2} \\ &= Q \sqrt{\left(\frac{l_2 + l}{2l} \cotg \alpha\right)^2 + 1}, \dots (17) \end{aligned}$$

also für $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ wird:

$$R_1 = Q \sqrt{\left(\frac{3}{4} \cotg \alpha\right)^2 + 1} = Q \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} \frac{w}{h}\right)^2}. (17^a)$$

Für die Sparren ohne Kehlbalken fand sich oben nach (1^a) und (5^a):

$$H_1 = \frac{1}{2} Q \frac{w}{h} \text{ und } R_1 = Q \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} \frac{w}{h}\right)^2},$$

so daß also durch die Anwendung des Kehlbalkens der Sparrenschub und die Auflagerreaction vergrößert werden.

Der Neigungswinkel δ für die Reactionsrichtung ergibt sich zu:

$$\tg \delta = \frac{Q}{H_1} = \frac{2l}{l_2 + l} \tg \alpha, \dots (18)$$

was mit $l_1 = l_2$ in $\frac{4}{3} \tg \alpha$ und mit $l_2 = 0$ in $\tg \delta = 2 \tg \alpha$ wie oben übergeht.

Wenn der Kehlbalken CC durch die Stuhlsäulen CD, Fig. 278 (a. f. S.), unterstützt ist, zerlegt sich der Verticaldruck $\frac{Q}{2}$ auf die Pfette in C nach der Richtung des Kehlbalkens und der unter α_1 geneigten Stuhlsäule in:

$$H_3 = \frac{Q}{2} \cotg \alpha_1$$

und

$$S_3 = \frac{Q}{2 \sin \alpha_1}.$$

In diesem Falle ist der Horizontalschub in *A* durch:

$$H_1 = \frac{1}{4} Q \cotg \alpha$$

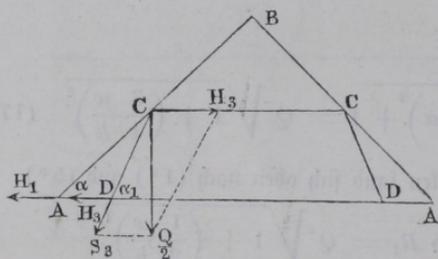
ausgedrückt, während die Stuhlfäule den Spannbalken *AA* in *D* mit der Kraft $H_3 = \frac{Q}{2} \cotg \alpha_1$ angreift, so daß das mittlere Balkenstück *DD* einem Gesammtzuge

$$H = H_1 + H_3 = Q \frac{\cotg \alpha + 2 \cotg \alpha_1}{4} \dots (19)$$

ausgesetzt ist.

Wenn die beiden Sparren *A₁B* und *A₂B*, Fig. 279, unter verschiedenen Winkeln α_1 und α_2 gegen den Horizont geneigt sind, so weicht die Reaction

Fig. 278.



R₃, mit welcher sie auf einander wirken, von der horizontalen Richtung um einen gewissen Winkel β ab, welcher sich wie folgt bestimmt.

Bezeichnet man mit *H₃* die horizontale und mit *V₃* die verticale Componente der Kraft *R₃*, so hat man für *A₁* als Mittelpunkt der Momente:

$$Q_1 \frac{w_1}{2} - V_3 w_1 = H_3 h$$

oder

$$V_3 = \frac{Q_1}{2} - H_3 \tg \alpha_1 \dots (20)$$

Ebenso ist für den Momentenmittelpunkt in *A₂*:

$$Q_2 \frac{w_2}{2} + V_3 w_2 = H_3 h$$

oder

$$V_3 = H_3 \tg \alpha_2 - \frac{Q_2}{2} \dots (21)$$

Aus der Gleichsetzung dieser Ausdrücke für V_3 folgt:

$$H_3 = \frac{1}{2} \frac{Q_1 + Q_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}, \quad \dots \quad (22)$$

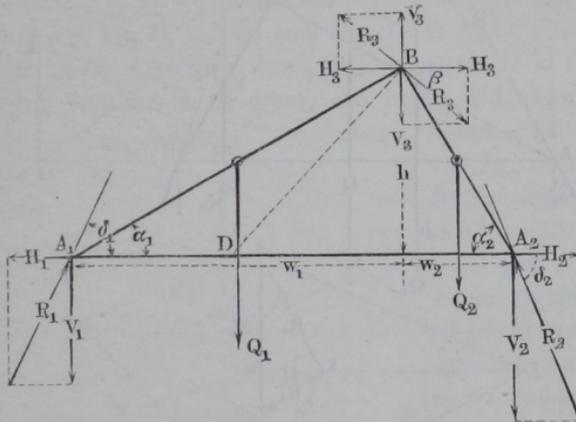
und daher

$$V_3 = \frac{Q_1}{2} - H_3 \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - Q_2 \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \quad \dots \quad (23)$$

Der Neigungswinkel β folgt daher aus:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_3}{H_3} = \frac{Q_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - Q_2 \operatorname{tg} \alpha_1}{Q_1 + Q_2} \quad \dots \quad (24)$$

Fig. 279.



Man hat die Ebene BD , in welcher sich die Sparrenköpfe berühren, senkrecht zur Richtung von R_3 , d. h. den Winkel $BDA_2 = 90^\circ - \beta$ zu machen.

Für die Sparrenfüße A_1 und A_2 sind die Horizontalschübe H_1 und H_2 ebenfalls gleich H_3 , während die Vertikalkräfte durch:

$$V_1 = Q_1 - V_3 = Q_1 - \frac{1}{2} \frac{Q_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - Q_2 \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \quad \dots \quad (25)$$

in A_1 und durch

$$V_2 = Q_2 + V_3 = Q_2 + \frac{1}{2} \frac{Q_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - Q_2 \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \quad \dots \quad (26)$$

in A_2 gegeben sind.

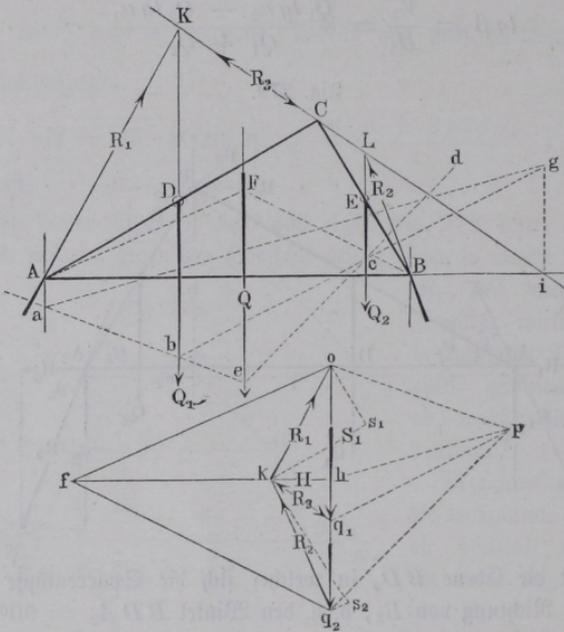
Für die Winkel δ_1 und δ_2 der Reactionen R_1 und R_2 hat man daher:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{V_1}{H} = \frac{(2 Q_1 + Q_2) \operatorname{tg} \alpha_1 + Q_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{Q_1 + Q_2} \quad (27)$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{V_2}{H} = \frac{Q_2 \operatorname{tg} \alpha_1 + (2 Q_2 + Q_1) \operatorname{tg} \alpha_2}{Q_1 + Q_2} \quad (28)$$

Man findet auch leicht in jedem Falle die auf die Sparren wirkenden Kräfte auf graphischem Wege, welcher an dem allgemeinen Beispiele der Fig. 280

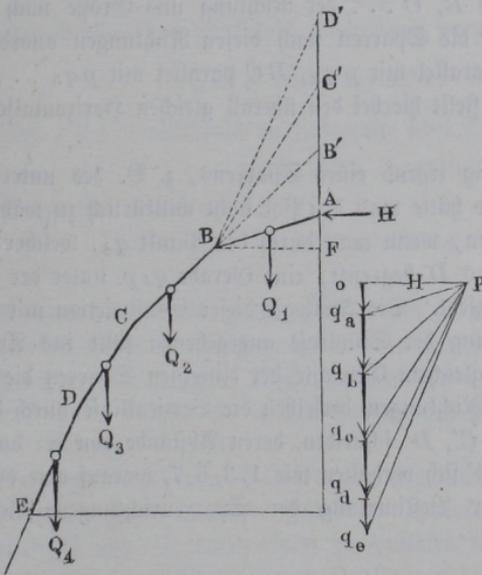
Fig. 280.



gezeigt werden soll, in welchem die Sparren AC und BC beliebig gegen den Horizont geneigt sein mögen, und auch die Belastungen Q_1 und Q_2 in beliebigen Punkten D und E angreifend gedacht werden sollen. Man trägt zunächst auf einer Verticalen die Belastungen $Q_1 = o q_1$ und $Q_2 = q_1 q_2$ auf, wählt ganz beliebig den Pol p und zeichnet zu den Polstrahlen po , pq_1 und pq_2 parallel das Seilpolygon $abcd$, wodurch man in dem Schnittpunkte e der Endseile einen Punkt für die Gesamtbelastung $Q = Q_1 + Q_2$ erhält. Durch dieses Gesamtgewicht Q werden in den Stützpunkten A und B verticale Auflagerdrücke Q_a und Q_b erzeugt, welche man erhält, wenn man Q in einem beliebigen Punkte F nach den Richtungen FA und FB zerlegt denkt. Zieht man daher im Kräftepolygone durch o eine

Parallele of mit AF und durch q_2 eine Parallele q_2f mit BF , so theilt die durch f gezogene Horizontale fh die Belastung Q bekanntlich in die beiden verticalen Stützendrücke $oh = Q_a$ und $hq_2 = Q_b$. Da der Punkt F beliebig gewählt worden, so ist durch fh noch nicht der Horizontalschub H gegeben; um denselben zu erlangen, muß noch die Richtung der Reaction R_3 bestimmt werden, mit welcher die Sparren in C gegen einander wirken. Hierzu denkt man sich einen Sparren, z. B. AC , im Gleichgewichte unter dem Einflusse der Kräfte Q_1 in D , R_3 in C und R_1 in A . R_3 ist noch der Richtung und Größe nach unbekannt, und von der Reaction R_1 ist nur die verticale Componente $Q_a = ho$ gefunden. Man setzt nun Q_1 mit Q_a zu einer Mittelkraft zusammen, deren Lage man erhält, wenn man parallel mit den Polstrahlen $p q_1$, $p o$ und $p h$ das Seilpolygon $g b a$ zeichnet, indem die gesuchte Mittelkraft in die Verticale durch den Schnitt g der Endseile fällt. Diese Mittelkraft $h q_1$ von Q_1 und Q_a muß mit H und R_3 im Gleichgewichte sein, und da sie die in A wirksame Horizontalcomponente H in i schneidet, so muß R_3 durch denselben Punkt gehen, also in die Richtung $i C$ fallen.

Fig. 281.



Daher erhält man H und R_3 , wenn man im Kräftepolygon durch q_1 eine Parallele $q_1 k$ mit $i C$ zieht, wodurch $k q_1 = R_3$ und $kh = H$ festgestellt sind. Zieht man nach ko und kq_2 , welche Linien mit AK und BL parallel ausfallen müssen, so erhält man der Richtung und Größe nach die Stützreaktionen $R_1 = ko$ in A und $R_2 = q_2 k$ in B . Will man endlich die Spannkraften in den Sparren finden, so hat man nur durch k Parallelen zu denselben zu

ziehen und die Kräfte R_1 und R_2 auf diese Linien zu projectiren, um die Spannung von AC in $S_1 = k s_1$ und diejenige von BC in $S_2 = s_2 k$ zu finden.

Ebenso kann das Kräftepolygon dazu dienen, die Kräfte für ein Gespärre zu finden, bei welchem der Sparren AB , Fig. 281, mit seinem Fuße A

nicht auf einem Balken oder Bundtrame, sondern auf einem zweiten Sparren BC , dieser wieder auf einem dritten CD u. s. w. aufruht, wie dies bei den bekannten Mansarddächern der Fall ist. Hierbei ist jedem der unteren Sparren diejenige Richtung zu geben, in welcher der auf ihn sich stützende Sparren drückt. Seien die Gewichte $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ der einzelnen Sparren, welche in deren Mitten wirksam gedacht werden mögen, jedes in die beiden verticalen Componenten zerlegt, die in den Enden des Sparrens angreifen, und seien also die Belastungen der Knotenpunkte A, B, C, D durch

$$Q_a = \frac{Q_1}{2}, \quad Q_b = \frac{Q_1 + Q_2}{2}, \quad Q_c = \frac{Q_2 + Q_3}{2} \dots$$

ausgedrückt, so trägt man diese Kräfte nach einem beliebigen Kräftemaßstabe auf einer Verticalen zu

$$o q_a = Q_a, \quad q_a q_b = Q_b, \quad q_b q_c = Q_c \dots$$

an, und wählt auf der Horizontalen durch o willkürlich den Pol p .

Es ist nun ohne Weiteres klar, daß die einzelnen Polstrahlen $p q_a, p q_b \dots$ die Reactionen in $B, C \dots$ der Richtung und Größe nach ergeben, und daß man daher die Sparren nach diesen Richtungen anordnen muß, d. h. man hat AB parallel mit $p q_a$, BC parallel mit $p q_b \dots$ zu stellen. Die Polabstand op stellt hierbei den überall gleichen Horizontalschub des Gespärres dar.

Wenn hierbei die Neigung irgend eines Sparrens, z. B. des untersten ED , vorgeschrieben wäre, so hätte man den Pol nicht willkürlich zu wählen, sondern man wird ihn finden, wenn man durch den Punkt q_a , welcher die Belastung des Knotenpunktes D begrenzt, eine Gerade $q_a p$ unter der gewünschten Sparrenneigung zieht. Die Analogie dieser Construction mit der bei Gewölben zur Ermittlung der Stützlinie angegebenen fällt ins Auge. Auch erkennt man, daß bei gleichem Gewichte der einzelnen Sparren die an den Punkt B angetragenen Richtungen derselben die Verticallinie durch den Scheitel in Punkten A, B', C', D' schneiden, deren Abstände von der durch B gelegten Horizontalen BF sich verhalten wie 1, 3, 5, 7, worauf eine öfter angegebene Construction zur Bestimmung der Sparrenrichtungen solcher Dächer beruht.

Beispiel. Ein Dach nach Art der Fig. 274 habe 12 m Tiefe und 8 m Höhe, die um 1 m von einander abstehenden Sparren haben 0,16 m Breite und 0,20 m Höhe des Querschnitts, wie groß ist der Sparrenschub für eine Belastung des Daches von 200 kg pro Quadratmeter Grundfläche?

Hier beträgt die Belastung eines Sparrens durch die Dachfläche $6 \cdot 1 \cdot 200 = 1200$ kg, wozu das Gewicht des Sparrens bei einem spezifischen Gewichte des Holzes von 0,6 mit

0,16 . 0,20 . 0,6 . 1000 $\sqrt{8^2 + 6^2} = 192 = \text{rot } 200 \text{ kg}$
tritt, so daß man

$$Q = 1200 + 200 = 1400 \text{ kg}$$

hat. Demgemäß folgt nach (10) der Horizontalschub:

$$H = \frac{1}{2} 1400 \frac{6}{8} = 525 \text{ kg.}$$

Der Gesamtdruck des Sparrens im Fußpunkte ist nach (5^a):

$$R_1 = 1400 \sqrt{1 + \left(\frac{6}{8}\right)^2} = 1495 \text{ kg,}$$

und seine Neigung δ gegen den Horizont findet man aus:

$$\text{tg } \delta = 2 \frac{8}{6} = 2,667 \text{ zu } \delta = 69^\circ 27'.$$

Der Neigungswinkel α des Sparrens folgt aus:

$$\text{tg } \alpha = \frac{4}{3} \text{ zu } \alpha = 53^\circ 10'.$$

Würde man nach Fig. 276 eine Säule anwenden, so würde man den Horizontalschub nach (10^b) zu

$$H = \frac{1}{2} 1400 \frac{6 \cdot 8}{36 + 64} = 336 \text{ kg,}$$

und den Verticaldruck der Säule, welcher von jedem Sparren ausgeübt wird, zu

$$V_2 = \frac{1}{2} 1400 \cos^2 53^\circ 10' = 251 \text{ kg}$$

erhalten. Der Verticaldruck im Fußpunkte jedes Sparrens beträgt daher

$$1400 - 251 = 1149 \text{ kg,}$$

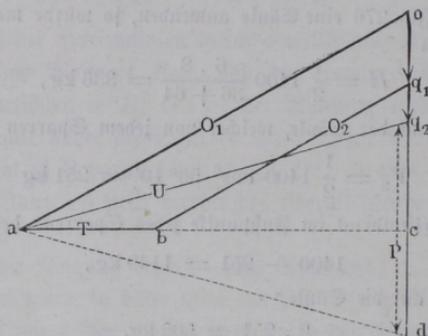
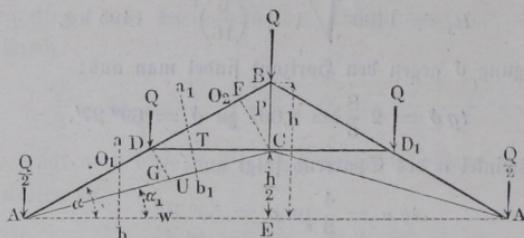
der Gesamtdruck auf die Säule

$$2 \cdot 251 = 502 \text{ kg.}$$

Dachstühle. Bei größerer Weite der zu überdachenden Räume werden §. 60. zusammengesetzte Dachconstruktionen oder Dachstühle angewendet, deren Beanspruchung in derselben Weise zu beurtheilen ist, wie die der Fachwerke. Als Beispiele mögen die in der Ausführung gebräuchlichsten Dachconstruktionen angeführt werden.

Bei dem deutschen Dachstuhl, Fig. 282 (a. f. S.), sind die beiden symmetrisch gegen einander gestellten Sparren AB und A_1B in ihren Mitten D und D_1 durch einen horizontalen Kehlbalken oder Spannriegel unterstützt, dessen Mitte C durch Zugstangen mit den Enden AA_1 und dem First B verbunden ist. Die Belastung drückt hier, wie bei allen Fachwerken, auf die Knotenpunkte A, D und B , indem in diesen Punkten Pfetten angeordnet sind, auf welchen die Sparren ruhen. Diese Lastpunkte werden fast immer in gleichen horizontalen Entfernungen von einander angeordnet, und es möge hier und bei den folgenden Dachconstruktionen mit a dieser

horizontale Abstand zweier Lastpunkte, mit $2w = AA_1$ die Spannweite und mit h die Höhe BE des Firstes über den Auflagern AA_1 bezeichnet werden. Die Belastung eines inneren Knotenpunktes sei Q ; dann kommt auf jedes Auflager A und A_1 eine Last gleich $\frac{Q}{2}$, welche direct von der Mauer aufgenommen wird, daher auf die Spannungen der Fachwerksglieder ohne Einfluß ist und bei deren Bestimmung nicht besonders in Rechnung Fig. 282.



gebracht werden soll. Der Auflagerdruck in A und in A_1 beträgt daher im vorliegenden Falle

$$R_1 = R_2 = \frac{3}{2} Q,$$

oder im Allgemeinen bei n Intervallen (n ist hier stets eine gerade Zahl)

$$R = \frac{n-1}{2} Q \dots \dots \dots (1)$$

Um die Pressungen O_1 und O_2 in den Strecken des Sparrens oder der oberen Gurtung AD und DB zu bestimmen, denkt man sich einen Schnitt nach ab oder $a_1 b_1$ und wählt C zum Momentenmittelpunkte, wodurch man, wenn CF senkrecht zu AB gezogen ist,

$$O_1 \cdot CF = R \cdot 2a = \frac{3}{2} Qw \text{ und}$$

$$O_2 \cdot CF = R \cdot 2a - Qa = Qw$$

erhält.

Führt man noch die Neigungswinkel α des Sparrens AB und α_1 der Zugstange AC gegen den Horizont ein, so hat man

$$CF = CB \cos \alpha = \frac{h}{2} \cos \alpha,$$

und auch

$$AC \sin (\alpha - \alpha_1) = w \frac{\sin (\alpha - \alpha_1)}{\cos \alpha_1} = \frac{h}{2} \cos \alpha,$$

und erhält damit

$$O_1 = 3 Q \frac{w}{h \cos \alpha} = \frac{3}{2} Q \frac{\cos \alpha_1}{\sin (\alpha - \alpha_1)} \dots \dots \dots (2)$$

$$O_2 = 2 Q \frac{w}{h \cos \alpha} = Q \frac{\cos \alpha_1}{\sin (\alpha - \alpha_1)} = \frac{2}{3} O_1 \dots \dots (3)$$

Ebenso erhält man für die untere Gurtung AC , wenn man den Schnitt in ab und den Momentenpunkt in D wählt, und das Loth

$$DG = \frac{w}{2} \sin \alpha_1 = \frac{w \sin (\alpha - \alpha_1)}{2 \cos \alpha}$$

setzt:

$$U \cdot DG = U \frac{w}{2} \sin \alpha_1 = U \frac{w \sin (\alpha - \alpha_1)}{2 \cos \alpha} = \frac{3}{2} Q \frac{w}{2},$$

also

$$U = \frac{3}{2} \frac{Q}{\sin \alpha_1} = \frac{3}{2} Q \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha - \alpha_1)} \dots \dots \dots (4)$$

und zwar ist U eine Zugspannung, während O_1 und O_2 Pressungen bedeuten.

Um die Pressung T in dem Keilbalken DC zu bestimmen, wählt man für den Schnitt $a_1 b_1$ den Auflagerpunkt A zum Momentenmittelpunkte, wodurch die Momente von R , U und O_2 herausfallen und man aus

$$Q \frac{w}{2} = T \frac{h}{2}; \quad T = Q \frac{w}{h} = Q \cotg \alpha \dots \dots \dots (5)$$

als Druckspannung erhält. Endlich hat die Hängestange BC einer Zugkraft P zu widerstehen, welche sich aus der Summe der Verticalcomponenten der beiden Zugstangen AC und $A_1 C$ ergibt zu

$$P = 2 U \sin \alpha_1 = 3 Q. \dots \dots \dots (6)$$

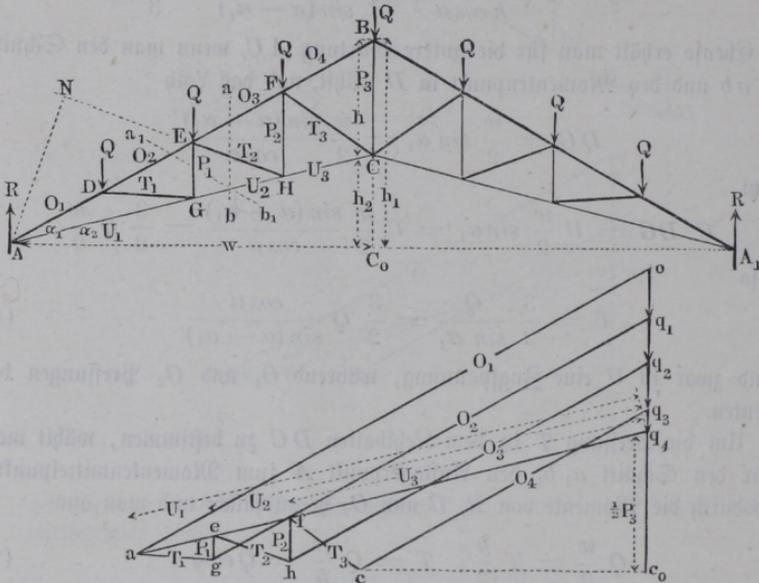
Denselben Werth muß man für P auch erhalten, wenn man die Belastung Q des Firstes von der Summe der verticalen Componenten der Sparrenkräfte in BD und BD_1 abzieht, es ist dann

$$2 O_2 \sin \alpha - Q = 4 Q \frac{w}{h} \tg \alpha - Q = 3 Q.$$

Anstatt die Anstrengungen der einzelnen Glieder durch Rechnung, wie oben geschehen, zu ermitteln, führt auch eine einfache Zerlegung der Kräfte

auf graphischem Wege schnell und sicher zum Ziele. Zu dem Ende hat man nur auf einer Verticalen durch o in Fig. 282 die Belastung Q von D gleich $o q_1$ und die halbe Belastung $\frac{Q}{2}$ von B gleich $q_1 q_2$ anzutragen, und $o a$ parallel mit AB , und $q_2 a$ parallel mit AC zu ziehen, um O_1 in $a o$ und U in $q_2 a$ zu erhalten. Zieht man ferner durch a eine mit dem Spannriegel DD_1 parallele also horizontale Gerade und legt durch q_1 eine Parallele zu AB , so stellt, wie leicht ersichtlich ist, ab die Kraft T im Spannriegel und $b q_1$ die Pressung im oberen Sparrenstücke DB vor. Um auch

Fig. 283.



die Zugkraft P in der Hängestange BC zu finden, hat man nur nöthig, die Horizontale ab bis nach c zu verlängern, so ist $q_2 c = \frac{P}{2}$, also P durch $q_2 d$ gegeben, wenn noch ad symmetrisch zu $a q_2$ gezogen wird. Die Figur zeigt auch, daß die verticale Componente $c q_1$ der Sparrenkraft O_2 um die Größe $\frac{Q}{2}$ der halben Firstbelastung größer ist, als die Vertikalkraft $q_2 c$ jeder Zugstange AC .

Für größere Spannweiten, bei denen die Sparren in mehreren Zwischenpunkten zwischen dem Auflager und dem Firste gestützt werden müssen, wird vielfach der englische Dachstuhl angewendet, von welchem in Fig. 283

eine Anordnung mit drei Zwischenpfetten D, E und F angegeben ist. Dieser Dachstuhl kann, da man in der Anzahl solcher Knotenpunkte wie D, E und F nicht beschränkt ist, für beliebig große Spannweiten $2w$ angewandt werden. Die Ermittlung der Anstrengung irgend eines Theiles geschieht genau in derselben Art, wie für die Fachwerke im Allgemeinen gezeigt worden, indem man für irgend einen Schnitt ab , den unteren Knotenpunkt H oder den oberen Knotenpunkt E der durchschnittenen Strebe EH als Momentenpunkt wählt, je nachdem man die Spannung der oberen oder unteren Gurtung bestimmen will, während für die Spannung in dem durchschnittenen Zwischenstücke der Auflagerpunkt A als Momentenpunkt ausgewählt wird. Selbstverständlich denkt man sich zur Bestimmung der Kraft in einem verticalen Pfosten wie EG einen Schnitt nach $a_1 b_1$ hindurchgelegt. Im Folgenden bedeute $l_1 = AB$ die Länge eines Sparrens, $h_1 = BC_0 = l_1 \sin \alpha_1$ seine Verticalprojection, $l_2 = AC$ die Länge der Zugstange, $h_2 = CC_0 = l_2 \sin \alpha_2$ deren Verticalprojection und $h = h_1 - h_2$ die Höhe BC des Binders in der Mitte, ferner $2w = na$ die Spannweite, die in n Intervalle von der Breite a getheilt sein mag, und es seien mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots$ die Neigungswinkel der Streben $DG, EH, FC \dots$ gegen den Horizont, und mit

$$c_1 = \frac{a}{\cos \beta_1}; \quad c_2 = \frac{a}{\cos \beta_2} \dots$$

die Längen dieser Streben verstanden. Ist jede Pfette wiederum mit Q belastet, so hat man den Auflagerdruck in A und A_1 zu

$$R = \frac{n-1}{2} Q \dots \dots \dots (7)$$

Bezeichnet nun v die Anzahl der belasteten Pfetten zwischen einem beliebigen Schnitte ab und dem der Mitte abgewandten Auflager A , so findet man nach dem Vorstehenden die Spannungen O_{v+1} und U_v der durchschnittenen Gurtungen durch

$$\frac{n-1}{2} Q(v+1)a - Q(1+2+\dots+v)a = O_{v+1} \frac{(v+1)a}{\cos \alpha_2} \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

oder, da aus dem Dreiecke ABC sich $\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\cos \alpha_2} = \frac{h}{l_1}$ ergibt:

$$Q \left(\frac{n-1}{2} (v+1) - v \frac{v+1}{2} \right) = O_{v+1} (v+1) \frac{h}{l_1},$$

woraus

$$O_{v+1} = \frac{n-(v+1)}{2} Q \frac{l_1}{h} \dots \dots \dots (8)$$

folgt.

In gleicher Weise findet man für den oberen Knotenpunkt als Momentenmitte:

$$\frac{n-1}{2} Qva - Q(1+2+\dots+v-1)a = U_v \frac{va}{\cos \alpha_1} \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$= U_v v a \frac{h}{l_2},$$

d. h.

$$U_v = \frac{n-v}{2} Q \frac{l_2}{h} \dots \dots \dots (9)$$

Für die Strebe erhält man mit *A* als Momentenpunkt die Spannung *T_v* aus:

$$Q(1+2+\dots+v)a = T_v \cdot AN = T_v \frac{va}{\cos \alpha_1} \sin(\alpha_1 + \beta_v)$$

oder, da aus dem Dreiecke *EHF*:

$$\frac{\sin(\alpha_1 + \beta_v)}{\cos \alpha_1} = \frac{HF}{EH} = \frac{2 \frac{v+1}{n} h}{c_v} = 2 \frac{v+1}{n} \frac{h}{c_v}$$

folgt, so hat man

$$Q v \frac{v+1}{2} a = T_v 2 v a \frac{v+1}{n} \frac{h}{c_v},$$

also

$$T_v = \frac{n}{4} \frac{c_v}{h} Q \dots \dots \dots (10)$$

Für die Verticalstiele endlich hat man, wenn man nach *a₁ b₁* schneidet, mit *A* als Momentenpunkt:

$$Q(1+2+\dots+v)a = P_v(v+1)a,$$

woraus

$$P_v = \frac{v}{2} Q \dots \dots \dots (11)$$

Setzt man in den Gleichungen (8) bis (11) für *v* die Werthe 0, 1, 2, 3 . . . , so erhält man die Spannungen der Gurtungen, Streben und Verticalstangen. Für die mittlere Hängestange *BC* ergibt sich die Spannung wieder durch

$$P_v = 2 O_{v+1} \sin \alpha_1 - Q,$$

oder, wenn man darin $v = \frac{n}{2} - 1$ setzt, nach (8):

$$P = 2 \frac{n}{4} Q \frac{l_1}{h} \frac{h_1}{l_1} - Q = \left(\frac{n}{2} \frac{h_1}{h} - 1 \right) Q \dots \dots (12)$$

Denfelben Werth erhält man natürlich auch durch

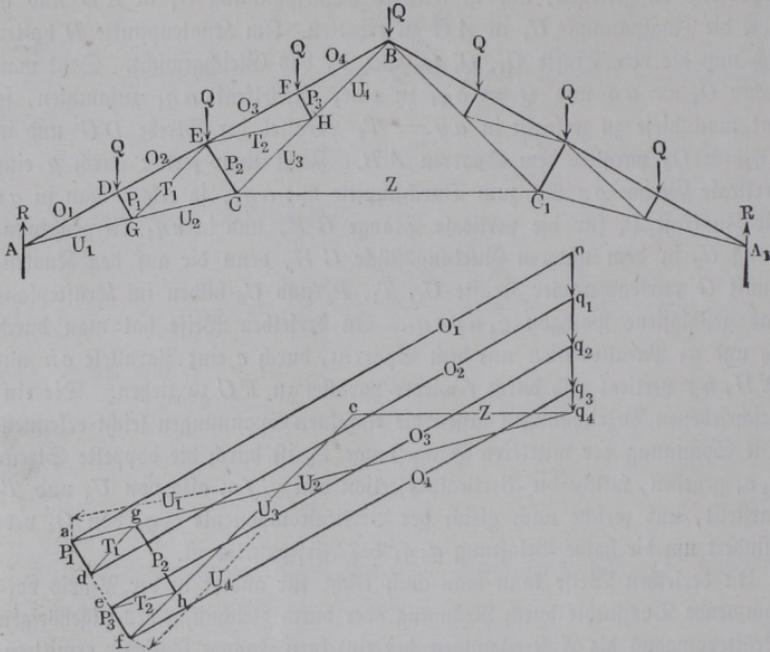
$$P = 2 U_v \sin \alpha_2 + 2 T_v \sin \beta_v.$$

Um die Spannungen der einzelnen Glieder graphisch zu ermitteln, hat man wieder auf einer Verticallinie $o c_0$ die Belastungen der Pfetten $o q_1 = q_1 q_2 = q_2 q_3 = Q$ und $q_3 q_4 = \frac{Q}{2}$ anzutragen und den Auflagerdruck $q_4 o = R$ nach den Richtungen $q_4 a$ der Zugstange und $a o$ des Sparrens zu zerlegen, um in $a o$ die Druckspannung O_1 in AD und in $q_4 a$ die Zugspannung U_1 in AG zu erhalten. Im Knotenpunkte D halten sich nun die vier Kräfte O_1 , Q , O_2 und T_1 das Gleichgewicht. Setzt man daher $O_1 = a o$ und $Q = o q_1$ zu einer Mittelkraft $a q_1$ zusammen, so hat man diese zu zerlegen in $ag = T_1$ parallel der Strebe DG und in $g q_1 = O_2$ parallel dem Sparren AB . Zieht man ferner durch g eine verticale Gerade ge bis zum Durchschnitte mit $a q_1$, so erhält man in ge die Zugkraft P_1 für die verticale Stange GE , und in eq_4 die Zugspannung U_2 in dem unteren Gurtungsstücke GH , denn die auf den Knotenpunkt G wirkenden vier Kräfte U_1 , T_1 , P_1 und U_2 bilden im Kräfteplane das geschlossene Polygon $q_4 a g e q_4$. In derselben Weise hat man durch q_2 und q_3 Parallellinien mit dem Sparren, durch e eine Parallele eh mit EH , hf vertical und durch f wieder parallel zu FC zu ziehen. Die eingeschriebenen Bezeichnungen lassen die einzelnen Spannungen leicht erkennen. Die Spannung der mittleren Hängestange P_3 ist durch die doppelte Strecke $q_4 c_0$ gegeben, welche die Verticalprojection von $q_4 fc$, also von U_3 und T_3 darstellt, und welche auch gleich der Verticalcomponente $c_0 q_3$ von O_4 vermindert um die halbe Belastung $q_3 q_4$ des Firstpunktes ist.

In derselben Weise kann man auch leicht für andere in der Praxis vorkommende Dachstühle durch Rechnung oder durch Zeichnung des zugehörigen Kräftepolygons die Anstrengungen der einzelnen Fachwerkglieder ermitteln. Als ein weiteres Beispiel für die Zeichnung des Kräftepolygons sei hier noch der sogenannte französische Dachstuhl (System Polonceau), Fig. 284 (a. f. S.), angeführt. Man kann diesen Dachstuhl gewissermaßen als die Verbindung der beiden armirten, d. h. zu besonderen Fachwerken gestalteten Sparren ABC und $A_1 B C_1$ durch die Zugstange $C C_1$ ansehen. Die Zwischenglieder DG , EC und FH werden hierbei senkrecht zu der Sparrenrichtung gestellt, und daher haben wegen der gleichen Entfernung der Pfetten D, E, F, B auch die Stangen AG , GE , EH und HB gleiche Neigungen gegen den Sparren AB . Zur Zeichnung des Kräftepolygons mache man wieder $q_4 o = R = \frac{n-1}{2} Q$ und zerlege diese Kraft in $a o = O_1$ und $q_4 a = U_1$ nach den Richtungen des Sparrens AB und der Zugstange AC . In gleicher Weise wie im vorigen Beispiele zieht man

nun $q_1 d$ parallel dem Sparren und durch a eine zur Strebe DG parallele Gerade, wodurch man in ad die Strebenkraft P_1 und in $d q_1$ den Sparrendruck in DE erhält, denn das geschlossene Kräfteviereck $o q_1 d a o$ stellt das Gleichgewicht der vier auf den Punkt D wirkenden Kräfte Q, O_2, P_1 und O_1 dar. Zieht man ferner durch d eine mit GE parallele Gerade dg , so erhält man in dieser die Größe T_1 und in $g q_4$ die Spannung U_2 in GC ,

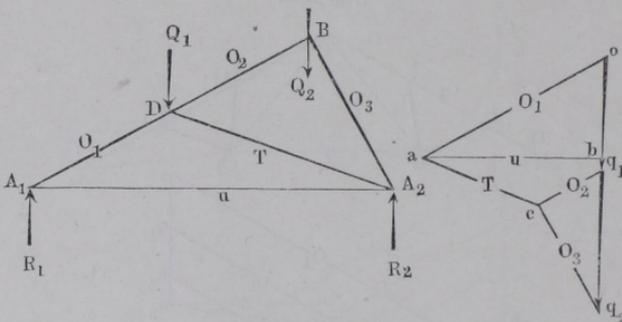
Fig. 284.



denn für den Punkt G gilt das den darauf wirkenden Kräften U_1, P_1, T_1 und U_2 entsprechende geschlossene Viereck $q_4 a d g q_4$ als Kräfteplan. Um ferner für den Punkt E die Zerlegung vorzunehmen, hat man nur zu beachten, daß die Spannungen T_1 und T_2 wegen der ganz symmetrischen Anordnung und Belastung dieser Stangen gleiche Größe haben müssen. Setzt man daher die Kräfte T_1, O_2 und Q zu dem Linienzuge $gd q_1 q_2$ zusammen, zieht durch g eine Parallele zu EC und durch q_2 eine solche zum Sparren, so wird man in der Verlängerung von ad einen Punkt e finden, so daß $eh = dg$ ist, wenn eh parallel EH gezogen wird. Mit Hilfe der so gefundenen Pressung $P_2 = gh$ in dem Pfosten EC ergeben sich nun ferner die Spannungen U_3 in CH und Z in der Verbindungsstange CC_1 , wenn man durch q_4 die Horizontale $q_4 c$ und durch h eine Parallele zu CB zieht,

Q_1 von D und Q_2 von B durch die verticalen Strecken $o q_1 = Q_1$ und $q_1 q_2 = Q_2$ darzustellen. Eine Zerlegung von $q_1 q_2$ nach den Richtungen der Sparren liefert dann in $e q_2$ und $e q_1$ die Druckkräfte O_3 und O_2 für $A_2 B$ und $D B$. Zieht man alsdann durch o eine Parallele zu $A_1 B$ und durch e eine solche zur Strebe $A_2 D$, so ist auch die Druckkraft $a o = O_1$ in dem unteren Sparrenstücke $A_1 D_1$ sowie die Strebenkraft $T = a c$ gefunden. In der durch a geführten Horizontallinie ab erhält man die Zugkraft U in der Spannstange $A_1 A_2$, und die Strecken $b o$ und $q_2 b$ stellen die Auflagerreactionen R_1 in A_1 und R_2 in A_2 vor.

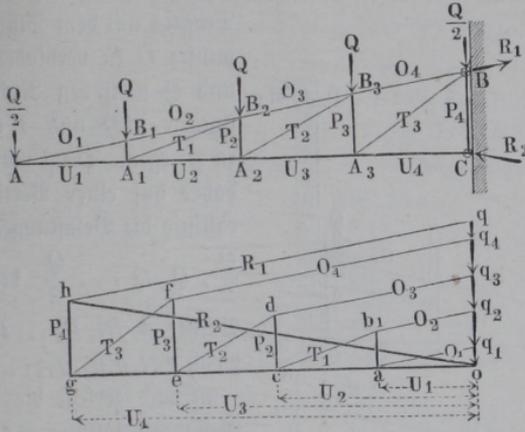
Fig. 286.



In gleich einfacher Weise ermitteln sich die Spannungen in den Fachwerksgliedern von Dachbindern, welche nur einseitig an einer Mauer befestigt sind und consolenartig frei herausragen (Perrondächer). Es sei ABC , Fig. 287, ein in der Mauer bei B und C befestigter Binder eines Perrondaches, dessen obere Gurtung AB außer in A und B noch in den Zwischenpunkten B_1, B_2, B_3 Pfetten trage, auf die je eine Last Q entfällt, während die Punkte A und B nur mit je $\frac{Q}{2}$ belastet anzunehmen sind. Trägt man wieder auf einer Verticalen die Strecken $q_4 q_3 q_2 q_1 o$ gleich diesen Belastungen der Pfetten ab, so erhält man wie früher O_1 und U_1 in $q_1 a$ und $a o$ durch Zerlegung von $q_1 o = \frac{Q}{2}$ nach den Richtungen von AB und AC . In $B_1 B_2$ ist die Spannung $O_2 = O_1 = q_2 b_1$, während der Pfosten $A_1 B_1$ einer Pressung $P_1 = Q = b_1 a_1$ ausgesetzt ist. Zieht man ferner durch b_1 eine mit der Strebe $A_1 B_2$ Parallele $b_1 c$, so erhält man in derselben die Zugkraft T_1 dieser Strebe und in $o c$ die Pressung U_2 in der unteren Gurtung zwischen A_1 und A_2 . Die Wiederholung dieser Construction liefert in den mit der oberen Gurtung Parallelen $q_3 d$ und $q_4 f$ die Spannungen O_3 und O_4 und in $q h$ diejenige Kraft R_1 , welche den Festpunkt B aus der Mauer herauszuziehen bestrebt ist, während der

untere Festpunkt C außer der horizontalen Druckkraft $U_4 = g o$ nach der durch den Pfosten BC ausgeübten Verticalkraft $P_4 = h g$, zusammen also

Fig. 287.



einer Kraft ausgesetzt ist, welche durch $R_2 = h o$ der Größe und Richtung nach ausgedrückt ist. Es ist leicht zu erkennen, daß, wenn wie hier angenommen, die untere Gurtung AC horizontal und die Belastung gleichmäßig vertheilt ist, die beiden Kräfte R_1 und R_2 von gleicher Größe sein müssen, indem das Dreieck $h q o$ die Zerlegung der in der Mitte B_2 zwischen A und B

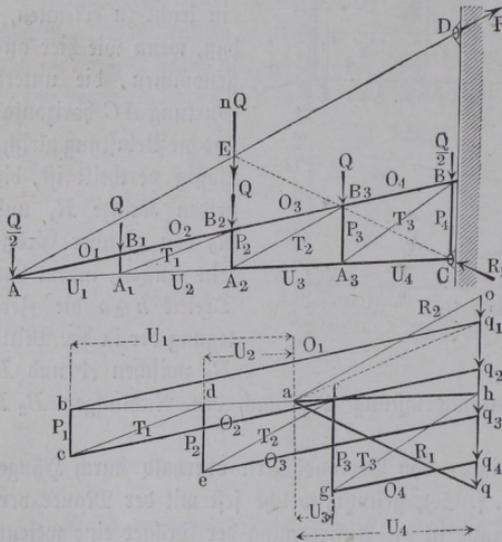
wirkend zu denkenden Gesamtbelastung $4 Q$ nach den Richtungen $B_2 B$ und $B_2 C$ darstellt.

Zuweilen werden die Binder von Ferrondächern oberhalb durch Hängestangen AD , Fig. 288 (a. f. S.), gestützt, welche fest mit der Mauer verbunden sind. In diesem Falle ist die Anstrengung der Träger eine wesentlich andere als bei der durch Fig. 287 dargestellten Anordnung, insofern der Träger in Fig. 288 gewissermaßen wie ein in A und C auf zwei Stützen ruhender Balken anzusehen ist, bei dessen Belastung also die obere Gurtung gedrückt wird, während der Träger in Fig. 287 einen an einem Ende eingeklemmten consolartigen Balken bildet, bei dessen Biegung die obere Gurtung convex, also gezogen wird. Durch die Hängestange in Fig. 288 wird nämlich auf das Ende A ein gewisser Zug R_2 ausgeübt, dessen verticale Componente genau so wirkt, wie die Reaction einer unterhalb A angebrachten Stütze, während die horizontale Componente in dem Träger eine Pressung nach der Richtung seiner Längensaxe hervorruft. Es möge zum Schlusse auch dieser Fall hier noch näher geprüft werden, und zwar soll der Allgemeinheit wegen die untere Gurtung AC des Fachwerkes nicht horizontal, sondern beliebig gegen den Horizont geneigt gedacht werden. Es muß hierbei jedoch bemerkt werden, daß die Prüfung unter der Voraussetzung geführt wird, der Träger ruhe an der Mauer nur in einem Stützpunkte C auf, sei aber nicht, wie in Fig. 287, mit der Mauer unwandelbar befestigt. Wollte man nämlich eine solche starre Befestigung voraussetzen, so würde die Untersuchung nur unter Berücksichtigung

der elastischen Durchbiegungen zu führen sein, ähnlich wie dies für alle Balken zu geschehen hat, die in mehr als zwei Punkten gestützt werden.

Um die in der Hängestange AD hervorgerufene Spannung R_2 zu bestimmen, hat man nur den Durchschnitt E der Gesamtbelastung nQ des

Fig. 288.



Trägers mit dem Stützpunkte C zu verbinden, und Q nach den Richtungen ED und EC zu zerlegen. Trägt man daher auf einer Verticallinie die Belastungen $\frac{Q}{2}, Q, Q \dots \frac{Q}{2}$ der

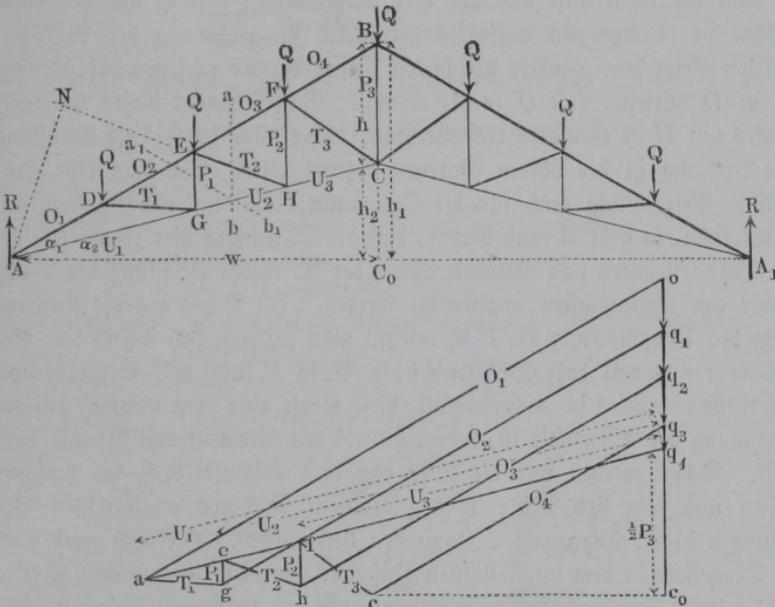
Punkte $A, B_1, B_2 \dots B$ gleich $oq_1, q_1q_2, q_2q_3 \dots$ an und zerlegt die Gesamtbelastung $nQ = oq$ nach den Richtungen von ED und EC , so erhält man in oa die Zugkraft R_2 der Hängestange AD und in aq die Druckkraft R_1 gegen den Stützpunkt C .

