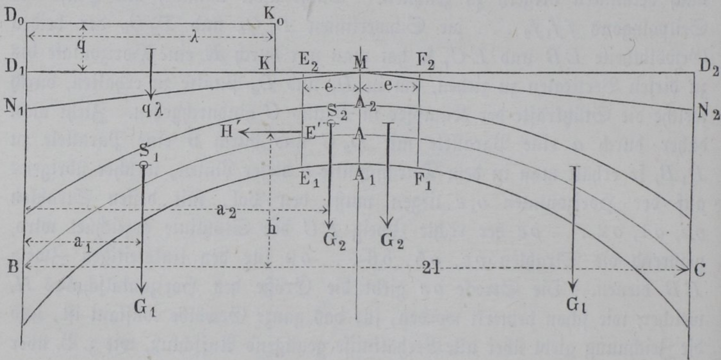
§. 26. **Bewegliche Belastung.** In derselben Weise, wie vorstehend die Stabilitätsverhältnisse eines unsymmetrischen und beliebig belasteten Gewölbes geprüft worden sind, läßt sich die Untersuchung auch für ein symmetrisches Gewölbe führen, dessen beide Hälften in ungleicher Weise belastet werden. Dieser Fall gewährt deswegen ein besonderes Interesse, weil er bei allen Brückengewölben vorkommt, sobald eine bewegliche Last, z. B. ein Eisenbahnzug oder ein Frachtwagen über die Brücke fährt. Von dem Augenblicke an, in welchem diese bewegliche Last einen Kämpfer des Gewölbes überschreitet, wird die vorher im Gewölbe vorhandene symmetrische Stützlinie sich fortwährend verändern, indem der Scheitel der Stützlinie sich gleichzeitig mit der Last verschiebt, und es handelt sich daher noch darum, zu untersuchen, ob durch diese Verschiebung die Stabilität des Gewölbes nicht in bedenklicher Weise gefährdet wird. In dieser Beziehung kann man folgende Bemerkungen machen.

Es sei $BAC$, Fig. 84, ein zu $MA$ symmetrisches Brückengewölbe, dessen Eigengewicht incl. der Fahrbahn, auf das Gewölbmaterial reducirt, durch

Fig. 84.




die Belastungslinie $N_1 M N_2$ dargestellt sein soll, während $D_1 M D_2$ die horizontale Fahrbahn sein möge. Für den unbelasteten Zustand wird die Stützlinie in der Mitte $MA_1$ eine horizontale Tangente haben, und es möge etwa angenommen werden, daß für diesen Zustand die Stützlinie durch die Mitten $B$ und $C$ der Kämpferfugen und $A$ der Scheitelfuge gehe. Denkt man sich nun von links her eine bewegliche Last, etwa einen Eisenbahnzug ankommend, welcher bis zu einem beliebigen Punkte $K$ um die Länge $D_1 K = \lambda$ sich bewege. Drückt man auch diese als gleichmäßig auf die Länge $D_1 K$ vertheilt anzunehmende bewegliche Last $Q$ durch das Gewicht eines Prismas von Gewölbmaterial aus, dessen Höhe zu $q = D_1 D_0 = K K_0$ ermittelt sein soll, so ist die Verkehrslast durch das Rechteck $D_1 K K_0 D_0$ vom Inhalte $q \lambda$ gegeben. Durch diese einseitige Belastung des Gewölbes wird der Scheitel der Stützlinie aus der Mittelebene $MA$ um eine gewisse Größe nach links gerückt, und es möge etwa die Ebene $E_1 E_2$ im Abstande $e$ von $M$ nunmehr den Punkt der Stützlinie enthalten, in welchem ihre Tangente horizontal ist. Es sei ferner etwa $E'$ dieser Punkt und $H'$ die daselbst wirkende Horizontalkraft, sowie $h'$ die verticale Höhe von $E'$ über der Horizontalen $BC$. Die Ebene $E_1 E_2$ theilt die linke Gewölbhälfte $BA$ in zwei Theile $BE'$ und $E'A$, deren Gewichte, ohne Einschluß der beweglichen Last, bezw. durch $G_1$ und $G_2$ bezeichnet werden sollen, während $a_1$ und $a_2$ die Abstände dieser Gewichte vom Kämpfer $B$, also $G_1 a_1$ und $G_2 a_2$ die betreffenden Momente sind. Wenn man nun auch die rechte Gewölbhälfte $AC$ durch eine Ebene $F_1 F_2$, ebenfalls im Abstande $e$ von $M$, in zwei eben solche Theile von den Gewichten $G_1$ und $G_2$ und den Momenten $G_1 a_1$ und $G_2 a_2$ in Bezug auf $C$ getheilt denkt, so kann man, unter $2l = BC$ die horizontale Entfernung der Kämpferstützen verstanden, für die beiden im Scheitel $E'$ der Stützlinie zusammenstoßenden Gewölbtheile $BE'$ und $CE'$ die beiden Gleichgewichtsbedingungen schreiben:

$$H' h' = G_1 a_1 + q \lambda \frac{\lambda}{2} \text{ für } BE'$$

und

$$H' h' = G_1 a_1 + G_2 a_2 + G_2 (2l - a_2) = G_1 a + G_2 \, 2l \text{ für } CE',$$

daher erhält man durch Subtraction:

$$q \frac{\lambda^2}{2} = G_2 \, 2l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Aus dieser einfachen Gleichung läßt sich jederzeit für eine bestimmte einseitige Belastung die Verschiebung $e$ des Scheitels der Stützlinie aus der Gewölbmitte dadurch bestimmen, daß man der jeweiligen Form und Construction der Brücke entsprechend dasjenige Stück des Gewölbes $AE'$ ermittelt, dessen Gewicht

$$G_2 = \frac{q \lambda^2}{4 l}$$

gegeben ist, und man ersieht auch, daß die Rechnung dieselbe bleibt, wenn die bewegliche Last $Q$ nicht gleichmäßig vertheilt, sondern in einem oder mehreren Punkten concentrirt angenommen werden müßte, in welchem Falle man anstatt $q \frac{\lambda^2}{2}$ nur das Moment dieser concentrirten Belastung für den Punkt $B$ in die Rechnung einzuführen hätte. In den meisten Fällen der

Wirklichkeit wird man indessen, wie hier geschehen, eine gleichmäßige Vertheilung der Last annehmen dürfen, da auch concentrirte Lasten, wie die Drucke der Wagenräder durch die Erdschüttung und das Pflaster, bezw. durch die Schienen und Schwellen und deren Bettung sich auf eine größere Fläche des eigentlichen Gewölbes übertragen.

Die gefundene Beziehung $G_2 = \frac{q\lambda^2}{4l}$ zeigt, daß mit zunehmendem Momente $q\frac{\lambda^2}{2}$ der einseitigen Last $Q$ auch das Gewicht $G_2$ des zwischen $A$ und $E'$ gelegenen Gewölbtheiles, und folglich auch die Größe $ME' = e$ zunimmt. Dieses Verhalten gilt aber nur so lange, als die von $D_1$ aus vorrückende Last den veränderlichen Scheitel $E'$ der Stützlinie noch nicht überschreitet, da von dem Augenblicke an, wo letzteres geschieht, die thatsächlichen Verhältnisse sich anders gestalten, als bei vorstehender Entwickelung vorausgesetzt wurde. Man findet leicht, daß der stattfindende Vorgang sich folgendermaßen darstellen läßt.