Mit Hilfe der Zugstangenkraft R_2 , welche man als die in A auf den Träger geäußerte Reaction anzusehen hat, zeichnet man nun in der bekannten Art das Kräftepolygon, dessen einzelne Strecken die Anstrengungen der Fachwerksglieder vorstellen.

Setzt man für den Punkt A die Kraft $R_2 = ao$ in AD mit dem Gewichte $\frac{Q}{2} = oq_1$ in A zu der Resultirenden aq_1 zusammen, zieht durch q_1 eine Parallele zur oberen Gurtung AB und durch a eine solche zur unteren Gurtung AC , so erhält man die Pressung O_1 des Stückes AB_1 in der Strecke bq_1 , während die Spannung U_1 in AA_1 durch ab dargestellt ist. Für den Punkt B_1 , auf welchen die Kräfte O_1, Q, O_2 und P_1 wirken, gilt dann das Kräftepolygon bq_1q_2c , aus welchem $cq_2 = O_2 = O_1$ und $cb = P_1$ als Druckkraft in der ersten Verticalen A_1B_1 folgt. Ebenso zeichnet man für den Punkt A_1 aus U_1, P_1, T_1 und U_2 das Kräftepolygon $abcd$, welches in cd die Zugkraft T_1 der Diagonale A_1B_2 und in da die Zugkraft U_2 in A_1A_2 liefert. Die weitere Ausführung der Zeichnung führt für den Punkt B_2 zu dem Polygon dcq_2q_3ed , also zu der Druck-

kraft $O_3 = eq_3$ in B_2B_3 und zu derjenigen $P_2 = ed$ in A_2B_2 . Wenn man nun weiter für A_2 die Kräfte U_2, P_2, T_2 und U_3 zu dem Vierecke $adefa$ zusammensetzt, so findet man, daß die untere Gurtung A_2A_3 mit $U_3 = fa$ gedrückt wird, während die Diagonale A_2B_3 einem Zuge von $T_2 = ef$ ausgesetzt ist. Eine weitere Fortsetzung führt in derselben Weise zu $O_4 = gq_4, U_4 = ah, P_3 = gf, P_4 = qh$ und $T_3 = gh$. Der Punkt C ist einer Einwirkung der Kraft $P_4 = hq$ des Endpfostens und einer Druckkraft $U_4 = ah$ der Gurtung A_3C , also wie oben schon gefunden wurde, einer resultirenden Kraft $R_1 = aq$ ausgesetzt.

Fig. 289.



Diese graphischen Ermittlungen geben unter der Voraussetzung eines nicht zu kleinen Maßstabes die gesuchten Kräfte in jedem Falle mit genügender Schärfe. Auch ist es leicht, aus dem Kräftepolygone die analytischen Ausdrücke für die einzelnen Anstrengungen zu ermitteln, wenn man die Neigungen bzw. Längen der einzelnen Fachwerksglieder einführt, eine solche Entwicklung der Formeln für verschiedene Fälle soll hier nicht vorgenommen werden.

Im Vorstehenden wurde immer vorausgesetzt, daß der Dachbinder über seine ganze Länge gleichmäßig belastet ist, wie dies dem thatsächlichen Zustande entspricht. Es ist auch leicht zu erkennen, daß bei den gewöhnlichen Dachstühlen diesem Zustande der vollen Belastung die ungünstigste Bean-

sprechung der einzelnen Fachwerkglieder entspricht. Denkt man sich nämlich durch irgend einen Dachstuhl, wie in Fig. 289 (a. v. S.), einen beliebigen Schnitt ab gelegt, und wählt zur Bestimmung der Spannung O der oberen Gurtung den Momentenmittelpunkt in H , so erkennt man, daß die Belastung jedes beliebigen Knotenpunktes das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf H und somit die Pressung O in EF vergrößert. Wirkt nämlich die betreffende Last rechts von dem Schnitte, z. B. in F , so bringt sie nur eine Vergrößerung der Auflagerreaction R in A , folglich eine Vergrößerung des rechts drehenden Momentes um H hervor. Das letztere gilt auch für die Belastung eines links vom Schnitte ab gelegenen Punktes wie z. B. D , da man die Mittellast aus der hier aufgebrachtten Last Q und der durch dieselbe in A erzeugten aufwärts gerichteten Vergrößerung der Auflagerreaction gleich dem abwärts gerichteten Auflagerdrucke zu setzen hat, welchen die in D wirkende Last Q in A_1 erzeugt. Das Moment dieses Auflagerdruckes um H ist ebenfalls rechtsdrehend, daher auch durch diese Belastung eine Pressung in der oberen Gurtung erzeugt wird. Da man eine ganz ähnliche Betrachtung auch für die Spannung U der unteren Gurtung anstellen kann, so geht hieraus hervor, daß die Gurtungen hier ebenso wie bei den Parallelträgern und Parabelträgern, bei der vollen Belastung der Dachbinder am ungünstigsten angestrengt werden. In Bezug auf die Anstrengung der Diagonalen, z. B. EH , erkennt man sogleich, daß irgend eine Belastung rechts von dem Schnitte ab , z. B. in F , nur eine Vergrößerung des Auflagerdruckes in A hervorruft, diese Kraft aber ohne Einfluß auf die Spannung der Diagonale ist, indem hier A den Momentenmittelpunkt darstellt. Daher werden nur die links von dem Schnitte, d. h. die zwischen diesem und dem der Mitte B abgewendeten Auflager angebrachten Belastungen in der Diagonale Spannungen hervorrufen. Hiernach wird aber die Diagonale in dem ungünstigsten Zustande, wo diese sämtlichen Punkte links belastet sind, gerade so angestrengt, wie bei der vollen Belastung des Trägers, da die Belastungen rechts vom Schnitte ohne Einfluß auf die Spannung der Diagonale sind. Da eine gleiche Betrachtung auch für die Verticalstiele wie FH gilt, so geht daraus hervor, daß die volle Belastung des Dachbinders dem Zustande entspricht, in welchem sämtliche Fachwerkglieder ihrer größten Anstrengung ausgesetzt sind.

Beispiel. Ueber einem Raume von 16 m Spannweite soll ein Dach nach Art der Fig. 289 angebracht werden, dessen Binder 2,5 m von einander entfernt sind. Die Höhe des Firstes über der Horizontalen durch die Auflager soll zu $h_1 = 3,5$ m angenommen werden, während der untere Knotenpunkt der Mitte, in welchem sich die Spannstrangen vereinigen, um $h_2 = 0,5$ m über den Auflagern gelegen ist. Es sind die Anspannungen der einzelnen Constructionsglieder unter Annahme einer Gesamtbelastung des Daches durch Eigengewicht, Schnee und Wind, von 160 kg pro Quadratmeter Grundrißfläche zu ermitteln.

Man hat hier bei $n=8$ Feldern $a = \frac{16}{n} = 2$ m, und daher die Belastung jedes Knotenpunktes

$$Q = 2 \cdot 2,5 \cdot 160 = 800 \text{ kg.}$$

Ferner folgen die Längen eines Sparrens

$$AB = l_1 = \sqrt{8^2 + 3,5^2} = 8,732; \quad \frac{l_1}{4} = 2,18 \text{ m,}$$

einer Spannftange

$$AC = l_2 = \sqrt{8^2 + 0,5^2} = 8,015; \quad \frac{l_2}{4} = 2,004 \sim 2,0 \text{ m.}$$

Der mittlere Verticalpfosten hat $h = 3$ m Länge, so daß die der beiden anderen Pfosten GE und HF zu

$$\frac{h}{2} = 1,5 \text{ bzw. } \frac{3}{4} h = 2,25 \text{ m}$$

sich ergeben. Der Neigungswinkel der Sparren gegen den Horizont folgt aus

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{3,5}{8} = 0,4375 \text{ zu } \alpha_1 = 23^\circ 40',$$

derjenige der Spannftangen aus

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{0,5}{8} = 0,0625 \text{ zu } \alpha_2 = 3^\circ 35',$$

mithin hat man

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 20^\circ 5'.$$

Man erhält daher die Längen der Streben DG , EH und FC durch

$$c_1 = \sqrt{\left(\frac{l_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2l_2}{4}\right)^2} - 2 \frac{l_1}{4} \frac{2l_2}{4} \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$= \sqrt{4,752 + 16} - 2 \cdot 2,18 \cdot 4 \cdot 0,939 = 2,09 \text{ m,}$$

$$c_2 = \sqrt{(2 \cdot 2,18)^2 + (3 \cdot 2)^2} - 2 \cdot 4,36 \cdot 6 \cdot 0,939 = 2,43 \text{ m,}$$

$$c_3 = \sqrt{(3 \cdot 2,18)^2 + (4 \cdot 2)^2} - 2 \cdot 6,54 \cdot 8 \cdot 0,939 = 2,92 \text{ m,}$$

Demgemäß finden sich nun die Spannungen nach (8) bis (11) in dem Sparren:

$$O_1 = \frac{8-1}{2} 800 \frac{8,732}{3} = 8150 \text{ kg in } AD,$$

$$O_2 = \frac{8-2}{2} 800 \frac{8,732}{3} = 6987 \text{ kg in } DE,$$

$$O_3 = \frac{8-3}{2} 800 \frac{8,732}{3} = 5822 \text{ kg in } EF,$$

$$O_4 = \frac{8-4}{2} 800 \frac{8,732}{3} = 4658 \text{ kg in } FB;$$

in der Spannftange:

$$U_1 = \frac{8-1}{2} 800 \frac{8,015}{3} = 7481 \text{ kg in } AG,$$

$$U_2 = \frac{8-2}{2} 800 \frac{8,015}{3} = 6413 \text{ kg in } GH,$$

$$U_3 = \frac{8-3}{2} 800 \frac{8,015}{3} = 5344 \text{ kg in } HC,$$

in den Streben:

$$T_1 = \frac{8}{4} \frac{2,09}{3} 800 = 1115 \text{ kg in } DG,$$

$$T_2 = \frac{8}{4} \frac{2,43}{3} 800 = 1296 \text{ kg in } EH,$$

$$T_3 = \frac{8}{4} \frac{2,92}{3} 800 = 1557 \text{ kg in } FC;$$

in den Verticalen:

$$P_1 = \frac{1}{2} 800 = 400 \text{ kg in } EG,$$

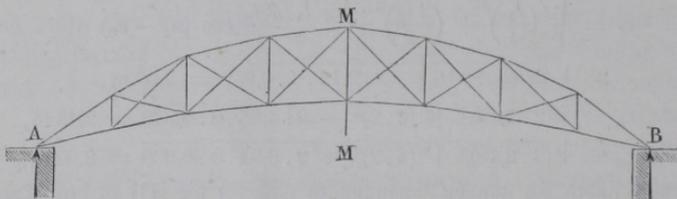
$$P_2 = 800 \text{ kg in } FH.$$

In der mittleren Hängestange BC hat man:

$$P_3 = \left(\frac{n}{2} \frac{h_1}{h} - 1 \right) Q = \left(4 \frac{3,5}{3} - 1 \right) 800 = 2933 \text{ kg.}$$

§. 61. Sichelförmige Träger. Zur Ueberdeckung weiter Räume, z. B. der Bahnhofshallen, wendet man in neuerer Zeit häufig als Dachbinder eiserne Fachwerksträger an, deren obere sowohl wie untere Gurtungen nach krummen bzw. gebrochenen Linien gebildet sind, so daß die Träger die sichelförmige Gestalt der Fig. 290 annehmen.

Fig. 290.



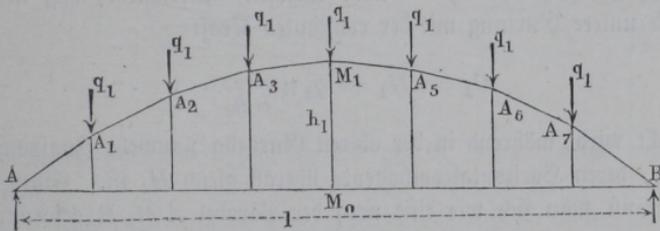
Diese Träger, welche kurz als Sichelfträger bezeichnet werden mögen, sind wie die vorstehend besprochenen Brückenträger ebenfalls mit einem System von Füllungsgliedern zwischen den Gurtungen zu versehen, und es dienen die Knotenpunkte der oberen Gurtung zur Aufnahme der durch das Gewicht der Decke sowie des Schnees zc. dargestellten Belastung. Das Eigengewicht der Träger selbst kann für die Berechnung ebenfalls genügend genau in den Knotenpunkten der oberen Gurtung wirksam gedacht werden, indem nur der kleinere Theil dieses Gewichtes, etwa $\frac{1}{3}$ desselben, thatsächlich in den unteren Knotenpunkten wirkt. Will man dem letzteren Umstande jedoch Rechnung tragen, so wird man leicht die dadurch veranlaßte geringe Correction der Resultate vornehmen können, welche die Rechnung unter der Annahme der Concentrirung des Eigengewichtes in den oberen Knotenpunkten ergibt.

Die Form der Gurtungen ist für die Rechnung als eine gebrochene oder polygonale anzunehmen, denn wenn man auch, etwa aus Schönheitsrück- sichten, die Gurtungen als stetig gekrümmte ausführt, so wird bei den meist beträchtlichen Spannweiten die gerade Verbindungslinie zweier auf einander folgenden Knotenpunkte einer Gurtung doch in der Regel ganz im Innern des zugehörigen Gurtungsstückes verbleiben.

Die zur verticalen Mittellinie MM symmetrische Curve, in welcher man die Knotenpunkte einer Gurtung anordnet, kann zwar beliebig gewählt werden, es empfiehlt sich aber, zu diesen Curven für beide Gurtungen Parabeln mit der Mittellinie MM als Hauptaxe zu wählen, weil unter dieser An- nahme die Diagonalen für den Fall einer gleichmäßigen Belastung des ganzen Trägers gar keiner Anstrengung ausgesetzt sind, wie sich mit Rücksicht auf das für den Parabelträger in §. 56 Gesagte wie folgt ergibt.

Es wurde daselbst gefunden, daß bei einem Fachwerksträger AB , Fig. 291, mit horizontaler unterer Gurtung, dessen obere Knotenpunkte in einer Parabel

Fig. 291.



gelegen sind, die Spannung der unteren Gurtung für alle Punkte denselben Betrag U hat, wenn der Träger auf seiner ganzen Länge mit einer gleich- mäßig über die Horizontalprojection verbreiteten Belastung bedeckt ist, und daß die horizontale Componente H der Spannung auch für jeden Punkt der oberen Gurtung denselben Betrag gleich U haben muß. Die Diagonalen sind für diesen vorausgesetzten Belastungszustand keinerlei Anstrengungen ausgesetzt. Es ergab sich nach (3) des gedachten Paragraphen diese Span- nung:

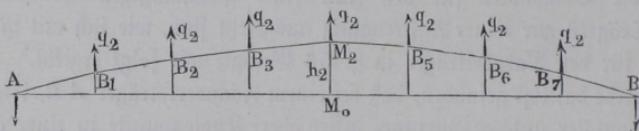
$$U_1 = H_1 = q_1 n \frac{l}{8 h_1}, \dots \dots \dots (1)$$

wenn $l = AB$ die freie Spannweite, $h_1 = M_1M_0$ die Höhe des Parabel- scheitels und q_1 die Belastung jedes Knotenpunktes, d. h. jedes der n Felder bedeutet. Wenn dabei die Belastungen in den Knotenpunkten der unteren Gurtung wirken, so ist jeder Verticalständer einer Zugkraft gleich q_1 aus- gesetzt, während bei einer Belastung der oberen Gurtung auch die Span- nungen der Verticalpfosten gleich Null ausfallen, indem in jedem Punkte

wie A_2 die daselbst angebrachte Belastung q_1 von den beiden verticalen Spannungskomponenten der anstoßenden Gurtungsstücke A_2A_1 und A_2A_3 im Gleichgewichte gehalten wird. Man könnte sich daher vorstellen, daß die einzelnen Stücke der oberen Gurtung wie einzelne, in $A_1, A_2, A_3 \dots$ lose gegen einander gestützte Wölbsteine wirken, wobei der Gegendruck der Widerlager A und B durch die Zugkraft $U = H$ der unteren Gurtung ersetzt wird.

Dieselbe Betrachtung gilt auch für einen Parabelträger AB , Fig. 292, bei welchem die oberen Knotenpunkte durch vertical aufwärts gerichtete

Fig. 292.



Kräfte q_2 gezogen werden, mit dem einzigen Unterschiede, daß in diesem Falle die untere Gurtung mit der constanten Kraft

$$U_2 = H_2 = q_2 n \frac{l}{8 h_2} \dots \dots \dots (2)$$

gedrückt wird, während in der oberen Gurtung nunmehr Zugspannungen eintreten, deren Horizontalcomponente überall gleich H_2 ist. Einen solchen Träger kann man sich wie eine nach der Parabel AM_2B geformte Kette vorstellen, deren Enden A und B durch eine horizontale Spreize AB aus einander gehalten werden, indem auch hier sowohl die Verticalstangen wie die Diagonalen als unwirksam fortgelassen werden können. Der verticale Auflagerdruck in A oder B ist natürlich für Fig. 291 zu $\frac{n q_1}{2}$ abwärts gerichtet und für Fig. 292 gleich $\frac{n q_2}{2}$ aufwärts gerichtet.

Denkt man sich nunmehr die beiden Träger hinsichtlich ihrer Pfeilhöhen und Belastungen so bemessen, daß die Horizontalspannungen H_1 und H_2 gleiche Größe annehmen, d. h. setzt man

$$q_1 n \frac{l}{8 h_1} = q_2 n \frac{l}{8 h_2} \text{ oder } \frac{q_1}{h_1} = \frac{q_2}{h_2} \dots \dots \dots (3)$$

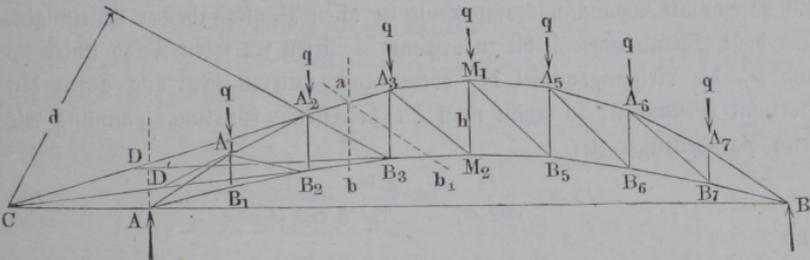
voraus, so kann man die beiden Träger der Figuren 291 und 292 zu einem einzigen von der sichelförmigen Gestalt AM_1BM_2 der Fig. 293 vereinigt denken, indem die gerade Gurtung AB ganz fortgelassen wird, welche gänzlich wirkungslos wird, da die Zugspannung des Bandes AB der Fig. 291 sich mit der gleichen Druckspannung der Spreize in Fig. 292 aufhebt. Man

hat sich dann in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung eine Verticalkraft q_1 abwärts und in jedem unteren Knotenpunkte eine Verticalkraft q_2 aufwärts zu denken. Stellt man sich nun schließlich die unteren Knotenpunkte $B_1, B_2 \dots$ mit den oberen $A_1, A_2 \dots$ durch Verticalstangen verbunden vor, so ist es klar, daß für den Zustand des Gleichgewichtes jeder obere Punkt A dieser Stangen mit einer Kraft

$$q = q_1 - q_2 \dots \dots \dots (4)$$

belastet zu denken ist, indem diese abwärts wirkende Last $q_1 - q_2$ zusammen mit dem abwärts gerichteten Zuge q_2 im unteren Knotenpunkte B dann

Fig. 293.



dem aufwärts gerichteten Zuge q_1 im oberen Knotenpunkte das Gleichgewicht hält.

Den Auflagerdruck und die Reactionen erhält man in A und B dann zu

$$R = \frac{n}{2} (q_1 - q_2) = \frac{nq}{2} \dots \dots \dots (5)$$

Aus (4) und (3) folgt übrigens:

$$q_1 = \frac{q}{1 - \frac{h_2}{h_1}} = q \frac{h_1}{h_1 - h_2} \dots \dots \dots (6)$$

und

$$q_2 = \frac{q}{\frac{h_1}{h_2} - 1} = q \frac{h_2}{h_1 - h_2} \dots \dots \dots (7)$$

Hieraus geht hervor, daß die Diagonalen des parabelförmigen Sichelträgers für den Zustand der vollen Belastung desselben keinerlei Anstrengungen ausgesetzt sind. Ebenso ergibt sich, wie bei dem Parabelträger, daß bei dieser Belastung die Spannungen der Gurtungen überall den größtmöglichen Betrag annehmen, und zwar berechnen sich diese Spannungen wie folgt.

Unter der gemachten Voraussetzung (3), daß die horizontalen Componenten H_1 und H_2 der Spannungen beider Gurtungen gleich groß sind, erhält man aus (1) und (2):

$$q_1 = H \frac{8}{n l} h_1 \text{ und } q_2 = H \frac{8}{n l} h_2,$$

und daher nach (4):

$$q = q_1 - q_2 = H \frac{8}{n l} (h_1 - h_2) = H \frac{8}{n l} h,$$

wenn die Trägerhöhe in der Mitte $h_1 - h_2 = h$ gesetzt wird. Hieraus ergibt sich:

$$H = q n \frac{l}{8 h} \dots \dots \dots (8)$$

als horizontale Spannungscomponente in allen Punkten beider Gurtungen. Um diese Spannungen selbst zu bestimmen, seien im v ten Felde unter α_v und β_v die Neigungswinkel der oberen und unteren Gurtung gegen den Horizont verstanden, so erhält man die betreffende Gurtungsspannung wie beim Parabelträger zu:

$$O_v = \frac{H}{\cos \alpha_v} = \frac{q n}{8} \frac{l}{h \cos \alpha_v} \dots \dots \dots (9)$$

und

$$U_v = \frac{H}{\cos \beta_v} = \frac{q n}{8} \frac{l}{h \cos \beta_v} \dots \dots \dots (10)$$

d. h. also, die Spannungen von irgend zwei Gurtungsstücken verhalten sich wie deren Längen, wenn eine gleiche Weite der einzelnen Felder vorausgesetzt wird.

Wenn der Träger nicht über seine ganze Länge, sondern nur über einen Theil derselben mit der zufälligen Belastung bedeckt ist, welcher Zustand bei Dächern in Folge einseitigen Schnee- und Winddrucks sich einstellen kann, so werden auch in den Diagonalen der Felder Anstrengungen hervorgerufen, und man wird auch hier die größten Beträge desselben zu ermitteln haben, um nach ihnen die Querschnitte der Diagonalen zu bemessen. Diese Ermittlung geschieht in derselben Weise, wie bei dem einfachen Parabelträger. Nimmt man zunächst, wie in Fig. 293, nur einfache nach links ansteigende Diagonalen an, und denkt sich durch irgend ein Feld wie $A_2 A_3$ einen Schnitt ab gelegt, so hat man den Schnittpunkt C der beiden durchschnittenen Gurtungstheile als Momentenmittelpunkt anzunehmen, um aus der dafür aufzustellenden Momentengleichung die Spannung T der Diagonale $A_2 B_3$ zu finden. Dieser Schnittpunkt C je zweier demselben Felde angehöriger Diagonalen liegt auf der Horizontalen AB und zwar außerhalb der Auflagerpunkte, und man findet durch eine ganz gleiche Betrachtung, wie sie in §. 56 für den Parabelträger angestellt worden ist, daß jede Belastung

eines rechts vom Schnitte gelegenen Knotenpunktes in der Diagonale Zugspannungen, dagegen jede Belastung des linken Trägertheiles Druckspannungen erzeugt. Man hat also, um die beiden größten Anstrengungen zu bestimmen, ein Mal den rechten und das andere Mal den linken Trägertheil mit der zufälligen Last bedeckt anzunehmen. Man erhält auf diese Weise für die größte Zug- und Druckspannung der Diagonale gleiche Werthe, da die Spannung zu Null wird, wenn beide Trägertheile gleichmäßig belastet werden. Da die permanente Belastung durch das Eigengewicht ohne Einfluß auf die Spannungen der Diagonalen ist, so genügt es, der Berechnung derselben lediglich die zufällige Belastung durch Schnee- und Winddruck zu Grunde zu legen.

Auch für die in den Verticalstreben durch einseitige Belastung hervorgerufenen Spannungen gilt eine ähnliche Betrachtung. Denkt man sich etwa durch den Stiel $A_3 B_3$ einen Schnitt ab_1 gelegt, so hat man den Schnittpunkt D der beiden Gurtungsglieder $A_2 A_3$ und $B_3 M_2$ als Momentenmittelpunkt anzunehmen. Auch hier ist sogleich zu erkennen, daß jede Belastung eines rechts von dem Schnitte ab_1 gelegenen Knotenpunktes in dem Verticalstiele Druckspannungen, und jede Belastung links Zugspannungen erzeugt, so lange der Schnittpunkt D außerhalb der Verticallinien durch die Auflager A und B fällt. Wenn dagegen ein solcher Schnittpunkt, wie dies z. B. mit demjenigen D' zwischen $A_1 A_2$ und $B_2 B_3$ der Fall ist, rechts von A innerhalb der durch A und B gehenden Verticalen gelegen ist, so erkennt man, daß die Belastungen aller Knotenpunkte in dem Pfosten Zugspannungen erzeugen.

Hiernach lassen sich die größten Spannungen der Zwischenglieder in bekannter Weise bestimmen, und man wird die Lage der Durchschnittpunkte C und D am einfachsten aus der Zeichnung entnehmen können. Diese so ermittelten Werthe gelten für die Anordnung einfacher Diagonalen nach Art der Fig. 293. Will man die Einrichtung so treffen, daß die Diagonalen nur durch Zugkräfte angesprochen werden sollen, so hat man, wie früher mehrfach angegeben, zu jeder der gezeichneten links ansteigenden Diagonalen noch eine rechts ansteigende Diagonale hinzuzufügen, welche der Kürze wegen hier als Gegendiagonale bezeichnet werden möge. Hierdurch erreicht man, daß die Diagonalen überall nur gezogen werden, und zwar wird für die Gegendiagonale in irgend einem Felde diejenige Spannungszahl maßgebend sein, welche nach der oben für einfache Diagonalen angegebenen Ermittlung derjenigen Diagonale zukommt, die in dem zu dem betrachteten Felde symmetrisch gelegenen Felde angebracht ist. Dies erkennt man leicht aus einer Vergleichung der Figuren 294 und 295 (a. f. S.). Während nämlich bei der Wirkung der links ansteigenden Diagonalen in Fig. 294, z. B. die Diagonale $A_5 B_6$ des sechsten Feldes ihre größte Zugspannung bei einer Be-

Belastung der Knotenpunkte A_3, M, A_5, A_6, A_7 zu P_3 , und für den Stiel A_3B_3 , unter derselben Voraussetzung bezüglich der activen Diagonalen, Fig. 297, den größeren Werth P_5 , so hat man diesen Werth P_5 auch für A_3B_3 anzunehmen. Denn wenn man für diesen letztgedachten Pfosten A_3B_3 unter der Annahme, daß die rechts ansteigenden Diagonalen, Fig. 298, zur

Fig. 296.

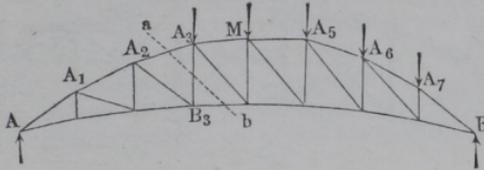


Fig. 297.

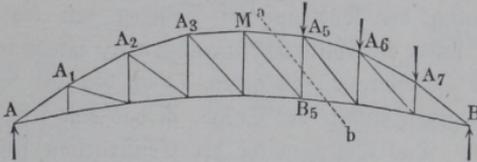
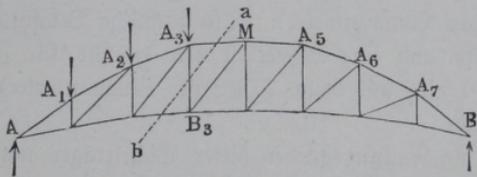


Fig. 298.



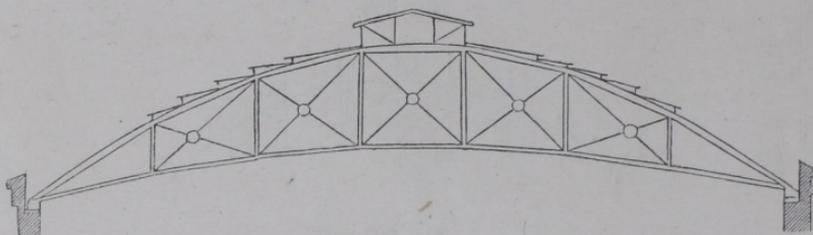
Wirkung kommen, die größte Pressung entsprechend einer Belastung der Knotenpunkte A_1, A_2, A_3 links vom Schnitte ab ermittelt, so gelangt man wegen der übereinstimmenden Belastungszustände zu demselben Werthe P_5 , welcher nach Fig. 297 für A_3B_3 gefunden wurde. Andererseits hätte man den für A_3B_3 gefundenen Werth P_3 auch für A_3B_3 zu Grunde zu legen, für den Fall, daß P_3 größer als P_5 sich ergeben würde. Ein Beispiel wird den Gang der Ermittlung näher erläutern.

In Fig. 299 (a. f. S.) ist ein Sichelträger dargestellt, wie solche über der Empfangshalle des Berliner Bahnhofes der Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn *) aufgestellt sind. Die Spannweite dieser Binder beträgt $120' = 37,66$ m und es sind die Pfeilhöhen der Parabeln, in denen die Knotenpunkte der oberen und unteren Gurtung angeordnet sind, zu $\frac{1}{5}$ bzw. $\frac{1}{15}$ der Spannweite angenommen. Von den 54 in $12' = 3,75$ m

*) Erbkam, Zeitschr. f. Bauwesen, 1870.

von einander entfernten Bindern ist jeder durch sechs Verticalpfosten in sieben Felder getheilt, von welchen die beiden äußeren, je $20' = 6,276$ m weiten, mit Zinkblech, die fünf mittleren Felder von je $5,02$ m Weite mit Glas abgedeckt sind. Die oberen Gurtungstheile sind, da sie wegen der

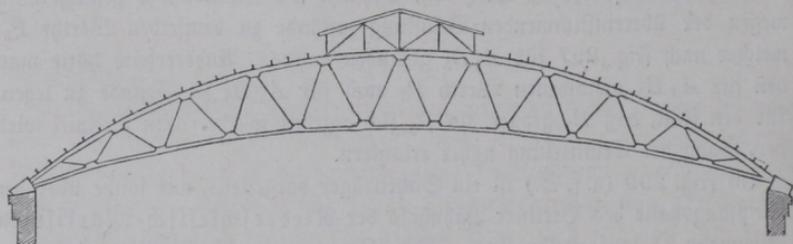
Fig. 299.



großen Entfernung der Knotenpunkte zwischen den letzteren noch durch Pfetten belastet sind, als Gitterbalken construirt, um ihnen die genügende Festigkeit gegen Durchbiegung zu geben. Von den $50' = 15,69$ m über dem Perron gelegenen Enden der Träger ist das eine fest, das andere auf Rollen gelagert. Das Eigengewicht der Construction setzt sich zusammen aus dem Gewichte der Eisentheile mit $12,2$ Pfd. pro Quadratfuß (62 kg pro Quadratmeter) und dem der Glas und Zinkdecke mit 4 Pfd. pro Quadratfuß ($20,3$ kg pro Quadratmeter). Als zufällige Belastung ist ein Winddruck von 6 Pfd. und eine Schneelast von 14 Pfd. für jeden Quadratfuß Grundfläche ($30,5$ kg und bezw. 71 kg pro Quadratmeter) der Berechnung zu Grunde gelegt.

Man kann die Füllungsglieder dieser Sichelträger natürlich auch nach einem anderen Systeme anordnen, so z. B. ist bei dem in Fig. 300 darge-

Fig. 300.



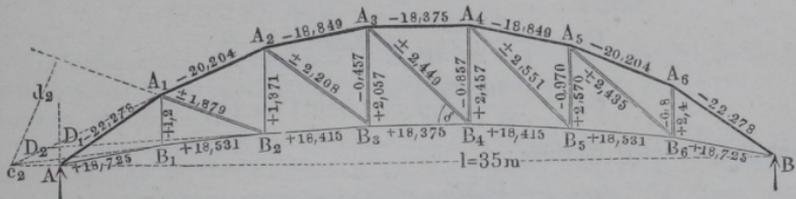
stellten Binder über der Empfangshalle des Görlitzer Bahnhofes zu Berlin*) ein System von Zwischengliedern nach Art des Reville'schen gewählt. Für diese Träger, deren Spannweite $121' = 38$ m beträgt, hat

*) Erbkam, Zeitschr. f. Bauwesen, 1872.

die Obergurtung die Form eines Kreisbogens von $95,5' = 30$ m Halbmesser erhalten. Die Berechnung derartiger Sichelträger bietet nach dem Vorstehenden und mit Berücksichtigung des über die Neville'schen Träger in §. 55 Gesagten keine Schwierigkeiten dar.

Beispiel. Als Beispiel sei ein Binder von 35 m Spannweite gewählt, welcher nach Art der über der Empfangshalle des Berliner Bahnhofes der Niederschlesischen Bahn aufgestellten in sieben gleiche Felder von 5 m Breite getheilt sein mag. Für die Parabeln der Gurtungen sollen bezw. 7 m und 2 m Pfeilhöhe gewählt werden, und es möge für jeden Knotenpunkt die permanente Belastung zu $p = 1000$ kg = 1 t, die zufällige Belastung durch Schnee und Wind zu $k = 2$ t, also die Gesamtbelastung zu $q = 3$ t angenommen werden.

Fig. 301.



Zur Verzeichnung der parabolischen Gurtungen erhält man zunächst die Höhen der Knotenpunkte über der Horizontalen AB , Fig. 301, von der Mitte aus beiderseits zu

$$7 \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) = 6,857 \text{ m für } A_3 \text{ und } A_4,$$

$$7 \left(1 - \frac{9}{49}\right) = 5,714 \text{ m für } A_2 \text{ und } A_5,$$

$$7 \left(1 - \frac{25}{49}\right) = 3,429 \text{ m für } A_1 \text{ und } A_6,$$

$$2 \left(1 - \frac{1}{49}\right) = 1,959 \text{ m für } B_3 \text{ und } B_4,$$

$$2 \left(1 - \frac{9}{49}\right) = 1,633 \text{ m für } B_2 \text{ und } B_5,$$

$$2 \left(1 - \frac{25}{49}\right) = 0,979 \text{ m für } B_1 \text{ und } B_6,$$

Demgemäß ergeben sich ferner die Neigungswinkel α und β der Gurtungsstücke gegen den Horizont durch

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3,429}{5} = 0,6858; \quad \alpha_1 = 34^\circ 26' \text{ für } A A_1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{5,714 - 3,429}{5} = 0,4571; \quad \alpha_2 = 24^\circ 34' \text{ für } A_1 A_2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{6,857 - 5,714}{5} = 0,2286; \quad \alpha_3 = 12^\circ 52' \text{ für } A_2 A_3,$$

Ebenso erhält man für die untere Gurtung die entsprechenden Winkel

$$\beta_1 = 11^\circ 5' \text{ für } AB_1,$$

$$\beta_2 = 7^\circ 26' \text{ für } B_1B_2 \text{ und}$$

$$\beta_3 = 3^\circ 44' \text{ für } B_2B_3.$$

Für die Gurtungen des Mittelfeldes ist

$$\alpha_4 = \beta_4 = 0.$$

Zunächst findet sich die größte Horizontalspannung der Gurtungen nach (8) zu

$$H = O_4 = U_4 = q n \frac{l}{8(h_1 - h_2)} = 3.7 \frac{35}{8(7-2)} = 18,375 \text{ t,}$$

und daher mit den oben ermittelten Neigungswinkeln der Gurtungen die Spannungen der letzteren:

$$O_1 = \frac{18,375}{\cos 34^\circ 26'} = 22,278 \text{ t} = O_7,$$

$$O_2 = \frac{18,375}{\cos 24^\circ 34'} = 20,204 \text{ t} = O_6,$$

$$O_3 = \frac{18,375}{\cos 12^\circ 52'} = 18,849 \text{ t} = O_5,$$

und für die untere Gurtung:

$$U_1 = \frac{18,375}{\cos 11^\circ 5'} = 18,725 \text{ t} = U_7,$$

$$U_2 = \frac{18,375}{\cos 7^\circ 26'} = 18,531 \text{ t} = U_6,$$

$$U_3 = \frac{18,375}{\cos 3^\circ 44'} = 18,415 \text{ t} = U_5.$$

Um die größten Spannungen der Zwischenglieder zu bestimmen, seien zunächst einfache, nach links ansteigende Diagonalen angenommen. Für den Schnittpunkt C_2 der Gurtungen des zweiten Feldes findet man durch Rechnung oder nach der Zeichnung den Abstand von der Stütze A zu $c_2 = 2,5 \text{ m}$, und denjenigen von der Diagonale A_1B_2 zu $d_2 = 5,7 \text{ m}$. Daher erhält man für diese Diagonale die Spannung T_2 , wenn man die Knotenpunkte A_2, A_3, A_4, A_5 und A_6 mit je $k = 2 \text{ t}$ belastet denkt, wobei das Eigengewicht als ohne Einfluß vernachlässigt werden kann, aus:

$$2 \frac{1+2+3+4+5}{7} 2,5 - T_2 5,7 = 0 \text{ zu } T_2 = + 1,879 \text{ t.}$$

Ebenso erhält man für eine Belastung nur des ersten Knotenpunktes A_1 :

$$2 \frac{6}{7} 2,5 - 2 \cdot (5 + 2,5) - T_2 5,7 = 0 \text{ zu } T_2 = - 1,879 \text{ t.}$$

In gleicher Weise bestimmen sich die Spannungen in den Diagonalen der übrigen Felder mit Ausnahme des mittleren, und es wird genügen, für diese Bestimmung einfach die Ansätze anzugeben. Es ist für die

Diagonale A_2B_3 : $c_3 = 15 \text{ m}$, $d_3 = 19,4 \text{ m}$:

$$2 \frac{1+2+3+4}{7} 15 = T_3 19,4; \quad T_3 = \pm 2,208 \text{ t.}$$

Diagonale $A_4 B_5$: $c_4 = 15 \text{ m}$, $d_4 = 16,8 \text{ m}$:

$$2 \frac{1+2}{7} (35+15) = T_5 \cdot 16,8; \quad T_5 = \pm 2,551 \text{ t.}$$

Diagonale $A_5 B_6$: $c_5 = 2,5 \text{ m}$, $d_5 = 4,4 \text{ m}$:

$$2 \frac{1}{7} (35+2,5) = T_6 \cdot 4,4; \quad T_6 = \pm 2,435 \text{ t.}$$

Für das mittlere Feld, für welches der Schnittpunkt der Gurtungen ins Unendliche rückt, setzt man wieder die Verticalcomponente der Diagonalspannung $T_4 \sin \delta$ gleich der verticalen Scherkraft in diesem Felde bei einer Belastung des halben Trägers. Der Neigungswinkel δ folgt aus:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A_3 B_3}{5} = \frac{6,8571 - 1,9592}{5} = 0,9796 \text{ zu } \delta = 44^\circ 25',$$

daher erhält man aus:

$$T_4 \sin 44^\circ 25' = 2 \frac{1+2+3}{7}; \quad T_4 = \pm 2,449 \text{ t.}$$

Die Bestimmung der Spannkraften in den Verticalpfosten geschieht gleichfalls unter der Voraussetzung einfacher Diagonalen, welche auf Zug und Druck wirksam sind, wie folgt:

Der Durchschnittspunkt D_1 zwischen den Gurtungen AA_1 und $B_1 B_2$ fällt zwischen A und B und hat von A den horizontalen Abstand $b_1 = 0,588 \text{ m}$, wie aus der Zeichnung oder durch Rechnung gefunden wird. In Folge dessen erzeugen alle Belastungen Zugspannungen, so daß man $P_{1\max}$ erhält, wenn der Träger voll belastet ist, während für den leeren Träger $P_{1\min}$ eintritt. Man hat daher aus:

$$\frac{6 \cdot 3}{2} 0,588 - P_{1\max} (5 - 0,588) = 0; \quad P_{1\max} = +1,199 = \text{rot } 1,2 \text{ t Zug}$$

und

$$\frac{6 \cdot 1}{2} 0,588 - P_{1\min} (5 - 0,588) = 0; \quad P_{1\min} = +0,4 \text{ t Zug.}$$

Für die übrigen Pfosten fallen die betreffenden Durchschnitte D der Gurtungen außerhalb der Stützen und man findet die äußersten Anstrengungen der Pfosten nach dem Vorstehenden durch die folgenden Ansätze. Es ist für $A_2 B_2$, $b_2 = 0,416 \text{ m}$ (links von A). Daher wird für eine Belastung von A_2 bis A_6 :

$$\left(3 + 2 \frac{1+2+3+4+5}{7}\right) 0,416 - 1 \cdot 5,416 + P_{2\min} 10,416 = 0;$$

$$P_{2\min} = +0,229 \text{ t Zug,}$$

während man für eine Belastung von A_1 den Werth $P_{2\max}$ aus:

$$\left(3 + 2 \frac{6}{7}\right) 0,416 - 3 \cdot 5,416 + P_{2\max} 10,416 = 0;$$

$$P_{2\max} = +1,371 \text{ t Zug}$$

erhält. Man hat ebenso für $A_3 B_3$ den Abstand des Schnittpunktes von A , $b_3 = 6,429$, daher:

$$\left(3 + 2 \frac{1+2+3+4}{7}\right) 6,429 - 1 (11,429 + 16,429) + P_{3\min} 21,429 = 0;$$

$$P_{3\min} = -0,457 \text{ t Druck,}$$

$$\left(3 + 2 \frac{6+5}{7}\right) 6,429 - 3(11,429 + 16,429) + P_{3,max} 21,429 = 0;$$

$$P_{3,max} = + 2,057 \text{ t Zug.}$$

$A_4 B_4$; $b_4 = 55 \text{ m}$ links von A :

$$\left(3 + 2 \frac{1+2+3}{7}\right) 55 - 1(60 + 65 + 70) + P_{4,min} 75 = 0;$$

$$P_{4,min} = - 0,857 \text{ t Druck,}$$

$$\left(3 + 2 \frac{6+5+4}{7}\right) 55 - 3(60 + 65 + 70) + P_{4,max} 75 = 0;$$

$$P_{4,max} = + 2,457 \text{ t Zug.}$$

Für $A_5 B_5$ ist $b_5 = 66,67$ rechts von A , daher:

$$\left(3 + 2 \frac{1+2}{7}\right) 66,67 - 1(61,67 + 56,67 + 51,67 + 46,67) + P_{5,min} 41,67 = 0;$$

$$P_{5,min} = - 0,970 \text{ t Druck,}$$

$$\left(3 + 2 \frac{6+5+4+3}{7}\right) 66,67 - 3(61,67 + 56,67 + 51,67 + 46,67) + P_{5,max} 41,67 = 0;$$

$$P_{5,max} = + 2,570 \text{ t Zug.}$$

$A_6 B_6$; $b_6 = 39,375$ rechts von A :

$$\left(3 + 2 \frac{1}{7}\right) 39,375 - 1(34,375 + 29,375 + 24,375 + 19,375 + 14,375) + P_{6,min} 9,375 = 0;$$

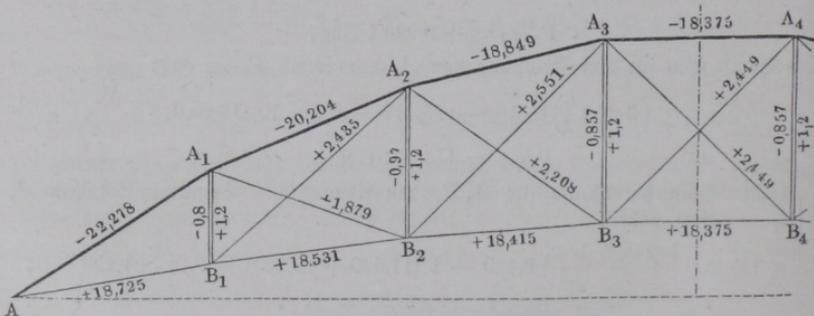
$$P_{6,min} = - 0,8 \text{ t Druck,}$$

$$\left(3 + 2 \frac{6+5+4+3+2}{7}\right) 39,375 - 3(34,375 + 29,375 + 24,375 + 19,375 + 14,375) + P_{6,max} 9,375 = 0;$$

$$P_{6,max} = + 2,4 \text{ t Zug.}$$

Die so gefundenen Spannungszahlen, welche in Fig. 301 eingetragen wurden, gelten für die Anordnung einfacher gegen Druck und Zug wirksamer Diagonalen. Wendet man jedoch nur zugfähige Kreuzbänder an, so behalten die gefundenen Spannungen überall für die links ansteigenden Diagonalen ihre Gültigkeit, wäh-

Fig. 302.



rend für jedes rechts ansteigende Diagonalband nach dem Obigen die Spannungszahl gilt, welche für das symmetrisch gelegene Feld berechnet wurde. Für diesen Fall sind ferner die Verticalstiele der größten Zugspannung bei der vollen Trägerbelastung ausgesetzt, und diese größte Zugspannung berechnet sich nach (7) zu

$$q_2 = q \frac{h_2}{h_1 - h_2} = 3 \frac{2}{7 - 2} = 1,2 t.$$

Als größte Druckspannung hat man für jeden Stiel den absolut größten Werth von denjenigen Beträgen anzunehmen, welche für diesen und den symmetrischen Stiel als P_{min} sich ergaben, z. B. hat man für $A_3 B_3$ und für $A_4 B_4$ die größte Druckkraft zu 0,857 t, und nicht, wie bei einfachen Diagonalen für $A_3 B_3$ sich fand, zu 0,457 t anzunehmen. Dementsprechend sind die für gekreuzte Diagonalen geltenden Spannungszahlen in die Fig. 302 eingetragen.

Häng- und Sprengwerke. In gleicher Weise wie die Fachwerke §. 62.

hat man auch die bei Bauausführungen häufigen sogenannten Häng- und Sprengwerke zu beurtheilen. Man versteht darunter im Allgemeinen solche Constructionen, welche dazu dienen, Balken von größerer Länge in einzelnen Punkten zwischen den Auflagern durch geeignet angeordnete Zwischenglieder derartig zu unterstützen, daß die Last der unterstützten Punkte durch eben diese Zwischenglieder nach den festen Auflagern hin übertragen wird. Wenn hierbei der Balken von oben unterstützt wird, so heißt die Construction ein Hängwerk, während vermittelt der Sprengwerke die Unterstützung von unten bewirkt wird. Bei allen Häng- und Sprengwerken treten als charakteristische Zwischenglieder geneigte Stäbe auf, welche ebensowohl als Druckstreben wie als Zugbänder wirken können. Verticale Pfosten werden hauptsächlich bei den Hängwerken als sogenannte Hängesäulen in Anwendung gebracht, kommen indessen auch bei einzelnen Sprengwerken als Druckstiele vor. Ebenso finden sich horizontale Glieder sowohl als Zuganker wie als gedrückte Spannriegel. Sehr häufig aber ersetzt man, insbesondere bei den Sprengwerken, die Wirkung solcher horizontalen Stangen durch die von festen Widerlagsmauern ausgeübten Reactionen. Je nachdem die Unterstützung des Balkens in nur einem oder in mehreren Punkten vorgenommen wird, werden wohl einfache und zusammengesetzte Häng- und Sprengwerke unterschieden.

Ein einfaches Hängwerk, ein sogenannter Hängebock, ist durch Fig. 303 (a. f. S.) dargestellt. Der in AA auf Stützen ruhende Balken wird in der Mitte mittelst des Hängeeisens DE durch die Hängesäule BC getragen, welche letztere den auf sie ausgeübten Zug Q auf die beiden Streben BA überträgt. In jeder dieser Streben wird, wie aus der Zerlegung der Kraft Q sich ergibt, eine Druckspannung

$$S = \frac{1}{2} \frac{Q}{\sin \alpha} \dots \dots \dots (1)$$

hervorgerufen, welche an jedem Ende *A* einen Horizontalschub

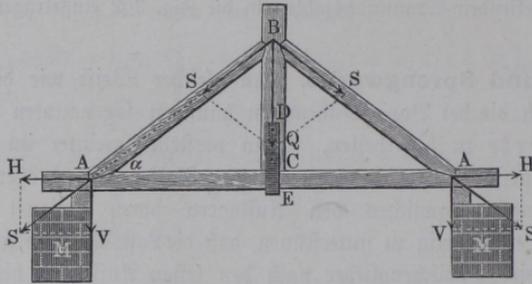
$$H = S \cos \alpha = \frac{1}{2} Q \cotg \alpha (2)$$

und einen Verticaldruck

$$V = S \sin \alpha = \frac{Q}{2} (3)$$

erzeugt. Für *Q* hat man außer dem Eigengewichte der Hängesäule *BE* und der halben Streben *BA* und *BA* noch die etwa direct in *C* angebrachte

Fig. 303.

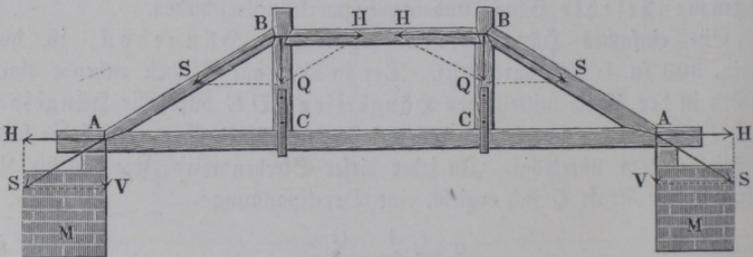


Belastung im vollen Betrage anzunehmen, während man von dem Eigengewichte des Balkens *AA* und der gleichmäßig darüber verbreiteten Last $\frac{3}{8}$ als in *C* wirkend zu denken hat, gemäß den Verhältnissen, welche für einen auf drei gleich hohen Stützen ruhenden Balken gelten (s. §. 38). Der Balken *AA* wird außer auf Biegung noch durch die Kraft *H* auf Zug beansprucht.

Bei einer größeren Länge des Balkens kann derselbe durch das Hängwerk, Fig. 304, in zwei Zwischenpunkten *C* und *C* gestützt werden, wobei der zwischen die Köpfe der beiden Streben eingesetzte horizontale Spannriegel *BB* der Druckkraft

$$H = Q \cotg \alpha (4)$$

Fig. 304.



zu widerstehen hat. Eine ebenso große Horizontalkraft spannt hierbei den Balken und sucht die Fasern an den Enden abzuschleeren. Von dem Eigengewichte des Balkens und der auf demselben gleichmäßig vertheilten Belastung hat man, wie bei einem Balken auf vier gleich weit entfernten Stützen, $\frac{3}{8}$ des ganzen Betrages in jedem Punkte *C* und $\frac{1}{8}$ je in *A* wirksam zu denken (s. §. 39).

In welcher Weise man zusammengesetzte Hängwerke nach Art der Figuren 305 und 306 zu berechnen hat, wird nach dem bisher Angeführten deutlich

Fig. 305.

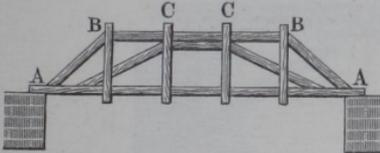
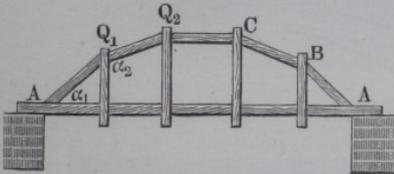


Fig. 306.



sein. In beiden Fällen läßt sich bei gleicher Entfernung der Stützpunkte annehmen, daß von der ganzen gleichmäßig über den Balken ausgebreiteten Belastung jede der äußeren Hängsäulen $\frac{9}{40}$, jede der inneren $\frac{8}{40}$, und jeder Auflagerpunkt $\frac{3}{40}$ zu tragen hat.

Daß bei der Construction der Fig. 306 die Neigungen der Streben nicht willkürlich sind, sondern in der Weise mit einander in Beziehung stehen, daß in allen Punkten der gleiche Horizontalschub *H* auftritt, wurde bereits in

§. 59 gelegentlich der Sparren angeführt. Bezeichnet man mit Q_1 und Q_2 die Belastungen der Stiele *B* und *C*, und sind α_1 und α_2 die Neigungswinkel der Streben *AB* und *BC* gegen den Horizont, so gilt daher die Gleichung

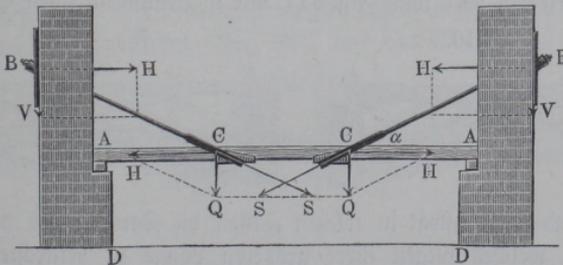
$$H = Q_2 \cotg \alpha_2 = (Q_1 + Q_2) \cotg \alpha_1$$

oder

$$\frac{\tg \alpha_1}{\tg \alpha_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} \dots \dots \dots (5)$$

Ein Hängwerk, bei welchem die Streben durch Zugkräfte in Anspruch genommen sind, stellt Fig. 307 vor. Hier wird der Balken nur in seinem

Fig. 307.



mittleren Theile CC durch die Kraft $H = Q \cotg \alpha$ gezogen, während die Widerlagsmauern in B den Zugspannungen der Streben $S = \frac{Q}{\sin \alpha}$ widerstehen müssen. Es bedarf nur der Erwähnung, daß für die Stabilität dieser Mauern gegen Rippen und Gleiten die im zweiten Capitel angegebenen betreffenden Bemerkungen volle Gültigkeit haben.

Ein einfaches Sprengwerk ist durch Fig. 308 und ein doppeltes durch Fig. 309 dargestellt. Für die Vertheilung der Kräfte gelten genau dieselben

Fig. 308.

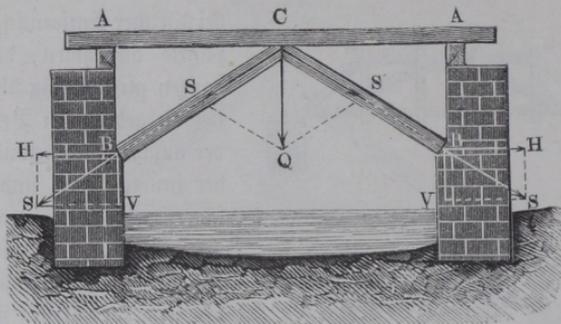
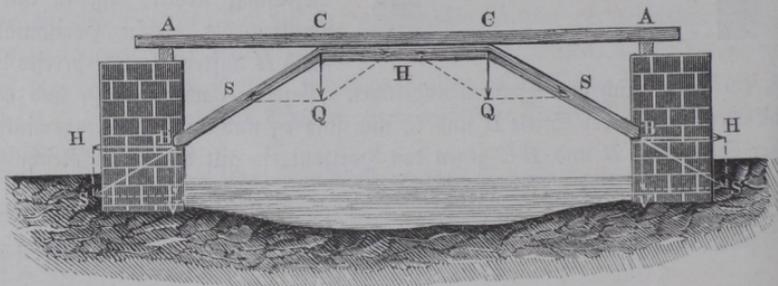


Fig. 309.



Regeln wie für die Hängwerke, Fig. 303 und Fig. 304. Bei einer größeren Anzahl zu unterstützender Punkte kann man die Construction nach Fig. 310 mit Spannriegeln oder nach Fig. 311 mit ungleichschenkeligen Sprengwerken

Fig. 310.

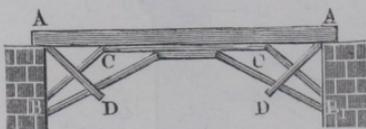
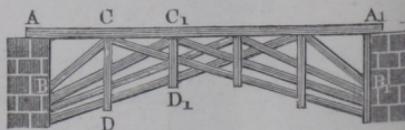


Fig. 311.



wählen, und man pflegt in solchen Fällen die Streben vor dem seitlichen Ausbiegen, welches wegen ihrer größeren Länge zu befürchten ist, durch

Zangen D zu sichern. Bei ungleichen Neigungen α_1 und α_2 der Streben gegen den Horizont, Fig. 312, findet man die Spannkraften S_1 und S_2 in den Streben nach der Figur ohne Weiteres aus:

$$S_1 : S_2 : Q = \sin (90^\circ - \alpha_2) : \sin (90^\circ - \alpha_1) : \sin (\alpha_1 + \alpha_2)$$

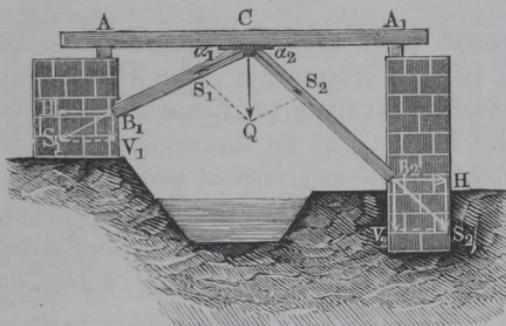
zu

$$S_1 = Q \frac{\cos \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \dots \dots \dots (6)$$

und

$$S_2 = Q \frac{\cos \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}, \dots \dots \dots (7)$$

Fig. 312.



während der Horizontalschub für jede Strebe und für jedes Widerlager durch

$$H = S_1 \cos \alpha_1 = S_2 \cos \alpha_2 = Q \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{Q}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \quad (8)$$

ausgedrückt ist. Für die Verticalkräfte in B_1 und B_2 hat man:

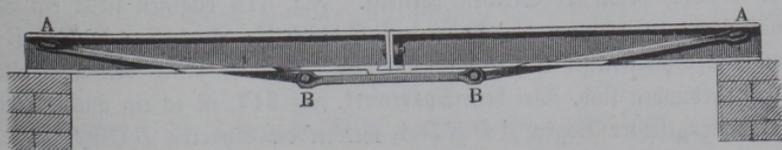
$$V_1 = H \operatorname{tg} \alpha_1 = Q \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \dots \dots \dots (9)$$

und

$$V_2 = H \operatorname{tg} \alpha_2 = Q \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \dots \dots \dots (10)$$

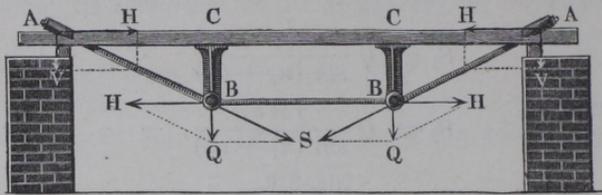
Man kann auch Sprengwerke, d. h. Constructions, welche den Balken von unten unterstützen, so anordnen, daß die Streben gezogen werden, in welchem Falle man meistens den Horizontalzug der Streben nicht durch Widerlagsmauern, sondern durch die rückwirkende Festigkeit des gesprengten Balkens aufnimmt. Als Beispiel hierfür hat man den gesprengten oder armirten gußeisernen Balken, Fig. 313, und das Sprengwerk mit hölzernen

Fig. 313.



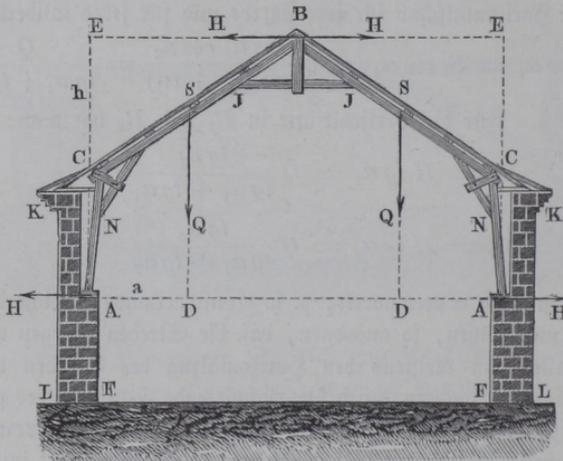
Balken, Fig. 314. Einen Horizontalschub auf die Unterstüzungsmauern üben diese Constructions natürlich nicht aus.

Fig. 314.



Die Sprengwerke finden auch wohl Anwendung zur Construction von Dachgesperren, besonders hölzernen, in solchen Fällen, wo man einen horizontalen Balken oder Durchzug zur Aufnahme des Sparrenschubes nicht anbringen will. Alsdann muß der Sparrenschub durch die Seiten- oder Stützmauern des Gebäudes aufgenommen werden. In den Figuren 315, 316 und 317 sind drei solche Gespärre vor Augen geführt. Hierbei sind in Fig. 315 die beiden oberhalb durch einen Kehlbalken verbundenen Sparren BC durch die schrägen Stiele oder Streben AC gestützt, und in den Ecken

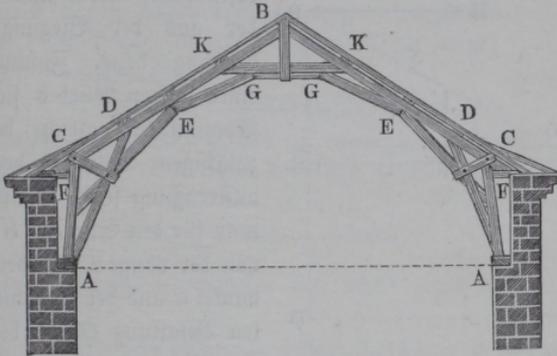
Fig. 315.



bei C durch besondere Streben versteift. Fig. 316 dagegen stellt ein Gespärre vor, bei welchem die Sparren BC durch die Streben AD, FE, EG und den Spannriegel GG unterstüzt und gleichfalls durch den Kehlbalken KK verbunden sind. Bei dem Sparrwerk, Fig. 317, ist es ein aus Streben zusammengesetzter Bogen $ADEDA$, welcher die Sparren BC stützt.

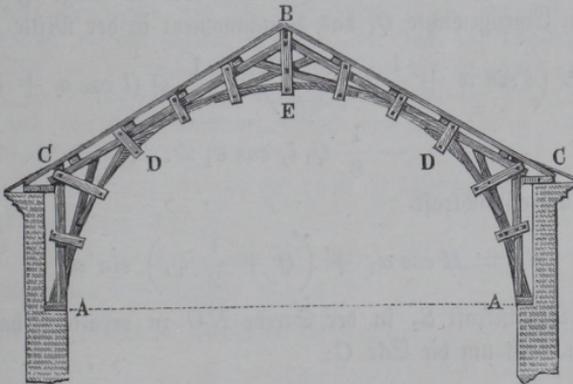
Die Ermittlung des Horizontalschubes dieser Sprengwerke ist in aller Strenge nur unter Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse der einzelnen Glieder möglich, und es möge dieserhalb auf das im Folgenden über den elastischen Bogen Angegebene verwiesen werden. Durch die Verbindung der

Fig. 316.



Sparren durch Zangen, Bänder u. läßt sich der auf die Mauern ausgeübte Horizontalschub zum Theil herabziehen, indem diese Verbindungstheile einen entsprechenden Theil der Schubkraft aufzunehmen vermögen, ebenso wie bei der Anwendung eines Durchzuges dieser gewissermaßen wie die untere Gurttung eines Fachwerkträgers den ganzen Horizontalzug aufnimmt, so daß die Stützmauern nur den verticalen Druck auszuhalten haben. Annähernd

Fig. 317.



kann man bei Gespärren, wie Fig. 315, wenn man von der Wirkung des Kehlbalckens *JJ* absteht, den Horizontalschub *H* im Scheitel *B* und den Fußpunkten *A* gleich

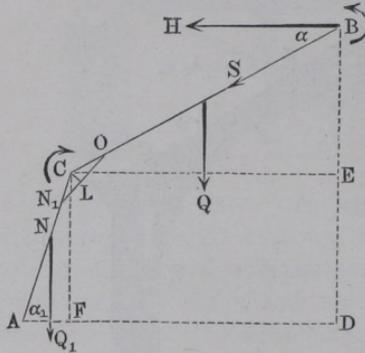
$$H = Q \frac{a}{h}$$

setzen, unter *Q* die gesammte Belastung eines Sparrens *BC*, unter *h* die

Höhe AE und unter a den horizontalen Abstand des Schwerpunktes S von dem Fuße A verstanden.

Die Dimensionen der einzelnen Theile des Gespärres sind nach den

Fig. 318.



Regeln der zusammengesetzten Festigkeit (s. Thl. I, Abschn. IV, Cap. 5) zu bestimmen, indem man die Summe der aus der Biegung und Ausdehnung bezw. Zusammendrückung eines solchen Gliedes sich ergebenden Spannungen gleich dem höchsten zulässigen Betrage der Materialanstrengung setzt. Beispielsweise hat man für den Sparren BC , Fig. 318, von der Länge l und dem Neigungswinkel α und der gleichmäßig vertheilten Belastung Q für die Mitte das auf Biegung wirkende Moment

$$M = \frac{1}{2} H l \sin \alpha - \frac{1}{8} Q l \cos \alpha, \dots (11)$$

und die auf Zusammendrücken wirkende Kraft ebenfalls in der Mitte:

$$S = H \cos \alpha + \frac{1}{2} Q \sin \alpha \dots (12)$$

In gleicher Weise ist für die Strebe AC von der Länge l_1 , der Neigung α_1 und dem Eigengewichte Q_1 das Bruchmoment in der Mitte

$$M_1 = H \left(l \sin \alpha + \frac{1}{2} l_1 \sin \alpha_1 \right) - \frac{1}{2} Q (l \cos \alpha + l_1 \cos \alpha_1) - \frac{1}{8} Q_1 l_1 \cos \alpha_1 \dots (13)$$

und die Compressionskraft

$$S_1 = H \cos \alpha_1 + \left(Q + \frac{1}{2} Q_1 \right) \sin \alpha_1 \dots (14)$$

Um die Spannkraft S_2 in der Strebe NO zu erhalten, hat man das Drehungsmoment um die Ecke C :

$$M_2 = H l \sin \alpha - \frac{1}{2} Q l \cos \alpha, \dots (15)$$

woraus man

$$S_2 = \frac{M_2}{d} \dots (16)$$

erhält, wenn d den normalen Abstand des Eckpunktes C von NO bedeutet.

Graphisch lassen sich aus den bekannten Belastungen der Knotenpunkte von Sprengwerken immer durch einfache Zerlegung der Kräfte die in den einzelnen Gliedern der Sprengwerke auftretenden Anstrengungen ermitteln, worüber im folgenden Paragraphen gelegentlich der Behandlung der Lehrgerüste ein Näheres angegeben werden soll.

Beispiele: 1. Wenn das doppelte Hängwerk in Fig. 304 eine 20 m lange und 4 m breite Brücke zu tragen bestimmt ist, und angenommen wird, daß jeder Quadratmeter dieser Brücke sammt Belastung 300 kg wiegt, so ergibt sich das Gewicht der ganzen Brücke zu

$$Q = 20 \cdot 4 \cdot 300 = 24\,000 \text{ kg,}$$

wovon die Hälfte mit 12 000 kg von je einem der beiderseits angeordneten Hängwerke zu tragen ist. Von dieser Belastung entfällt auf jede Hängsäule der Betrag von

$$Q = \frac{3}{8} 12\,000 = 4\,500 \text{ kg,}$$

welcher bei einer Neigung der Streben von $22,5^\circ$ gegen den Horizont, einen Horizontalschub

$$H = 4\,500 \cotg 22\frac{1}{2}^\circ = 4\,500 \cdot 2,4142 = 10\,864 \text{ kg}$$

und eine Strebenkraft

$$S = \frac{4\,500}{\sin 22\frac{1}{2}^\circ} = \frac{4\,500}{0,3827} = 11\,758 \text{ kg}$$

erzeugt. Wenn man wegen der größeren Länge der Streben und Spannriegel in denselben eine Spannung von nur 0,2 kg pro Quadratmillimeter zulassen will, so hat man dem Spannriegel einen Querschnitt von 543,20 qcm und jeder Strebe einen solchen von 587,9 qcm zu geben, was bei 20 cm Breite der Hölzer bzw. 27 cm und 30 cm Höhe derselben ergibt.

2. Bei einem Ziegeldache, wie Fig. 318, sei die Länge des oberen Sparrens $BC = l = 8 \text{ m}$, die des unteren $AC = l_1 = 5 \text{ m}$, der Neigungswinkel des ersteren $\alpha = 30^\circ$, der des letzteren $\alpha_1 = 75^\circ$ gegen den Horizont. Nimmt man incl. Schnee- und Winddruck eine Belastung von 250 kg pro Quadratmeter Grundfläche und eine Entfernung der Binder von 2 m an, so erhält man die Belastung des oberen Sparrens BC zu

$$Q = 2 \cdot 8 \cdot \cos 30^\circ \cdot 250 = 3464 \text{ kg,}$$

und diejenige des unteren AB zu

$$Q_1 = 2 \cdot 5 \cdot \cos 75^\circ \cdot 250 = 647 \text{ kg.}$$

Man erhält daher den Sparrenschub H aus

$$H(8 \sin 30^\circ + 5 \sin 75^\circ) = 3464(5 \cos 75^\circ + 4 \cos 30^\circ) + 647 \cdot 2,5 \cdot \cos 75^\circ$$

zu

$$H = \frac{16481,7 + 418,6}{4 + 4,83} = 1915 \text{ kg.}$$

Für die Mitte S des Sparrens CB hat man daher nach (11) das Biegemoment:

$$M = \frac{1}{2} 1915 \cdot 8 \cdot 0,5 - \frac{1}{8} 3464 \cdot 8 \cdot 0,8660 = 3930 - 3000 = 930 \text{ mkg,}$$

und die Spannung nach (12):

$$S = 1915 \cdot 0,8660 + \frac{1}{2} 3464 \cdot 0,5 = 1658 + 866 = 2524 \text{ kg.}$$

Zu gleicher Weise erhält man für den unteren Sparren AC in der Mitte nach (13) und (14):

$$M_1 = 1915 \left(8 \cdot 0,5 + \frac{5}{2} 0,9659 \right) - \frac{1}{2} 3464 (8 \cdot 0,8660 + 5 \cdot 0,2588) \\ - \frac{1}{8} 647 \cdot 5 \cdot 0,2588 = 12\ 285 - 14\ 240 - 105 = -2060 \text{ mkg}$$

und

$$S_1 = 1915 \cdot 0,2588 + \left(3464 + \frac{1}{2} 647 \right) 0,9659 = 496 + 3659 = 4155 \text{ kg.}$$

Für die Ecke C endlich hat man nach (15) das Biegemoment:

$$M_2 = 1915 \cdot 8 \cdot 0,5 - \frac{1}{2} 3464 \cdot 8 \cdot 0,8660 = 7660 - 12\ 000 = -4340 \text{ mkg,}$$

so daß, bei einem Abstände der Strebe NO von der Ecke C gleich $0,5$ m, die Druckspannung dieser Strebe zu

$$S_2 = \frac{4340}{0,5} = 8680 \text{ kg}$$

folgt. Das negative Vorzeichen von M_1 und M_2 deutet an, daß die Biegung in dem unteren Sparren AC nach rechts im Sinne des Pfeiles geschieht, d. h. daß der Sparren nach außen convex gebogen wird, während der positive Werth von M auf eine solche Biegung des oberen Sparrentheils deutet, vermöge deren dieser Theil nach außen concav gebogen wird, wie sich dies aus der für diese Stelle vorwiegenden Einwirkung von H gegenüber Q erklärt.

Aus den berechneten Momenten M und Spannungen S hat man nun die Querschnitte der Hölzer so zu bestimmen, daß die größte Faserspannung den für das Material nach §. 35 zulässigen Werth nicht überschreitet. Wählt man beispielsweise für den unteren Sparren AC eine Breite des rechteckigen Querschnittes von 180 mm und nimmt die Höhe desselben etwa $\frac{7}{5}$ mal so groß mit 250 mm an, so erzeugt das Moment $M_1 = 2060$ mkg eine äußerste Biegungs-
spannung s_b , welche sich aus

$$2060 \cdot 1000 = \frac{1}{6} 180 \cdot 250^2 s_b$$

zu

$$s_b = \frac{2060}{3 \cdot 625} = 1,10 \text{ kg}$$

bestimmt. Außerdem wird durch die Pressung $S_1 = 4155$ kg noch eine speciifische Druckspannung von

$$s_a = \frac{4155}{180 \cdot 250} = 0,092 \text{ kg}$$

erzeugt, so daß das Holz daselbst auf der Innenseite mit der größten Spannung von

$$1,10 + 0,092 = 1,2 \text{ kg}$$

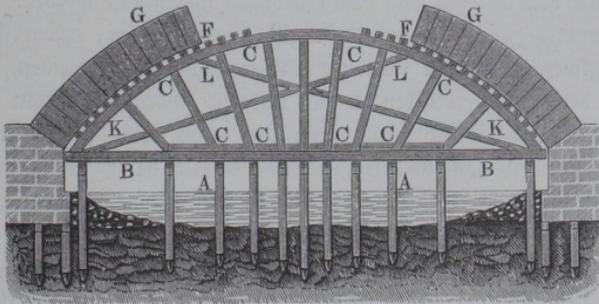
beansprucht wird, welcher Betrag für Dächer noch zulässig erscheint. Die Stärke der Mauer, auf welcher das Gespärre bei A aufruht, ist nach den in Cap. I angegebenen Regeln zu ermitteln, indem dabei ein auf Umsturz wirkender Horizontalschub $H = 1915$ kg und eine verticale Belastung von $Q + Q_1 = 4111$ kg für jede Mauerlänge von 2 m zwischen zwei Bindern einzuführen ist.

Lehrgerüste. Besonders häufige Verwendung finden die zusammen- §. 63.
 gefegten Sprengwerke als sogenannte Lehrgerüste bei der Ausführung der
 Gewölbe, wobei diese Gerüste dazu dienen, das Aneinanderfügen der ein-
 zelnen Wölbsteine genau in der beabsichtigten Art zu ermöglichen, und diesen
 Steinen so lange eine Unterstützung zu gewähren, so lange dies vor ge-
 schehenem Schluß des Gewölbes nöthig ist. Hierzu bestehen die Lehrgerüste
 in der Regel aus einer hinreichend großen Anzahl von bogenförmigen Trag-
 rippen von der entsprechenden Form, welche unterhalb durch Sprengwerke
 gestützt werden und äußerlich mit neben einander liegenden Latten, so-
 genannten Schaallatten, versehen sind, welche die Form der beabsichtigten
 inneren Wölbbleibung festlegen und auf welchen die Wölbsteine während des
 Baues direct aufrufen.

Die Lehrgerüste unterscheidet man in gestützte, d. h. solche, welche unter-
 halb auf eingerammten Pfählen oder besonders zu diesem Zwecke aufgeführten
 Pfeilern ruhen, und in gesprengte, bei denen die Lehrbögen durch Spreng-
 werke getragen werden, welche sich gegen die Widerlagspfeiler des Gewölbes
 stemmen. Diese gesprengten Lehrgerüste, welche hier vorzugsweise betrachtet
 werden sollen, gewähren den Vortheil, daß sie die zu überbrückende Oeff-
 nung (Straße, Canal etc.) während des Baues nicht versperren, wie dies
 durch die gestützten Lehrgerüste geschieht.

Ein gestütztes Lehrgerüst zeigt Fig. 319, bei welchem das aus dem Kranze
KK, den Streben *CC*... und der Zangen *L* bestehende Gerüst vermittelt

Fig. 319.



des horizontalen Balkens *BB* auf den eingerammten Pfeilern *A* ruht. Die
 über die einzelnen Lehrbögen *K* genagelten Schaallatten *F* sind mehr oder
 minder starke Hölzer, auf welchen direct die Wölbsteine ruhen.

Die Figuren 320 und 321 (a. f. S.) zeigen dagegen zwei gesprengte
 Lehrgerüste, welche sich gegen die Widerlagspfeiler *AA* stützen. Bei dem
 ersteren Gerüste findet sich zwischen je zwei zusammengehörigen Streben ein
 horizontaler Spannriegel, weshalb bei der Anwendung eines solchen Lehr-

gerüstet das Gewölbe gleichzeitig von beiden Seiten B und B her ausgeführt werden muß. Bei dem Gerüste Fig. 321 dagegen, bei welchem sich je zwei

Fig. 320.

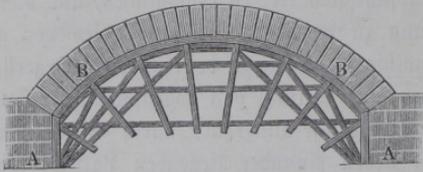
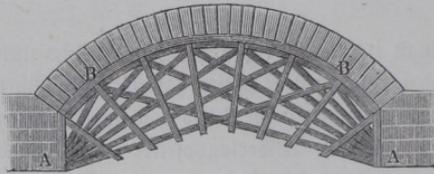


Fig. 321.



Einrichtung so getroffen werden, daß die Ausrüstung ebenfalls allmählig und ohne Stoßwirkung vorgenommen werden kann. Zu dem Ende läßt man wohl das Gerüst auf Keilen ruhen, welche nach Vollendung des Gewölbes nach und nach gelüftet werden, um eine allmähliche Senkung des Gewölbes zu bewirken. Diese Keile könnten ebensowohl zwischen den Stützpfehlern und dem Hauptträger, wie auch zwischen diesem und den Streben oder zwischen den letzteren und den Lehrbögen angebracht werden. Auch hat man in neuerer Zeit statt der Keile eiserne Schrauben, excentrische Scheiben *z.* angewendet, um die starken Erschütterungen zu vermeiden, welche mit dem Lösen der Keile verbunden zu sein pflegen. Ebenso hat man zur Unterstützung mit Sand gefüllte Säcke verwendet, deren allmähliche Entleerung man durch Einschneiden von Löchern in der Gewalt hat. Ueber die eisernen Lehrgerüste, wie sie zum Bau von Tunneln von Rhzija vorgeschlagen und verwendet sind, ist dessen Werk*) nachzulesen.

Zur Feststellung der Verhältnisse dieser Lehrgerüste ist zunächst die Ermittlung des Druckes erforderlich, welcher von dem in der Ausführung befindlichen Gewölbe auf die Schaalung in verschiedenen Punkten ausgeübt wird.

Es sei zu dem Ende durch ABC , Fig. 322, ein im Bau begriffenes Gewölbe und durch ab_1 der zuletzt aufgelegte Wölbstein dargestellt, dessen Gewicht G_1 in dem Schwerpunkte s_1 wirksam zu denken ist. Damit dieser Stein auf der unter dem Winkel α_1 gegen den Horizont geneigten Lager-

*) Rhzija, Die neue Tunnelbaumethode in Eisen, 1864.

Streben direct gegen einander stemmen, könnte auch eine einseitige Ausführung des Gewölbes vorgenommen werden. Die angewendeten Bänder und Zangen haben vorzugsweise den Zweck, die seitlichen Ausbiegungen der Streben wirksam zu verhindern, welche bei der oft beträchtlichen Länge dieser Hölzer durch die Druckkräfte angestrebt werden.

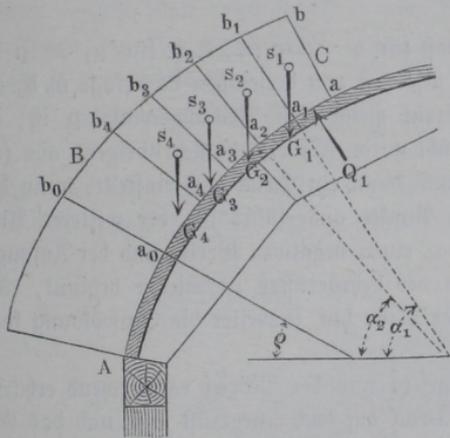
Damit sich das geschlossene Gewölbe allmählig und gleichmäßig setzen kann, muß die

fläche $a_1 b_1$, auf welcher er ruht, nicht abgleite, muß das Lehrgerüst in der Fläche a_1 eine Reaction gegen den Stein ausüben, welche in der Richtung der Gleitfläche $a_1 b_1$ wirksam, nach den bekannten Gesetzen der schiefen Ebene den Werth:

$$Q_1 = G_1 (\sin \alpha_1 - \varphi \cos \alpha_1) \dots \dots \dots (1)$$

hat, wenn φ den Reibungscoefficienten der Steine auf einander oder richtiger denjenigen des nassen Mörtels bedeutet. Denkt man sich diese Kraft Q_1

Fig. 322.



von der Schaalung $a a_1$ ausgeübt, und untersucht, welche Reaction Q_2 die Schaalung $a_1 a_2$ gegen den vorhergehenden Stein $a_1 b_2$ in der Richtung $a_2 b_2$ ausüben müsse, um auch diesen am Abgleiten zu verhindern, so findet sich, daß dieser Stein im Gleichgewichte sein muß unter Einwirkung seines Eigengewichtes G_2 , der Reaction Q_2 in $a_1 a_2$ nach der Richtung der Fläche $a_2 b_2$, ferner der in der Fläche $a_1 b_1$ wirksam zu denkenden Reaction Q_1 und der Reibung, welche sich

einem Abgleiten des Steins entlang der Lagerfuge $a_2 b_2$ entgegensetzt. Wenn diese letztere den Winkel α_2 mit dem Horizonte, also denjenigen $\alpha_1 - \alpha_2$ mit Q_1 bildet, so findet man die das Abgleiten anstrebende Kraft zu

$$G_2 \sin \alpha_2 - Q_1 \cos (\alpha_1 - \alpha_2) - Q_2$$

und die das Abgleiten hindernde Reibung auf $a_2 b_2$ zu

$$\varphi [G_2 \cos \alpha_2 - Q_1 \sin (\alpha_1 - \alpha_2)],$$

so daß man für den Gleichgewichtszustand durch Gleichsetzung beider Ausdrücke die von $a_1 a_2$ auszuübende Reaction zu

$$Q_2 = G_2 (\sin \alpha_2 - \varphi \cos \alpha_2) - Q_1 [\cos (\alpha_1 - \alpha_2) - \varphi \sin (\alpha_1 - \alpha_2)] \\ = A - B \dots \dots \dots (2)$$

erhält. Diese Gleichung gilt offenbar allgemein für jeden beliebigen Stein wie z. B. $a_3 b_4$, wenn man für G_2 dessen Gewicht und für Q_1 diejenige Reaction einführt, welche von dem Lehrgerüste auf alle oberhalb $a_3 b_3$ noch verlegten Steine $a_3 a$ ausgeübt wird.

Der Druck Q_2 besteht der Gleichung (2) zufolge aus einer Differenz $A - B$, welche immer kleiner sein wird als der Minuend A , da man leicht

erkennt, daß unter den gewöhnlichen Verhältnissen *) der Subtrahend $B = Q_1 [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \varphi \sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$ immer positiv sein wird. Der Werth $A = G_2 (\sin \alpha + \varphi \cos \alpha)$ bedeutet aber nach (1) für irgend welchen Stein denjenigen Druck Q , welchen er auf das Lehrgerüst ausübt, wenn er der zuletzt aufgelegte ist, so daß hieraus ohne Weiteres die Regel folgt: Der Druck auf das Lehrgerüst an irgend einer Stelle wird am größten, sobald das Gewölbe bis zu dieser Stelle vorge= schritten ist, jede weitere Fortsetzung der Einwölbung ver= mindert den specifischen Druck auf das Lehrgerüst an der betrachteten Stelle.

Aus (1) folgt unmittelbar, daß für $\varphi = \operatorname{tg} \alpha_1$, d. h. für $\alpha_1 = \varrho$ der Druck Q gleich Null wird, daß also erst von derjenigen Lagerfuge $a_0 b_0$ an, deren Neigung gegen den Horizont gleich dem Reibungswinkel ϱ ist, ein Druck auf das Lehrgerüst ausgeübt wird. Es ergibt sich übrigens aus (2), daß in diesem Grenzpunkte a_0 nur dann ein Druck sich einstellt, wenn das Gewölbe gerade bis zu diesem Punkte ausgeführt ist, bei weiterer Aus= führung giebt (2) für den Punkt a_0 einen negativen Werth, und der Anfangs= punkt, in welchem die Reaction des Lehrgerüstes zu wirken beginnt, rückt von a_0 aus um so mehr nach der Mitte hin, je weiter die Einwölbung fort= schreitet.

Nachdem der Schlußstein eingesetzt und der Mörtel entsprechend erhärtet ist, hört natürlich jeder weitere Druck auf das Lehrgerüst auf, und das Ge= wölbe gewinnt nach dem Ausrüsten des Lehrgerüstes seine Stabilität durch den Eintritt des bezüglichen Horizontalschubes, wie im Cap. 2 ausführlich erörtert worden ist.

Nimmt man, um den Druck des Gewölbes auf das Lehrgerüst zu be= stimmen, der Sicherheit wegen an, daß in jedem Punkte der maximale mög= liche Druck in demselben auf das Lehrgerüst wirke, eine Voraussetzung, die in Wirklichkeit nach dem Vorstehenden niemals eintreten wird, da der Druck in jedem Punkte von dem maximalen Werthe mit dem Fortgange der Aus= führung sich vermindert, so kann man am einfachsten graphisch durch fol= gende Construction die Gesamtbelastung des Lehrgerüstes ermitteln.

Der Druck auf das Lehrgerüst in einem Elemente $a_1 a_2$, Fig. 323, in centraler zu $a_1 a_2$ senkrechter Richtung bestimmt sich, wenn das Gewölbe von AB bis $a_1 b_1$ ausgeführt ist, nach (1) zu $\partial Q_1 = \partial G_1 (\sin \alpha_1 - \varphi \cos \alpha_1)$, wenn ∂G_1 das Gewicht eines Wölbsteinelementes $a_1 b_2$ von der unendlich

*) Für gewöhnlich ist $\varphi = \operatorname{tg} 22^\circ = 0,4$; α_1 höchstens 90° , α_2 nach dem Folgenden mindestens 22° , daher äußersten Falles

$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \varphi (\sin \alpha_1 - \alpha_2) = \cos 68^\circ - 0,4 \sin 68^\circ = 0,374 - 0,374 = 0$, in allen anderen Fällen aber größer.

geringen Breite $a_1 a_2$ und α_1 die Neigung dieses Elementes gegen den Horizont bezeichnet. Dieses Gewicht bestimmt sich für die Einheit in der Breitenrichtung parallel der Gewölbaxe zu

$$\partial G_1 = a_1 b_1 \cdot a_1 a_2 \cdot \gamma,$$

unter γ das spezifische Gewicht des Wölbmaterials verstanden. Der spezifische Druck auf die Flächeneinheit in a_1 ist daher durch

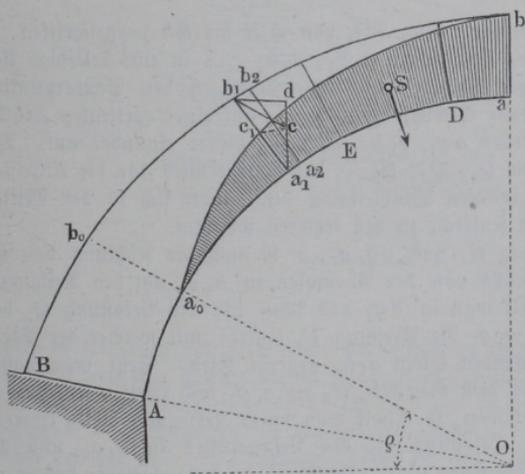
$$\frac{\partial Q_1}{a_1 a_2} = a_1 b_1 \cdot \gamma (\sin \alpha_1 - \varphi \cos \alpha_1)$$

gegeben. Zieht man daher durch a_1 eine Verticallinie $a_1 d$ und durch b_1 eine gegen die Horizontale $b_1 d$ unter dem Reibungswinkel φ geneigte Gerade $b_1 c$, so erhält man

$$\begin{aligned} a_1 c &= a_1 d - dc = a_1 b_1 (\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi) \\ &= a_1 b_1 (\sin \alpha_1 - \varphi \cos \alpha_1). \end{aligned}$$

Legt man daher einen Maßstab für die Kräfte zu Grunde, nach welchem die Einheit gleich dem Gewichte γ einer Cubikeinheit Gewölbmasse ist, so

Fig. 323.



kann man die Strecke $a_1 c$ als das Maß für den in a_1 nach der centralen Richtung $b_1 a_1$ auf das Lehrgerüst ausgeübten Druck ansehen. Wenn man daher $a_1 c_1 = a_1 c$ macht, und diese Construction für eine hinreichend große Anzahl von Fugen wiederholt, so liefert die Verbindung aller so erhaltenen Punkte c_1 eine Curve $a_0 c_1 b$, welche sich im Scheitel b tangential an die äußere Wölbung anschließt und in

der inneren Wölbung in dem Punkte a_0 verläuft, für welchen die Fuge $a_0 b_0$ unter dem Winkel φ gegen den Horizont geneigt ist. Man kann daher die zwischen dieser Curve und der inneren Wölbung enthaltene, in der Figur schraffierte Fläche als die Belastungsfläche des Lehrgerüsts ansehen, derart nämlich, daß auf jedes Element wie $a_1 a_2$ des Lehrbogens in der Fugenrichtung $b_1 a_1$ das Gewicht eines Steinprismas von der Dicke $a_1 a_2$ und der Höhe $a_1 c_1$ wirkt. Mit Rücksicht hierauf kann man in der bekannten

Weise durch Flächenverwandlung für jedes Stück DE des Lehrbogens zwischen zwei Stützpunkten D und E , wie sie durch die Streben hergestellt werden, den centralen Druck ermitteln, der, im Schwerpunkte S der zugehörigen Belastungsfläche angreifend, das Lehrgerüst belastet, und daraus findet man wieder die auf die Stützpunkte D und E selbst entfallenden Belastungen.

Auf eine nähere Bestimmung dieser Belastungen für die verschiedenen Gewölbe soll hier nicht eingegangen werden; es möge genügen, darauf hinzuweisen, daß diese Bestimmung auf analytischem Wege u. A. von Heiuzerling in einem Artikel der Berliner Bauzeitung *) ausführlich vorgenommen ist.

Anmerkung. Es muß hier bemerkt werden, daß die vorstehende Untersuchung den Druck auf das Lehrgerüst nur unter der Voraussetzung eines angestrebten Abgleitens der Gewölbtheile bestimmt. Da nun aber auch ein Einsturz durch Ruppen geschehen kann und geschehen wird, sobald das Lehrgerüst den zur Verhinderung des Kantens erforderlichen Gegendruck nicht zu äußern vermag, so hat man die Inanspruchnahme auch in dieser Hinsicht zu prüfen. Culmann giebt hierfür im Wesentlichen die folgende graphische Construction an.

Es sei der Bau des Gewölbes, Fig. 324, von AB bis ab vorgeschritten, so theile man dasselbe durch die Lagerfugen $a_1 b_1, a_2 b_2 \dots$ in eine beliebige Anzahl gleicher oder ungleicher Theile, und trage deren in den Schwerpunkten $s_1, s_2 \dots$ wirksam zu denkende Gewichte $G_1, G_2 \dots$ auf einer verticalen Kräfte-
linie als die einzelnen Strecken $o g_1, g_1 g_2, g_2 g_3 \dots$ hinter einander auf. Die Belastungen oder Reactionen $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ des Lehrgerüstes für die einzelnen Theile $a a_1, a_1 a_2 \dots$ der inneren Wölbleibung denkt man sich in den Mitten $c_1, c_2, c_3 \dots$ dieser Flächen senkrecht zu den letzteren wirksam.

zerlegt man nun $o g_1 = G_1$ nach $o q_1 g_1$, d. h. nach der Richtung von Q_1 und einer solchen $o_1 s_1$, welche von der Normalen zu $a_1 b_1$ um den Reibungswinkel ρ abweicht, so erhält man in $o q_1$ das Maß für die Belastung Q_1 des Lehrbogens $a a_1$, während $q_1 g_1$ die Pressung P_1 ergiebt, mit welcher der Stein $a b_1$ in o_1 gegen den folgenden Stein $a_1 b_2$ gepreßt wird. Setzt man daher diese Kraft $P_1 = q_1 g_1$ mit dem Gewichte $G_2 = g_1 g_2$ des zweiten Steines zu einer Mittelkraft $q_1 g_2$ zusammen, so erhält man durch Zerlegung dieser letzteren nach $q_1 g_2$ und $g_2 g_2$ die Belastung Q_2 des Lehrgerüstes in $a_1 a_2$ und die Pressung P_2 , mit welcher die Fuge $a_2 b_2$ gepreßt wird, vorausgesetzt, daß $q_1 g_2$ parallel der Kraft Q_2 in c_2 gezogen wird, und daß $g_2 g_2$ wieder um den Reibungswinkel ρ von der Normalen zur Fuge $a_2 b_2$ abweicht. In dem man in bekannter Weise parallel zu den Kräften des Kräftepolygons das Seilpolygon zeichnet, erhält man in o_2 den Angriffspunkt der Pressung P_2 in der Fuge $a_2 b_2$. Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man in den Strecken $o q_1, q_1 g_2, q_2 g_3 \dots$ die Druckkräfte, denen das Lehrgerüst in $c_1, c_2, c_3 \dots$ widerstehen muß, um ein Abgleiten der betreffenden Gewölbschichten zu verhindern, so lange die Angriffspunkte o_1, o_2, o_3 der Fugenpressungen noch in das Gewölbe selbst hinein-

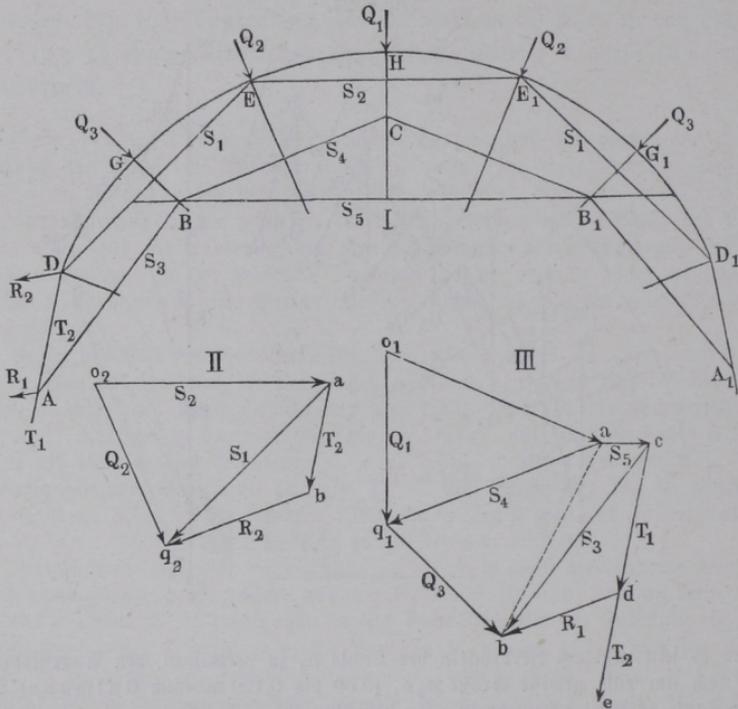
*) Erbkam, Zeitschr. f. Bauwesen, 1874.

β_1 und β_2 gegen diese Kraft geneigt sein mögen, so findet man diese Strebenkräfte durch Zerlegung von Q ohne Weiteres zu:

$$S_1 = Q \frac{\sin \beta_2}{\sin (\beta_1 + \beta_2)} \text{ und } S_2 = Q \frac{\sin \beta_1}{\sin (\beta_1 + \beta_2)}.$$

Schließlich möge noch die graphische Ermittlung der in den Gliedern eines Lehrgerüstes auftretenden Kräfte gezeigt werden, zu welchem Zwecke man nur

Fig. 325.

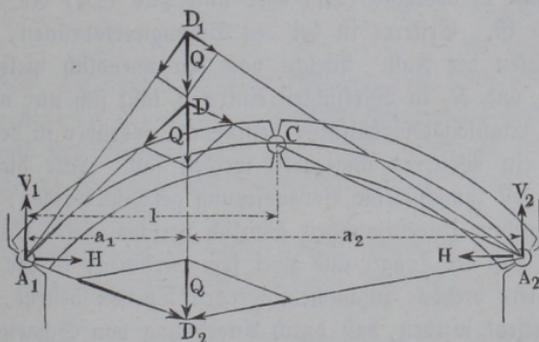


die Zeichnung des zugehörigen Kräftepolygons auszuführen hat. Es sei etwa das Lehrgerüst, Fig. 325, zu Grunde gelegt, welches aus den beiden einfachen Systemen $ABCB_1A_1$ und DEE_1D_1 besteht, deren centrale Belastungen in HC durch Q_1 , in E und E_1 durch Q_2 und in GB und G_1B_1 durch Q_3 bezeichnet sein mögen. Trägt man in Fig. 325 II nach dem gewählten Kräftemaßstabe die Belastung $Q_2 = o_2 q_2$ der Richtung und Größe nach auf, zieht durch o_2 eine Horizontale $o_2 a$ und durch q_2 eine Parallele zur Strebe DE , so erhält man die Druckkräfte $S_2 = o_2 a$ in dem Spannriegel EE_1 und $S_1 = a q_2$ in der Strebe ED . Letztere Kraft $S_1 = a q_2$ kann man ferner zerlegen in ab parallel dem Stiele DA und

$b q_2$ nach einer Richtung, welche von der Normalen zur Widerlagsmauer in D um den Reibungswinkel zwischen Holz und Mauerwerk abweicht. Alsdann erhält man in $ab = T_2$ die Pressung des Stieles AD unterhalb D , und in $b q_2 = B_2$ den Druck gegen die Mauer in D . Ganz in derselben Weise giebt das Kräftepolygon, Fig. III, die Kräfte, welche in den Gliedern des zweiten Sprengwerkes $ABC B_1 A_1$ wirken, wenn man $o_1 q_1 = Q_1$ macht, durch die Endpunkte o_1 und q_1 mit CB_1 und CB Parallelen zieht, die Strebenkraft $S_4 = a q_1$ in CB mit der Belastung $Q_3 = q_1 b$ zusammensetzt, und die Resultirende ab nach der Richtung ac des Spannsriegels BB_1 und cb der Strebe BA zerlegt. Aus dieser letzteren Kraft S_3 erhält man wieder die in dem Stiele DA unterhalb A zur Wirkung kommende Druckkraft $T_1 = cd$ und die in A gegen das Widerlager ausgeübte Pressung ab in einer Richtung, welche von der Normalen zu DA um den Reibungswinkel zwischen Holz und Mauerwerk abweicht. Der Stiel DA ist daher zwischen D und A der Pressung $T_2 = ab$ in II und unterhalb A der Summe der Pressungen T_2 und $T_1 = cd$, also der Kraft ce in III ausgesetzt. In ähnlicher Art hat man auch bei anders angeordneten Lehrgerüsten die Kräftezerlegung vorzunehmen.

Bogenträger mit Scharnieren. Unter Bogenträgern sollen im §. 64. Folgenden solche Träger mit einer gekrümmten oder polygonalen Gurtung $A_1 CA_2$, Fig. 326, verstanden werden, bei denen die andere Gurtung fehlt, indem deren Wirkung durch die horizontalen Reactionen der Widerlager in

Fig. 326.



ähnlicher Weise wie bei den Sprengwerken und Gewölben ersetzt wird. Denkt man sich einen irgendwie gekrümmten Balken A_1CA_2 , für welchen in der Folge immer eine zur Mitte C symmetrische Form, also auch gleiche Höhe der Stützpunkte A_1 und A_2 vorausgesetzt werden sollen, in einem beliebigen Punkte D durch eine Last Q angegriffen, so erkennt man, daß

durch diese Belastung Q in den Stützpunkten A_1 und A_2 Reactionen R_1 und R_2 hervorgerufen werden, welche, so verschieden auch ihre Richtung und Größe sein mag, jedenfalls in einem Punkte D_1 oder D_2 der Kraftrichtung von Q sich schneiden müssen. Da über die Lage D_1 oder D_2 dieses Schnittpunktes von vornherein nichts Bestimmtes angegeben werden kann, so muß man, ähnlich wie bei den Gewölben, annehmen, daß zunächst den Bedingungen des Gleichgewichtes in unendlich mannigfacher Weise genügt werden kann. Es wird nur so viel aus den Gleichgewichtsbedingungen mit Bestimmtheit sich angeben lassen, daß für die verticalen Componenten V_1 und V_2 der beiden Reactionen R die Beziehungen gelten:

$$V_1 + V_2 = Q \text{ und } V_1 a_1 = V_2 a_2,$$

wenn a_1 und a_2 die Abschnitte bedeuten, in welchen die ganze Spannweite $A_1 A_2 = 2l$ durch die Richtung von Q getheilt wird. Ferner müssen die horizontalen Componenten H_1 und H_2 der Reactionen R einander gleich und entgegengesetzt sein. Während also unter allen Umständen, unabhängig von der Höhenlage des Schnittpunktes D , die Verticalkräfte durch:

$$V_1 = Q \frac{a_2}{2l} \text{ und } V_2 = Q \frac{a_1}{2l}$$

gegeben sind, kann die Horizontalkraft H jeden beliebigen Werth nach der einen oder anderen Richtung annehmen. Man erkennt aus der Figur, daß die Horizontalkraft um so kleiner ausfällt, je größer die Entfernung des besagten Schnittpunktes D von der Horizontalen $A_1 A_2$ ist, und daß die Widerlager nach außen gepreßt oder nach innen gezogen werden, je nachdem der Schnittpunkt D oberhalb (D_1) oder unterhalb (D_2) der Horizontalen $A_1 A_2$ gelegen ist. Ersteres ist bei den Sprengwerksbrücken, letzteres bei den Hängebrücken der Fall. Welche von den unendlich vielen möglichen Reactionen R_1 und R_2 in Wirklichkeit eintreten, läßt sich nur unter Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse bestimmen, worüber in dem folgenden Paragraphen ein Weiteres angegeben werden soll. Für die vorliegende Untersuchung soll zunächst eine Voraussetzung gemacht werden, durch welche die oben angegebene Unbestimmtheit gänzlich verschwindet. Es sei nämlich angenommen, daß der Träger aus zwei symmetrischen, in der Mitte C in einem Scharniere drehbar zusammenstoßenden Theilen bestehe, und ebenso möge vorausgesetzt werden, daß durch Anordnung von Scharnieren in den Kämpfern A_1 und A_2 die Angriffspunkte der ausgeübten Widerlagsreactionen festgelegt seien. Die Richtung dieser letzteren ist unter diesen Voraussetzungen unzweideutig dadurch bestimmt, daß die von der Belastung Q der linken Trägerhälfte in dem Berührungspunkte C auf die rechte Trägerhälfte ausgeübte Druckkraft auch durch den Punkt A_2 gehen muß, weil sonst diese rechte Hälfte einer Drehung um A_2 ausgesetzt wäre. Zieht man daher von

A_2 durch C eine Gerade, so erhält man in deren Durchschnittspunkte D mit der Richtung von Q denjenigen Punkt, durch welchen auch die Reactionsrichtung von A_1 hindurchgehen muß. Es ist ohne Weiteres klar, daß der horizontale Druck in dem Scheitelscharniere C dieselbe Größe H haben muß, wie in den Kämpferscharnieren A_1 und A_2 , und daß auch hier genau wie bei den Gewölben ein constanter Horizontalschub auftreten muß.

Durch die Anwendung solcher Scharniere ist nicht nur die Möglichkeit geboten, die von den Widerlagern ausgeübten Reactionen in jedem Falle mit vollständiger Sicherheit nach den Regeln der Statik zu bestimmen, sondern diese Einwirkungen sind auch unabhängig gemacht von den Elasticitätsverhältnissen der Träger und Widerlager, sowie von den Schwankungen der Temperatur. Wie bedeutend aber durch diese Verhältnisse die Spannungen

Fig. 327.

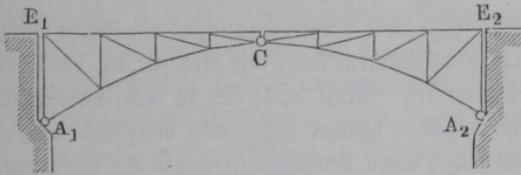
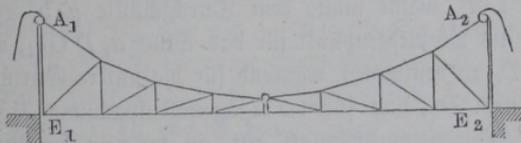


Fig. 328.



nach Fig. 327, wie auch als Hängwerksträger, Fig. 328, ausgeführt werden, je nachdem man die bogenförmige (richtiger polygonale) Gurtung unterhalb oder oberhalb der Fahrbahn $E_1 E_2$ anbringt, welche in jedem Falle durch ein System von verticalen und diagonalen Zwischengliedern mit der Bogen-gurtung verbunden wird.

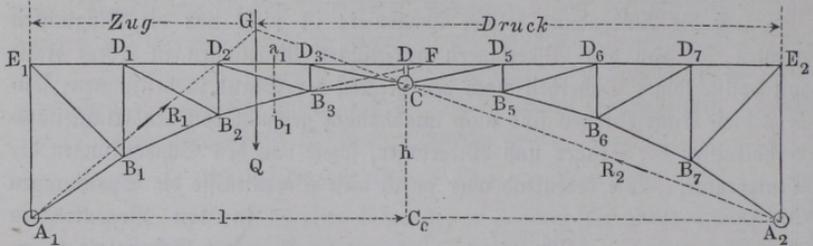
Die Untersuchung ist in beiden Fällen wesentlich dieselbe, sie möge in Folgenden für einen Sprengwerksträger, Fig. 329 (a. f. S.), angeführt werden.

Wenn der Träger $A_1 C A_2$, Fig. 329, nach der Gestalt eines Parabelsegmentes mit der Sehne $A_1 A_2 = 2l$ und der Pfeilhöhe $C C_0 = h$ gebildet ist, und man denkt denselben mit einer gleichmäßig über die Horizontalprojection vertheilten Last bedeckt, welche in einzelnen Punkten $A_1 B_1 B_2 \dots A_2$ angreifen möge, so sind nach dem in §. 56 über die Parabelträger Gesagten in dem oberhalb des Bogens angebrachten Fachwerkssysteme

in den Bogenträgern ohne Scharniere beeinflusst werden können, wird aus der Betrachtung des elastischen Bogenträgers im folgenden Paragraphen sich ergeben. Mit Rücksicht hierauf sind denn in der neueren Zeit vielfach derartige Scharnierbogenträger ausgeführt, und zwar können dieselben ebensowohl als Sprengwerksträger

sowohl in der oberen Gurtung wie in den Diagonalen keinerlei Spannungen vorhanden, und nur die Verticalpfosten BD werden durch die von ihnen zu übertragenden Belastungen gedrückt. Wenn dagegen der Träger einer einseitigen Belastung durch die Verkehrslast ausgesetzt ist, so stellen sich auch in

Fig. 329.



den Fachwerksgliedern gewisse Zug- oder Druckspannungen ein, deren Maximalwerthe in ähnlicher Art zu bestimmen sind, wie dies für die vorstehend besprochenen Fachwerke geschehen ist. Man denkt sich zu dem Ende wieder durch den Träger einen Schnitt gelegt, welcher außer dem betreffenden Gliede nur noch zwei andere Theile trifft, deren Durchschnittspunkt als Momentenmittelpunkt für alle diejenigen Kräfte angesehen wird, die auf das zwischen dem gedachten Schnitte und dem Scheitelscharniere C gelegene Trägerstück wirken. So z. B. wählt man, dem Durchschnitte $a_1 b_1$ entsprechend, den Punkt B_3 als Momentenpunkt für das Stück $a_1 D C b_1$, um die Spannung O_3 in $D_2 D_3$ zu bestimmen, während für die untere Gurtung $B_2 B_3$ der obere Knotenpunkt D_2 , und für die Diagonalenspannung T_3 in $D_2 B_3$ der Punkt F als Momentenmittelpunkt gilt, in welchem die Richtungen von $D_2 D_3$ und $B_2 B_3$ sich treffen. Hierbei hat man denjenigen Belastungszustand zu Grunde zu legen, für welchen die gesuchte Spannung den größten Absolutwerth annimmt, und für diesen Belastungszustand die betreffenden Werthe der Horizontalkraft H und der Vertikalkraft V zu bestimmen, mit welchen die jenseitige Trägerhälfte im Scheitelscharniere C auf das betrachtete Trägerstück wirkt. Diese Rechnung ist also genau in der oben mehrfach gezeigten Art auszuführen, und es bleibt daher hier nur noch übrig, die für die einzelnen Constructionsglieder ungünstigsten Belastungszustände zu bestimmen.

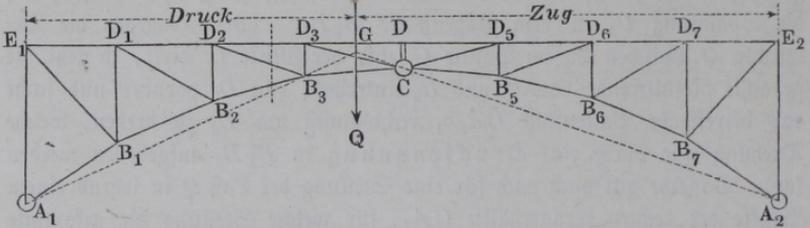
Um diesen Zustand für irgend ein Stück der unteren Bogengurtung z. B. $B_2 B_3$ zu ermitteln, ziehe man durch den betreffenden Momentenpunkt D_2 und den Auflagerpunkt A_1 eine Gerade, welche die durch A_2 und C geführte Gerade in G schneiden mag. Es ist nun sofort deutlich, daß ein in der Verticalebene durch G wirkendes Gewicht Q auf das Trägerstück $a_1 b_1 C$ eine Gesamtwirkung äußert, welche in die Richtung $G D_2 A_1$ hineinfällt,

da diese Gesamtwirkung sich aus dem Gewichte Q selbst und aus der durch dasselbe in C hervorgerufenen Reaction R_2 zusammensetzt, die Mittelkraft dieser beiden Kräfte aber der Reaction R_1 des Auflagerpunktes A_1 gleich und entgegengesetzt ist. Bei der Aufstellung der Momente in Bezug auf D_2 fällt daher das Moment der gedachten Mittelkraft $-R_1$ von Q und R_2 gleich Null aus, d. h. die in G wirkende Belastung Q ist ohne Einfluß auf die Spannung U_3 in dem Bogenstücke B_2B_3 . Wenn dagegen die Belastung Q zwischen diesem Punkte G und der Mitte C wirkt, so geht die gedachte Resultirende von Q und R_2 unterhalb von D_2 vorüber und sucht das betreffende Balkenstück Ca_1b_1 rechtsläufig um D_2 zu drehen, welche Drehung nur durch eine Druckspannung in B_2B_3 aufgehoben werden kann. Dasselbe gilt auch noch für eine Stellung der Last Q in irgend einem Punkte der rechten Trägerhälfte CA_2 , für welche Stellung die gesammte Einwirkung von Q auf das betrachtete Balkenstück Ca_1b_1 lediglich auf Erzeugung der nach der Richtung von C nach A_1 wirkenden Kraft $-R_1$ hinausläuft, welche Kraft ebenfalls eine Rechtsdrehung um D_2 anstrebt, d. h. eine Druckspannung in dem Bogentheile B_2B_3 hervorruft. Wenn dagegen Q in einem Punkte links von G wirkt, so wird die durch Q auf das Trägerstück Ca_1b_1 ausgeübte Einwirkung in jedem Falle eine Linksdrehung um D_2 anstreben, sei es nun, daß Q zwischen G und D_2 oder über D_2 hinaus zwischen E_1 und D_2 wirkt. Im ersteren Falle, bei einer Stellung von Q zwischen G und D_2 , ist die gedachte Einwirkung von Q als die Resultirende aus Q und R_2 , also als $-R_1$ zu denken, während bei einer Stellung von Q links von D_2 die ganze Einwirkung aus der in der Richtung A_2C wirkenden Reaction R_2 des Auflagerpunktes A_2 besteht. Jede Belastung des Trägers links von G bringt daher in dem Sturtheil B_2B_3 Zugspannungen hervor. Man hat daher die Verticale durch G als die Grenze anzusehen zwischen denjenigen Belastungen, welche Zug- (links) und Druckspannungen (rechts) in dem Bogenstücke B_2B_3 hervorrufen, wie dies in der Figur angedeutet ist. Um daher für dieses Bogenstück die äußersten Spannungen zu ermitteln, hat man den Träger, außer durch das gleichmäßig vertheilte Eigengewicht p , einmal in der Strecke GE_1 und einmal in der Strecke GE_2 mit der beweglichen Last k bedeckt anzunehmen. Es ist übrigens ersichtlich, daß für die Bestimmung der Dimensionen nur diejenige Spannung U_2 maßgebend sein wird, welche durch die Belastung der Druckabtheilung GE_2 erzeugt wird, da durch die Belastung der Zugabtheilung GE_1 die durch das Eigengewicht schon erzeugte Druckpressung in B_2B_3 ihrer Größe nach vermindert wird und also einen kleineren Werth annimmt als die größte Druckspannung.

In ganz derselben Weise lassen sich für die übrigen Glieder des Fachwerkes die Grenzen angeben, welche die auf Zug oder Druck wirkenden

Belastungen von einander trennen. So erhält man in Bezug auf die obere Gurtung $D_2 D_3$, Fig. 330, die Belastungsscheide in dem Durchschnittspunkte G zwischen der Reactionsrichtung $A_2 C$ und der Verbindungslinie von A_1 und dem Momentenpunkte B_3 . Eine der vorstehenden ganz ähnliche

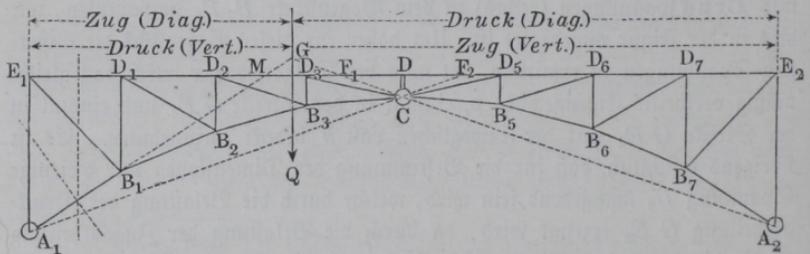
Fig. 330.



Betrachtung führt dann zu dem Resultate, daß jede Belastung links von G Druckspannungen, und jede Belastung rechts von G Zugspannungen in dem Gurtungsstücke $D_2 D_3$ hervorruft. Man erhält daher die äußersten Spannungswerthe für O_3 , wenn man einmal die eine, das andere Mal die andere Abtheilung mit k belastet denkt. Das Eigengewicht p kann hierbei ganz vernachlässigt werden, da nach dem vorstehend Bemerkten die gleichförmig vertheilte Belastung Spannungen in der oberen Gurtung gar nicht hervorruft. Aus dem letzteren Grunde müssen denn auch die beiden äußersten Werthe von O_3 der Größe nach übereinstimmen, da diese entgegengesetzten Spannungen sich gegenseitig aufheben müssen, wenn beide Abtheilungen $G E_1$ und $G E_2$ belastet werden.

Für eine Diagonale wie $B_1 E_1$ sowie für die Verticale $A_1 E_1$, Fig. 331, gilt der Durchschnitt M der oberen Gurtung mit derjenigen $A_1 B_1$ als

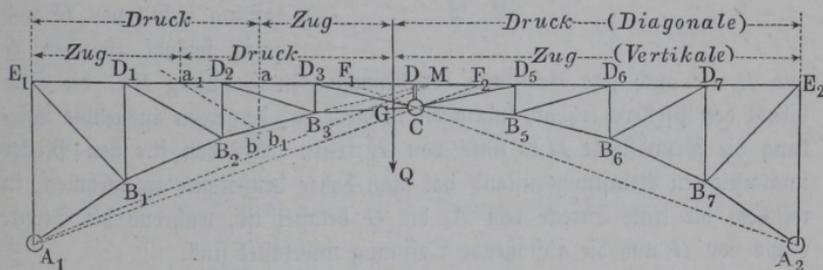
Fig. 331.



Momentenpunkt, und daher wird die Gerade $A_1 M$ in ihrem Durchschnittspunkte G mit $A_2 C$ diejenige Stelle ergeben, in welcher ein Gewicht Q wirken muß, um keine Spannung in $B_1 E_1$ und $A_1 E_1$ hervorzurufen. Es gilt daher $G Q$ als Belastungsscheide, und man erkennt leicht, daß eine

Belastung des links gelegenen Theiles $E_1 G_1$ in der Diagonale Zug- und in der Verticale Druckspannungen hervorbringen muß, während die rechts von G angebrachten Belastungen die entgegengesetzten Spannungen in der Diagonale und Verticale erzeugen. Diese Beziehung gilt aber nur so lange, als der Momentenmittelpunkt M außerhalb der beiden Punkte F_1 und F_2 gelegen ist, in denen die obere Gurtung $E_1 E_2$ von den Reactionsrichtungen $A_1 C$ und $A_2 C$ getroffen wird. Wenn dagegen der Momentenmittelpunkt M zwischen F_1 und F_2 fällt, wie dies für die Diagonale $D_2 B_3$ und die Verticale $D_2 B_2$, Fig. 332, der Fall ist, so findet man zunächst wieder in dem

Fig. 332.



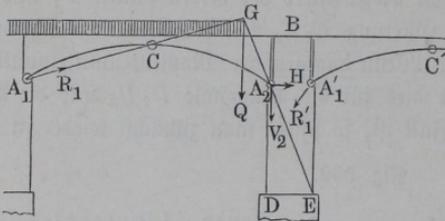
Durchschnitte G zwischen der Geraden $A_1 M$ und derjenigen $A_2 C$ eine Belastungsscheide, indem wieder eine Belastung Q in G keine Spannung, und jede Belastung rechts von G wie vorher eine Druckspannung in der Diagonale $D_2 B_3$ und eine Zugspannung in dem Verticalstiele $D_2 B_2$ hervorruft. In dem links von G befindlichen Trägertheile $G E_1$ indessen stellt sich jetzt noch eine zweite Belastungsscheide ein, welche mit dem geführten Schnitte, also für die Diagonale mit $a b$ und für die Verticale mit $a_1 b_1$ übereinstimmt; denn es ist ersichtlich, daß eine Belastung links von G das abgeschnittene Stück $C a b$ bzw. $C a_1 b_1$ um den Momentenpunkt M links- oder rechtsum zu drehen bestrebt ist, je nachdem diese Belastung rechts oder links von der bezüglichen Schnittstelle a und a_1 wirkt.

Aus den der Figur eingeschriebenen Bezeichnungen ist die Art der Spannung ersichtlich, welche eine Belastung der betreffenden Abtheilung in dem zugehörigen Füllungsstücke hervorruft.

In ähnlicher Art hat man auch diejenige Belastung der Brücke festzustellen, bei welcher auf den Pfeiler $B D E$, Fig. 333 (a. f. S.), das größte Umsturzmoment wirkt. Der Horizontaldruck in A_2 sucht offenbar diesen Pfeiler um die Kante E durch Rechtsdrehung umzukanteln, während der Verticaldruck V_2 ebensowohl wie der Druck R_1' des benachbarten Bogens $A_1' C'$ die entgegengesetzte Drehungsrichtung um E haben, also für die Stabilität günstig wirken. Zieht man durch diesen Punkt E und A_2 eine

Gerade, so findet man in dem Schnittpunkte G derselben mit A_1C diejenige Stelle, an welcher ein Gewicht wirken muß, um ohne Einfluß auf die Stabilität zu sein, denn das Gewicht Q , vereinigt mit der Reaction R_1 der

Fig. 333.



linken Bogenhälfte, ergibt eine Resultierende, welche den Pfeiler in der Richtung A_2E angreift. Man erkennt daher, daß jede links von G wirkende Belastung das Umsturzmoment vergrößert, während jede Belastung rechts von G und zwar sowohl zwischen G und B wie auch jede Belastung der benachbarten Oeffnung BC' die Stabilität des Pfeilers erhöht, indem die dadurch auf denselben ausgeübte Wirkung die Grundfläche DE links von E trifft. Als den für den Pfeiler ungünstigsten Belastungszustand hat man daher denjenigen anzunehmen, in welchem die linke Strecke von A_1 bis G belastet ist, während die Strecke rechts von G und die anstoßende Oeffnung unbelastet sind.

Die Untersuchung der Stabilität dieser Pfeiler ist ganz ebenso vorzunehmen, wie die der Pfeiler und Widerlager der Gewölbe (§. 28).

Beispiel. Es sollen für einen Bogenträger nach Art der Fig. 329, von 20 m Spannweite und 3 m Pfeilhöhe die größten Anstrengungen der Gurtungen und Füllungsglieder bestimmt werden, wenn auf jeden laufenden Meter eine Eigenlast von 800 kg und eine zufällige Belastung von 2000 kg gerechnet wird?

Da bei acht Feldern die Weite eines Feldes 2,5 m beträgt, so hat man für jeden Knotenpunkt $2,5 \cdot 0,8 = 2$ t Eigenlast und $2,5 \cdot 2 = 5$ t zufällige Belastung zu rechnen. Nimmt man im Scheitel einen Abstand zwischen den Schwerpunkten der Gurtungsquerschnitte $CD = 0,5$ m an, so bestimmen sich bei einer parabolischen Untergurtung die Längen der Stiele zu:

$$CD = 0,5; \quad B_3D_3 = 0,5 + \frac{1}{16} 3 = 0,688 \text{ m};$$

$$B_2D_2 = 0,5 + \frac{1}{4} 3 = 1,25 \text{ m}; \quad B_1D_1 = 0,5 + \frac{9}{16} 3 = 2,188 \text{ m und}$$

$$A_1E_1 = 3,5 \text{ m.}$$

Es sollen, um Wiederholungen zu vermeiden, nur die Anstrengungen der Glieder eines und zwar etwa des dritten Feldes $B_2B_3D_3D_2$ ermittelt werden.

Für die untere Gurtung U_3 dient D_2 als Momentenpunkt und die Belastungsscheide liegt im dritten Felde. Man erhält daher die größte Druckspannung U_3 , wenn man nach Fig. 329 die Punkte D_3, D, D_6, D_6, D_7 und E_2 je mit $2 + 5 = 7$ t, die übrigen Knotenpunkte mit 2 t belastet. Für diesen Zustand bestimmen sich V und H im Scheitel durch die beiden Momentengleichungen für die Trägerhälften in Bezug auf ihre Auflagerpunkte A_1 und A_2 . Man hat nämlich für A_1C in Bezug auf A_1 :

$10 V - 3 H + 2 \cdot 2,5 (1 + 2) + 7 \cdot 2,5 \left(3 + \frac{1}{2} \cdot 4\right) = 0$,
und für $A_2 C$ in Bezug auf A_2 :

$$10 V + 3 H - 7 \cdot 2,5 \left(1 + 2 + 3 + \frac{1}{2} \cdot 4\right) = 0.$$

Durch Addition und durch Subtraction dieser beiden Gleichungen erhält man für den betrachteten Belastungszustand die Kräfte V und H im Scheitel, und zwar wird:

$$V = 1,875 \text{ t}; \quad H = 40,41 \text{ t}.$$

Da nun der Momentenmittelpunkt D_2 von der Gurtung $B_2 B_3$ einen normalen Abstand gleich 1,25 m hat (nach der Zeichnung), so erhält man die Spannung U_{3max} aus:

$$U_{3max} 1,25 = V \cdot 5 + H \cdot 0,5 + 7 \cdot 2,5 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 2\right) = 64,58 \text{ mt},$$

woraus

$$U_{3max} = 51,67 \text{ t Druck}$$

folgt. Will man auch U_{3min} bestimmen, so hat man die Knotenpunkte E_1, D_1, D_2 mit 7 t, alle übrigen mit 2 t zu belasten, man erhält dann V und H aus:

$$-10 V - 3 H + 7 \cdot 2,5 (1 + 2) + 2 \cdot 2,5 \left(3 + \frac{4}{2}\right) = 0,$$

und

$$-10 V + 3 H - 2 \cdot 2,5 \left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right) = 0,$$

woraus

$$V = 1,875 \text{ t und } H = 19,59 \text{ t}$$

folgt. Hiermit erhält man U_{3min} aus:

$$U_{3min} 1,25 = H \cdot 0,5 - V \cdot 5 + 2 \cdot 2,5 \left(1 + \frac{2}{2}\right)$$

zu

$$U_{3min} = 8,33 \text{ t ebenfalls Druck.}$$

In gleicher Weise sind die Spannungen für die übrigen Glieder zu bestimmen, es wird genügen, hierfür nur die Ansätze hinzuschreiben. Für die Obergurtung O_3 ist B_3 Momentenmittelpunkt, die Belastungsscheide liegt im vierten Felde, folglich ist für O_{3max} :

$$10 V - 3 H + 2 \cdot 2,5 (1 + 2 + 3) + 7 \cdot 2,5 \frac{4}{2} = 0;$$

$$10 V + 3 H - 7 \cdot 2,5 \left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right) = 0;$$

$$V = 3,75 \text{ t}; \quad H = 34,17 \text{ t},$$

daher

$$O_{3max} 0,688 = V \cdot 2,5 - H \cdot 0,188 + \frac{7}{2} \cdot 2,5 = 11,70 \text{ mt}$$

woraus

$$O_{3max} = \frac{11,70}{0,688} = 17,0 \text{ t Zug folgt.}$$

Für O_{3min} würde man durch Belastung von E_1, D_1, D_2 und D_3 :

$$O_{3min} = -17 \text{ t Druck}$$

erhalten.

Für die Diagonale $B_3 D_2$ liegt der Momentenmittelpunkt auf der oberen Gurtung um 0,555 m rechts vom Scheitel und in einem normalen Abstände von der Diagonale gleich 1,5 m. Die beiden Belastungsscheiben liegen nach Fig. 332 im dritten und vierten Felde, man erhält daher den größten Zug in der Diagonale, wenn man nur D_3 belastet, und da man hierfür das Eigengewicht unberücksichtigt lassen kann, so hat man:

$$- 10 V - 3 H + 5 \cdot 2,5 \cdot 3 = 0,$$

$$- 10 V + 3 H = 0,$$

woraus

$$V = 1,875 \text{ t}; \quad H = 6,25 \text{ t},$$

und daher aus

$$T_{3max} 1,5 = 5 \cdot (2,5 + 0,555) - V \cdot 0,555 - H \cdot 0,5 = + 11,10 \text{ mt}$$

$$T_{3max} = 7,4 \text{ t Zug}$$

folgt. T_{3min} würde man bei Belastung der übrigen Knotenpunkte zu

$$T_{3min} = - 7,4 \text{ t Druck}$$

erhalten.

Für den Verticalstiel $D_2 B_2$ gilt derselbe Momentenmittelpunkt wie für die Diagonale, die beiden Belastungsscheiben liegen aber hier nach Fig. 332 im zweiten und vierten Felde, daher die beiden Knotenpunkte D_2 und D_3 das eine Mal allein belastet, das andere Mal unbelastet anzunehmen sind. Wenn D_2 und D_3 belastet sind, erhält man die größte Druckkraft P_{3min} und zwar ist:

$$- 10 V - 3 H + 2 \cdot 2,5 + 7 \cdot 2,5 (2 + 3) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2,5 \cdot 4 = 0;$$

$$- 10 V + 3 H - 2 \cdot 2,5 \left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2} \right) = 0;$$

$$V = 3,125 \text{ t}; \quad H = 23,75 \text{ t};$$

daher

$$P_{3min} 5,555 = - 1 \cdot 0,555 - 7 (3,055 + 5,555) + H \cdot 0,5 + V \cdot 0,555,$$

$$P_{3min} = - 8,5 \text{ t Druck}.$$

Belastet man die anderen Knotenpunkte, so hat man aus:

$$10 V - 3 H + 7 \cdot 2,5 + 2 \cdot 2,5 (2 + 3) + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2,5 \cdot 4 = 0,$$

$$10 V + 3 H - 7 \cdot 2,5 \left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2} \right) = 0;$$

$$V = 3,125 \text{ t}; \quad H = 36,25 \text{ t};$$

womit man

$$P_{3max} 5,555 = H \cdot 0,5 - V \cdot 0,555 - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 0,555 - 2 (3,055 + 5,555),$$

und hieraus

$$P_{3max} = - 0,5 \text{ t Druck}$$

erhält.

§. 65. **Elastische Bogenträger.** Um die Verhältnisse der Bogenträger ohne Scheitelscharnier zu prüfen, welche Prüfung, wie vorstehend bemerkt wurde, nur unter Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse möglich ist, hat man zunächst die Bedingungen für die Biegung eines krummen Balkens über-

haupt festzustellen. Hierzu kann die allgemeine Gleichung der elastischen Linie für den geraden Balken dienen, welche in §. 35, II durch $\rho = \frac{TE}{M}$ ausgedrückt wurde, wenn E den Elasticitätsmodul des Materials bedeutet und unter T das Trägheitsmoment des Querschnitts, sowie unter ρ der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie für irgend welche Stelle des Balkens verstanden wird, für welche das Biegemoment der äußeren Kräfte gleich M ist. Bezieht man die Balkenaxe auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem und bezeichnet mit α den Winkel, welchen die Balkenaxe im Punkte x, y mit der horizontalen X Axe bildet, so kann man bekanntlich das Balkenelement an dieser Stelle durch $\partial s = \rho \partial \alpha$ ausdrücken, worin $\partial \alpha$ den Contingenzwinkel oder die Aenderung der Neigung α in zwei unendlich nahe gelegenen Punkten x, y und $x + \partial x, y + \partial y$ bedeutet.

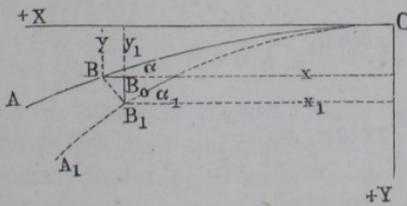
Hieraus folgt $\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \alpha}{\partial s}$ und die Gleichung der elastischen Linie schreibt sich daher auch:

$$M = TE \frac{\partial \alpha}{\partial s} \dots \dots \dots (1)$$

Diese zunächst für Balken mit ursprünglich gerader Axe gültige Gleichung kann auch noch genau genug für die schwach gekrümmten Balken angewendet werden, wie sie bei Bogenbrücken vorzukommen pflegen, vorausgesetzt, daß man hier unter dem Werthe $\partial \alpha = \frac{\partial s}{\rho}$ ebenfalls die Veränderung der Neigung versteht, welche durch das Biegemoment in dem betreffenden Elemente hervorgerufen wird.

Es möge etwa ein an dem einen Ende C horizontal eingeklemmter Balken, Fig. 334, von Hause aus die gekrümmte Aenform ABC haben, und

Fig. 334.



unter dem Einflusse von irgend welchen biegender Kräfte in die Form A_1B_1C übergehen, so gilt für irgend ein Element von der Länge ∂s in B , für welches die Neigung der Tangente gegen die horizontale X Axe ursprünglich durch α

und in der nachherigen Stellung durch α_1 bezeichnet sein mag:

$$M = TE \frac{\partial \alpha_1 - \partial \alpha}{\partial s} = TE \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right), \dots \dots (2)$$

wenn ρ und ρ_1 die Krümmungshalbmesser in B und B_1 vor und nach der Biegung bedeuten. Durch Integration der Gleichung (2) erhält man:

$$\alpha_1 - \alpha = \int \frac{M}{TE} \partial s, \dots \dots \dots (3)$$

welche Gleichung für irgend einen Punkt B die Aenderung $\alpha_1 - \alpha$ in der Neigung der Tangente gegen den Horizont ergibt, sobald man das Integral zwischen den Grenzen $s = 0$ in C und s in B vornimmt.

Bezeichnet man ferner mit x und y die Ordinaten des Punktes B und mit x_1 und y_1 diejenigen des Punktes B_1 , so kann man die horizontale Verschiebung $B_0 B = x_1 - x$ und die verticale Senkung $B_0 B_1 = y_1 - y$ in folgender Weise berechnen. Setzt man bei der immer nur geringen Größe der Neigungsänderung $\alpha_1 - \alpha$ annähernd:

$$\sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = \frac{\alpha_1 - \alpha}{2},$$

$$\sin \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} = \sin \alpha$$

und

$$\cos \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} = \cos \alpha,$$

so erhält man aus den bekannten trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 - \sin \alpha &= 2 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = \cos \alpha \cdot (\alpha_1 - \alpha) \\ &= \cos \alpha \int \frac{M}{TE} \partial s; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 - \cos \alpha &= -2 \sin \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = -\sin \alpha \cdot (\alpha_1 - \alpha) \\ &= -\sin \alpha \int \frac{M}{TE} \partial s. \end{aligned}$$

Wenn hierin

$$\sin \alpha = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{\partial y_1}{\partial s}$$

und

$$\cos \alpha = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{\partial x_1}{\partial s}$$

eingeführt wird, so findet man

$$\frac{\partial y_1 - \partial y}{\partial x} = \int \frac{M}{TE} \partial s = \alpha_1 - \alpha \dots \dots \dots (4)$$

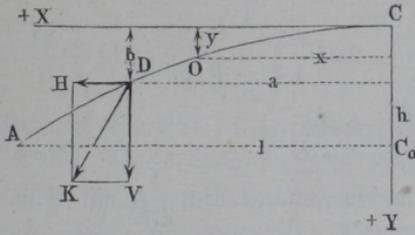
$$\frac{\partial x - \partial x_1}{\partial y} = \int \frac{M}{TE} \partial s = \alpha_1 - \alpha \dots \dots \dots (5)$$

Diese Gleichungen können, wenn sie integrirt werden, dazu dienen, in jedem gegebenen Falle, d. h. bei bestimmter Form und Belastung des Bal-

kens, die Senkung und horizontale Verschiebung für jeden Punkt des Balkens zu bestimmen.

In den meisten Fällen der Praxis können die immer sehr flachen Bögen der Brückenträger als parabelförmige angesehen werden, unter welcher Voraussetzung im Folgenden die Untersuchung geführt werden möge *).

Fig. 335.



Es sei ABC , Fig. 335, ein parabolischer, im Scheitel C horizontal eingespannter Balken von der horizontalen Ausladung $AC_0 = l$ und der Pfeilhöhe $CC_0 = h$, dessen Scheitelgleichung also durch

$$y = \frac{h}{l^2} x^2 = n x^2 \dots \dots \dots (6)$$

dargestellt ist, wenn $n = \frac{h}{l^2}$ gesetzt wird. Hieraus folgt zunächst

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2 n x, \dots \dots \dots (7)$$

und annähernd

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial x \sqrt{1 + 4 n^2 x^2} = (1 + 2 n^2 x^2) \partial x, \dots (8)$$

da für die hier in Betracht kommenden Fälle $n^2 x^2 = \frac{h^2 x^2}{l^4}$ nur klein ist gegen die Einheit.

Setzt man nun für den Balken überall gleiche Querschnitte, also T constant voraus, so geht die Gleichung (3) mit dem aus (8) folgenden Werthe von ∂s über in:

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{1}{TE} \int M (1 + 2 n^2 x^2) \partial x \dots \dots \dots (9)$$

Es sei der Balken in irgend einem Punkte D , dessen Ordinaten a und $b = n a^2$ sind, durch eine beliebige Kraft K angegriffen, deren verticale und horizontale Componenten durch V und H ausgedrückt sein mögen, wobei diese Componenten positiv oder negativ genommen sein sollen, je nachdem sie nach den Richtungen der positiven oder negativen Coordinatenaxen wirksam sind. Für diesen Fall hat man das Biegemoment für irgend einen

*) Handelt es sich um die Untersuchung anders geformter krummer Balken, z. B. kreisförmiger, so ändert sich die Rechnung nur insofern, daß anstatt der Parabelgleichung (6) die zugehörige Gleichung der Trägerform zu Grunde zu legen ist.

zwischen D und C gelegenen Punkt, z. B. O , mit den Coordinaten x und $y = nx^2$ zu:

$$M = V(a - x) - H(b - y) = V(a - x) - Hn(a^2 - x^2). \quad (10)$$

Mit diesem Werthe von M liefert daher die Gleichung (9):

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha &= \frac{1}{TE} \int [V(a - x) - Hn(a^2 - x^2)] (1 + 2n^2 x^2) \partial x \\ &= \frac{V}{TE} \left(ax - \frac{x^2}{2} + 2n^2 \frac{ax^3}{3} - 2n^2 \frac{x^4}{4} \right) - \frac{H}{TE} n \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right. \\ &\quad \left. + 2n^2 \frac{a^2 x^3}{3} - 2n^2 \frac{x^5}{5} \right) = \frac{\mathfrak{B}}{TE} - \frac{\mathfrak{H}}{TE} \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

wenn man der Kürze wegen die beiden Factoren von $\frac{1}{TE}$ mit \mathfrak{B} und \mathfrak{H} bezeichnet.

Um die verticale und horizontale Verschiebung des Punktes O zu ermitteln, dienen die Gleichungen (4) und (5), wenn man darin für $\alpha_1 - \alpha$ den Ausdruck aus (11) einführt und zwischen den Grenzen 0 für C und x für O integrirt, wobei man nach (7) $\partial y = 2nx \partial x$ zu setzen hat. Danach wird:

$$\begin{aligned} y_1 - y &= \frac{V}{TE} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} + n^2 \frac{ax^4}{6} - n^2 \frac{x^5}{10} \right) - \frac{H}{TE} n \left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right. \\ &\quad \left. + n^2 \frac{a^2 x^4}{6} - n^2 \frac{x^6}{15} \right) = \frac{\mathfrak{B}_1}{TE} - \frac{\mathfrak{H}_1}{TE} = \eta_x \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \frac{V}{TE} 2n \left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{8} + 2n^2 \frac{ax^5}{15} - n^2 \frac{x^6}{12} \right) - \frac{H}{TE} 2n^2 \left(\frac{a^2 x^3}{3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^5}{15} + 2n^2 \frac{a^2 x^5}{15} - 2n^2 \frac{x^7}{35} \right) = \frac{\mathfrak{B}_2}{TE} - \frac{\mathfrak{H}_2}{TE} = \xi_x \dots \dots (13) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (11) bis (13) gelten nur für das Trägerstück zwischen C und dem Angriffspunkte D der Kraft K , da auf das freie Stück AD ein Biegemoment M gar nicht ausgeübt wird. Mit $x = a$ erhält man aus den vorstehenden Gleichungen die Richtungsänderung und die verticale sowie die horizontale Verschiebung in dem Angriffspunkte D der Kraft K zu:

$$\varphi_a = \alpha_1 - \alpha = \frac{V}{TE} \left(\frac{a^2}{2} + n^2 \frac{a^4}{6} \right) - \frac{H}{TE} n \left(2 \frac{a^3}{3} + n^2 \frac{4a^5}{15} \right) \dots (11^a)$$

$$\eta_a = y_1 - y = \frac{V}{TE} \left(\frac{a^3}{3} + n^2 \frac{a^5}{15} \right) - \frac{H}{TE} n \left(5 \frac{a^4}{12} + n^2 \frac{a^6}{10} \right) \dots (12^a)$$

$$\xi_a = x - x_1 = \frac{V}{TE} n \left(5 \frac{a^4}{12} + n^2 \frac{a^6}{10} \right) - \frac{H}{TE} n^2 \left(8 \frac{a^5}{15} + n^2 \frac{16a^7}{105} \right) (13^a)$$

Wenn man wegen der Kleinheit von n in vorstehenden Formeln die Glieder in den Klammern, welche mit n^2 behaftet sind, gegen die anderen vernachlässigt, so erhält man annähernd:

$$\varphi_a = \frac{V}{TE} \frac{a^2}{2} - \frac{H}{TE} 2n \frac{a^3}{3} \dots \dots \dots (11^b)$$

$$\eta_a = \frac{V}{TE} \frac{a^3}{3} - \frac{H}{TE} 5n \frac{a^4}{12} \dots \dots \dots (12^b)$$

$$\xi_a = \frac{V}{TE} 5n \frac{a^4}{12} - \frac{H}{TE} 8n^2 \frac{a^5}{15} \dots \dots \dots (13^b)$$

Für das freie Ende A des Trägers ist die Richtungsänderung $\alpha_1 - \alpha$ der Balkentangente durch denselben Werth φ_a aus (11^a), wie für den Angriffspunkt D der Kraft K ausgedrückt, da das Balkenstück AD einer Biegung nicht unterworfen ist. Dagegen setzt sich die Senkung η des Punktes A zusammen aus derjenigen η_a des Punktes D und einem zweiten Betrage, welcher aus der Richtungsänderung um φ_a in D hervorgeht und für den Endpunkt A wegen des horizontalen Abstandes $l - a$ desselben von D den Werth $(l - a) \varphi_a$ hat. Folglich hat man für das freie Ende A die verticale Senkung

$$\eta = \eta_a + (l - a) \varphi_a \dots \dots \dots (14)$$

und ebenso findet sich die horizontale Verschiebung wegen des verticalen Abstandes $h - b = n(l^2 - a^2)$ zwischen D und A zu:

$$\xi = \xi_a + n(l^2 - a^2) \varphi_a \dots \dots \dots (15)$$

Um auch die Biegungsverhältnisse für einen gekrümmten Balken zu ermitteln, welcher durch eine gleichmäßig über seine Horizontalprojection ausgebreitete Last q pro Längeneinheit angegriffen wird, hat man in obige Ausdrücke $H = 0$ und für V das Lastelement $q \partial x$ einzuführen. Setzt man dann für den Abstand a allgemein die Abscisse x und integrirt zwischen den Werthen x_1 und x_2 , zwischen denen die Last ausgebreitet ist, so erhält man die entsprechenden Gleichungen. Es sollen hier nur die Verschiebungen des freien Endes A unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß der Träger seiner ganzen Länge nach, also zwischen den Abscissen $x_1 = 0$ und $x_2 = l$ mit der Last ql bedeckt ist. Unter dieser Voraussetzung erhält man die Verschiebungen des freien Endes A aus den Gleichungen (14) und (15), wenn man darin die Werthe aus (11^a) bis (13^a) mit x anstatt a einführt. Danach folgt die verticale Verschiebung aus (14):

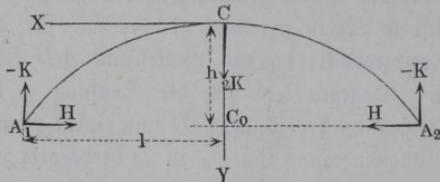
$$\begin{aligned} \eta &= \int_0^l \frac{q \partial x}{TE} \left(\frac{x^3}{3} + n^2 \frac{x^5}{15} \right) + \int_0^l (l - x) \frac{q \partial x}{TE} \left(\frac{x^2}{2} + n^2 \frac{x^4}{6} \right) \\ &= \frac{q}{TE} \left(\frac{l^4}{8} + n^2 \frac{l^6}{60} \right) \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

und die horizontale Verschiebung aus (15):

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^l \frac{q \partial x}{TE} n \left(5 \frac{x^4}{12} + n^2 \frac{x^6}{10} \right) + \int_0^l n (l^2 - x^2) \frac{q \partial x}{TE} \left(\frac{x^2}{2} + n^2 \frac{x^4}{6} \right) \\ &= \frac{q}{TE} n \left(\frac{3l^5}{20} + n^2 \frac{l^7}{42} \right) \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

Die hier entwickelten Gleichungen krummer einseitig eingeklemmter Balken können nun dazu dienen, die Verhältnisse der Biegung bogenförmiger Träger

Fig. 336.



festzustellen. Zu dem Ende sei \$A_1CA_2\$, Fig. 336, die Mittellinie eines parabolischen Balkens von der Spannweite \$A_1A_2 = 2l\$ und der Höhe in der Mitte \$CC_0 = h\$, dessen Gleichung also wieder durch (6):

$$y = \frac{h}{l^2} x^2 = n x^2$$

gegeben ist. Es sei zunächst vorausgesetzt, daß der Träger in \$A_1\$ und \$A_2\$ auf horizontalen Stützflächen ohne Reibung ruhe, so daß ein seitliches Verschieben der Stützpunkte möglich ist, und daß der Träger in der Mitte mit einem Gewichte \$2K\$ belastet sein soll. Unter dieser Voraussetzung wird in jedem Fußpunkte \$A_1\$ und \$A_2\$ durch die feste Stütze eine vertical aufwärts gerichtete Reaction \$V = -K\$ gegen den Träger geäußert, wogegen eine horizontale Reaction wegen der angenommenen Verschieblichkeit der Enden nicht auftritt. Man denke sich nunmehr den Träger zur Hälfte \$CA_2\$ in eine feste Wand eingeschlossen, was hier deswegen angängig ist, ohne an den Bedingungen des Gleichgewichtes etwas zu ändern, weil der Träger wegen der symmetrischen Anordnung immer im Scheitel \$C\$ eine horizontale Tangente beibehält. Hierdurch ist die Untersuchung des Trägers auf die vorstehend durchgeführte eines einseitig bei \$C\$ horizontal eingeklemmten Balkens \$A_1C\$ zurückgeführt, welcher am freien Ende \$A_1\$, also am Hebelarme \$l\$, einer Verticalkraft \$-K\$ ausgesetzt ist. Man erhält daher ohne Weiteres die verticale und horizontale Verschiebung jedes Fußpunktes \$A_1\$ und \$A_2\$ in Bezug auf den fest vorausgesetzten Scheitel \$C\$, wenn man in (12^a) und (13^a) für \$V\$ den Werth \$-K\$, und \$a = l\$ sowie \$H = 0\$ setzt, zu:

$$\eta = - \frac{K}{TE} \left(\frac{l^3}{3} + n^2 \frac{l^5}{15} \right) = - \frac{K}{TE} \left(\frac{l^3}{3} + \frac{h^2 l}{15} \right) \dots \dots (18)$$

$$\xi = - \frac{K}{TE} n \left(\frac{5l^4}{12} + n^2 \frac{l^6}{10} \right) = - \frac{K}{TE} \left(\frac{5hl^2}{12} + \frac{h^3}{10} \right) \dots (19)$$

Das negative Vorzeichen von $\xi = x - x_1$ deutet an, daß die Schenkel A_1 und A_2 nach außen treten und das von $\eta = y_1 - y$ bedeutet eine Verminderung des verticalen Abstandes zwischen $A_1 A_2$ und C , d. h. also eine Senkung des Scheitels C um η .

Nimmt man an, daß der Bogen $A_1 C A_2$ gleichmäßig mit q pro Längeneinheit der Horizontalprojection belastet ist, so erhält man die Verschiebungen, wenn man zu den durch diese gleichförmig vertheilte Last nach (16) und (17) sich ergebenden Werthen

$$\eta = \frac{q}{TE} \left(\frac{l^4}{8} + \frac{h^2 l^2}{60} \right)$$

und

$$\xi = \frac{q}{TE} \left(\frac{3 h l^3}{20} + \frac{h^3 l}{42} \right)$$

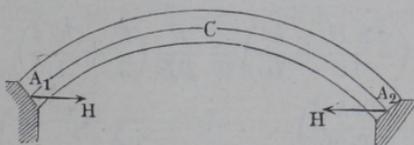
dieser Beträge hinzufügt, welche durch die verticalen Stützreactionen $-ql$ in A_1 und A_2 erzeugt werden. Danach findet sich mit Bezug auf (12^a) und (13^a):

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{q}{TE} \left(\frac{l^4}{8} + \frac{h^2 l^2}{60} \right) - \frac{ql}{TE} \left(\frac{l^3}{3} + n^2 \frac{l^5}{15} \right) \\ &= - \frac{q}{TE} \left(\frac{5 l^4}{24} + \frac{h^2 l^2}{20} \right) \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{q}{TE} \left(\frac{3 h l^3}{20} + \frac{h^3 l}{42} \right) - \frac{ql}{TE} n \left(\frac{5 l^4}{12} + n^2 \frac{l^6}{10} \right) \\ &= - \frac{q}{TE} \left(\frac{4 h l^3}{15} + \frac{8 h^3 l}{105} \right) \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

Wenn nun aber vorausgesetzt wird, daß der Bogenträger sich mit seinen Fußpunkten A_1 und A_2 gegen unverschiebliche Widerlager, Fig. 337, stemmt,

Fig. 337.



so hat man sich zu denken, daß von jedem dieser Widerlager außer der verticalen Reaction V noch ein horizontaler nach innen gerichteter Schub H auf den Bogenschenkel ausgeübt wird, welcher genau in solcher

Größe auftritt, daß die durch denselben hervorgerufene horizontale Verschiebung gerade die oben durch (19) und (21) berechneten Verschiebungen ξ aufhebt, welche durch die Belastung $2K$ bzw. $2ql$ nach außen veranlaßt werden. Durch die Horizontalkraft H in A_1 wird nun eine horizontale Verschiebung des Endes A_1 erzeugt, welche sich aus (13^a) mit $V = 0$ zu

$$\xi = \frac{H}{TE} \left(\frac{8 h^2 l}{15} + \frac{16 h^4}{105 l} \right) \dots \dots \dots (22)$$

bestimmt. Daher hat man, um die Größe des horizontalen Widerlagerdruckes H zu ermitteln, einfach den Werth (22) gleich demjenigen (19) oder (21) zu setzen, je nachdem der Bogen im Scheitel C durch $2K$ oder über der ganzen Länge gleichmäßig durch $2ql$ belastet ist. Diese Gleichsetzung liefert bei der Belastung des Scheitels aus (22) und (19) den gesuchten Horizontalschub:

$$H = -K \frac{\frac{5}{12} h l^2 + \frac{h^3}{10}}{\frac{8}{15} h^2 l + \frac{16}{105} \frac{h^4}{l}} = \text{rot} - K \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right), \dots (23)$$

und bei gleichmäßig vertheilter Belastung aus (22) und (21):

$$H = -q \frac{\frac{4}{15} h l^3 + \frac{8}{105} h^3 l}{\frac{8}{15} h^2 l + \frac{16}{105} \frac{h^4}{l}} = -q \frac{l^2}{2h} \dots \dots (24)$$

Die Horizontalkraft H , welche in dem Falle einer Belastung des Scheitels durch $2K$ vermittelt der Gleichung (23) bestimmt ist, bringt für sich allein eine verticale Verschiebung hervor, die nach (12^a) sich bestimmt zu:

$$\eta = \frac{K}{TE} \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right) \left(5 \frac{h l^2}{12} + \frac{h^3}{10} \right).$$

Addirt man daher diese Verticalverschiebung algebraisch zu der durch (18) gegebenen, welche durch die Belastung $2K$ des Scheitels und die verticalen Stützreactionen in A_1 und A_2 allein hervorgerufen werden, so erhält man die Senkung des Scheitels:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{K}{TE} \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right) \left(5 \frac{h l^2}{12} + \frac{h^3}{10} \right) - \frac{K}{TE} \left(\frac{l^3}{3} + \frac{h^2 l}{15} \right) \\ &= -\frac{K}{TE} \left(\frac{l^3}{128} + \frac{23 h l^2}{6720} \right) \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

oder für die meisten Fälle genau genug zu:

$$\eta = -\frac{K}{TE} \frac{l^3}{128} \dots \dots \dots (25^a)$$

Das negative Zeichen deutet auf eine Verringerung des verticalen Abstandes h zwischen dem Scheitel und den Kämpfern, d. h. auf eine Senkung des Scheitels. Vergleicht man diese Senkung mit derjenigen eines

geraden Balkens von der Länge $L = 2l$ und der Belastung $Q = 2K$ in der Mitte, für welchen die Durchbiegung nach §. 35 zu:

$$f = \frac{Q L^3}{48 TE} = \frac{2K (2l)^3}{48 TE} = \frac{K l^3}{3 TE}$$

ist, so erkennt man, daß die Senkung des Bogenscheitels nur $\frac{3}{128}$ von der Durchbiegung des geraden Balkens beträgt.

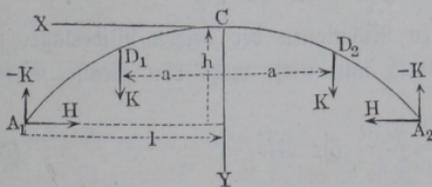
Wenn man in gleicher Art für einen durch die gleichmäßig vertheilte Last $2ql$ angegriffenen Bogenträger die durch den Horizontalschub $H = -q \frac{l^2}{2h}$ allein erzeugte verticale Verschiebung η des Fußpunktes nach (12^a) bestimmt, so erhält man diese Größe zu:

$$\eta = \frac{q}{TE} \frac{l^2}{2h} \left(5 \frac{h l^2}{12} + \frac{h^3}{10} \right) = \frac{q}{TE} \left(\frac{5 l^4}{24} + \frac{h^2 l^2}{20} \right), \quad \cdot \cdot \quad (26)$$

also gleich und entgegengesetzt derjenigen Verschiebung, welche durch die Belastung $2ql$ und die verticalen Stützreactionen nach (20) erzeugt werden, so daß man daraus schließt, daß in diesem Falle der Scheitel durch die Biegung gar keiner Senkung ausgesetzt ist. In diesem Falle ist überhaupt das Biegemoment in allen Punkten des Trägers gleich Null, indem in jedem Querschnitte die Mittelkraft der äußeren Kräfte in die Richtung der Tangente an die Parabel hineinfällt. Der Bogen verhält sich daher genau so wie die parabolische Gurtung eines Parabelträgers (§. 56), oder wie eine parabolische Kette mit gleichmäßig über die Horizontalprojection vertheilter Belastung. Für diese Belastungsart ist die parabolische Trägerform daher eine sogenannte Gleichgewichtscurve, und die ganze Formänderung des Bogens reducirt sich auf diejenige, die durch die Verkürzung entsteht, welcher der Bogen in Folge der Druckspannungen ausgesetzt ist.

Um auch die Wirkung einer einseitigen Belastung des Bogenträgers zu ermitteln, sei der Träger zunächst in zwei gleichweit um a vom Scheitel C abstehenden Punkten D_1 und D_2 , Fig. 338, mit je K belastet.

Fig. 338.



Für diesen Fall, in welchem die verticale Stützreaction in A_1 und A_2 jederseits $-K$ beträgt, bestimmt sich der horizontale Schub H in gleicher Weise wie vorstehend. Denkt man nämlich wieder die eine Hälfte CA_2 des Trägers in eine feste Wand eingeschlossen, so hat man die horizontale Verschiebung, welche das Balkenende A_1 durch

die Belastung K in D_1 erleidet, gleich und entgegengesetzt derjenigen zu setzen, welche die Reactionen $-K$ und $-H$ in A_1 hervorbringen. Man findet diese von K veranlaßte Verschiebung von A_1 nach (15), wenn man die angenäherten Formeln (11^b) und (13^b) zu Grunde legt zu:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_a + n(l^2 - a^2) \varphi_a = \frac{K}{TE} 5n \frac{a^4}{12} + n(l^2 - a^2) \frac{K}{TE} \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{K}{TE} n \left(\frac{l^2 a^2}{2} - \frac{a^4}{12} \right), \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

während durch $-K$ und $-H$ in A_1 wirkend eine horizontale Verschiebung erzeugt wird, die aus (13^b), wenn l für a gesetzt wird, sich berechnet zu:

$$\xi = - \frac{K}{TE} 5n \frac{l^4}{12} + \frac{H}{TE} 8n^2 \frac{l^5}{15} \dots \dots \dots (28)$$

Setzt man die Summe von (27) und (28) gleich Null, so folgt daraus der Horizontalschub:

$$\begin{aligned} H &= \frac{15}{8n^2 l^5} K \left(\frac{5nl^4}{12} - \frac{n l^2 a^2}{2} + \frac{n a^4}{12} \right) \\ &= \frac{5}{32nl} K \left(5 - 6 \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4} \right), \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

Es ist nun leicht ersichtlich, daß zu diesem Horizontalschube jede der beiden in D_1 und D_2 angebrachten Belastungen K die Hälfte des Betrages liefert. Dies folgt daraus, daß die Belastung K in D_1 auf A_1 denselben Einfluß ausüben muß, wie die Belastung K in D_2 ihn auf A_2 äußert, und daraus, daß die Horizontalkräfte stets in beiden Widerlagern in gleicher Größe auftreten.

Wenn daher der Bogen nur in einem Punkte der einen Hälfte, etwa in D_1 , durch die Last K angegriffen wird, so ist der Horizontalschub der Widerlager auch nur halb so groß, als (29) anzeigt, daher hat man für diesen Fall:

$$H = \frac{5}{64nl} K \left(5 - 6 \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4} \right) \dots \dots \dots (30)$$

Selbstredend sind die verticalen Reactionen der beiden Widerlager für diesen Fall der einseitigen Belastung nun nicht mehr von gleicher Größe, sondern durch:

$$V_1 = K \frac{l+a}{2l} \text{ für } A_1 \dots \dots \dots (31)$$

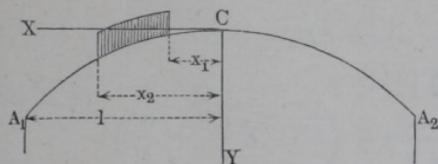
und

$$V_2 = K \frac{l-a}{2l} \text{ für } A_2 \dots \dots \dots (32)$$

gegeben.

Wenn man in (30) für K im Abstände a von der Mitte die Belastung $q \partial x$ eines Elementes im Abstände x einführt, so hat man für H den durch dieses Element erzeugten Beitrag ∂H zu setzen, und man erhält daher für einen Bogenträger, welcher nach Fig. 339 einerseits zwischen den Abständen x_1 und x_2 gleichförmig mit q ($x_2 - x_1$) belastet ist, durch Integration den Horizontalschub:

Fig. 339.



$$H = \int_{x_1}^{x_2} \frac{5}{64nl} q \partial x \left(5 - 6 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} \right) \\ = \frac{5}{64nl} q \left[5(x_2 - x_1) - 2 \frac{x_2^3 - x_1^3}{l^2} + \frac{1}{5} \frac{x_2^5 - x_1^5}{l^4} \right], \quad (30^a)$$

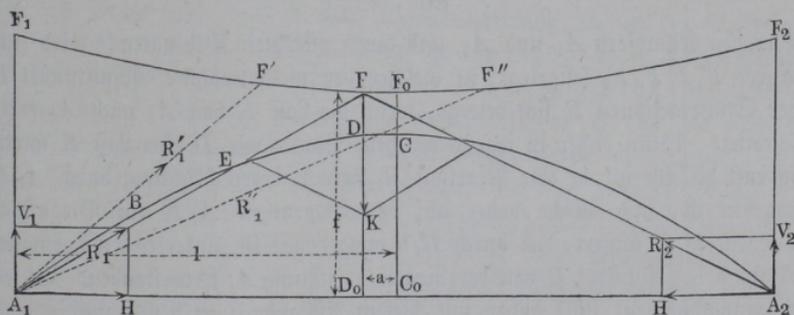
welcher Ausdruck für den Fall der Belastung einer ganzen Bogenhälfte, also mit $x_1 = 0$ und $x_2 = l$, entsprechend der Gleichung (24) in

$$H = \frac{5}{64nl} q \left(5l - 2l + \frac{1}{5} l \right) = q \frac{l^2}{4h}$$

übergeht.

Denkt man sich für den Bogenträger A_1CA_2 , Fig. 340, welcher in D durch die Belastung K angegriffen wird, die Horizontalkraft H berechnet,

Fig. 340.



und diese in jedem Widerlager A_1 und A_2 mit der daselbst auftretenden verticalen Reaction V_1 und V_2 zu je einer Mittelfraft R_1 und R_2 vereinigt, so müssen diese beiden letzteren Auflagerreactionen R_1 und R_2 mit der Belastung K im Gleichgewichte sein, folglich ihre Richtungen sich in einem Punkte F der Richtung von K schneiden. Die Höhe $FD_0 = f$ dieses

Durchschnittspunktes über der Horizontalen $A_1 A_2$ durch die Widerlager ist leicht zu bestimmen, denn man hat nach der Figur:

$$\frac{V_1}{H} = \frac{F D_0}{A_1 D_0} = \frac{f}{l - a}$$

oder

$$V_1 (l - a) = f H,$$

d. h. mit Rücksicht auf (30) und (31):

$$K \frac{l^2 - a^2}{2l} = f \frac{5}{64nl} K \left(5 - 6 \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4} \right).$$

Hieraus folgt jene Höhe f , wenn $n = \frac{h}{l^2}$ eingeführt wird:

$$f = \frac{32}{5} h \frac{l^2 - a^2}{5l^2 - 6a^2 + \frac{a^4}{l^2}} = \frac{32}{5} \frac{h}{5 - \frac{a^2}{l^2}} \dots \dots (33)$$

also unabhängig von der Größe der Belastung K , und nur abhängig von deren Lage (a) und von der Form des Parabelbogens.

Wenn man in dieser Gleichung nach und nach für $\frac{a}{l}$ alle Werthe von 0 für den Scheitel C bis 1 für die Kämpfer A_1 und A_2 einführt, so erhält man für die Höhen f des Schnittpunktes F über $A_1 A_2$ Werthe zwischen

$$f_0 = \frac{32}{25} h = 1,28 h$$

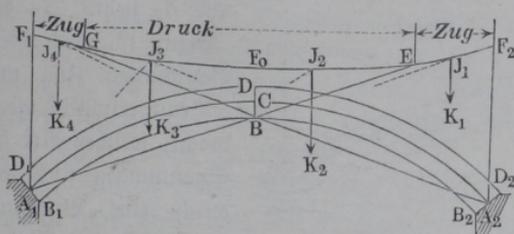
in C und

$$f_1 = \frac{32}{20} h = 1,6 h$$

über den Kämpfern A_1 und A_2 , und durch alle diese Ordinaten f wird eine Curve $F_1 F F_0 F_2$ festgelegt, in welcher der mehrerwähnte Schnittpunkt F der Stützreactionen R sich bewegt, wenn die Last K von A_1 nach A_2 fortschreitet. Wenn daher in irgend welchem Punkte wie D eine Last K wirkt, so ruft dieselbe in A_1 eine Reaction R_1 hervor, deren Richtung durch $A_1 F$ gegeben ist, und welche daher auf den Bogentheil $A_1 E$ ein Biegemoment in B äußert, das durch $R_1 b$ ausgedrückt ist, unter b den normalen Abstand des Punktes B von der Reactionsrichtung $A_1 F$ verstanden. Dieses Biegemoment fällt daher mit diesem Abstände b zu Null aus in dem Punkte E , in welchem die Bogenlinie von der Reactionsrichtung $A_1 F$ geschnitten wird. Hieraus folgt weiter, daß die Verticalebene durch F eine Scheide der Belastungen bildet, welche in E entgegengesetzte Biegemomente hervorrufen. Es ist nämlich ebenfalls aus der Figur zu ersehen, daß eine Versetzung der Last K nach F' , links von FD , eine Reaction R_1' in A_1 erzeugt, welche das Trägerstück $A_1 E$ um E rechts herum zu drehen

strebt, während die Last in einem Punkte rechts von F , etwa in F'' , eine im entgegengesetzten Sinne drehende Reaction in A_1 hervorruft. Diese Eigenschaft der Curve F kann daher dazu dienen, für irgend welchen Querschnitt des Bogenträgers den ungünstigsten Belastungszustand zu ermitteln.

Fig. 341.



Es sei zu dem Ende wieder durch $A_1 C A_2$, Fig. 341, die Mittellinie eines Bogenträgers dargestellt, welcher etwa aus den beiden Gurtungen $B_1 B B_2$ und $D_1 D D_2$ mit zwischenliegenden Füllungsgliedern bestehen möge. Es

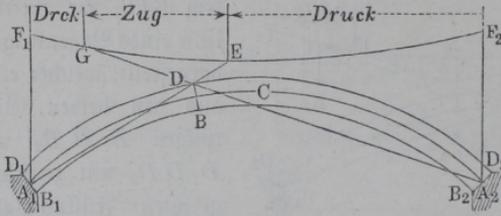
sei ferner $F_1 F_0 F_2$ die gemäß der Gleichung (33) ermittelte Curve, welche den geometrischen Ort für die Schnittpunkte der beiderseitigen Stützreaktionen R darstellt. Um für die obere Gurtung in irgend einem Querschnitte des Bogenträgers, z. B. BD , den ungünstigsten Belastungszustand zu ermitteln, denkt man sich nach dem Früheren B als Momentenmittelpunkt angenommen. Legt man nun durch B die beiden nach A_1 und A_2 gerichteten Strahlen, welche die Curve F in E und G treffen, so ist leicht zu ersehen, daß die Verticalebenen durch diese Schnittpunkte Grenzscheiden für die Belastungen bilden, welche in der Obergurtung bei D entgegengesetzte Anstrengungen hervorgerufen.

Irgend eine Belastung K_1 des Feldes zwischen E und A_2 äußert nämlich auf das Trägerstück $A_1 B D$ eine Reactionswirkung R_1 in der Richtung $A_1 J_1$, welche das Trägerstück $A_1 B$ um B links herum zu drehen strebt, so daß dadurch in der oberen Gurtung bei D eine Zugspannung hervorgerufen wird. Eine Last K_2 dagegen zwischen B und E ruft die rechts um B drehende Reaction von der Richtung $A_1 J_2$ hervor, und erzeugt somit Druckspannung in D . Dasselbe gilt auch für eine zwischen B und G wirkende Last K_3 , denn deren Einfluß auf das Trägerstück $A_1 B D$ stellt sich dar als die Mittelkraft aus der in der Richtung $A_1 J_3$ wirkenden Reaction R_1 und der Belastung K_3 , und diese Mittelkraft ist nichts anderes, als der in der Richtung $J_3 A_2$ wirkende Auflagerdruck gegen die Stütze A_2 . Da diese Kraft auch um B rechts drehend wirkt, so muß sie in D ebenfalls Druckspannung erzeugen. Endlich wird eine die Strecke zwischen G und A_1 angreifende Last K_4 eine Wirkung in der Richtung $J_4 A_2$ auf das Bogenstück $A_1 B D$ ausüben, folglich wegen der links drehenden Wirkung Zugspannung in D hervorgerufen. Die obere Gurtung wird daher in D den äußersten Anstrengungen ausgesetzt sein, wenn die bewegliche Last ent-

weder nur die Strecke EG , oder nur die beiden Strecken F_1G und EF_2 bedeckt.

In gleicher Weise findet sich für die untere Gurtung in B , Fig. 342, die ungünstigste Belastung, wenn man den oberen Knotenpunkt D als Momenten-

Fig. 342.

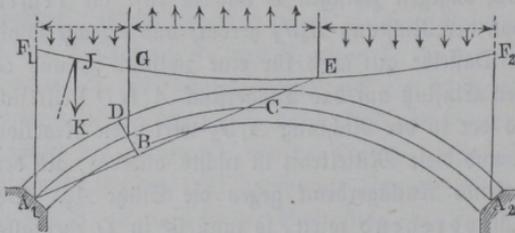


mittelpunkt betrachtet, und von D nach A_1 und A_2 zieht. In der Figur ist durch die Bezeichnung Zug und Druck ersichtlich gemacht, welcher Art die Spannungen sind, die durch eine Belastung der betreffenden Abthei-

lung in B hervorgerufen werden. Es muß dabei bemerkt werden, daß die hier ins Auge gefaßten, durch die bewegliche Last K hervorgerufenen Zug- oder Druckspannungen zu denjenigen Spannungen hinzutreten, welche vermöge der constanten Belastung durch das Eigengewicht p hervorgerufen werden. Da diese letzteren Spannungen immer Druckspannungen sind, so erkennt man, daß die ungünstigste für die Dimensionen der Gurtungen maßgebende Belastungsart diejenige sein wird, bei welcher auch durch die bewegliche Last nur Druckspannung erzeugt wird, d. h. wenn die in den Figuren 341 und 342 mit Druck bezeichneten Abtheilungen allein belastet sind, also die innere, wenn es sich um die Obergurtung, und die beiden äußeren, wenn es sich um die Untergurtung handelt.

Die mehrerwähnte Curve F , welche den geometrischen Ort für die Durch-

Fig. 343.



Belastungszustand zu ermitteln, für welchen die tangentialen Abscheerungskraft in irgend einem Querschnitte ihren größten Werth erreicht, so daß hieraus auch die größten Anstrengungen der Füllungsglieder bestimmt werden können.

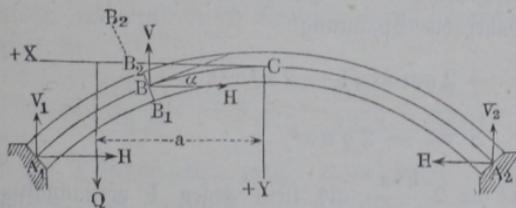
Es sei nämlich BD , Fig. 343, wieder ein beliebiger Querschnitt des Bogens und A_1E senkrecht zu diesem Querschnitte gezogen, so ist nach dem Obigen klar, daß ein in der verticalen Ebene durch E wirkendes Gewicht in BD keine tangentiale Schubkraft erzeugen kann, da die hervorgerufene Reaction R_1

der Stütze A_1 normal zu der Querschnittsfläche BD gerichtet ist. Man erkennt daraus, daß jede rechts von E zwischen E und A_2 wirkende Belastung eine Schubkraft in DB erzeugt, welche bestrebt ist, das Bogenstück A_1BD nach innen oder unten zu verschieben, während eine Belastung zwischen E und der Verticalebene G durch die Mitte des Querschnittes eine Auflagerreaction R_1 erzeugt, welche das Stück A_1BD aufwärts zu verschieben trachtet. Eine Belastung der Strecke GA_1 dagegen muß wieder abwärts wirkende Schubkräfte hervorrufen, da der Einfluß einer solchen Belastung K auf A_1BD sich wieder als Mittelkraft aus K und der nach A_1J gerichteten Reaction R_1 , d. h. als der nach JA_2 gerichtete Druck gegen diejenige Stütze A_2 bestimmt.

Den Horizontalschub H für diese ungünstigsten Belastungszustände hat man in jedem Falle nach der Gleichung (30^a) zu ermitteln.

Spannungen der Bögen. Hat man in der vorstehend angegebenen §. 66. Art für einen bestimmten Belastungszustand eines Bogens die horizontale Schubkraft H , sowie die verticalen Auflagerreactionen V_1 und V_2 in A_1 und A_2 , Fig. 344, ermittelt, so bestimmt sich für irgend einen Querschnitt

Fig. 344.



durch den Punkt B die daselbst auftretende Spannung wie folgt. Auf diesen Querschnitt wirkt eine Horizontalkraft, welche für den Bogen an jeder Stelle den constanten Werth $-H$ der horizontalen

Widerlagerreaction hat, und eine verticale Kraft V , welche sich aus der Differenz zwischen der aufwärts gerichteten Auflagerreaction $-V_1$ in A_1 und den zwischen A_1 und B wirkenden Belastungen Q , also zu

$$V = Q - V_1 \dots \dots \dots (34)$$

bestimmt. Es sind hier wieder diese Kräfte positiv oder negativ angenommen, je nachdem sie nach den Richtungen der positiven oder negativen Coordinatenaxen wirken. Bezeichnet nun α den Neigungswinkel der parabolischen Mittellinie des Bogens in B gegen den Horizont, so erhält man die nach dieser Tangente, d. h. normal zu dem Querschnitte B_1B_2 gerichtete Spannung zu

$$S = V \sin \alpha + H \cos \alpha = V \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{H \partial x}{\partial s}.$$

Für die Parabel hat man nun nach (7) und (8):

$$\partial y = 2nx \partial x \text{ und } \partial s = (1 + 2n^2x^2) \partial x,$$

so daß man hiermit

$$S = \frac{V2nx + H}{1 + 2n^2x^2}$$

oder annähernd

$$S = (V2nx + H)(1 - 2n^2x^2) \dots \dots (35)$$

erhält.

Setzt man zunächst wieder voraus, der Bogenträger sei wie ein gerader Balken mit seinen Enden verschieblich auf horizontale Stützflächen gesetzt, so daß $H = 0$ ist, so findet man bei einer Belastung des Scheitels C durch $2K$, also mit $V = -K$, die Spannung

$$S = -K2nx(1 - 2n^2x^2).$$

Die Spannung ist daher in diesem Falle im Scheitel gleich Null und wächst mit x , so daß sie an den Enden für $x = l$ den größten Werth

$$S_{max} = -K2nl(1 - 2n^2l^2) = -2K \frac{h}{l} \left(1 - 2 \frac{h^2}{l^2}\right)$$

annimmt.

Wäre unter derselben Voraussetzung verschieblicher Auflager der Träger gleichmäßig mit q pro Längeneinheit der Horizontalprojection belastet, so wäre $V = -qx$, und daher die Spannung

$$S = -2qn^2x^2(1 - 2n^2x^2),$$

oder angenähert

$$S = -2qn^2x^2,$$

da man den Werth $2n^2x^2 = 2 \frac{h^2x^2}{l^4}$ als klein gegen 1 vernachlässigen kann. Auch hierfür ist die Spannung im Scheitel gleich Null, und sie erreicht ihren größten Werth an den Enden zu

$$S_{max} = -2qn^2l^2 = -2qh.$$

Nimmt man dagegen an, daß der Bogen sich in A_1 und A_2 gegen feste Widerlager stemme, so hat man bei einer Belastung des Scheitels durch $2K$ die Verticalkraft $V = -K$ und nach (23) die Horizontalkraft

$$H = -K \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right),$$

womit man aus (35)

$$S = \left[-K2nx - K \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right) \right] (1 - 2n^2x^2)$$

erhält.

Dies schreibt sich, unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von n :

$$\begin{aligned}
 S &= K \left(-2nx - \frac{25l}{32h} + \frac{h}{28l} + \frac{25}{16} \frac{ln^2}{h} x^2 \right) \\
 &= K \left(\frac{25}{16} \frac{h}{l^3} x^2 - 2 \frac{h}{l^2} x - \frac{25l}{32h} + \frac{h}{28l} \right) \dots (36)
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird mit:

$$\frac{25}{16} \frac{h}{l^3} 2x = 2 \frac{h}{l^2}, \text{ d. h. mit } x = \frac{16}{25} l = 0,64 l$$

ein Maximum von dem Betrage:

$$S_{max} = -K \left(\frac{25l}{32h} + \frac{423h}{700l} \right).$$

Wenn dieser Bogen gleichmäßig belastet ist, so hat man:

$$V = -qx,$$

und nach (24):

$$H = -q \frac{l^2}{2h},$$

so daß man hiermit die Druckkraft:

$$S = \left(-qx \cdot 2nx - q \frac{l^2}{2h} \right) (1 - 2n^2x^2) = -q \left(\frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right) (37)$$

erhält, und wenn dieser Bogen noch außerdem das Gewicht $2K$ im Scheitel trägt, ist:

$$S = K \left(\frac{25}{16} \frac{h}{l^3} x^2 - 2 \frac{h}{l^2} x - \frac{25l}{32h} + \frac{h}{28l} \right) - q \left(\frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right) \dots (38)$$

Durch Differentiation erhält man hieraus denjenigen Werth von x , für welchen S zu einem Maximum wird, aus:

$$K \left(\frac{25}{8} \frac{h}{l^3} x - 2 \frac{h}{l^2} \right) - 2q \frac{h}{l^2} x = 0$$

zu

$$x = \frac{16K}{25K - 16ql} l.$$

Dieser Ausdruck gilt natürlich nur, so lange er Werthe liefert, welche kleiner als l sind; wenn dagegen $x > l$, d. h. wenn $16K > 25K - 16ql$ ist, oder für $K \leq \frac{16}{9} ql$ stellt sich die größte Druckkraft S an den Enden A_1 und A_2 ein.

Die Druckkraft S erzeugt in dem Querschnitte F des Bogens eine spezifische Druckspannung von der Größe:

$$s_d = \frac{S}{F} \dots \dots \dots (39)$$

Um für diesen Fall die schwächste Stelle, für welche s ein Maximum wird, zu erhalten, findet man aus (42) durch $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$:

$$\frac{K}{F} \left(\frac{25}{8} \frac{h}{l^3} x - 2 \frac{h}{l^2} \right) + \frac{Ke}{T} \left[-1 + \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = 0,$$

oder mit $\frac{\partial y}{\partial x} = 2nx = 2 \frac{h}{l^2} x$, wenn man mit $\frac{TF l^2}{K}$ multiplicirt:

$$T \frac{25}{8} \frac{h}{l} x - T 2h - Fe l^2 + Fe \left(\frac{25}{16} l - \frac{h^2}{14l} \right) x = 0,$$

woraus

$$x = \frac{T 2h + Fe l^2}{\frac{25}{8} T \frac{h}{l} + Fe \left(\frac{25}{16} l - \frac{h^2}{14l} \right)} \dots \dots \dots (43)$$

folgt. Wenn man hierin das Glied $\frac{h^2}{14l}$ vernachlässigt, so folgt annähernd

$$x = \frac{16}{25} l,$$

und durch Einführung dieses Werthes und

$$y = \frac{h}{l^2} x^2 = \frac{256}{625} h$$

in (42) erhält man daher die größte Spannung:

$$\begin{aligned} s_{max} &= -\frac{K}{F} \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{423}{700} \frac{h}{l} \right) + \frac{Ke}{T} \left[\frac{9}{25} l - \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right) \frac{369}{625} h \right] \\ &= -\frac{K}{F} \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{423}{700} \frac{h}{l} \right) - \frac{Ke}{T} \left(\frac{81}{800} l - \frac{369}{17500} \frac{h^2}{l} \right) \dots \dots (44) \end{aligned}$$

Wenn die Last $2lq$ gleichmäßig über den Bogen vertheilt ist, so hat man, wie oben gefunden, das Moment M und also auch die Biegungsspannung für jeden Querschnitt gleich Null; die ganze Spannung ist also die aus S sich ergebende nach (37) durch:

$$s = \frac{S}{F} = -\frac{q}{F} \left(\frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right) \dots \dots \dots (45)$$

bestimmt.

Durch die Druckkraft S wird auch eine Zusammendrückung des Bogenträgers in tangentialer Richtung, also eine Verkürzung der Bogenlänge, und in Folge davon eine Senkung des Scheitels herbeigeführt, welche sich folgenderart bestimmt. Bezeichnet man mit σ die Verkürzung eines Bogenstückes zwischen dem Scheitel und einem Punkte mit der Abscisse x , ist also

unter $\partial \sigma$ die Verkürzung des Bogenelementes ∂s verstanden, so hat man nach den für die rückwirkende Elasticität geltenden Regeln:

$$\partial \sigma = \frac{S}{FE} \partial s = \frac{S}{FE} (1 + 2n^2 x^2) \partial x,$$

wenn E den Elasticitätsmodul des Bogenmaterials bedeutet. Man erhält daher die Verkürzung σ für das Stück zwischen den Abscissen 0 und x zu:

$$\sigma = \int_0^x \frac{S}{FE} (1 + 2n^2 x^2) \partial x \dots \dots \dots (46)$$

Für einen in der Mitte mit $2K$ belasteten Bogen hat man daher nach (36), wenn wiederum der Querschnitt F überall von gleicher Größe vorausgesetzt wird:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{K}{FE} \int_0^x \left(\frac{25}{16} \frac{h}{l^3} x^2 - 2 \frac{h}{l^2} x - \frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{h}{28l} \right) \left(1 + 2 \frac{h^2}{l^4} x^2 \right) \partial x \\ &= \frac{K}{FE} \left(- \frac{h}{l^2} x^2 - \frac{25}{32} \frac{l}{h} x + \frac{h}{28l} x \right) \dots \dots \dots (47) \end{aligned}$$

und für die Bogenhälfte mit $x = l$:

$$\sigma = - \frac{K}{FE} \left(\frac{27}{28} h + \frac{25}{32} \frac{l^2}{h} \right) \dots \dots \dots (47^a)$$

Wenn dagegen der Bogen gleichmäßig mit $2ql$ belastet ist, so erhält man mit $S = -q \left(\frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right)$ nach (37):

$$\begin{aligned} \sigma &= - \frac{q}{FE} \int_0^x \left(\frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right) \left(1 + 2 \frac{h^2}{l^4} x^2 \right) \partial x \\ &= - \frac{q}{FE} \left(\frac{2}{3} \frac{h}{l^2} x^3 + \frac{l^2}{2h} x + \frac{2}{5} \frac{h^3}{l^6} x^5 \right) \dots \dots \dots (48) \end{aligned}$$

und für die Bogenhälfte:

$$\sigma = - \frac{q}{FE} \left(\frac{2}{3} hl + \frac{l^3}{2h} + \frac{2}{5} \frac{h^3}{l} \right) \dots \dots \dots (48^a)$$

Wenn der Bogen beiden Belastungen $2K$ und $2ql$ ausgesetzt ist, so bestimmt sich die Verkürzung einer Bogenhälfte durch die Summe von (47^a) und (48^a).

Aus der Verkürzung einer Bogenhälfte läßt sich auch die Senkung η des Scheitels bestimmen. Man findet nämlich die Bogenlänge s der Parabel durch Integration von (8) zu:

$$s = x + \frac{2}{3} n^2 x^3 = x + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^4} x^3$$

und für die Bogenhälfte mit $x = l$:

$$s = l + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l}.$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiiren nach h :

$$\partial s = \frac{4}{3} \frac{h}{l} \partial h \text{ oder } \partial h = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \partial s.$$

Setzt man daher für ∂s die Verkürzung σ ein, so giebt ∂h die Veränderung von h , d. h. die Senkung des Scheitels:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \sigma.$$

Beispielsweise würde für gleichzeitige Belastung des Bogens mit $2K$ im Scheitel und mit $2lq$ in gleichmäßiger Vertheilung die Senkung des Scheitels nach (47^a) und (48^a) annähernd zu:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l^3}{h^2 FE} \left(\frac{25}{32} K + \frac{q l}{2} \right) \dots \dots \dots (49)$$

folgen.

Nach den vorstehenden Ermittlungen ist es nunmehr auch leicht, den Einfluß von Temperaturänderungen auf die Spannungsverhältnisse der Bogenträger zu ermitteln. Denkt man sich nämlich zunächst den Bogenträger mit seinen Enden verschieblich auf horizontale Stützflächen gestellt, so wird die mit der Zunahme der Temperatur verbundene Verlängerung des Trägers eine Vergrößerung der horizontalen Entfernung der Enden A_1 und A_2 und somit eine Verschiebung der letzteren nach außen im Gefolge haben. Gesezt diese Verschiebung betrage für jedes Ende den Werth τl , unter τ die durch die Temperaturerhöhung bewirkte Aenderung der Längeneinheit verstanden, so kann man sich die Wirkung der festen Widerlager derartig denken, daß dieselben Horizontalkräfte H auf die Trägerenden ausüben, von genügender Größe, um die Verschiebung wieder aufzuheben. Man erhält daher den hierzu erforderlichen Horizontalschub aus (13^b), wenn man darin $V = 0$ sezt und l für a einführt, durch:

$$\xi = \tau l = - \frac{H}{TE} \frac{8}{15} h^2 l.$$

Der hieraus folgende Horizontaldruck:

$$H = \frac{15}{8} \frac{\tau TE}{h^2}$$

erzeugt im Querschnitte durch den Scheitel eine Druckspannung:

$$s_a = \frac{H}{F}$$

und eine Biegungsspannung:

$$s_b = \frac{M e}{T} = \frac{H h e}{T},$$

so daß die durch die Temperaturzunahme erzeugte Spannung im Scheitel den größten Werth:

$$s_t = \frac{H}{F} + \frac{H h e}{T} = \frac{15}{8} \frac{\tau E}{h^2} \left(\frac{T}{F} + h e \right) \dots (50)$$

annimmt.

Hierin kann man den Ausdehnungscoefficienten für Eisen zu 0,000012 für 1° C. annehmen, so daß $\tau = 0,000012 t$ zu setzen ist, wenn t die Temperaturveränderung in Graden C. bedeutet. Um diese durch die Temperaturveränderung hervorgerufene Spannung muß die durch die Belastung erzeugte geringer sein, als die höchstens zulässige, und hierdurch wird der Vortheil einer günstigen Materialverwendung größtentheils wieder aufgehoben, welcher sonst mit dem elastischen Bogenträger verbunden ist.

Beispiel. Ein gußeiserner Bogenträger von 5 m Spannweite und 1 m Pfeilhöhe der parabolischen Mittellinie hat in seinem Scheitel ein Gewicht von 5000 kg zu tragen. Wie groß hat man die Breite b des rechteckigen Querschnitts im Scheitel anzunehmen, wenn die Höhe daselbst 0,3 m gewählt wird, unter der Bedingung, daß mit Berücksichtigung einer Temperaturschwankung von 30° C. die größte Faserpannung den Betrag von $s = 6$ kg pro Quadratmillimeter nicht übersteige?

Hier ist, unter $a = 300$ mm die Höhe und unter b die gesuchte Breite des Querschnitts im Scheitel verstanden:

$$F = b \cdot 300 \text{ und } T = \frac{b}{12} 300^3,$$

daher

$$\frac{T}{F} = \frac{300^2}{12} \text{ und } e = \frac{a}{2} = 150,$$

daher erhält man nach (50) die durch die Temperaturveränderung hervorgerufene Spannung, wenn der Elasticitätsmodul $E = 10\,000$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} s_t &= \frac{15}{8} \frac{0,000012 \cdot 30 \cdot 10\,000}{1000 \cdot 1000} \left(\frac{300 \cdot 300}{12} + \frac{300 \cdot 1000}{2} \right) \\ &= \frac{0,054}{8} \left(\frac{90}{12} + \frac{300}{2} \right) = 0,054 \cdot 19,7 = 1,06 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Die durch die Belastung erzeugte Spannung darf daher nicht mehr als $6 - 1,06 = 4,94$ kg betragen. Für den Scheitel erhält man nun aus (42^a) durch Einführung von $K = 2500$, $l = 2,5$ m und $h = 1$ m die größte Spannung:

$$s_c = - \frac{2500}{b \cdot 300} \left(\frac{25}{32} \frac{2,5}{1} - \frac{1}{28 \cdot 2,5} \right) - \frac{2500 \cdot 150}{\frac{1}{12} b \cdot 300^3} \left(\frac{7}{32} 2500 + \frac{1000 \cdot 1000}{28 \cdot 2500} \right)$$

$$= - \frac{16,15}{b} - \frac{93,53}{b} = - \frac{109,68}{b}.$$

Daher folgt:

$$b = \frac{109,68}{4,94} = 22,2 \text{ mm.}$$

Wenn der Bogen außerdem noch eine gleichmäßig über seine Horizontalprojection verbreitete Last von $q = 500 \text{ kg}$ pro Meter Länge zu tragen hätte, so würde dadurch im Scheitel nach (45) noch eine Spannung:

$$s = - \frac{500}{b \cdot 300} \frac{2,5 \cdot 2,5}{2 \cdot 1} = - \frac{5,21}{b}$$

eintreten, so daß man für diesen Fall die erforderliche Breite aus:

$$b = \frac{16,15 + 93,53 + 5,21}{4,94} = \frac{114,89}{4,94} = 23,2 \text{ mm}$$

erhalten würde.

Die Senkung des Scheitels durch die Compression des Materials berechnet sich in diesem letzteren Falle nach (49) zu:

$$\eta_1 = \frac{3}{4} \frac{2,5^3}{1000^2} \frac{1000^3}{23,2 \cdot 300 \cdot 10000} \left(\frac{25}{32} 2500 + 500 \cdot 2,5 \right)$$

$$= \frac{15,63 \cdot 32,03}{928} = 0,54 \text{ mm,}$$

während die durch die Biegung sich nach (25^a) zu:

$$\eta_2 = \frac{1}{12} \frac{2500}{23,2 \cdot 300^3 \cdot 10000} \frac{2,5^3 \cdot 1000^3}{128} = \frac{3906}{6682} = 0,59 \text{ mm,}$$

also die gesammte Senkung zu:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = 1,13 \text{ mm}$$

berechnet.

Anmerkung. Für einen geraden Balken von gleicher Spannweite und Belastung hätte man für die Mitte das Biegemoment durch:

$$M = 5000 \frac{5}{4} + 500 \frac{5^2}{8} = 7812,5 \text{ mkg,}$$

folglich erhielte man bei gleicher Höhe des Trägers die erforderliche Breite b aus:

$$M = s \frac{T}{e} = 6 \frac{b h^2}{6} = b h^2$$

zu

$$b = \frac{7812,5 \cdot 1000}{300 \cdot 300} = 86,7 \text{ mm.}$$

Dieses Resultat zeigt die günstigere Verwendung des Materials bei dem Bogenträger im Vergleich zu dem geraden Balken, welche auch dann noch stattfindet, wenn man bei dem letzteren einen vortheilhafteren Querschnitt als den rechteckulären wählen wird.

§. 67. **Bogenträger aus Holz und Gusseisen.** Bei gleichem Quersprofil und gleichem Tragmodul, sowie unter übrigens gleichen Verhältnissen, besitzen, dem Vorstehenden zufolge, die Träger mit bogenförmiger Ase, die sogenannten Bogenträger, eine größere Tragkraft als die Balkenträger, deren Längsaxe eine gerade ist. Da nun die Bogenträger aus Gußeisen direct beim Gusse die Bogenform erhalten, so kann der Tragmodul bogenförmiger Balken von dem der geraden Balken nicht sehr verschieden sein, und deshalb ist denn auch bei gußeisernen Trägern die Anwendung der Bogenform von besonderem Vortheil. Anders ist es aber bei Trägern aus Holz oder Schmiedeeisen. Da das Holz und in einem gewissen Grade auch das Eisenblech durch das Biegen bei seiner Verwendung zu Bogenträgern an Tragkraft verliert, so ist der Tragmodul eines Trägers aus gebogenem Holze oder Eisenblech kleiner als der eines geraden Trägers oder Balkens und daher bei diesen Stoffen die Bogenform mit Vorsicht und namentlich immer nur von mäßiger Krümmung anzuwenden. Ist r der Krümmungshalbmesser des gebogenen Balkens und e der größte Abstand seiner Fasern von der neutralen Ase, so hat man die spezifische Ausdehnung oder Zusammendrückung dieser Fasern (s. Bd. I):

$$\sigma = \frac{e}{r},$$

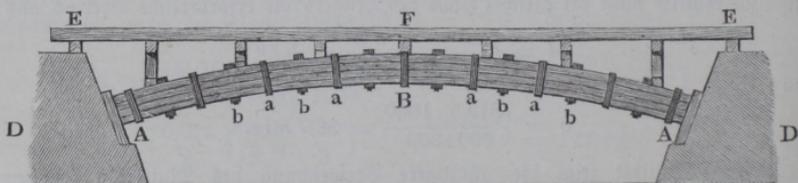
und daher die entsprechende Spannung:

$$s = \sigma E = \frac{e}{r} E,$$

wo E den Elasticitätsmodul bezeichnet.

Da hiernach die Spannung des gebogenen Balkens direct wie die Dicke oder Höhe ($2e$) und umgekehrt wie der Halbmesser r der Krümmung desselben wächst, so setzt man ihn mit Vortheil aus dünnen brettförmigen Stücken (Bohlen) zusammen, indem man dieselben mit ihren breiten Flächen über einander legt, zusammenschraubt u. s. w. Einen solchen Bohlenbogen ABA , welcher aus vier über einander liegenden Bohlen besteht, führt Fig. 345 vor Augen. Dieser Bogen trägt einen Balken EFE und stützt

Fig. 345.



sich gegen die Widerlager DD . Die Bohlen, aus welchen derselbe besteht, werden durch Bänder $a, a \dots$ und Schrauben $b, b \dots$ zusammengehalten.

Die Balkenbögen werden aus ganzen Balken in ähnlicher Weise zusammengesetzt; übrigens verbindet man auch die über einander liegenden Balken noch durch Verzahnung oder durch eingesetzte Dübel, wie gerade Balken, noch fester mit einander. Zum Biegen der Balken und Bohlen zu Tragbögen ist Lärchen-, Kiefern-, Tannen- und Eichenholz, und zwar im grünen Zustande, zu verwenden. Man biegt diese Holzstücke von der Mitte aus nach den Enden zu auf einem besondern Gerüste, und läßt sie auf diesem mindestens zwei Monate lang im gespannten Zustande liegen. Bei diesem Biegen des frischen Holzes wird natürlich die Elasticitätsgrenze bedeutend überschritten, und es ist daher zu erwarten, daß der Festigkeitsmodul des trockenen Balkens, welcher eine bleibende Bogenform angenommen hat, kleiner ist als derjenige, welchen er ohne Biegung haben würde. Ardant findet ihn kaum ein Viertel von dem eines einfachen geraden Balkens. Nach Thl. I wäre z. B. für Holz im Mittel die relative Ausdehnung bei der Elasticitätsgrenze:

$$\sigma = \frac{e}{r} = \frac{1}{600},$$

und daher der entsprechende Krümmungshalbmesser:

$$r = 600 e,$$

z. B. für $e = 0,15$ m, $r = 90$ m, daher bei einer Spannweite $2l = 16$ m die zulässige Pfeilhöhe nur $h = \frac{l^2}{2r} = \frac{64}{180} = 0,355$ m, und folglich das

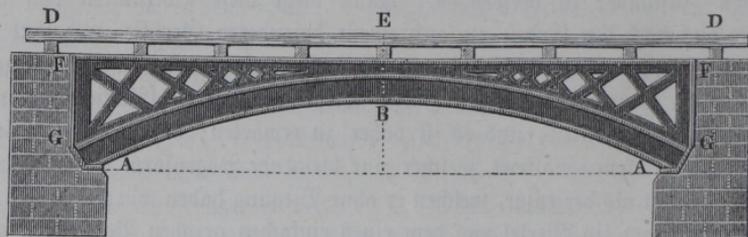
Verhältniß $\frac{h}{2l} = \frac{1}{45}$. Erfahrungsmäßig kann man nach Wiebeking (s. dessen allgemeine Wasserbaukunst Bd. III) Balken von Tannenholz um $\frac{h}{2l} = \frac{1}{25}$, und solche von Eichenholz um $\frac{h}{2l} = \frac{1}{40}$ biegen; die viel schwächeren Bohlen von vielleicht nur zwei Zoll Stärke lassen sich natürlich in einem viel stärkeren Verhältnisse krümmen, z. B. um $\frac{h}{2l} = \frac{1}{10}$. Die einzelnen Balken und Bohlen haben eine Länge von höchstens 16 m; bei größeren Spannweiten muß man folglich mehrere Balken oder Bohlen der Länge nach an einander anstoßen (schiften).

Bei einer andern Construction von Bohlenbögen werden die Bohlen nicht über, sondern neben einander gelegt, weshalb dieselben auch nicht krumm gebogen, sondern nur krumm geschnitten werden. Hierbei geht jedoch viel Holz verloren; auch erfordert diese Construction eine sehr solide Verbindung der Bohlen oder Felgen unter einander.

Schmiedeeiserne Tragbögen lassen sich natürlich mit Vortheil aus Eisenblech ausschneiden und zusammennieten.

Die Art und Weise, wie ein gußeiserner Bogen als Träger dient, ist aus Fig. 346 zu ersehen. Der eigentliche Bogen ABA ist außen und innen durch eine breite Rippe verstärkt und zur Unterstützung des Balkens DED dient eine breite Tragwand FF , welche den ganzen Bogen oben

Fig. 346.



horizontal begrenzt. Das Ganze stützt sich mittelst starker Flanschen an die Widerlagsmauern G, G . Wenn man diese Bögen aus mehreren Theilen zusammensetzt, so läßt man die einzelnen Stücke in Flanschen an einander anstoßen und verbindet dieselben mit einander durch Schraubenbolzen.

Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen abgehandelte Theorie der Tragkraft von krummen Balken oder Bögen ist von Ar d a n t (s. dessen am Ende des Capitelts angeführte Schrift) durch Versuche an verschiedenen Holzbögen erprobt worden. Was z. B. den Horizontalschub anlangt, so ergab sich für den Fall, daß die Last $2K$ in der Mitte des Bogens hängt, der Horizontalschub nach (23) zu:

$$H = K \left(\frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right),$$

und für den Fall, daß dieselbe längs der Sehne des Bogens gleichmäßig vertheilt ist, dieser Schub nach (24) zu:

$$H_1 = q \frac{l^2}{2h} = q2l \frac{l}{4h} = \frac{ql}{4h}.$$

Obgleich diese Formeln nur unter der Voraussetzung gefunden worden sind, daß die Träger nach der Parabel gebogen sind, so stimmen doch dieselben mit den Ergebnissen der Versuche an nach dem Kreise gebogenen Trägern ziemlich überein. So findet z. B. Ar d a n t für einen Halbkreisbogen, im ersten Falle:

$$H = 0,32 \cdot 2K = 0,64K,$$

und im zweiten Falle:

$$H_1 = 0,22 \cdot 2ql = 0,22Q,$$

während die Formeln, wenn man darin $l = h$ setzt, auf:

$$H = 0,745K \text{ und } H_1 = 0,25Q$$

führen.

Bei den häufiger angewendeten gedrückten Bögen ist, wie zu erwarten war, die Uebereinstimmung zum Theil noch größer.

Für die gleichförmig vertheilte Belastung mit $Q = 2lq$ ist, wenn das Verhältniß der halben Spannweite l zur Spannhöhe h :

$\frac{l}{h} =$	2	3	4	5	10	beträgt,
nach Ardant:	$H = 0,54 Q$	$0,775 Q$	$1,02 Q$	$1,33 Q$	$3,33 Q$,	

und dagegen nach der Formel $H = \frac{Ql}{4h}$:

$$H = 0,50 Q \mid 0,75 Q \mid 1,00 Q \mid 1,250 Q \mid 2,500 Q.$$

Was die Senkung des Scheitels betrifft, welche eine längs der Sehne gleichmäßig vertheilte Last hervorbringt, so kann dieselbe natürlich bei der Kreisform des Trägers nicht Null sein. Ardant findet dieselbe für einen Halbkreisbogen:

$$\eta = 0,007 \frac{Q l^3}{T E} = 0,084 \frac{Q l^3}{b a^3 E'}$$

wenn b und a die Querschnittsdimensionen des Bogens bezeichnen.

Bei einer längs der Sehne gleichmäßigen Belastung hat der Parabelbogen nur durch seine Druckfestigkeit zu widerstehen, und es folgt der entsprechende Querschnitt dieses Tragbogens aus (45), wenn man darin $x = l$ und $2ql = Q$ setzt:

$$F = \frac{q}{s} \left(h + \frac{l^2}{2h} \right) = \frac{Q}{2s} \left(\frac{h}{l} + \frac{l}{2h} \right).$$

Ein kreisbogenförmiger Träger muß dagegen auch durch seine Biegefestigkeit widerstehen, und es findet Ardant für denselben, wenn dessen Halbmesser durch r bezeichnet wird:

$$F = ab = \left(\mu + \frac{vr}{4a} \right) \frac{Q}{2s},$$

wobei für

$\frac{l}{h} =$	2	3	4	5	10	15	20
und	1,080	1,550	2,040	2,660	6,660	7,630	9,520
$\nu =$	0,792	0,263	0,117	0,053	0,034	0,022	0,001

zu setzen ist. Nach Ardant wäre für Tragbögen aus Holz

der Tragmodul s nur $= 0,3$ kg,

und für solche aus Gußeisen

der Tragmodul $s = 5$ kg

zu setzen.

Beispiel. Eine Brücke soll aus mehreren Brückenfeldern von je 17 500 kg Belastung und 24 m Spannweite bestehen, und die Unterstüßung dieser Last soll durch sieben Bögen von 4 m Höhe erfolgen, welche Querschnittsdimensionen hat man diesen Bögen zu geben?

Es ist hier $Q = \frac{175000}{7} = 25000$ kg; $h = 4$ m und $l = 12$ m. Bei einer parabolischen Form der Bögen wäre der Querschnitt:

$$F = ab = \left(\frac{4}{12} + \frac{12}{8}\right) \frac{25000}{2s} = 0,917 \frac{Q}{s},$$

und dagegen bei der Kreisform, da hier der Halbmesser r aus $r^2 = l^2 + (r-h)^2$ zu $r = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{h} + h\right) = 20$ m, sowie $\mu = 1,550$ und $\nu = 0,263$ ist:

$$F = ab = \left(1,550 + 0,263 \frac{20 \cdot 1000}{4a}\right) \frac{Q}{2s} = \left(0,775 + \frac{657}{a}\right) \frac{Q}{s}.$$

Für hölzerne Bögen ist $s = 0,3$ kg, daher $\frac{Q}{s} = 83333$, folglich im ersten Falle, d. h. bei der parabolischen Form:

$$ab = 0,917 \cdot 83333 = 76417 \text{ qmm},$$

woraus, wenn man $b = \frac{2}{3} a$ nimmt, die Höhe:

$$a = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 76417} = \sqrt{111626} = 339 \text{ mm und } b = 226 \text{ mm}$$

folgt.

Zu zweiten Falle bei der Kreisform dagegen ist:

$$ab = \frac{25000}{0,3} \left(0,775 + \frac{657}{a}\right),$$

oder, wenn wieder $b = \frac{2}{3} a$ gesetzt wird:

$$a^3 = \frac{3}{2} \frac{25000}{0,3} (0,775 a + 657) = 125000 (0,775 a + 657),$$

woraus

$$a = 50 \sqrt[3]{0,775 a + 657} = 50 \cdot 10,25 = 512 \text{ mm und } b = 341 \text{ mm}$$

folgt.

Will man im letzteren Falle zur Vermeidung der bedeutenden Holzstärken den Bogen aus Gußeisen construiren und setzt etwa $b = \frac{1}{8} a$ voraus, so erhält man ebenso mit $s = 5$ kg aus:

$$ab = \frac{1}{8} a^2 = \frac{25000}{5} \left(0,775 + \frac{657}{a}\right)$$

die Höhe

$$a = \sqrt[3]{40\,000} \sqrt[3]{0,775 a + 657} = 332 \text{ mm}$$

und

$$b = 41,5 \text{ mm.}$$

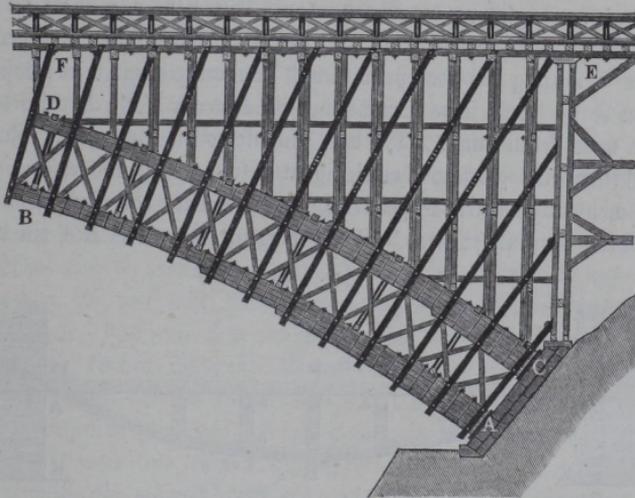
Der Horizontalschub jedes Bogens ist nach der vorstehenden Tabelle für $\frac{l}{h} = 3$ bei dem Kreisbogen:

$$H = 0,775 \cdot 25\,000 = 19\,375 \text{ kg,}$$

also für alle sieben Bögen 135 625 kg, während der Verticaldruck jedes Auflagers 87 500 kg beträgt. Hiernach ist die zur Herstellung der genügenden Stabilität erforderliche Stärke der Pfeiler nach den im ersten Capitel gegebenen Regeln festzustellen.

Eine der großartigsten Holzbrücken ist die auf der Newyork-Erie-Eisenbahn befindliche Cascadebrücke von Brown, welche über eine Schlucht von circa 94 m Weite und 55 m Tiefe gespannt ist. Von dieser Brücke zeigt Fig. 347 die Seitenansicht eines am Widerlager anstoßenden Stückes. Wie

Fig. 347.

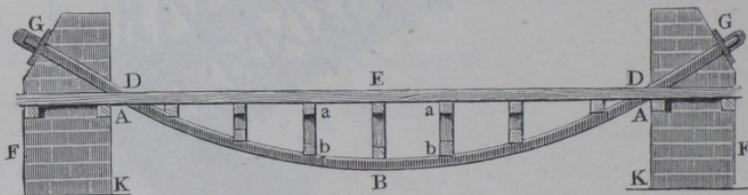


man sieht, so besteht diese Brücke in der Hauptsache aus Tragbögen AB , CD mit zwischen befindlichen Kreuzstreben. Diese Tragbögen sind größtentheils aus 3, nach den Enden zu aus 4, 5, und dicht an den Widerlagern sogar aus 6 Balken zusammengesetzt. Die Stärke dieser Balken ist 200 und 225 mm, und die der Kreuzstäbe 200 und 200 mm. Das Ende eines jeden Balkens ruht in einem eisernen Schuh, und diese Schuhe stützen sich auf eine untermauerte gußeiserne Platte. Die ganze Brückenbahn EF ruht mittelst verticaler Tragsäulen auf vier solchen Doppelträgern, welche unter einander wieder durch Kreuzstreben verbunden sind.

Anmerkung. Die größeren Holzbrücken haben zum Theil noch größere Spannweiten als die steinernen Brücken. Bei der oberen Schuytkill-Brücke kommt ein Bogen von über 100 m Spannweite und 6 m Höhe vor. Die alten Schweizer Brücken, sowie die Wiebeking'schen Brücken, haben schon Spannweiten von 50 bis 60 m. Bei der Trenton-Brücke hat der mittlere Bogen eine Spannweite von 60 m und eine Höhe von 8 m. Eine sehr große Gitterbrücke ist bei Wittenberge über die Elbe geführt. Dieselbe hat 11 Oeffnungen zu je 53,5 m und 3 zu je 37,5 m Spannweite. Die Tragwände dieser Brücke haben eine Höhe von 6 m, während ihr Abstand von einander nur 4 m misst. Die Versuche, welche vorläufig mit einem Theile dieser Brücke angestellt worden sind, haben sehr günstige Resultate geliefert; bei der Fahrt und dem Stillstande einer Locomotive von 600 Centner Gewicht betrug die Senkung nur 15 mm; bei einem Marsche von 240 Mann über die Brücke war dieselbe nur 14 mm, erst bei einer gleichmäßigen Belastung von 2000 Centnern und einer Ueberfahrt von zwei Locomotiven von 1260 Centner Gewicht betrug die Senkung 78 mm. Siehe die Nachrichten darüber in der Eisenbahnzeitung, 1850, Nr. 29 bis 31, oder polyt. Centralblatt, 1850, Lief. 18.

§. 68. Hängebögen. Wenn man den Tragbogen nicht nach oben, sondern nach unten, folglich in die Richtung der Last stellt, so findet in Hinsicht auf den seither betrachteten Fall nur der Unterschied statt, daß der Bogen durch die Belastung dort comprimirt und hier ausgedehnt wird, daß er also im ersten Falle durch seine Druck- und im letzteren Falle durch seine Zugfestigkeit widerstehen muß. Da das Schmiedeeisen eine große Zug- und das Gußeisen eine größere Druckfestigkeit besitzt, so ist das erstere mehr zu einer solchen umgekehrten Bogenstellung geeignet als das Gußeisen. Einen solchen Tragbogen führt Fig. 348 vor Augen. Es ist ABA ein schmiede-

Fig. 348.



eiserner Bogen, DED der von ihm getragene Balken, ferner sind FK, FK die beiden Widerlagspfeiler, und G, G Keile und Unterlagsplatten, womit sich die Bögen von außen gegen die Widerlager stützen. Natürlich sind es alle Mal mindestens zwei neben einander liegende Tragbögen, welche einen oder mehrere Balken wie DED unterstützen, und es besteht immer die Verbindung dieser Theile unter einander aus den Querbalken $a, a \dots$, $b, b \dots$ und Tragfäulen $ab, ab \dots$. Die Wirkung eines solchen Tragbogens auf die Widerlager ist, wie bei den umgekehrten Häng- und Sprengwerken, von außen nach innen gerichtet; man hat also hier dafür zu sorgen,

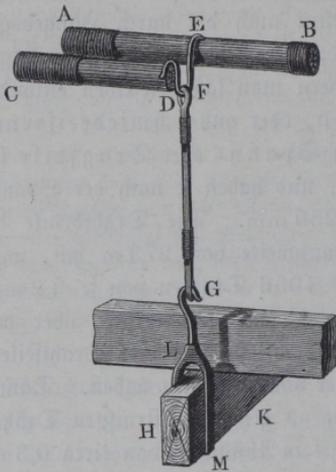
daß die Widerlager nicht um die inneren Kanten K, K nach innen kippen. Uebrigens kann man einen Balken DED durch einen solchen Bogen ebenso gut von oben als von unten unterstützen, wenn man nur die Tragsäulen ab, ab durch Hängesäulen ersetzt. Man hat es dann mit einem sogenannten Hängebogen zu thun und nennt auch die durch Hängebögen getragenen Brücken Hängebrücken. In der Regel bildet man diese Bögen nicht aus krummem Holz oder Eisen, sondern man läßt dieselben entweder aus Seilen, und namentlich Drahtseilen, oder aus schmiedeeisernen Ketten bestehen. Die hierzu verwendeten Spann- oder Tragsaile bestehen aus Draht von 1 bis 4 mm Dicke, und haben je nach der Spannweite u. s. w. eine Stärke von 25 bis 250 mm. Die Drahtbrücke bei Freiburg in der Schweiz, welche eine Spannweite von 273 m hat, wird z. B. von vier Seilen getragen, welche aus 1056 Drähten von je 3,2 mm Stärke bestehen, und 136 mm dick sind, und die Drahtbrücke über den Niagara-Wasserfall, von 257 m Spannweite, besteht aus vier Drahtseilen, welche bei 3640 Drähten einen Durchmesser von 250 mm haben. Damit die nur neben einander liegenden und übrigens gehörig gefirnigten Drähte eines Laues gehörig zusammenhalten, sind sie in Abständen von circa 0,3 m ungefähr 0,3 m lang mit anderem Draht umwickelt.

Die Glieder der Tragketten bestehen aus mehreren neben einander liegenden und hochkantig gestellten Eisenschienen von 2,5 bis 4 m Länge, und sind durch cylindrische Bolzen mit einander verbunden. Der Querschnitt eines Kettengliedes und folglich auch die Anzahl und die Querschnittsdimensionen der einzelnen Schienen eines ganzen Gliedes sind natürlich von der Spannweite, Höhe u. s. w. abhängig. Die 132 m spannende Kettenbrücke zu Prag wird z. B. von acht Ketten getragen, deren Glieder aus je sechs 3,14 m langen, 105 mm hohen und 15 mm dicken Schienen zusammengesetzt sind; die 198 m spannende Kettenbrücke zu Pesth ruht hingegen nur auf vier Ketten mit 3,75 m langen und 0,270 m hohen Gliedern, welche je 10 bis 11 Schienen enthalten, die zusammen in der Mitte der Kette eine Dicke von 310 mm und an den Enden derselben eine solche von 315 mm haben. Endlich hat man Hängebrücken aus über einander liegenden Eisenbändern construirt; eine größere Brücke dieser Art befindet sich zu Suresnes bei Paris. Dieselbe hat eine Spannweite von 63 m und es besteht hier jedes Tragsaile aus 20 über einander liegenden gewalzten Eisenbändern von 81 mm Breite und 3,83 bis 4,15 mm Dicke.

Das Hängewerk, welches die Brückenbalken mit den Spann- oder Tragsaile verbindet, besteht entweder aus schmiedeeisernen Hängestangen oder aus Hängeseilen. Die Art und Weise, wie diese Stangen oder Seile einerseits mit den Spannketten und andererseits mit den Balken der Brücke zu verbinden sind, ist aus Folgendem zu ersehen.

Hat eine Drahtbrücke nicht je zwei neben einander hängende Seile, so hängt man die Hängeseile mittelst einfacher Drehre an das Tragsseil; besteht

Fig. 349.



sie hingegen aus je zwei neben einander hängenden Seilen, so werden die Hängeseile mittelst Haken an ein solches Seilpaar aufgehangen. Diese Aufhängungsweise ist in Fig. 349 dargestellt. *AB* und *CD* sind die beiden Seile, *DE* ist der Haken und *FG* stellt das Hängeseil vor. Das Tragsseil *CD* ist unmittelbar beim Haken abgeschnitten gedacht. Die Enden *HK* der Querbalken oder Unterzüge, auf welchen die ganze Brücke ruht, sind entweder mit Bügeln *LM* umgeben, deren hakenförmige Köpfe in die unteren Drehre *G* der Hängeseile eingehakt werden, oder sie sind von unten mit Eisenplatten bekleidet, und es werden die durch die Querbalken und diese Platten gehenden, zu diesem Ende durchlochten oder schraubenförmig zugeschnittenen Enden der Hängestangen durch Keile oder starke Schraubennütern mit den ersteren fest verbunden.

Fig. 350.

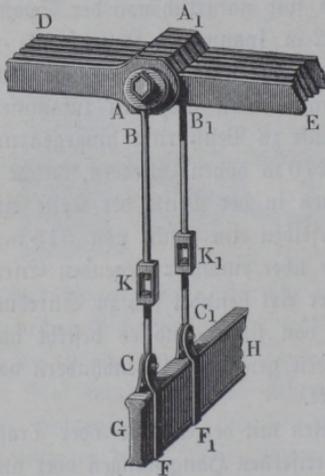
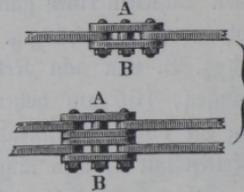


Fig. 351.



Die Art und Weise, wie die Hängestäbe an die Tragketten angehängen werden, ist aus Fig. 350 und Fig. 351 zu ersehen. Bei der ersteren Anordnung hängen die Hängestäbe *BC*, *B₁C₁* unmittelbar an dem Volzen *AA₁*, Fig. 350, welcher die Kettenglieder *DA* und *EA₁* mit einander verbindet. Die mit Stell- oder Scheerengliedern *K*, *K₁*

versehenen Hängestangen sind auch hier mittelst Bügel *CF*, *C₁F₁* an die gußeisernen Querbalken angeschlossen. Bei älteren Kettenbrücken sind die

Was die Breite der Brückenbahn anlangt, so rechnet man auf eine Laufbahn 1 bis 2 m und auf eine Fahrbahn 2 bis 4 m; eine Brücke mit zwei Lauf- und zwei Fahrbahnen erhält folglich eine Totalbreite von 6 bis 12 m.

Um der Brücke eine größere Steifigkeit zu geben, versteht man die Brückenbahn noch mit besonderen Verstrebungen, wie z. B. *QRS*, Fig. 353; sehr zweckmäßig sind z. B. die nach dem Principe der Gitterwände construirten Steifwände. Man kann auch nach *Cadiat* und *Dudry* die Querbalken durch einen Gitterbalken ersetzen, wobei sich die Last eines Balkens auf das ganze Gitterwerk vertheilt. Auch giebt man zu diesem Zwecke der Brückenbahn eine schwache Wölbung.

Die Bogenhöhe der Hängebrücken ist in Ansehung der ganzen Brücklänge meist sehr klein ($\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{25}$ der Sehne), daher die Spannung der Seile oder Ketten sehr bedeutend (s. Bd. I); es haben daher auch die Pfeiler, über welche die Seile oder Ketten weggehen, und die Anker, mit denen die Seil- oder Kettenenden an den Ufern befestigt sind, eine bedeutende Kraft auszuhalten, und es sind deshalb Pfeiler von großer Stabilität und Widerlager von bedeutendem Widerstande in Anwendung zu bringen. Die Entfernungen zwischen je zwei Pfeilern macht man, um nicht zu schwere Seilketten zu erhalten und die Pfeiler nicht zu sehr zu belasten, nicht gern über 160 m, doch kommen auch Umstände vor, welche zu größeren Spannweiten nöthigen; es beträgt dieselbe z. B. bei der *Menai*-Kettenbrücke in England 176 m und bei der Seilbrücke zu *Freiburg* in der Schweiz sogar 264 m.

Wenn die Kette zu beiden Seiten eines Pfeilers ungleich gespannt wird, was bei einer einseitigen Belastung stets eintritt, so sucht dieselbe über ihrem Lager nach der Seite der größeren Spannung fortzugleiten; da nun aber die Kette mit dem Kopfe des Pfeilers durch die aus der Mittelkraft der Spannungen entspringende Reibung bis zu einem gewissen Grade verbunden ist, so hat hiernach der Pfeiler einer der Reibung gleichen Seitenkraft durch seine Stabilität zu widerstehen. Aus diesem Grunde hat man denn auch Pfeiler von großen Breiten und Dicken anzuwenden, oder besondere Mittel zu benutzen, um diese Wirkungen der ungleichen Belastung zu ermäßigen. Diese Mittel bestehen entweder darin, daß man die Ketten über Rollen oder Walzen laufen läßt; und dadurch die gleitende Reibung auf eine kleinere Zapfen- oder Walzenreibung zurückführt, oder daß man die Ketten an einen Sector anschließt, welcher, sich auf dem Kopfe des Pfeilers wälzend, sich nach der einen oder nach der anderen Seite hin neigen läßt, oder daß man endlich gar den Pfeiler durch eine Säule ersetzt, welche um eine horizontale Ase drehbar ist. In der Anordnung von Fig. 354 sind die zwei Ketten *AB*, *CD* über gewöhnliche Leitrollen *E*, *E*, *F*, *F* gelegt, in Fig. 355 liegen hingegen die beiden Ketten auf einem gußeisernen Sattel

EFE, welcher wieder auf neun gußeisernen Walzen ruht. Diese Walzen werden endlich von einer Fußplatte *GH* unterstützt, die auf dem Kopfe des Kettenpfeilers festigt. Wenn die beiden Ketten auf der einen Seite mehr als auf der anderen belastet sind, so rollt der ganze Sattel sammt den

Fig. 354.

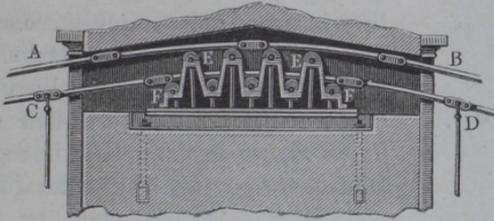
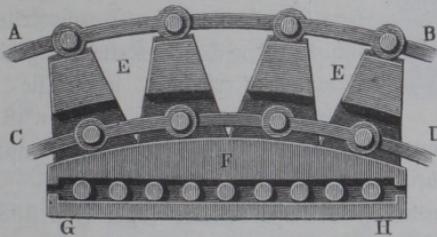


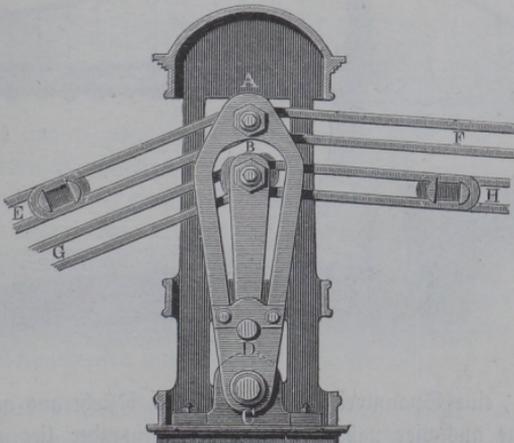
Fig. 355.



darauf liegenden Ketten so weit fort, bis die Spannung der Ketten auf der einen Seite nahezu gleich derjenigen auf der anderen Seite geworden ist. In Fig. 356 ist eine Kettenführung dargestellt, welche bei einer Kettenbrücke über die Maas bei Seraing zur Anwendung gekommen ist. Die obere Kette *EAF* ist hier an einen Hebel *CA* angeschlossen, dessen Drehungsaxe *C* auf dem Kopfe einer gußeisernen Säule ruht, während

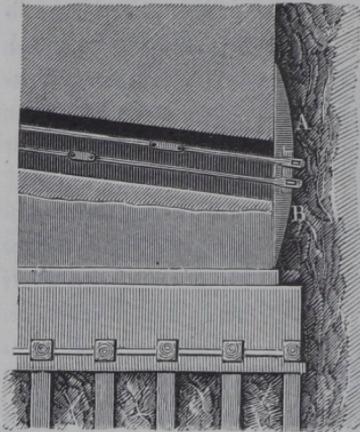
die untere Kette *GBH* an einem kleineren Hebel *DB* befestigt ist, dessen Drehungsaxe *D* auf dem ersteren Hebel selbst sitzt.

Fig. 356.



Damit die Mittelkraft aus den beiden Spannungen der über einen Pfeiler weggehenden Kette vertical wirke, und so vom Pfeiler am sichersten aufgenommen werde, ist es nöthig, daß die Theile der Kette zu beiden Seiten des Pfeilers gleiche Neigung gegen den Horizont haben. Läßt sich diese Gleichheit nicht herstellen, wie es z. B. bei den Uferpfeilern sehr oft der Fall ist, so muß man die Pfeiler bedeutend verstärken.

Fig. 357.

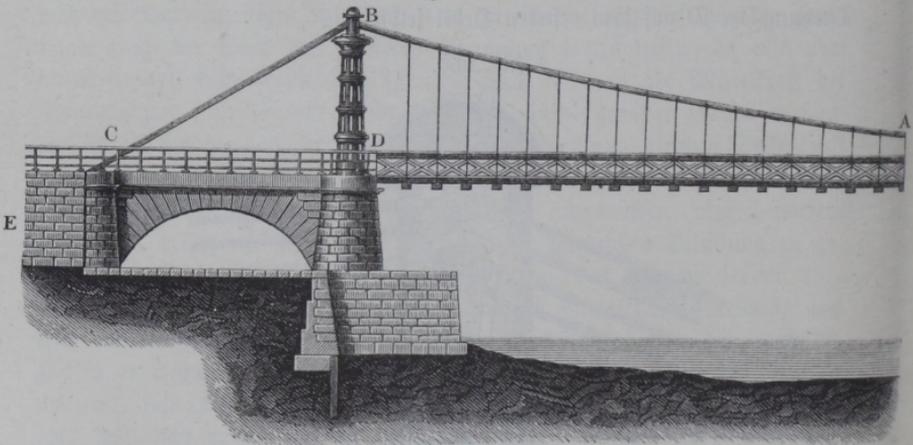


Um die Kettenenden an den Ufern zu verankern, versieht man dieselben mit starken Bolzen und legt diese in Lager, welche auf einer großen und dicken Eisenplatte *AB*, Fig. 357, sitzen, die sich gegen eine dicke Widerlagsmauer, oder gegen ein Gewölbe, oder gar gegen das feste Gestein stemmt. Durch Keile läßt sich dann noch die Kette in gehöriger Spannung erhalten, wenn sie durch Dehnung etwa schlaff geworden ist.

Eine neuere Hängebrückenanlage ist die von Brialmont construirte Kettenbrücke über die Maas bei Seraing.

Die Seitenansicht von einem Stück dieser Brücke führt Fig. 358 vor Augen. Diese Brücke, welche bei einer Breite von 5 m und einer Bogen-

Fig. 358.

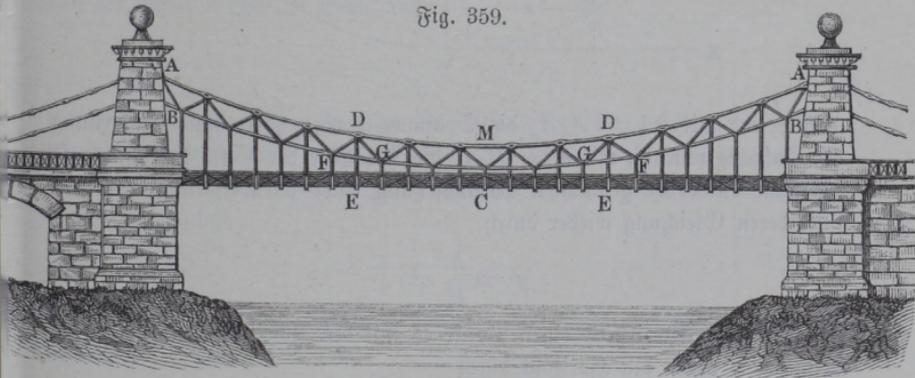


höhe von 7 m, eine Spannweite von 105 m hat, besteht aus acht und zwar auf jeder Seite aus vier nahe über und neben einander liegenden Doppel-

fetten. Die Glieder dieser Ketten, deren Metalldicke 25 und Höhe 50 mm mißt, bilden Scheeren oder Ringe von 3 m Länge und 100 mm lichter Weite. Die auf einer Seite neben einander liegenden Doppelfetten sind durch 100 mm dicke Bolzen mit einander verbunden, und an die letzteren sind die 3 cm dicken Hängestangen angeschlossen. Die Tragketten AB sind mit den Spannketten BC durch die in Fig. 356 abgebildeten Hebel verbunden, welche in einem 8 m hohen und aus vier Stücken und einem cylindrischen Kern bestehenden gußeisernen Thurne enthalten sind. Die Befestigung der Kettenenden in der Widerlagsmauer E ist ähnlich wie Fig. 357 darstellt. Die ganze Brücke wiegt auf das laufende Meter 1010 kg, und nimmt man die Belastung eben so groß an, so berechnet sich die Spannung der Ketten auf 418910 kg, so daß auf ein Quadratmillimeter derselben eine Spannung von 10 kg kommt. Die Hängestangen sind dagegen nur mit 2 kg und die gußeisernen Pfeiler mit $2\frac{1}{2}$ kg pro Quadratmillimeter belastet.

Die Eisenbahnkettenbrücke über den Donau-Canal in Wien, ausgeführt von den Ingenieuren Schmirch und Fillunger ist in Fig. 359 skizzirt.

Fig. 359.



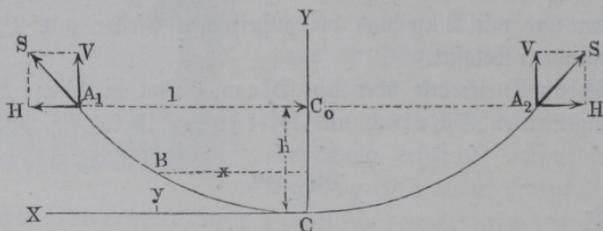
Dieselbe besteht aus je zwei durch Diagonalstäbe DF , DG . . . mit einander verbundenen Hängeketten AMA und $BGGB$, welche wie gewöhnlich, die Brückenbahn ECE mittelst verticaler Hängestangen tragen. Diese Brücke hat eine Spannweite von 264 Wiener Fuß (83,45 m), eine Bogenhöhe von $13\frac{1}{3}$ Fuß (4,17 m) und trägt eine Fahrbahn mit Doppelgleisen von 35 Fuß Breite. Der Gesamtquerschnitt der Ketten ist 248 Quadratfuß (1720 qcm), und der Materialaufwand dieser Brücke besteht aus 7290,8 Ctr. Schmiedeeisen und aus 668 Ctr. Gußeisen.

Theorie der Hängebrücken. Die Curve, welche von der Kette §. 69. oder dem Seile einer Hängebrücke gebildet wird, hängt wesentlich von der

Art der Belastung ab, dieselbe kommt einer Ellipse sehr nahe und liegt zwischen einer Parabel und einer Kettenlinie, wie diese letzteren Curven sich bezw. ergeben, wenn die Last gleichmäßig entweder über die Horizontalprojectio, oder über die Kettenlänge verbreitet ist. Es geht daraus hervor, daß die Kettenbrückenlinie sich bei der belasteten Brücke mehr der Parabel, dagegen bei der unbelasteten Brücke mehr der Kettenlinie nähern wird. Da die Brücken vorzugsweise für den Zustand der Belastung zu untersuchen sind, so rechtfertigt es sich, wenn die Curve der Kette oder des Seils der leichteren Durchführbarkeit der Rechnung wegen als Parabel angesehen wird.

Es sei hier wie für den Bogenträger der Scheitel oder tiefste Punkt C , Fig. 360, als Coordinatenanfang für verticale und horizontale Axen ge-

Fig. 360.



wählt, und mit $2l = A_1A_2$ die Spannweite oder horizontale Entfernung der Aufhängenpunkte, mit $h = C_0C$ die Pfeilhöhe der Kette bezeichnet, so hat man unter der gemachten Voraussetzung einer parabelförmigen Kettenlinie deren Gleichung wieder durch

$$y = \frac{h}{l^2} x^2 \dots \dots \dots (1)$$

ausgedrückt. Für irgend einen Punkt B mit den Abscissen x und y ist die Neigung α gegen den Horizont durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{h}{l^2} 2x = \frac{2y}{x}, \dots \dots \dots (2)$$

also für den Aufhängenpunkt A_1 durch

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2h}{l} \dots \dots \dots (2^a)$$

gegeben. Setzt man wieder ein Bogenelement

$$\partial b = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \left(1 + 2 \frac{h^2}{l^4} x^2\right) \partial x,$$

so erhält man die Länge des Kettenbogens zwischen dem Scheitel C und einem Punkte B zu

$$b = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^4} x^2\right) x \dots \dots \dots (3)$$

und daher die Länge des halben Bogens CA_1 mit $x = l$ zu

$$b = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2}\right) l \dots \dots \dots (3^a)$$

Die Längen λ der einzelnen Hängestangen vom Scheitel aus nach den Aufhängepunkten hin bestimmen sich aus (1), wenn man darin nach einander für x die Werthe $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n} \dots \frac{nl}{n}$ einführt, unter n die Anzahl der Intervalle einer Brückenhälfte verstanden. Demgemäß hat die ν te Hängestange, von der Mitte aus gezählt, die Länge

$$\lambda_\nu = h \left(\frac{\nu}{n}\right)^2 \dots \dots \dots (4)$$

Die Hängestangen werden durch das Gewicht der von ihnen getragenen Fahrbahn und durch ihr eigenes Gewicht auf Zug in Anspruch genommen, und man erhält daher den nöthigen Querschnitt f einer solchen Hängestange von der Länge λ aus der Beziehung

$$f s_1 = \frac{l}{n} q + f \lambda \gamma,$$

worin γ das spezifische Gewicht des Eisens, s_1 die zulässige Materialspannung desselben und q die Belastung der Brückenbahn für die Längeneinheit und die halbe Brückenbreite bedeutet. Daraus folgt der Querschnitt einer Hängestange

$$f = \frac{q l}{n (s_1 - \lambda \gamma)}, \dots \dots \dots (5)$$

wofür man wegen der Kleinheit von $\lambda \gamma$ im Vergleiche zu s_1 genügend genau

$$f = \frac{q l}{n s_1} = \frac{Q}{n s_1} \dots \dots \dots (5^a)$$

setzen kann, unter Q die Belastung einer Kettenhälfte zwischen dem tiefsten Punkte und einem Aufhängepunkte verstanden. Hieraus folgt das Gewicht aller n Hängestangen einer Kettenhälfte, wenn man unter λ die mittlere Durchschnittslänge derselben versteht, zu

$$G_1 = n f \lambda \gamma = q \frac{l \lambda}{s_1} \gamma = \frac{Q \lambda \gamma}{s_1} \dots \dots \dots (5^b)$$

Um nun den Querschnitt F der Tragkette zu ermitteln, hat man die volle Belastung der Brücke über ihre ganze Länge durch die größte Last $2 Q = 2 l q = 2 l (p + k)$ vorauszusetzen. Die Tragkette hat dann

aufser dieser Last $2Q$ noch das Gewicht $2G_1$ der Hängestangen und ihr eigenes Gewicht $2G$ zu tragen, welches letztere mit Rücksicht auf (3^a) sich zu

$$2G = F2b\gamma = 2Fl\gamma \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2}\right) \dots \dots (6)$$

bestimmt.

In jedem Aufhängepunkte A_1 und A_2 hat man daher einen verticalen Auflagerdruck V gleich der Belastung der halben Kette $Q + G + G_1$, und da $V = S \sin \alpha_1$ und $H = S \cos \alpha_1$ ist, unter S die Endspannung der Kette verstanden, so folgt zunächst diese Spannung

$$S = \frac{V}{\sin \alpha_1} = \frac{Q + G + G_1}{\sin \alpha_1}, \dots \dots (7)$$

sowie der horizontale Zug der Kette

$$H = V \cotg \alpha_1 = (Q + G + G_1) \cotg \alpha_1 = (Q + G + G_1) \frac{l}{2h}. (8)$$

Führt man in (7) für G_1 und G die Werthe aus (5^b) und (6) ein, und setzt $S = Fs$, so erhält man

$$S \sin \alpha_1 = Fs \sin \alpha_1 = Q \left(1 + \frac{\lambda \gamma}{s_1}\right) + Fb\gamma,$$

woraus der erforderliche Kettenquerschnitt zu

$$F = \frac{Q}{s_1} \frac{s_1 + \lambda \gamma}{s \sin \alpha_1 - b\gamma} \dots \dots (9)$$

folgt, in welche Gleichung man für b den Werth aus (3^a) und nach (2^a):

$$\sin \alpha_1 = \frac{tg \alpha_1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha_1}} = \frac{2h}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} \dots \dots (10)$$

einführen kann. Hat man hieraus F und damit nach (6) das Gewicht G der halben Kette bestimmt, so findet man aus (8) den Horizontalzug H , welcher auch die Spannung im tiefsten Punkte C der Kette angiebt.

Man kann einer Hängebrücke dadurch eine größere Steifigkeit gegen Schwingungen ertheilen, daß man die Brückenbahn nicht durch verticale, sondern mit Hülfe geneigter Hängestangen an die Tragketten anhängt, derart, daß vom tiefsten Punkte C der Kette, Fig. 361, die Hängestangen wie NO , DA nach beiden Seiten symmetrisch gegen die Verticale unter dem Winkel β geneigt sind. Bezeichnet hier $CD_1 = CD_2 = l_1$ die halbe Länge der Brücke, und $C_0A_1 = C_0A_2 = l$ die halbe Entfernung der Aufhängepunkte A_1 und A_2 , welche um die Höhe $CC_0 = h$ über dem tiefsten Punkte der Kette gelegen sind, so hat man zunächst

$$l_1 = l - h \cotg \beta,$$

und die Länge der äußersten Hängestange $A_1 D_1 = A_2 D_2$:

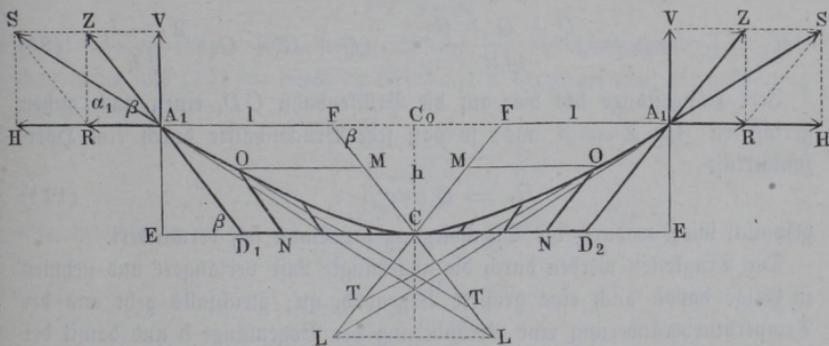
$$h_1 = \frac{h}{\sin \beta}.$$

Bezeichnet wieder n die Felderzahl der halben Brücke CD_1 , so wirkt auf jede Hängestange ein verticales Gewicht $\frac{l_1}{n} q$, welches in der Hängestange eine Zugkraft

$$Z = \frac{l_1 q}{n \sin \beta} \dots \dots \dots (11)$$

hervorruft. Mit diesen Zugkräften Z greifen die Hängestangen die Tragkette an, und es ergibt sich, daß jede Kettenhälfte $A_1 C$ und $A_2 C$ in Folge

Fig. 361.



dieser parallelen Kräfte von gleicher Größe und gleichen gegenseitigen Abständen gleichfalls die Gestalt einer Parabel annehmen wird, für welche die durch den tiefsten Punkt C parallel der Zugstange $D_1 A_1$ gezogene Richtung CF einen Durchmesser darstellt. Daher ist für jeden Punkt wie O die Subtangente MT gleich der doppelten, in der Richtung von CF gemessenen Abscisse ON , und die Tangente an die Parabel in A_1 schneidet den Durchmesser CF in einem Punkte L so, daß

$$FL = 2 A_1 D_1 = 2 h_1 = \frac{2 h}{\sin \beta}$$

ist. Bezeichnet man daher wieder mit α_1 den Neigungswinkel der Kette in A_1 gegen den Horizont, so hat man aus dem Dreiecke $F A_1 L$:

$$\frac{\sin F L A_1}{\sin F A_1 L} = \frac{\sin (\beta - \alpha_1)}{\sin \alpha_1} = \frac{F A_1}{F L} = \frac{l_1}{2 h_1},$$

woraus man

$$\cot \alpha_1 = \cot \beta + \frac{l_1}{2 h_1 \sin \beta}$$

folgert. Setzt man hierin $\cotg \beta = \frac{E D_1}{E A_1} = \frac{l - l_1}{h}$ und $h_1 \sin \beta = h$, so erhält man auch für den Winkel α_1 :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2h}{2l - l_1} \dots \dots \dots (2^b)$$

Der Verticaldruck V in jedem Aufhängepunkte A_1 und A_2 bestimmt sich auch hier gleich der Belastung einer halben Brücke zu

$$V = Q + G + G_1,$$

und daher die Kettenspannung am Ende zu

$$S = \frac{V}{\sin \alpha_1} = \frac{Q + G + G_1}{\sin \alpha_1}, \dots \dots \dots (7)$$

sowie der horizontale Kettenzug zu

$$H = V \cotg \alpha_1 = \frac{Q + G + G_1}{\operatorname{tg} \alpha_1} = (Q + G + G_1) \frac{2l - l_1}{2h}. \quad (8^a)$$

Jede Hängestange übt hier auf die Brückenbahn CD_1 einen nach außen gerichteten Zug $Z \cos \beta$ aus, so daß jede Brückenhälfte durch eine Horizontalkraft

$$H_1 = Q \cotg \beta \dots \dots \dots (11^a)$$

gespannt wird, wodurch die Durchbiegung der Bahn sich vermindert.

Die Tragketten werden durch die angehängte Last verlängert und nehmen in Folge davon auch eine größere Bogenhöhe an; gleichfalls geht aus der Temperaturveränderung eine Veränderung der Bogenlänge b und damit der Pfeilhöhe h hervor. Wenn die letztere aus h in h' übergeht, so hat sich die Bogenlänge

$$b = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2}\right) l$$

in

$$b' = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h'^2}{l^2}\right) l,$$

also um

$$\sigma = b' - b = \frac{2}{3} \frac{h'^2 - h^2}{l}$$

vergrößert, daher hat man, wenn man die Veränderung der Pfeilhöhe $h' - h = \eta$ und annähernd $h' + h = 2h$ setzt, die Verlängerung der halben Kette

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{h}{l} \eta,$$

sowie umgekehrt

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \sigma \dots \dots \dots (12)$$

Die Spannung der Kette ist nun für verschiedene Punkte verschieden und variiert nach (7) und (8) zwischen $H = V \cotg \alpha_1$ im Scheitel und $S = \frac{V}{\sin \alpha_1}$ an den Enden. Nimmt man dafür überall eine mittlere Spannung

$$S_0 = \frac{H + S}{2} = V \frac{1 + \cos \alpha_1}{2 \sin \alpha_1}$$

an, so erhält man daraus für den halben Kettenbogen b eine elastische Verlängerung

$$\sigma = \frac{S_0}{FE} b = \frac{V}{FE} \frac{1 + \cos \alpha_1}{2 \sin \alpha_1} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2}\right) l,$$

wofür annähernd

$$\sigma = \frac{V l}{FE \sin \alpha_1} \dots \dots \dots (13)$$

gesetzt werden kann. Mit diesem Werthe für die Verlängerung σ erhält man daher aus (12) die durch die Belastung V hervorgerufene Vergrößerung der Bogenhöhe:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{V}{FE \sin \alpha_1} \frac{l^2}{h'} \dots \dots \dots (14)$$

oder, wenn man $\sin \alpha_1 = \frac{2h}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} =$ annähernd $\frac{2h}{l}$ setzt:

$$\eta = \frac{3}{8} \frac{V}{FE} \frac{l^3}{h^2} \dots \dots \dots (14^a)$$

Um die Veränderung der Bogenhöhe h bei einer Temperaturveränderung von $\pm t^\circ \text{C}$. zu ermitteln, hat man nur die hierdurch hervorgerufene Längenänderung der halben Kette von $\pm 0,000012 b t$ in den Ausdruck (12) für σ einzuführen, und erhält die gesuchte Veränderung der Bogenhöhe zu

$$\eta_t = \pm \frac{3}{4} \frac{l}{h} 0,000012 b t = \pm 0,000009 t \frac{lb}{h} \dots \dots (14^b)$$

Beispiel. Es sind für eine Hängebrücke mit verticalen Hängestangen bei einer Spannweite von 40 m und einer Bogenhöhe von 4 m die Querschnittsverhältnisse zu ermitteln, wenn die auf jede Kette entfallende halbe Brückenbahn ein Eigengewicht von 1000 kg pro laufenden Meter hat und eine zufällige Belastung durch Menschengedränge von 1200 kg pro laufenden Meter für jede Tragkette zu rechnen ist, und wenn die höchste Materialspannung in den Tragketten den Werth $s = 10 \text{ kg}$, diejenige in den Hängestangen dagegen nur denjenigen $s_1 = 2 \text{ kg}$ nicht übersteigen soll?

Nimmt man die Entfernung der Hängestangen zu 1 m an, so hat jede derselben eine Last von $1000 + 1200 = 2200 \text{ kg}$ zu tragen, und daher bestimmt sich der Querschnitt f einer Stange (5a) zu $\frac{2200}{2} = 1100 \text{ qmm}$, daher der

Durchmesser des Kundeisens zu 37,5 mm. Nimmt man den Regeln für die Quadratur der Parabel zufolge die mittlere Länge der Hängestangen zu $\lambda = \frac{h}{3} = 1,333$ m und das spezifische Gewicht des Eisens zu 7,6 an (1 cbmm = 0,0000076 kg), so erhält man nach (5b) das Gewicht der 20 Hängestangen einer halben Kette zu:

$$G_1 = 20 \cdot 1100 \cdot 1,333 \cdot 0,0000076 = 223 \text{ kg.}$$

Die Last Q für eine halbe Kette ist ferner:

$$Q = 20 \cdot (1000 + 1200) = 44000 \text{ kg.}$$

Ferner hat man die Länge b einer halben Kette gleich:

$$b = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{4 \cdot 4}{20 \cdot 20}\right) 20 = \frac{77}{75} 20 = 20,533 \text{ m,}$$

und den Neigungswinkel α_1 :

$$\sin \alpha_1 = \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{400 + 64}} = 0,3714; (\alpha_1 = 21^\circ 50'),$$

und man erhält daher den Querschnitt der Tragkette nach (9) zu:

$$F = \frac{44000}{2} \frac{2 + 1333 \cdot 0,0000076}{10 \cdot 0,3714 - 20,533 \cdot 0,0000076} = 22000 \frac{2,010}{3,714 - 0,156} \\ = 12429 \text{ qmm,}$$

welchen Querschnitt man etwa durch vier Flacheisenstäbe von je 25 mm Stärke und 125 mm Höhe erreichen kann. Das Gewicht G einer halben Kette bestimmt sich daher zu:

$$G = 12429 \cdot 20,533 \cdot 0,0000076 = 1940 \text{ kg,}$$

so daß man in jedem Aufhängepunkte den Verticaldruck:

$$V = 44000 + 1940 + 223 = 46163 \text{ kg,}$$

und den Horizontalzug nach (8):

$$H = 46163 \frac{20}{2 \cdot 4} = 115408 \text{ kg}$$

erhält.

Nimmt man den Elasticitätsmodul des Ketteneisens zu $E = 20000$ an, so erhält man nach (14) die elastische Vergrößerung der Pfeilhöhe h durch die Belastung zu:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{46163}{12429 \cdot 20000 \cdot 0,3714} \frac{20000^2}{4000} = 37,5 \text{ mm.}$$

Für jeden Grad der Temperaturdifferenz ermittelt sich diese Veränderung nach (14b) zu:

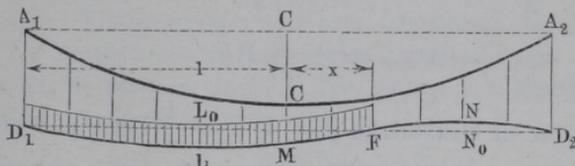
$$\eta_t = \pm 0,000009 \frac{20 \cdot 20533}{4} = \pm 0,92 \text{ mm.}$$

also beispielsweise für 30° C. zu circa 28 mm.

§. 70. Fortsetzung. Für die einseitige Belastung der Hängebrücke, Fig. 362, lassen sich die Biegungsverhältnisse nach Rankine unter der Voraussetzung ermitteln, daß durch die mobile Last auf der nur an den Enden D_1 und D_2 festgehaltenen Brückenbahn die parabolische Form der Kette nicht wesentlich

verändert werde. Denkt man sich, daß die bewegliche Last, welche wie bisher den Betrag k pro Längeneinheit haben möge, die Brücke von D_1 bis F auf eine Länge $l + x$ bedecke, so vertheilt sich diese Last $k (l + x)$ nach der

Fig. 362.



gemachten Voraussetzung über die ganze Tragkette A_1CA_2 und man hat für die Hängestangen derselben pro Längeneinheit eine Spannung:

$$k_0 = k \frac{l + x}{2l}$$

zu rechnen. Mit den dieser Spannung entsprechenden Zugkräften werden daher die Hängestangen die Brückenbahn nach oben zu biegen streben und das unbelastete Stück D_2F auch thatsächlich biegen, während das belastete Stück A_1F wegen des Uebergewichtes von k über k_0 convex nach unten gebogen wird. Man kann sich daher die beiden Balkenstrecken D_1F und D_2F wie zwei auf Stützen frei aufliegende Balken von den Längen $l + x$ und $l - x$ vorstellen, welche durch die gleichmäßig vertheilten spezifischen Belastungen $k - k_0$ und bezw. k_0 nach entgegengesetzten Richtungen gebogen werden. Man erhält die gesammte Größe dieser Lasten für beide Strecken gleich, nämlich für D_2F zu:

$$(l - x) k_0 = (l - x) k \frac{l + x}{2l} = k \frac{l^2 - x^2}{2l} = K_0,$$

und für D_1F ebenfalls zu:

$$(l + x) (k - k_0) = (l + x) k \left(1 - \frac{l + x}{2l}\right) = k \frac{l^2 - x^2}{2l} = K_0 \quad (15)$$

Diese Kraft K_0 und also auch die Abscheerungskraft $\frac{K_0}{2}$ in F erreicht ihr Maximum für $x = 0$, d. h. wenn die Hälfte der Brücke mit der mobilen Last bedeckt ist.

Die größten Biegemomente für die beiden Strecken D_1F und D_2F stellen sich in deren Mitten L und N ein, und zwar berechnen sich dieselben bekanntlich für die belastete Strecke D_1F zu:

$$M_l = K_0 \frac{l + x}{8} = k \frac{(l + x) (l^2 - x^2)}{16l} \dots \dots (16)$$

und für die unbelastete Strecke D_2F zu:

$$M_n = K_0 \frac{l-x}{8} = k \frac{(l-x)(l^2-x^2)}{16l} \quad \dots \quad (16^a)$$

Durch Differentiiren überzeugt man sich leicht, daß M_l ein Maximum wird für $x = +\frac{l}{3}$ und M_n für $x = -\frac{l}{3}$, und zwar wird für diese Werthe:

$$M_{max} = \pm \frac{2}{27} l^2 k \quad \dots \quad (16^b)$$

Wenn daher die Brückenbahn zu $l + x = \frac{4}{3} l$ oder zu $\frac{2}{3}$ ihrer Länge belastet ist, so ist die belastete Strecke dem größten Biegemomente ausgesetzt. Die Kraft K_0 bestimmt sich in diesem Falle zu

$$K_0 = k \frac{8l^2}{9 \cdot 2l} = \frac{4}{9} kl,$$

und die Durchbiegungen der beiden Strecken $D_1 F'$ und $D_2 F$ ergeben sich nach §. 35, 4 zu:

$$f_1 = \frac{5}{8} K_0 \frac{\left(\frac{4}{3} l\right)^3}{48 TE} = \frac{10}{729} \frac{kl^4}{TE} \quad \dots \quad (17)$$

und

$$f_2 = \frac{5}{8} K_0 \frac{\left(\frac{2}{3} l\right)^3}{48 TE} = \frac{5}{2916} \frac{kl^4}{TE} = \frac{1}{8} f_1 \quad \dots \quad (17^a)$$

Ist andererseits die Brückenbahn nur auf $\frac{1}{3}$ ihrer ganzen Länge belastet, so findet sich die größte Beanspruchung des unbelasteten Stückes, welches nunmehr eine Durchbiegung gleich f_1 nach oben annimmt, während die belastete Strecke sich nur um $f_2 = \frac{1}{8} f_1$ nach unten durchbiegt.

Bei den Kettenbrücken ist es von besonderem Interesse, die Wirkung von Stößen und Erschütterungen zu untersuchen, wie solche z. B. dadurch entstehen, daß geschlossene Menschenmassen, wie Truppenkörper, im tactmäßigen Schritte über die Brücke marschiren. Dadurch kann, wie die folgende Rechnung ergeben wird, die Sicherheit der Brücke bedenklich gefährdet werden.

Es sei wieder p das Gewicht der ruhenden Belastung der Brückenbahn pro Längeneinheit und angenommen, daß eine Verkehrslast k pro Längeneinheit längs der ganzen Brücke in einem gewissen Augenblicke mit der Geschwindigkeit v auf die Bahn aufschlage. Nach den Gesetzen des Stoßes werden unmittelbar nach dem Aufschlagen die Gewichte $p + k$ mit einer Geschwindigkeit:

$$w = \frac{kv}{p+k}$$

nieder sinken, und es ist vermöge dieser Geschwindigkeit in den Massen der ganzen Brückenbahn ein Arbeitsvermögen:

$$2l(p+k) \frac{w^2}{2g} = 2l \frac{k^2}{p+k} \frac{v^2}{2g} = A. \dots (18)$$

enthalten. Dieses Arbeitsvermögen wird dazu aufgebraucht, in den Hängestangen und der Tragkette gewisse Ausdehnungen hervorzubringen. Bekanntlich berechnet sich die durch die Kraft P einer Stange vom Querschnitte F und der Länge l ertheilte Ausdehnung zu:

$$\sigma = \frac{Pl}{FE},$$

und die zur Ausdehnung aufgewendete Arbeit zu:

$$A_0 = P \frac{\sigma}{2} = \frac{P^2 l}{2FE}.$$

Bezeichnet man demgemäß mit F_2 den Querschnitt aller Hängestangen und mit λ die mittlere Länge derselben, ferner mit P die Kraft, mit welcher die sämtlichen Hängestangen durch den Stoß gespannt werden, so ist den Hängestangen eine Ausdehnung:

$$\sigma_2 = \frac{P\lambda}{F_2 E} \dots (19)$$

ertheilt und dazu eine Arbeit:

$$A_2 = \frac{P\sigma_2}{2} = \frac{P^2 \lambda}{2F_2 E} \dots (18^a)$$

verwendet.

Durch die Kraft P , mit welcher sämtliche Hängestangen in Folge des Stoßes gespannt werden, wird in der Kette eine Spannung erzeugt, welche an den Aufhängepunkten durch:

$$S = \frac{P}{2 \sin \alpha_1}$$

gegeben ist.

Nimmt man hier die Spannung für alle Punkte der Kette von derselben Größe S an, so erlangt man für die Kette von der Länge $2b$, wenn deren Querschnitt F_1 ist, eine Längenausdehnung:

$$2\sigma_1 = \frac{S 2b}{F_1 E} = \frac{Pb}{\sin \alpha_1 F_1 E} \dots (20)$$

wozu eine Arbeit erforderlich gewesen ist von:

$$A_1 = \frac{S 2\sigma_1}{2} = \frac{1}{4} \frac{P^2 b}{\sin^2 \alpha_1 F_1 E} \dots (18^b)$$

Setzt man nun $A = A_1 + A_2$, so erhält man aus:

$$2l \frac{k^2}{p+k} \frac{v^2}{2g} = P^2 \left(\frac{b}{4 \sin^2 \alpha_1 F_1 E} + \frac{\lambda}{2 F_2 E} \right) = P^2 u:$$

$$P = \sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k} \frac{l}{g u}}, \dots \dots \dots (21)$$

wenn der Kürze wegen der Ausdruck:

$$\frac{b}{4 \sin^2 \alpha_1 F_1 E} + \frac{\lambda}{2 F_2 E} = u$$

gesetzt wird.

Die mittlere Senkung der Brückenbahn in Folge der Ausdehnung der Hängestäbe beträgt nach (19):

$$\sigma_2 = \frac{P \lambda}{F_2 E}, \dots \dots \dots (22)$$

und die mittlere Senkung derselben in Folge der Ausdehnung der Tragkette hat man nach (12) zu:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \sigma_1 = \frac{3}{8} \frac{l}{h} \frac{P b}{\sin \alpha_1 F_1 E} \dots \dots \dots (23)$$

Vernachlässigt man die Ausdehnung σ_2 der Hängestäbe, so wird nach (21):

$$P = \sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k} \frac{l}{g} \frac{4 \sin^2 \alpha_1 F_1 E}{b}} \dots \dots \dots (23^a)$$

und daher:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k} \frac{l}{g} \frac{b}{F_1 E}} \dots \dots \dots (24)$$

oder annähernd, wenn man $b = l$ setzt:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l^2}{h} \sqrt{\frac{k^2}{p+k} \frac{v^2}{g F_1 E}} \dots \dots \dots (24^a)$$

Wenn man sich vorstellt, daß in dem vorgedachten Falle einer tactmäßigen Bewegung von Menschen der hier betrachtete Stoß n mal hinter einander und zwar immer dann stattfindet, wenn die Brücke in Folge des vorhergegangenen Stoßes die größte Durchsenkung η erlangt hat, so ist die aufgewendete Stoßarbeit:

$$n A = n l \frac{k^2}{p+k} \frac{v^2}{g},$$

und folglich beträgt nunmehr die Senkung:

$$\eta' = \eta \sqrt{n} \dots \dots \dots (25)$$

Die hierbei erfolgende Ausdehnung der Kette ist nach (20) und (23^a):

$$2 \sigma' = \frac{P b}{\sin \alpha_1 F_1 E} = \sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k} \frac{4 l b n}{g F_1 E}}$$

annähernd

$$= 2 l \sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k} \frac{n}{g F_1 E}} \dots \dots \dots (26)$$

und die Spannung der Kette:

$$S' = \frac{2 \sigma'}{2 b} F_1 E = \sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k} \frac{n F_1 E}{g}} \dots \dots \dots (27)$$

Selbstverständlich sind die Abmessungen (F_1) der Kette so zu wählen, daß die Summe der Spannungen, welche aus der ruhenden Belastung und aus den Erschütterungen sich ergeben, den für das Material höchstens zulässigen Betrag nicht überschreitet.

Beispiel. Wenn bei der in dem Beispiele des vorigen Paragraphen berechneten Kettenbrücke vorausgesetzt wird, daß die Verkehrslast (Menschengedränge) nicht ruhend sei, sondern mit einer Geschwindigkeit $v = 1$ m aufschlage, so hat man mit $p = 1000$ kg und $k = 1200$ kg:

$$\frac{k^2}{p+k} = 655,$$

und da der Querschnitt der Kette zu 12429 qmm gefunden wurde, so folgt mit $E = 20000$ die Verlängerung der Tragkette in Folge eines Stoßes der Masse nach (26):

$$2 \sigma' = 2 l \sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k} \frac{1}{g F_1 E}} = 40 \sqrt{655 \frac{1}{9,81 \cdot 12429 \cdot 20000}} = 0,0208 \text{ m.}$$

Demgemäß ist die entsprechende Vergrößerung der Kettenspannung pro Quadratmillimeter Querschnitt, da die Länge der ganzen Kette zu $2 b = 2 \cdot 20,533$ m ermittelt wurde, gleich

$$s' = \frac{0,0208}{2 \cdot 20,533} \cdot 20000 = 10,13 \text{ kg.}$$

Da durch die ruhende Belastung die Ketten nur mit einer spezifischen Spannung von $s = 10$ kg beansprucht werden, so erkennt man hieraus, wie durch den gedachten Stoß die Anstrengung mehr als verdoppelt wird. Nimmt man etwa an, daß das Ketteneisen bei einer Spannung von 40 kg zerrissen werde, so würde demnach eine durch Stoßwirkungen hervorgerufene zusätzliche Anstrengung von $40 - 10 = 30$ kg pro Quadratmillimeter den Bruch herbeiführen, und hierzu würde eine Anzahl n solcher aufeinander folgenden Stöße genügen, welche sich aus:

$$30 = 10,13 \sqrt{n}$$

zu

$$n = \left(\frac{30}{10,13}\right)^2 = 8,76 \sim 9$$

ermittelt.

Anmerkung. Damit eine Hängebrücke den Wirkungen der beweglichen Last den nöthigen Widerstand entgegensetzen könne, versieht man die Brückenbahn

wohl mit besonderen Tragwänden, welche die in einzelnen Punkten wirkenden Lasten auf eine größere Länge der Kette vertheilen. Diese Träger sind bei der gänzlich belasteten, sowie bei der vollständig leeren Brücke gar nicht beansprucht, indem für diese Belastungszustände die Gewichte durch die Hängestangen direct auf die Ketten übertragen werden, und die Träger sind daher nur auf die einseitigen Belastungen zu berechnen. Auch pflegt man wohl die Brücken mit Zugseilen zu versehen, welche von der Brückenbahn nach dem Boden oder den Brückenpfeilern herabgehen, wie z. B. bei der Niagara-Brücke; ferner wendet man wohl unterhalb eine Gegenkette an, welche durch aufwärtsgehende Zugstangen mit der Brückenbahn verbunden wird. Desgleichen vergrößert man die Steifigkeit einer Hängebrücke dadurch, daß man zwei Tragketten über einander hängt und dieselben unter einander verstrebt, wie einen Fachwerksträger.

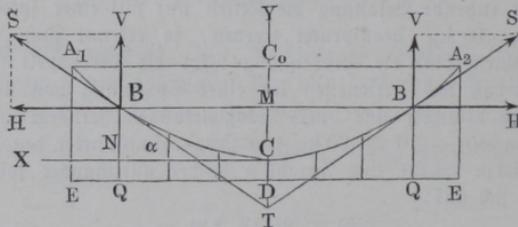
§. 71. Ketten von gleichem Widerstande. Da die Spannung der Tragketten einer Brücke von unten nach oben allmählig zunimmt, so sollte man auch den Querschnitt dieser Ketten vom Scheitel nach den Aufhängepunkten hin entsprechend größer werden lassen. Gewöhnlich sucht man dieser Forderung annähernd dadurch zu genügen, daß man entweder die Anzahl oder die Dicke der Schienen in den einzelnen Kettengliedern nach den Aufhängepunkten hin vergrößert. Streng genommen hätte man den Ketten die Form von Körpern gleichen Widerstandes zu geben, für welche die Forderung zu stellen ist, daß für jeden Punkt, dessen Querschnitt F und in welchem die Spannung S ist, die Bedingung:

$$\frac{S}{F} = s = \text{const.}$$

gilt, wenn wieder s die zulässige Materialspannung pro Flächeneinheit bedeutet.

Es seien $CN = x$ und $CM = y$, Fig. 363, die Ordinaten des Punktes B des Kettenbogens, dessen Tangente BT den Winkel α mit der

Fig. 363.



horizontalen X -Axe bildet, so hat man, unter F den Querschnitt der Kette daselbst und unter γ das spezifische Gewicht derselben verstanden, das Gewicht eines Bogenelementes db durch $F db \cdot \gamma$ und daher das Gewicht des Bogenstückes CB durch:

$$G = \gamma \int F \partial b = \frac{\gamma}{s} \int S \partial b$$

ausgedrückt.

Wenn daher das Gewicht der Brückenbahn pro laufenden Meter durch q bezeichnet wird, so ist die Verticalkraft in B :

$$V = \frac{\gamma}{s} \int S \partial b + qx, \dots \dots \dots (28)$$

oder, da

$$S = \frac{H}{\cos \alpha} = H \frac{\partial b}{\partial x}$$

ist, wenn H den constanten Horizontalzug bedeutet, so folgt auch:

$$V = \frac{\gamma H}{s} \int \frac{\partial b^2}{\partial x} + qx, \dots \dots \dots (29)$$

woraus ferner

$$\frac{V}{H} = \text{tg } \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\gamma}{s} \int \frac{\partial b^2}{\partial x} + \frac{qx}{H}$$

sich ergibt. Durch Differentiiren erhält man:

$$\begin{aligned} \partial \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\gamma}{s} \frac{\partial b^2}{\partial x} + \frac{q}{H} \partial x = \frac{\gamma}{s} \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial x} + \frac{q}{H} \partial x \\ &= \frac{\gamma}{s} \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \partial x + \frac{q}{H} \partial x \end{aligned}$$

und daher

$$\partial x = \frac{\partial \frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\gamma}{s} + \frac{q}{H} + \frac{\gamma}{s} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} = \frac{\partial \text{tg } \alpha}{\frac{\gamma}{s} + \frac{q}{H} + \frac{\gamma}{s} \text{tg}^2 \alpha}$$

Da im Scheitel C die Spannung gleich H ist, so kann man, wenn F_0 den Querschnitt der Kette daselbst bedeutet, $H = F_0 s$ setzen, und erhält, wenn man noch

$$\frac{q}{F_0} = \gamma_1 \dots \dots \dots (30)$$

einführt:

$$\partial x = \frac{s \cdot \partial \text{tg } \alpha}{\gamma + \gamma_1 + \gamma \text{tg}^2 \alpha'} \dots \dots \dots (31)$$

welcher Ausdruck zu integriren ist, um die Gleichung für die Kettenbrückenlinie zu finden. Es kann bemerkt werden, daß der Gleichung $q = F_0 \gamma_1$ zufolge unter γ_1 das specifische Gewicht desjenigen Körpers zu denken ist, welcher bei einer Grundfläche F_0 gleich dem Kettenquerschnitte im Scheitel und bei einer Höhe von 1 m ein Gewicht hat, das gerade gleich der Be-

Laftung q von 1 laufenden Meter Brücke ist. Um obige Gleichung zu integrieren, schreibt man sie:

$$\begin{aligned} \partial x &= \frac{s \cdot \partial \operatorname{tg} \alpha}{(\gamma + \gamma_1) \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} \operatorname{tg}^2 \alpha \right)} \\ &= \frac{s \cdot \partial \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} \operatorname{tg} \alpha}}{\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)} \left[1 + \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} \operatorname{tg} \alpha} \right)^2 \right]} \\ &= \frac{s}{\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}} \frac{\partial u}{1 + u^2}, \end{aligned}$$

wenn der Kürze wegen $\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} \operatorname{tg} \alpha} = u$ gesetzt wird. Da nun aber bekanntlich:

$$\int \frac{\partial u}{1 + u^2} = \operatorname{arc.} \operatorname{tg} u$$

ist, so hat man im vorliegenden Falle:

$$x = \frac{s}{\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}} \operatorname{arc.} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} \operatorname{tg} \alpha}, \dots (32)$$

sowie umgekehrt:

$$\operatorname{tg} \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} \operatorname{tg} \alpha},$$

d. i.:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}} \operatorname{tg} \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} = \frac{\partial y}{\partial x} \dots (33)$$

Die Integrationsconstante ist Null, weil für $x = 0$ auch $\alpha = 0$ ist. Diese Gleichung:

$$\partial y = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}} \operatorname{tg} \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} \partial x$$

liefert durch nochmalige Integration vermöge der bekannten Integralsformel:

$$\int \operatorname{tg} w \partial w = - \log \operatorname{nat} \cos w = \ln \frac{1}{\cos w} = \ln \sec w,$$

$$y = \frac{s}{\gamma} \log \operatorname{nat} \sec \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s}, \dots (34)$$

wobei ebenfalls die Constante Null ist, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muß, was der Fall ist, da $\sec 0 = 1$ und $\log \operatorname{nat} 1 = 0$ ist. Diese

Gleichung (34) kann dazu dienen, für jedes x das zugehörige y zu ermitteln, wenn $\gamma_1 = \frac{q}{F_0}$ gegeben ist.

Sind die Coordinaten x und y gegeben, so kann man γ_1 wie folgt bestimmen. Es ist, unter e die Grundzahl des natürlichen Logarithmen-systems verstanden, nach (34):

$$\sec \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} = e^{\frac{\gamma}{s} y}.$$

Setzt man den Bogen:

$$\frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} = \psi, \dots \dots \dots (35)$$

also

$$\log \text{nat} \sec \psi = \frac{\gamma}{s} y,$$

so folgt

$$\gamma + \gamma_1 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{s \psi}{x} \right)^2,$$

und daher

$$\gamma_1 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{s \psi}{x} \right)^2 - \gamma = \left[\left(\frac{s \psi}{\gamma x} \right)^2 - 1 \right] \gamma \dots \dots (36)$$

Hieraus bestimmt sich weiter der Querschnitt F_0 der Kette im Scheitel:

$$F_0 = \frac{q}{\gamma_1} = \frac{q}{\gamma \left[\left(\frac{s \psi}{\gamma x} \right)^2 - 1 \right]} \dots \dots \dots (37)$$

und die Horizontalspannung:

$$H = F_0 s = \frac{q s}{\gamma \left[\left(\frac{s \psi}{\gamma x} \right)^2 - 1 \right]} \dots \dots \dots (38)$$

Ferner hat man bekanntlich für jeden Punkt der Kette die Verticalspannung:

$$V = H \operatorname{tg} \alpha,$$

die Tangentialspannung:

$$S = \frac{H}{\cos \alpha}$$

und den Querschnitt:

$$F = \frac{S}{s} = \frac{H}{s \cos \alpha} = \frac{F_0}{\cos \alpha},$$

wobei sich α einfach nach (33) und (35) durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{\gamma + \gamma_1}}{\gamma} \operatorname{tg} \psi \dots \dots \dots (39)$$

bestimmen läßt.

Das Gewicht $G = \frac{\gamma}{s} \int S \delta b$ des Kettenstückes CB ist endlich gefunden durch (28) zu:

$$G = V - qx = Htg\alpha - qx. \quad (40)$$

Die Aufgabe wird durch die vorstehenden Formeln insofern noch nicht genau gelöst, als bei der Entwicklung derselben auf das veränderliche Gewicht der Hängestangen keine Rücksicht genommen worden ist. Es fällt indessen dieses Gewicht klein genug aus, um auch hier eine mittlere Hängestanglänge $\lambda = \frac{y}{3}$ einführen und folglich auch das Gewicht $G_1 = F_1 \lambda \gamma$ setzen zu können.

Nun ist aber der Querschnitt sämtlicher Hängestangen an CB zusammen genommen durch:

$$F_1 = \frac{qx}{s_1 - \lambda \gamma} \text{ annähernd } \frac{qx}{s_1}$$

gegeben, daher folgt das Gewicht derselben:

$$G_1 = \frac{\gamma \lambda}{s_1} qx,$$

und man hat, um es zu berücksichtigen, in der vorstehenden Rechnung überall anstatt qx den Werth:

$$\left(1 + \frac{\gamma \lambda}{s_1}\right) qx$$

einzuführen.

Anmerkung. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe mit Rücksicht auf das veränderliche Gewicht der Hängestangen ist zu finden in „The Mechanical Principles of Engineering and Architecture by Moseley, London 1843“. S. auch in Bd. I des Civilingenieurs die Abhandlung von Dr. D. Schömilch über Kettenbrücken von durchaus gleicher Sicherheit.

Beispiel. Für die Kettenbrücke in §. 69 erhält man, wenn in

$$\log \text{nat sec } \psi = \frac{\gamma}{s} y; \quad \gamma = 0,0000076$$

$s = 10$, und für y die ganze Pfeilhöhe $h = 4000$ mm eingesetzt wird:

$$\log \text{nat sec } \psi = \frac{0,0000076}{10} 4000 = 0,00304$$

oder

$$\begin{aligned} \log \cos \psi &= \log \frac{1}{\text{sec } \psi} = 0 - \frac{0,00304}{2,302586} = -0,001320 \\ &= 9,998680 - 10; \end{aligned}$$

daher

$$\psi^0 = 4^0 27' 30'' = 4,4584^0$$

und

$$\psi = \frac{2 \cdot 3,1416 \cdot 4,4584}{360} = 0,077814,$$

so daß nun nach (36), wenn man darin für x die halbe Spannweite 20 m = 20 000 mm einsetzt,

$$\gamma_1 = \left[\left(\frac{10 \cdot 0,077814}{0,0000076 \cdot 20\,000} \right)^2 - 1 \right] 0,0000076 = 25,204 \cdot 0,0000076 \\ = 0,0001916 \text{ kg}$$

sich ergibt.

Da die Belastung einer halben Kette 44 000 kg und das Gewicht der zugehörigen Hängestäbe 223 kg beträgt, so hat man die Belastung pro 1 mm der Länge:

$$q = \frac{44\,223}{20\,000} = 2,2112 \text{ kg},$$

und es ist der erforderliche Querschnitt der Kette im Scheitel:

$$F_0 = \frac{q}{\gamma_1} = \frac{2,2112}{0,0001916} = 11\,540 \text{ qmm.}$$

Für den Aufhängewinkel α_1 hat man nach (39):

$$\text{tg } \alpha_1 = \sqrt{\frac{0,0000076 + 0,0001916}{0,0000076}} \text{ tg } 4^\circ 27' 30'' = 5,11 \cdot 0,07797 \\ = 0,3984 = \text{tg } 21^\circ 43'.$$

Der Querschnitt der Kette am Aufhängepunkte ist nun:

$$F_1 = \frac{F_0}{\cos \alpha_1} = \frac{11\,540}{0,9290} = 12\,422 \text{ qmm.}$$

Die Horizontalspannung der Kette folgt:

$$H = F_0 s = 115\,400 \text{ kg},$$

und die Verticallspannung im Aufhängepunkte:

$$V = H \text{tg } \alpha_1 = 115\,400 \cdot 0,3984 = 45\,975 \text{ kg},$$

daher ist das Gewicht einer Kettenhälfte:

$$G = V - ql = 45\,975 - 44\,223 = 1752 \text{ kg.}$$

Bei konstantem Querschnitt ergab sich $G = 1940$, folglich ist die Ersparniß an Material für jede Kette:

$$2 (1940 - 1752) = 376 \text{ kg}$$

gleich ca. 10 Proc. des Kettengewichtes.

Pfeiler und Widerlager. Von besonderer Wichtigkeit ist noch die §. 72. Bestimmung der Dimensionen der Pfeiler und der Widerlagsmauern einer Hängebrücke. Sind S_1 und S_2 die Spannungen der über einen Pfeiler $ABCD$ weggehenden Ketten, Fig. 364 (a. f. S.), und α_1 und α_2 ihre Neigungswinkel, so hat man den Verticaldruck auf den Pfeiler:

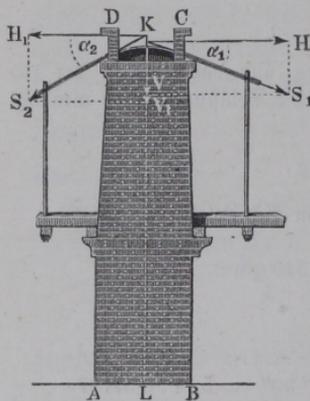
$$V = V_1 + V_2 = S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2,$$

und den Horizontaldruck, da die Horizontalspannungen einander entgegenwirken:

$$H = H_1 - H_2 = S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2.$$

Ist nun h die Höhe KL , b die Breite und d die Dicke AB eines Pfeilers, sowie dessen Dichtigkeit $= \gamma$, so hat man das Gewicht desselben:

Fig. 364.



$$G = dbh\gamma,$$

und den gesammten Verticaldruck:

$$V + G = S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 + dbh\gamma.$$

Damit aber die Horizontalkraft:

$$H = H_1 - H_2$$

den Pfeiler nicht umstürze um die Kante B , ist es nöthig, daß das statische Moment

$$H \cdot \overline{KL} = Hh = (S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2)h$$

von dem statischen Moment

$$(V + G) \overline{BL} = (S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 + dbh\gamma) \frac{d}{2}$$

übertroffen werde, daß also

$$d^2 + \frac{S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2}{bh\gamma} d > 2 \frac{S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2}{b\gamma}$$

oder

$$d^2 + \frac{V_1 + V_2}{bh\gamma} d = 2\sigma \frac{H_1 - H_2}{b\gamma}$$

sei, wobei σ den Stabilitätscoefficienten 2 bis 4 bezeichnet (f. §. 28).

Hiernach ist die nöthige Pfeilerdicke:

$$d = -\frac{V_1 + V_2}{2bh\gamma} + \sqrt{\frac{2\sigma(H_1 - H_2)}{b\gamma} + \left(\frac{V_1 + V_2}{2bh\gamma}\right)^2}.$$

Uebrigens ist der Sicherheit wegen für $S_1 \cos \alpha_1$ der größte und für $S_2 \cos \alpha_2$ der kleinste Werth zu setzen, also anzunehmen, daß die Kette einerseits vollständig und andererseits gar nicht belastet sei.

Diese Formel setzt voraus, daß die Kräfte S_1 und S_2 vollkommen übertragen werden auf den Pfeilerkopf, was allerdings nur eintritt, entweder wenn die Seilenden am Pfeilerkopf festsetzen, oder wenn die Reibung auf denselben die Differenz $S_1 - S_2$ der Spannungen übertrifft. Nach Thl. I ist diese Reibung:

$$F = \left[\left(1 + 2\varphi \sin \frac{\beta}{2} \right)^n - 1 \right] S_2,$$

wenn φ den Reibungscoefficienten, n die Zahl der auf dem Pfeilerkopfe aufliegenden Kettenglieder und β den Centriwinkel bezeichnet, welcher einem Gliede entspricht; wenn daher

$$S_1 - S_2 < \left[\left(1 + 2 \varphi \sin \frac{\beta}{2} \right)^n - 1 \right] S_2$$

oder

$$S_1 < \left(1 + 2 \varphi \sin \frac{\beta}{2} \right)^n S_2$$

ist, so legt sich die Kette fest auf den Pfeilerkopf auf; außerdem gleitet sie aber auf dem Pfeilerkopfe hin, und es ist deshalb in obige Formel:

$$S_1 = \left(1 + 2 \varphi \sin \frac{\beta}{2} \right)^n S_2,$$

oder bei Seilen:

$$S_1 = e^{\varphi \alpha} S_2 \text{ (s. Thl. I)}$$

einzusetzen.

Legt man die Kette oder das Seil auf Rollen, so ist diese Differenz, und daher die nöthige Pfeilerstärke, viel kleiner. Sind die Rollenhalbmesser a und die Zapfenhalbmesser r , so hat man:

$$S_1 = S_2 + \varphi \frac{r}{a} (S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2) = S_2 + \varphi \frac{r}{a} (V + V_1)$$

zu setzen, weil die auf den Rollenhalbmesser reducirte Zapfenreibung den Werth:

$$F = \varphi \frac{r}{a} (S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2) \text{ hat.}$$

Besteht der Pfeiler in einem drehbaren Ständer, so ist statt r der Zapfenhalbmesser und statt a die Höhe des Ständers einzusetzen, und liegt das Seil auf Walzen, so hat man statt φr den Hebelarm $f = 0,5 \text{ mm}$ der wälzenden Reibung einzuführen, wobei auch a und r in Millimetern zu nehmen sind.

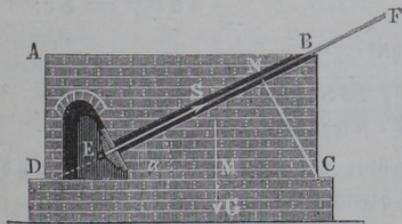
Aus der Spannung S der Spann- oder Endketten (Spann- oder

Endseile) kann man auch noch die nöthigen Dimensionen der Widerlagsmauer AC , Fig. 365, bestimmen.

Die Spannung S sucht die Widerlagsmauer AC um die Kante C zu drehen, und wirkt dabei am Hebelarme:

$$CN = CD \sin \alpha = l \sin \alpha,$$

Fig. 365.



wenn α den Neigungswinkel SDC des Seiles gegen den Horizont und l die Länge CD der Mauer bezeichnet. Das Gewicht G der Mauer wirkt aber mit dem Momente:

$$G \cdot \overline{CM} = h b l \gamma \frac{l}{2} = \frac{1}{2} h b l^2 \gamma$$

entgegen, wo h die Höhe BC , b die Breite und γ das spezifische Gewicht der Mauer bezeichnet. Für den Gleichgewichtszustand ist:

$$S l \sin \alpha = \frac{1}{2} h b l^2 \gamma,$$

daher die nöthige Mauerlänge bei einem Stabilitätscoefficienten σ :

$$l = \frac{2 \sigma S \sin \alpha}{h b \gamma}.$$

Damit ferner dieselbe Mauer nicht fortgeschoben werde, muß ihre Reibung φ ($G - S \sin \alpha$) größer, als die Horizontalkraft $S \cos \alpha$, also:

$$\varphi G > S (\cos \alpha + \varphi \sin \alpha)$$

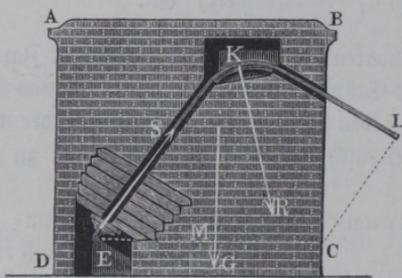
sein. Man setzt hiernach:

$$l = \frac{\sigma S}{h b \gamma} \left(\frac{\cos \alpha}{\varphi} + \sin \alpha \right),$$

wobei $\varphi = 0,67$ und der Stabilitätscoefficient σ 2 bis 4 anzunehmen ist.

Wenn die Kette im Widerlagspfeiler nicht bloß befestigt, sondern auch aufgelagert ist, wie in Fig. 366, so ist der Hebelarm der Spannung S das

Fig. 366.



Perpendikel $CL = c$, vom Stützpunkte C nach der Seilrichtung KL gefällt, und der Hebelarm des Pfeilergewichtes G die Hälfte CM der Pfeilerlänge $CE = l$, letztere, der Sicherheit wegen, nur bis zum Befestigungspunkte E des Seiles gemessen. Hiernach hat man

$$\frac{1}{2} h b l^2 \gamma = S c;$$

und daher mit Rücksicht auf Sicherheit

$$l = \sqrt{\frac{2 \sigma S c}{h b \gamma}}.$$

In Hinsicht auf das Fortschieben über CE ist, wenn α die Neigung des Tragsseiles KL gegen den Horizont bezeichnet:

$$\varphi (G + S \sin \alpha) = S \cos \alpha,$$

wonach

$$G = \frac{S \cos \alpha - \varphi S \sin \alpha}{\varphi},$$

und

$$l = \frac{\sigma S (\cos \alpha - \varphi \sin \alpha)}{\varphi h b \gamma}$$

folgt.

Beispiel. Bei der in dem Beispiele zu §. 71 berechneten Kettenbrücke fand sich die Vertikalkraft der belasteten Kette:

$$V_1 = 45\,975 \text{ kg},$$

und die der unbelasteten zu:

$$V_2 = V_1 - 20 \cdot 1200 = 21\,975 \text{ kg}.$$

Wird nun für die Rollen des Pfeilerkopfes $\frac{r}{a} = \frac{1}{4}$ und $\varphi = \frac{1}{4}$ angenommen, so ist die Zapfenreibung daselbst:

$$F = \varphi \frac{r}{a} (V_1 + V_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} 45\,975 + 21\,975 = 4244 \text{ kg}$$

viel kleiner, als die Differenz der Spannungen. Es tritt daher eine Umdrehung der Rollen und Bewegung der Kette ein, wobei deren Spannung auf der einen Seite des Pfeilers sich vergrößert, auf der anderen abnimmt, so lange bis die Differenz der beiden Horizontalspannungen $H_1 - H_2$ den Betrag von 4244 kg erreicht. Ist nun die Pfeilerhöhe gleich 5 m, die Breite gleich 1,2 m und das spezifische Gewicht der Mauermaße $\gamma = 2$, so hat man:

$$V_1 + V_2 = 67\,950 \text{ kg}, \quad b h \gamma = 1,2 \cdot 5 \cdot 2000 = 12\,000 \text{ kg}$$

und

$$H_1 - H_2 = F = 4244 \text{ kg},$$

so daß sich für einen Stabilitätscoefficienten $\sigma = 4$ die erforderliche Pfeilerdicke berechnet zu:

$$d = -\frac{67\,950}{2 \cdot 12\,000} + \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 4244}{1,2 \cdot 2000} + \left(\frac{67\,950}{24\,000}\right)^2} = -2,83 + 4,71 = 1,88 \text{ m}.$$

Für die Widerlagsmauer der Spannkette, Fig. 365, erhält man, wenn $h = 5 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$ und der Neigungswinkel α gleich demjenigen α_1 der Tragketten am Pfeilerkopfe zu $21^\circ 43'$ angenommen, also $S \sin \alpha_1 = 45\,975 \text{ kg}$ gesetzt wird, für einen Stabilitätscoefficienten $\sigma = 2$:

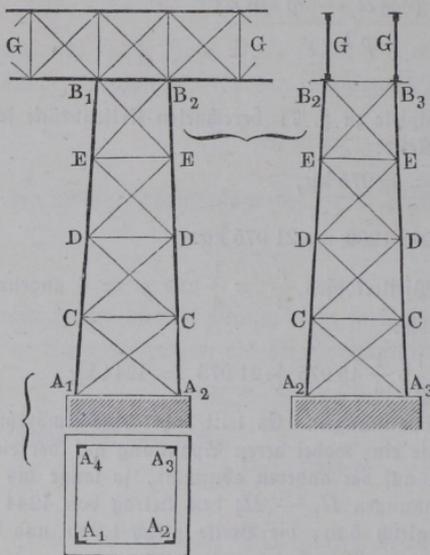
$$l = \frac{2 \cdot 2 \cdot 45\,975}{5 \cdot 3 \cdot 2000} = 6,13 \text{ m}.$$

Hinsichtlich der Pfeiler von Bogenbrücken wurde bereits in §. 64 die ungünstigste Belastungsart festgestellt und daselbst bemerkt, daß die Dimensionen dieser Pfeiler in derselben Art zu bestimmen sind, welche in Bezug auf die Widerlager der Gewölbe in §. 28 angeführt wurde.

Es sollen hier nur noch die sogenannten Fachwerks Pfeiler erwähnt werden, welche man in neuerer Zeit vielfach, namentlich bei hohen in Eisen ausgeführten Wegelüberführungen zur Anwendung bringt.

Ein solcher Fachwerkspfeiler besteht im Allgemeinen aus vier in den Ecken A_1, A_2, A_3 und A_4 , Fig. 367, des rechteckigen Pfeilergrundrisses aufgestellten Stielen AB , welche

Fig. 367.



nach oben gegen einander schwach geneigt sind, und deren obere Punkte B_1, B_2, B_3 und B_4 die Ecken eines rechteckigen Rahmens bilden, auf welchem die Brückenträger GG ruhen. Diese Stiele sind in verschiedenen Höhen etagenweise durch die rahmenförmigen Querverbindungen C, D, E vereinigt, und endlich sind die auf diese Weise entstehenden trapezförmigen Felder der vier Seitenflächen des Pfeilers durch gekreuzte Diagonalen wie $CD, DE \dots$ versteift. Auch pflegt man wohl durch das Innere des Pfeilers derartige schräg stehende Zug-

bänder zwischen den diametral gegenüber stehenden Ständern anzubringen. Die Diagonalen werden wegen der gekreuzten Anordnung stets nur auf Zug beansprucht, und zwar wird je nach der Angriffsweise der äußeren Kräfte von je zwei gekreuzten Bändern bald das eine, bald das andere zur Wirkung kommen, in gleicher Art, wie dies im Vorstehenden in Bezug auf die Diagonalen der Fachwerksträger mehrfach besprochen worden ist.

Die äußeren Kräfte, welche diese Pfeiler angreifen, sind außer dem Eigengewichte der Pfeilertheile selbst das Gewicht der Brücke nebst der darauf befindlichen Verkehrslast, sowie der Druck des Windes gegen die Pfeiler, die Brückentheile, und gegen die auf der Brücke befindlichen Wagen. Außerdem ist hierzu natürlich bei Bogenbrücken noch der Horizontalschub der Bogensträger zu rechnen.

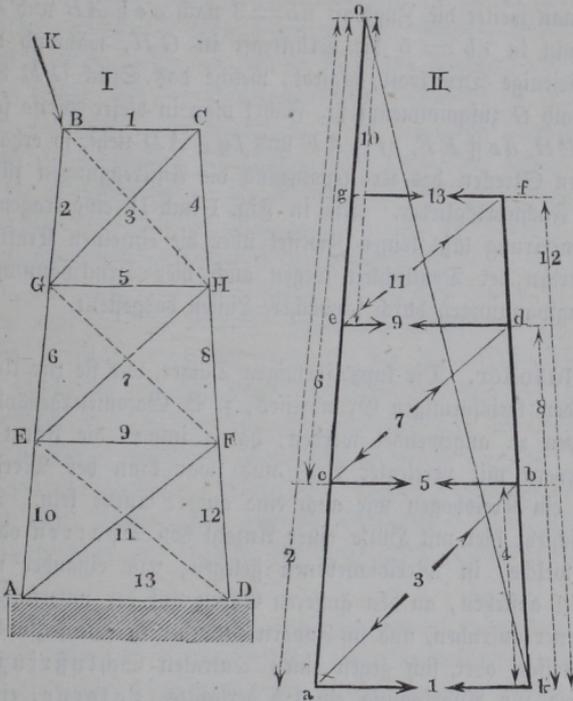
Kennt man diese angreifenden Kräfte, für welche man für die Construction die ungünstigsten Werthe zu Grunde zu legen hat, so wird man dieselben nach den Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in solche Componenten zerlegen können, welche in die Ebenen der vier Seitenflächen des obeliskenförmigen Pfeilers hineinfallen.

Ist dies geschehen, so kann man eine solche Seitenwand des Pfeilers in ähnlicher Weise behandeln, wie einen Fachwerksträger, und es gelten die für

die letzteren angeführten Regeln auch hierfür. Am einfachsten wird auch hier die graphische Ermittlung zur Kenntniß der die einzelnen Constructionslieder angreifenden Kräfte führen, und es genügt dazu in der Regel die bloße Verzeichnung des zugehörigen Kräftepolygons.

Als Beispiel sei durch $ABCD$, Fig. 368, I, eine solche Seitenwand eines Fachwerkpfelers dargestellt, und angenommen, daß die auf dieses

Fig. 368.



Fachwerk in dessen Ebene wirkende resultierende äußere Kraft durch K dargestellt sei. Es mag hier bemerkt werden, daß man auf etwaige senkrecht zu der Ebene $ABCD$ wirkende Kraftcomponenten nicht zu rücksichtigen hat, indem diese Componenten sich immer zu solchen Mittelkräften zusammensetzen lassen, welche in die Ebenen der an $ABCD$ anstoßenden Pfeilerwände hineinfallen.

Bei der vorausgesetzten Richtung der Kraft K ist es leicht einzusehen, daß die ausgezogenen Diagonalen AF , EH , GC in Spannung versetzt werden, während die punktirten Diagonalen ED , GF und BH wirkungslos sind. Demgemäß ergibt sich also die Zeichnung des Kräftepolygons, Fig. 368, II, leicht wie folgt. Macht man der Richtung und Größe nach

entsprechend dem gewählten Kräftemaßstabe $ok = K$, und zieht oa parallel BA und durch k eine Parallele mit BC , so erhält man in $oa = 2$ die Druckkraft 2 in BG , während $ak = 1$ die Pressung 1 in dem horizontalen Gliede BC ergibt. Letztere Kraft $ak = 1$ zerlegt sich nun wieder durch Parallelen mit GC und CD in die Zugspannung $ab = 3$ der Diagonale GC und die Druckspannung $bk = 4$ in dem Ständerstücke CH .

Zerlegt man weiter die Zugkraft $ab = 3$ nach $ac \parallel AB$ und $cb \parallel GH$, so erhält man in $cb = 5$ die Druckkraft in GH , während das Stück $oc = 6$ diejenige Druckkraft angiebt, welche das Stück GE des Stiels AB unterhalb G zusammenpreßt. Führt man in dieser Weise fort, indem man $cd \parallel EH$, $de \parallel EF$, $ef \parallel AF$ und $fg \parallel AD$ zieht, so erhält man in den einzelnen Strecken des Kräftepolygons die Anstrengungen für die entsprechenden Fachwerksglieder. Die in Fig. I und II eingetragene gemeinsame Nummerirung läßt keinen Zweifel über die einzelnen Kräfte bestehen, und es wurden der Deutlichkeit wegen auch hier Druckspannungen durch stärkere, Zugspannungen durch schwächere Linien dargestellt.

§. 73. **Kuppeldächer.** Die kuppelförmigen Dächer, wie sie zur Ueberdeckung von Gebäuden kreisförmigen Grundrisses, z. B. Gasometergebäuden, Locomotivschuppen u. angewendet werden, haben immer die Form von Umdrehungskörpern mit verticaler Aze, und zwar kann der Meridianschnitt ebensowohl ein Kreisbogen wie auch eine andere Curve sein. Die Ueberdeckung geschieht hier mit Hilfe einer Anzahl von Sparren oder Traggrippen, welche, in Meridianebenen gelegen, von einander um gleiche Centriwinkel abstehen, an den äußeren Enden auf der unterstützenden Umfassungsmauer aufrufen, und im Innern entweder in einem Punkte der Aze zusammentreffen oder sich gegen einen centralen Schlußring stemmen, welcher etwa zur Anbringung eines Oberlichtes, Laterne, eingesetzt ist. Diese Sparren oder Rippen unterscheiden sich von gewöhnlichen Fachwerksträgern, welche man etwa diagonal und in der Mitte sich durchsetzend über dem Raume anordnen könnte, dadurch, daß ihnen die Untergurtung fehlt, und daß deren Zugkraft ersetzt ist entweder durch die Widerstandsfähigkeit der Umfassungsmauern oder durch die Spannkraft eines auf den letzteren gelagerten horizontalen eisernen Mauerringes, in ähnlicher Art, wie dies bereits in §. 30 gelegentlich der Kuppelgewölbe besprochen worden ist. Solche horizontale Ringe, welche Parallelkreise der Kuppelfläche darstellen, sind außerdem zwischen dem Auflager und dem Pole oder Scheitel der Kuppel noch mehrere zwischen den meridionalen Sparren angeordnet, die letzteren dadurch gegen einander versteifend. Die Decke der Kuppel wird dann ähnlich wie bei anderen Dächern durch Pfetten unterstützt, welche, auf

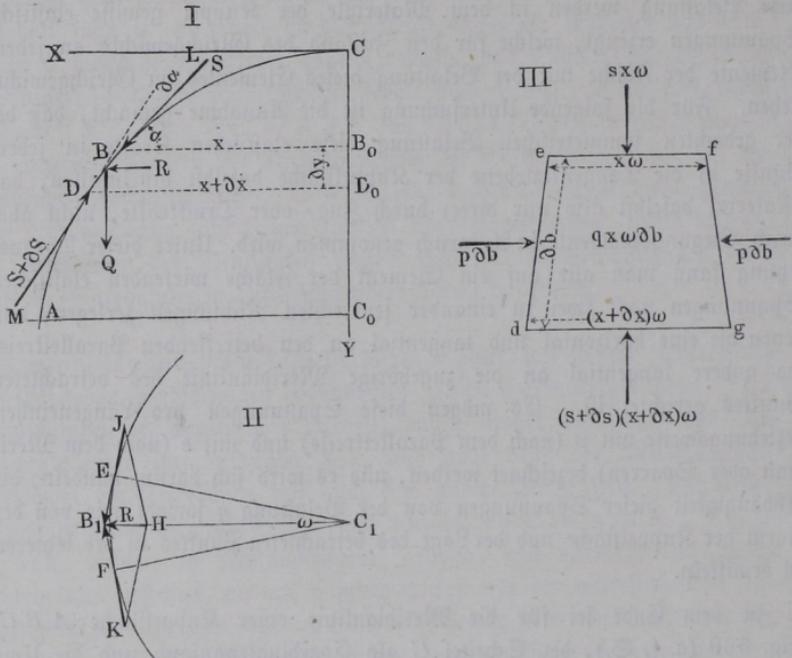
wenn mit ∂b das Bogenelement BD der Meridianlinie bezeichnet wird. Es wirkt daher in diesem Elemente als Belastung die Kraft:

$$Q = q \partial F = q x \omega \partial b. \dots \dots \dots (2)$$

vertical abwärts.

Außerdem wirken auf die vier Seiten des betrachteten Elementes nach dem Vorhergehenden vier Kräfte, von denen die beiden in der Ebene des

Fig. 369.



Parallelkreises wirkenden wegen der symmetrischen Belastung übereinstimmend die Größe:

$$P = p \partial b \dots \dots \dots (3)$$

haben, und deren Richtungen JB_1 und KB_1 in II um den kleinen Winkel ω geneigt sind. Die beiden anderen in der Ebene des Meridians wirkenden Kräfte sind ausgedrückt durch:

$$S = s x \omega = LB \text{ auf } ef \dots \dots \dots (4)$$

und durch:

$$S + \partial S = (s + \partial s) (x + \partial x) \omega = MD \text{ auf } dg \dots \dots (5)$$

Um für diese fünf Kräfte die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, kann man die beiden gleichen Spannungen JB_1 und KB_1 auf de und fg zu einer Mittelkraft HB_1 zusammensetzen, welche horizontal und radial ge-

richtet sein muß, und deren Größe R sich nach Fig. 369 II aus der Proportion:

$$JB_1 : HB_1 = C_1 E : EF, \text{ d. h. } P : R = x : x\omega$$

zu

$$R = P\omega = \omega p \partial b \dots \dots \dots (6)$$

ergibt.

Die vier auf das Element wirkenden Kräfte $Q, S, S + \partial S$ und R liegen sämmtlich in der Meridianebene, und es gelten daher für dieselben die betreffenden Gleichgewichtsbedingungen. Setzt man zunächst die Summe aller verticalen Kraftcomponenten gleich Null, so wird:

$$Q + S \sin \alpha - (S + \partial S) \sin (\alpha + \partial \alpha) = 0.$$

Da $\sin (\alpha + \partial \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha \partial \alpha = \sin \alpha + \partial (\sin \alpha)$ ist, so erhält man, da $\partial S \partial \alpha$ als klein höherer Ordnung verschwindet:

$$Q + S \sin \alpha - S \sin \alpha - S \partial (\sin \alpha) - \sin \alpha \partial S = 0$$

oder

$$Q = S \partial (\sin \alpha) + \sin \alpha \partial S = \partial (S \sin \alpha),$$

und wenn man darin für Q und S die Werthe aus (2) und (4) einsetzt und durch ω beiderseits dividirt:

$$q x \partial b = \partial (s x \sin \alpha) \dots \dots \dots (7)$$

In derselben Weise erhält man wegen der Gleichheit der horizontalen Componenten aus:

$$R + S \cos \alpha = (S + \partial S) \cos (\alpha + \partial \alpha) = (S + \partial S) (\cos \alpha + \partial \cos \alpha) \\ R = S \partial (\cos \alpha) + \cos \alpha \partial S = \partial (S \cos \alpha),$$

und nach Einführung der Werthe für R und S aus (6) und (4):

$$p \partial b = \partial (s x \cos \alpha) \dots \dots \dots (8)$$

Aus den Gleichungen (7) und (8) erhält man für eine bestimmte Kuppelschale vom Halbmesser $B_0 B = x$, für welche die Bogenlänge CB des Meridians durch b ausgedrückt sein mag, durch Integration zwischen den Grenzen s und 0 die Ausdrücke:

$$s x \sin \alpha = \int_0^b q x \partial b \dots \dots \dots (9)$$

und

$$s x \cos \alpha = \int_0^b p \partial b \dots \dots \dots (10)$$

Diese beiden Gleichungen können dazu dienen, bei gegebener Form und Belastung der Kuppel die Größe der Spannungen s und p zu bestimmen. Als Beispiel möge eine kreisbogenförmige Meridianlinie ABC vom Halb-

messer r angenommen werden. Für diesen Fall ist $x = r \sin \alpha$ und die Bogenlänge $b = r\alpha$, daher $\partial b = r\partial\alpha$. Mit diesen Werthen, und wenn man q constant annimmt, erhält man aus (9):

$$sr \sin^2 \alpha = \int_0^\alpha q r^2 \sin \alpha \partial \alpha = q r^2 (1 - \cos \alpha),$$

woraus

$$s = q r \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{q r}{1 + \cos \alpha} \dots \dots \dots (9^a)$$

folgt.

Setzt man diesen Werth in (8) für s ein, so erhält man:

$$p r \partial \alpha = \partial \left(q r \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} r \sin \alpha \cos \alpha \right) = q r^2 \partial \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \partial \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{-\sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \partial \alpha \\ &= \left(\cos \alpha - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) \partial \alpha, \end{aligned}$$

folglich

$$p = q r \left(\cos \alpha - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) \dots \dots \dots (10^a)$$

Da nach (9^a) s immer positiv ist, so ist dies ein Zeichen, daß die nach der Tangente des Meridians wirkende Kraft immer, wie in der Fig. 369 angenommen worden ist, in das Element hinein gerichtet ist, daher überall eine Druckkraft vorstellt. Diese spezifische Spannung ist für den Scheitel mit $\alpha = 0$ gleich $s = q \frac{r}{2}$, für den Aequator mit $\alpha = 90^\circ$, $s = q r$ und sie wächst mit zunehmendem α bis zu dem Werthe ∞ für $\alpha = 180$.

Die Spannung p dagegen nach der Richtung der Parallelkreise hat für den Scheitel mit $\alpha = 0$ ihren größten positiven Werth von ebenfalls $p = \frac{q r}{2} = s$, und nimmt mit wachsendem α ab bis zu Null für einen Winkel, welcher aus:

$$\cos \alpha = \frac{1}{1 + \cos \alpha'}$$

oder aus

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = 0,618$$

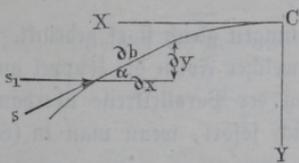
zu

$$\alpha = 51^\circ 50'$$

folgt. Bei weiterer Zunahme von α wird p negativ, d. h. die Druckspannung geht von hier aus in eine Zugspannung über, welche für den Aequator mit $\alpha = 90^\circ$ den Werth $-qr$ annimmt, von gleicher absoluter Größe mit s daselbst. Ein ähnliches Verhalten wurde schon in §. 30 gelegentlich der Betrachtung der Kuppelgewölbe gefunden.

Wenn die Kuppel, wie es bei den Ausführungen häufig der Fall ist, sehr flach, d. h. wenn die Pfeilhöhe h im Vergleiche mit dem größten Halbmesser r nur klein ist, so kann man die Belastung q mit genügender Genauigkeit gleichmäßig über die Horizontalprojection vertheilt denken, und

Fig. 370.



in (2) die Belastung des Elementes von der Größe $\partial F = \omega x \partial x$ zu $Q = q \omega x \partial x$ annehmen. Bezeichnet man nunmehr mit p_1 die Spannung in der Richtung des Parallelkreises bezogen auf die Einheit der horizontalen Abscisse x , so hat man nach Fig. 370 die Beziehung $p \partial b = p_1 \partial x$. Wenn man ferner die hori-

zontale Componente der Meridianspannung:

$$s \cos \alpha = s_1, \text{ also } s \sin \alpha = s_1 \operatorname{tg} \alpha = s_1 \frac{\partial y}{\partial x}$$

fest, so gehen mit diesen Werthen die Gleichungen (7) und (8) über in:

$$q x \partial x = \partial \left(s_1 x \frac{\partial y}{\partial x} \right) \dots \dots \dots (7^a)$$

und

$$p_1 \partial x = \partial (s_1 x), \dots \dots \dots (8^a)$$

woraus man durch Integration zwischen den Grenzen x und 0 erhält:

$$s_1 x \frac{\partial y}{\partial x} = \int_0^x q x \partial x = q \frac{x^2}{2},$$

also

$$s_1 \frac{\partial y}{\partial x} = q \frac{x}{2} \dots \dots \dots (7^b)$$

und

$$s_1 = \frac{1}{x} \int_0^x p_1 \partial x \dots \dots \dots (8^b)$$

Nimmt man beispielsweise eine Parabel von der Pfeilhöhe h und Spannweite $2r$ für die Meridianlinie an, hat man also:

$$\frac{y}{h} = \frac{x^2}{r^2} \text{ und daraus } \frac{\partial y}{\partial x} = 2 \frac{hx}{r^2},$$

so erhält man damit aus (7^b):

$$s_1 2 \frac{hx}{r^2} = q \frac{x}{2} \text{ oder } s_1 = \frac{q r^2}{4h},$$

unabhängig von x , d. h. die horizontale Componente der Meridianspannung ist für alle Punkte der Kuppel von constanter Größe und zwar genau halb so groß als die Horizontalspannung eines parabolischen Bogens von gleichen Abmessungen (s. §. 65). Aus (8^a) folgt für diesen Fall, wo s_1 constant ist, ferner $p_1 = s_1$, d. h. in jedem Punkte der paraboloidischen Kuppelfläche ist auch der Druck nach der Richtung des Parallelkreises constant und von derselben Größe $\frac{q r^2}{4h}$ mit dem horizontalen Meridionaldrucke. Das Material wird sonach in dieser Kuppel nach allen Richtungen gleich stark gedrückt.

Man kann hier die Frage aufwerfen, nach welcher Form die Kuppel auszuführen ist, damit ein Druck in der Richtung der Parallelkreise überhaupt nicht stattfindet. Diese Frage beantwortet sich sofort, wenn man in (8^a) $p_1 = 0$ setzt, wodurch man:

$$0 = \partial (s_1 x) \text{ oder } s_1 x = C$$

erhält, unter C eine noch zu bestimmende Constante verstanden. Mit

$$s_1 = \frac{C}{x} \text{ erhält man alsdann aus (7^b):}$$

$$C \partial y = \frac{1}{2} q x^2 \partial x$$

oder

$$C y = \frac{q}{6} x^3.$$

Die Constante C bestimmt sich dadurch, daß $x = r$ und $y = h$ zusammengehörige Werthe sind, zu:

$$C = \frac{q}{6h} r^3$$

und man erhält somit für die Meridianlinie die Gleichung:

$$\frac{y}{h} = \frac{x^3}{r^3} \dots \dots \dots (11)$$

einer cubischen Parabel.

Eine nach dieser Linie ausgeführte Kuppel hat die Eigenschaft, daß man sie durch beliebige Meridianschnitte in sectorenförmige Streifen zerschneiden kann, ohne das Gleichgewicht zu stören, da in den Schnittflächen keinerlei Spannungen auftreten. Es fallen nämlich nicht bloß die auf diesen Schnittflächen senkrechten Kräfte p_1 fort, sondern es können auch keine in diesen Schnittflächen wirkenden Schubkräfte auftreten, wie man sich leicht folgenderart überzeugt. Schneidet man aus der Kuppelfläche durch zwei um den

kleinen Winkel ω geneigte Meridianebenen einen sectorenförmigen Streifen heraus, welcher im Halbmesser r den Querschnitt f haben möge, so ist der radiale Horizontaldruck an dieser Stelle auf den Querschnitt durch

$$f s_1 = f \frac{C}{r} = f \frac{q}{6h} r^2$$

ausgedrückt. Für irgend einen anderen Halbmesser x ist der Querschnitt durch $f \frac{x}{r}$ und die spezifische Spannung durch

$$s_1 = \frac{C}{x} = \frac{q}{6h} \frac{r^3}{x}$$

gegeben, folglich ist die gesammte Horizontalpressung ebenfalls durch

$$f \frac{x}{r} \frac{q}{6h} \frac{r^3}{x} = f \frac{q}{6h} r^2$$

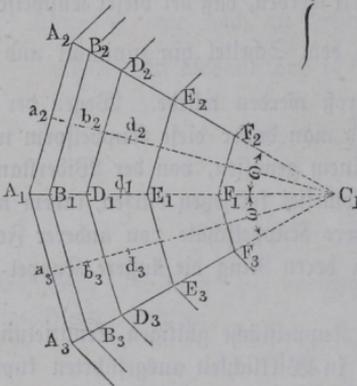
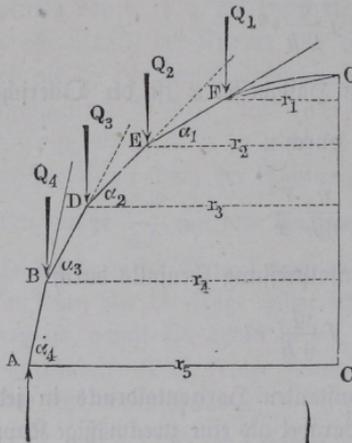
dargestellt. Diese Eigenschaft eines constanten Horizontaldrucks in jedem Streifen oder Sparren läßt die cubische Parabel als eine zweckmäßige Kuppelform erscheinen. Es muß indessen bemerkt werden, daß bei dieser Kuppelform der spezifische Druck $s_1 = \frac{q}{6h} \frac{r^3}{x}$ nach dem Scheitel hin zunimmt und im Scheitel selbst mit $x = 0$ unendlich groß werden würde. Wegen der beschränkten Festigkeit des Materials wird man daher diese Kuppelform nicht bis zum Scheitel, sondern nur bis zu einem gewissen, von der Widerstandsfähigkeit des Materials abhängigen Halbmesser fortsetzen dürfen, indem man den mittleren Raum durch eine besondere Kuppelschale von anderer Form oder durch eine Laterne ausfüllt, gegen deren Ring die äußere Kuppel sich anlehnt.

Die vorstehenden, für eine homogene Kuppelfläche gültigen Ermittlungen können nunmehr dazu dienen, für die in Wirklichkeit ausgeführten kuppelförmigen Dachconstructions die Kräfte in den einzelnen Tragrippen oder Sparren und in den zwischen denselben angeordneten Ringen zu finden.

Es sei etwa durch $ABDEF$ (Fig. 371, a. f. S.) einer von den n Sparren einer solchen Kuppel dargestellt, an welchen sich in den Knotenpunkten A, B, D, E und F die polygonalen Ringe $A_2 A_1 A_3, B_2 B_1 B_3 \dots$ anschließen, deren innerster F eine Laterne stützen möge. Man hat sich alsdann vorzustellen, daß in irgend einem Sparren, wie $A_1 F_1$, diejenige Spannung s auftritt, welche beim Vorhandensein einer homogenen Kuppelschale in dem Ausschnitte $a_2 C_1 a_3$ auftreten würde, unter a_2 und a_3 die Mitten von $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$ verstanden; d. h. man hat, um die Kraft des Sparrens $A_1 F_1$ in irgend einem Felde, etwa zwischen D und E zu finden, die nach den Gleichungen (9) und (10) zu ermittelnde spezifische Spannung s mit dem

mittleren Abstände $d_2 d_3$ zweier Sparren daselbst zu multipliciren. Bezeichnet man die Abscisse $C_1 d_1$ der Mitte zwischen D und E mit x , so ist die Bogenlänge zwischen d_2 und d_3 bei

Fig. 371.



Bestimmung der Kräfte S und P direct und ohne Benutzung der allgemeinen Formeln für die homogene Kuppelfläche vorzunehmen, was in folgender Weise geschehen kann.

Es seien die Halbmesser der in F, E, D, B und A angeordneten Ringe mit r_1, r_2, r_3, r_4 und r_5 bezeichnet, so kann man sich die ganze Kuppel in ringförmige Zonen getheilt denken, deren Gewichte als Belastungen für die einzelnen Ringe anzusehen sind. Diese Zonen hat man mitten zwischen den Knotenpunkten durch Kreise begrenzt zu denken, deren Halbmesser also

$$\frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \frac{r_2 + r_3}{2}, \quad \frac{r_3 + r_4}{2} \quad \text{und} \quad \frac{r_4 + r_5}{2}$$

$n = \text{Sparren durch } x \frac{2\pi}{n}$ gegeben, und man hat daher die Sparrenkraft daselbst zu

$$S = s \frac{2\pi x}{n}$$

zu setzen. In gleicher Weise hat man die Kraft P in einem Ringtheile, wie $D_1 D_3$ gleich $p \cdot b_3 d_3$, zu setzen, wenn p die aus (9) und (10) zu ermittelnde spezifische Pressung nach der Richtung der Parabelkreise bei D bedeutet. Eine solche Bestimmung der Kräfte S und P in den Sparren und Ringen aus den allgemeinen Gleichungen der homogenen Kuppelfläche giebt natürlich nur annähernd richtige Resultate, welche den wirklichen Werthen um so näher kommen, je größer die Zahl der Sparren und der Ringe ist. Da nun aber in der Ausführung aus constructiven Rücksichten diese Zahl gewöhnlich nur gering angenommen wird, indem man meist nur 4 bis 6 Ringe und 16 bis 24 Sparren anzuwenden pflegt, so empfiehlt es sich, die Bestimmung der Kräfte S und P direct und ohne Benutzung der allgemeinen Formeln für die homogene Kuppelfläche vorzunehmen, was in folgender Weise geschehen kann.

sind. Hat man die Gewichte dieser einzelnen Zonen, von denen die innerste die etwa daselbst angeordnete Laterne aufnimmt, festgesetzt, so findet man bei n Sparren in den n ten Theilen dieser Gewichte diejenigen Belastungen, welche in den einzelnen Knotenpunkten F, E, D, B und A jedes Sparrens wirksam sind. Es mögen diese Belastungen bezw. durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 ausgedrückt sein. Bezeichnet man ferner mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und α_4 die Neigungswinkel der Sparren in den entsprechenden Knotenpunkten gegen den Horizont, so erkennt man ohne Weiteres, daß man für die Pressungen S in den Sparren die Beziehungen hat:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{Q_1}{\sin \alpha_1} \text{ für } EF \\ S_2 &= \frac{Q_1 + Q_2}{\sin \alpha_2} \text{ für } DE \\ S_3 &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\sin \alpha_3} \text{ für } BD \\ S_4 &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{\sin \alpha_4} \text{ für } AB \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Die Belastung Q_5 des untersten, auf der Mauer gelegenen Ringes A hat keinen Einfluß auf die Constructionsglieder, da sie direct von der Mauer aufgenommen wird.

Ebenso findet man die Ringspannungen P mit Rücksicht darauf, daß die horizontale Componente jeder Sparrenkraft S durch die beiden anschließenden Ringspannungen P aufgenommen werden muß, also aus der allgemeinen Gleichung

$$S \cos \alpha = 2 P \sin \frac{\omega}{2},$$

wenn $\omega = \frac{2}{n} \pi$ den Mittelpunktswinkel zwischen zwei Sparren bedeutet.

Demnach wird der unterste auf der Mauer gelegene Ring A mit einer Kraft P_5 gezogen, welche zu

$$P_5 = \frac{S_4 \cos \alpha_4}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \cotg \alpha_4 \dots \dots (13)$$

sich bestimmt. Der innerste Ring F dagegen, welcher die Laterne trägt, und gegen welchen sich die Sparren nur von außen stemmen, ist einer Druckkraft P_1 ausgesetzt, welche bestimmt ist durch

$$P_1 = \frac{S_1 \cos \alpha_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{Q_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \cotg \alpha_1 \dots \dots (14)$$

Was die übrigen Ringe, z. B. denjenigen E anbetrißt, so wird derselbe durch die Belastung des innerhalb gelegenen Kuppeltheils einer Zugspannung

$$P_2' = \frac{S_1 \cos \alpha_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{Q_1 \cotg \alpha_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

und durch den Druck der außen herantretenden Sparrentheile DE einer Druckkraft

$$P_2'' = \frac{S_2 \cos \alpha_2}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{Q_1 + Q_2}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \cotg \alpha_2,$$

also einer resultirenden Spannung

$$P_2 = P_2' - P_2'' = \frac{Q_1 \cotg \alpha_1 - (Q_1 + Q_2) \cotg \alpha_2}{2 \sin \frac{\pi}{n}}, \quad (15)$$

ausgesetzt.

Ob diese Kraft einen Zug oder Druck darstellt, hängt vorzugsweise von der Größe der Winkel α , d. h. von der Form der Kuppel ab, und es wurde bereits im Vorstehenden gefunden, daß diese Ringspannung überall gleich Null ist, wenn die Meridianlinie nach einer cubischen Parabel gebildet ist, während eine kreisförmige Gestalt der Meridianlinie in den oberen Ringen der Kuppel (bis $\alpha = 51^\circ 50'$) Druckspannungen, in den unteren dagegen Zugspannungen zur Folge hat.

In dem Vorstehenden ist immer angenommen worden, daß die Kuppel vollständig und gleichförmig um die Ase herum durch die größte Belastung angegriffen werde. Es läßt sich aus den angegebenen Ermittlungen und den Gleichungen (12) erkennen, daß die Sparren bei dieser größten Belastung auch ihren größten Anstrengungen ausgesetzt sind. Anders verhält es sich mit der Anstrengung der Ringe. Die Gleichung (15) zeigt nämlich, daß der Werth $P = P' - P''$ für einen mittleren Ring seinen größten Betrag (größte Zug- oder kleinste Druckspannung) annimmt, wenn P' möglichst groß und P'' möglichst klein ist, d. h. wenn der Theil innerhalb des Ringes mit der größten Belastung (Schnee, Wind), der Theil außerhalb des Ringes dagegen mit der kleinsten Belastung, d. h. nur durch sein Eigengewicht belastet ist. Umgekehrt stellt sich in einem Ringe die größte Pressung (bezw. kleinste Spannung) ein, wenn der außerhalb gelegene Theil der Kuppel der größten und der innerhalb gelegene Theil der kleinsten Belastung ausgesetzt ist.

Im Vorhergehenden ist immer eine symmetrisch um die Ase vertheilte Belastung der Kuppel vorausgesetzt worden. So lange dieser Zustand vor-

handen ist, treten die Spannungen nur in den Sparren oder Meridianen und in den Ringen oder Parallellkreisen auf. Wenn indessen einseitige Belastungen statt finden, so stellen sich gewisse andere Spannungen ein, welche nicht mehr mit den Seiten der einzelnen Vierecke zusammenfallen, in welche die Kugel­fläche durch die Sparren und Ringe zerlegt ist. Um daher einer Verschiebung dieser Vierecke entgegen zu treten, sind die letzteren mit Diagonalen zu versehen, und zwar hat man in jedem Felde zwei gekreuzte Diagonalen anzuordnen, wenn dieselben nur auf Zug als Bänder beansprucht werden sollen.

Die Ermittlung der Spannungen in diesen Diagonalen ist mit großen Schwierigkeiten der Rechnung verbunden, und es soll hier nur die von Schwedler angegebene Bestimmung der äußersten Grenzen angeführt werden, welche diese Spannungen höchstens werden erreichen können. Danach findet die ungünstigste Beanspruchung einer Diagonale für denjenigen Belastungszustand der Kuppel statt, für welchen von den beiden Hälften, in welche die Kuppel durch eine Diametralebene getheilt wird, welche die gedachte Diagonale schneidet, die eine Hälfte gar nicht, die andere Hälfte mit der größten Belastung angegriffen wird. Von den beiden Sparren­stücken, welche die Diagonale zwischen sich enthalten, ist dann das eine mit der größeren Kraft S_{max} , das andere mit derjenigen S_{min} gepreßt, welche Werthe man nach (12) berechnen kann, wenn man das eine Mal die ganze Kuppel gleichförmig mit der größten Last (Eigengewicht und zufällige Last), das andere Mal mit der kleinsten Belastung (Eigengewicht allein) belastet denkt. Würde man annehmen, daß diese Differenz $S_{max} - S_{min}$ lediglich durch die Diagonale aufgenommen würde, so erhielte man die größte Zugkraft dieser unter dem Winkel β gegen die Sparren geneigten Diagonale zu

$$T = \frac{S_{max} - S_{min}}{\cos \beta},$$

welcher Betrag in Wirklichkeit aber nie erreicht werden wird.

Hinsichtlich der Ausführung von Kuppeldächern muß auf den schon oben angeführten Artikel in der Zeitschrift für Bauwesen, 1866, verwiesen werden.

Schlussanmerkung. Zum weiteren Studium der Statik der Holz- und Eisen­con­structionen sind folgende Schriften zu empfehlen: Eytelwein's Statik Bd. II., Gerstner's Mechanik Bd. I. und Kaiser's Handbuch der Statik. Ferner Navier, Resumé des leçons sur l'application de la mécanique. Part. I, Paris 1833, auch deutsch von Westphal unter dem Titel: Mechanik der Baukunst, ferner Rebhann, Theorie der Holz- und Eisen­con­structionen mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. Wien 1856, Ardan, Theoretisch praktische Abhandlungen über Anordnung und Construction der Sprengwerke von großer Spannweite, aus dem Französischen von v. Raven, Hannover 1844. Ausführlich über Dach­con­structionen ist die Schrift von Winter, Berlin 1862.

Ältere Werke sind: *Elementary Principles of Carpentry etc.* by Th. Tredgold, London 1820. *Persy, Cours de stabilité des constructions.* Sganzin, *Cours des constructions.* Cresy, *An Encyclopaedia of Civil-Engineering,* London 1847. Fairbairn, *An account of the construction of the Britannia- and Convay-Tubular-Bridges etc.* Dempsey, *Tubular- and other Iron-Girder-Bridges* etc. deutsch von Werther unter dem Titel: *Praktisches Handbuch bei dem Bau eiserner Träger- oder Hochbrücken* u., Dresden 1853; sowie Dempsey, *Iron applied to railway structures und Malleable iron-bridges, sowie Examples for iron-roofs etc.* Außerdem M. Becker, *Die gußeisernen Brücken der badischen Eisenbahnen, Carlshöhe 1847, sowie dessen angewandte Baukunde des Ingenieurs und C. M. Bauernfeind, Vorlegeblätter zur Brückenbaukunde, neu bearbeitet von Frauenholz und Djimant, Stuttgart 1876.* Siehe auch: *Die Brücken- und Thalübergänge Schweizerischer Eisenbahnen* von C. v. Egel, Basel 1856, sowie Duggan, *Specimens of the stone-iron- and wood-bridges,* New-York 1850.

Ueber die Hängebrücken handelt schon Gerstner in seiner *Mechanik* und beschreibt namentlich die Hammersmith- und die Menaiettenbrücke von Telford. In theoretischer Hinsicht ist vorzüglich zu nennen: Moseley, *The mechanical Principles of Engineering and Architecture,* auch deutsch von Scheffler unter dem Titel: *Die mechanischen Principien der Ingenieurkunst und Architectur,* Braunschweig 1845. In Navier's *Rapport et mémoire sur les ponts suspendus,* Paris 1823, wird eine allgemeine Theorie der Kettenbrücken abgehandelt. Ueber die in Frankreich häufiger angewendeten Drahtbrücken handelt Seguin (der Ält.) in einem *Mémoire sur les ponts en fil de fer.* Eine gedrängte Abhandlung über ältere Hängebrücken ist in Sganzin's *Cours des constructions* enthalten. Nächstdem findet man auch mehrere Kettenbrücken beschrieben, in den *Annales des ponts et chaussées,* ferner in Förster's *Bauzeitung* u. s. w. Ueber englische Kettenbrücken wird auch gehandelt in den *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerksleißes in Preußen* Jahrgang 5 und 11.

Ueber die Drahtbrücke bei Freiburg in der Schweiz handelt die letztere Zeitschrift im 32. Jahrgang (1853); die Hängebrücke über die Maas bei Seraing wird (nach Armengaud's publication industrielle) im „*Civil-Ingenieur*“ Bd. II. 1856 beschrieben. Die Prager Kettenbrücke von Schnirch ist in einer besonderen Schrift von Hennig, Prag 1842, beschrieben und ebenso die Kettenbrücke über die Donau zu Pesth von Clark in einer englischen Schrift: *An account of the suspension bridge across the river Danube,* London 1853. Die Brücke über den Niagara findet sich beschrieben in einer Schrift von Gzowski, Toronto 1873.

Ferner gehört hierher: Schnirch's erste Kettenbrücke für Locomotivenbetrieb von J. Fauta. Wien 1861.

Die Theorie der Hängebrücken mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung von H. Tellkampff, Hannover 1856, enthält in gedrängter Kürze das Wesentliche über die Theorie und Anwendung dieser Brücken.

Endlich ist noch folgende Schrift zum Studium der statischen Baukunst zu empfehlen:

Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken u. s. w. von Dr. H. Scheffler, Braunschweig 1857. Die Basis dieser Schrift bildet das zuerst

von Herrn Moseley aufgestellte und von Herrn Scheffler weiter ausgebildete „Princip des kleinsten Widerstandes“. S. das oben citirte Werk von Moseley, sowie die Abhandlungen Scheffler's im Crelle Journal für die Baukunst, Band 29 und 30.

Die Literatur über die Statik der Bauwerke und insbesondere über den Brückenbau hat sich in der neuesten Zeit so sehr ausgedehnt, daß hier nur die wichtigsten Schriften über diesen Gegenstand angezeigt werden können. Vor Allem ist zu nennen: Rankine's Manuel of Civil-Engineering, London 1862. Ferner die Schrift von Laible und Schübler über den Bau der Brückenträger. Ueber die Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Mainz, nach Pauli's System ist 1863 in Mainz eine kurze Beschreibung erschienen. In dem Werke von Dr. A. Ritter, Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen, Hannover 1863, wird von der Methode der statischen Momente der ausgedehnteste Gebrauch gemacht. Ein größeres Werk über Brücken ist folgendes: *Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques par Molinos et Pronnier*, Paris 1857. Siehe Bd. IV des Civilingenieurs „über die allgemeine Methode der Berechnung von Brücken“. Auch gehört hierher: Langer, *Der Eisenbrückenbau*. Wien 1863. Von besonderer Bedeutung sind die Arbeiten Schwedler's in verschiedenen Jahrgängen der Berliner Zeitschrift für Bauwesen von Erbkam, sowie die Vorträge über Brückenbau von E. Winkler, Wien 1870 bis 1875. Ferner ist hier zu nennen: Steiner's Bericht über Brückenbauten in den Vereinigten Staaten von Nord-Amerika mit einem Anhang über Dachstuhlconstructionen. Wien 1878. Interessant ist das Werk Föppl's, die neuen Trägerysteme für eiserne Brücken, Leipzig 1878. Eine geordnete Sammlung neuerer Brücken und deren statische Berechnung enthält das Werk von Heinzerling: *Die Brücken der Gegenwart*, Aachen 1873 bis 1877, ebenso wie auch dessen „Eisenhochbau der Gegenwart“, Aachen 1876 bis 1878, eine Sammlung eiserner Dächer enthält. Hier sind auch die verschiedenen Excursionsberichte und Sammlungen zu erwähnen, welche von den „Studirenden verschiedener technischer Hochschulen“ veröffentlicht sind. Viele Abhandlungen über eiserne Brücken und Brückenträger sind in den letzten Jahrgängen des Civilingenieurs, sowie in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, in Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen, in der Berliner Bauzeitung, in der Zeitschrift des Architecten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover, in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins u. a. enthalten.