Wenn eine bewegliche Last über die Brücke geführt wird, so bewegt sich der Scheitel der Stützlinie aus seiner mittleren Lage in der Ebene $MA$ der Last $Q$ so lange e n t g e g e n, also von rechts nach links, wenn die Last bei $D_1$ ankommt, bis die Last und der Scheitel der Stützlinie sich in einem Abstande $e$ vom Scheitel begegnen, welcher durch die Gleichung

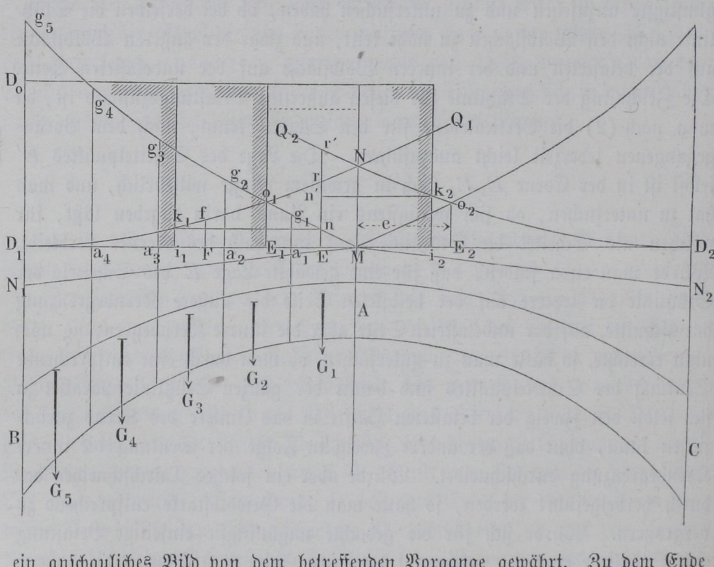
$$q\frac{(l-e)^2}{2} = G_2\, 2l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

gegeben ist, die man aus der oben gefundenen allgemeinen Gleichung (1) erhält, sobald man darin für $\lambda$ den Werth $l - e$ und für $G_2$ das Gewicht des Gewölbstückes zwischen dem Scheitel und dem Begegnungspunkte einführt. Bei einer weiteren Bewegung der Last kehrt der Scheitel der Stützlinie, wie leicht zu erkennen ist, seine Bewegung um, indem er nunmehr in gleicher Richtung wie die Last sich bewegt, und zwar so, daß er wieder nach der Mitte $M$ gelangt, sobald die Last $q$ bis zu dem rechten Kämpfer $D_2$ vorgeschritten ist, also die Brücke gleichmäßig über die ganze Spannweite einer specifischen Belastung $q$ unterworfen ist. Denkt man sich nun die bewegliche Last von beschränkter Erstreckung, so daß das Ende der Last in einem gewissen Augenblicke den linken Kämpfer $D_1$ überschreitet, so setzt von diesem Augenblicke an der Scheitel der Stützlinie seine Bewegung nach rechts fort, und zwar ebenfalls bis zu einem Punkte in demselben Abstande $e$ wie vorher vom Scheitel. Diese äußerste Verschiebung der Stützlinie findet in demjenigen Augenblicke statt, in welchem auch das Ende der beweglichen Last bis zu diesem Punkte vorgeschritten ist, daher die Brücke nunmehr in der rechten Hälfte einer Belastung auf die Länge $l - e$ vom Kämpfer $D_2$ aus unterworfen ist. Bei weiterer Ueberführung der Last kehrt dann der Scheitel der Stützlinie wieder nach der Mitte $M$ zurück, welche er erreicht, sobald die Last in dem Punkte $D_2$ angekommen ist, die Brücke also nur noch ihrem Eigengewichte ausgesetzt ist, wie zu Anfang des betrachteten Vorganges. Ein analoges Verhalten muß natürlich eintreten, wenn die Last die Brücke in der entgegengesetzten Richtung überschreitet; in jedem Falle wird ein einfaches Ueberführen der Last den Scheitel der Stützlinie zu einer Doppelschwingung aus der Mitte $M$ des Gewölbes nach der einen Seite um die Länge $e$, dann zurück durch die Mitte nach der anderen Seite um $e$ und wieder zurück nach der Mitte veranlassen. Es ist danach klar, daß bei einer Belastung von einer Hälfte des Gewölbes der Scheitel der Stützlinie von der Gewölbmitte einen Abstand nach der belasteten Hälfte hin hat, welcher kleiner als der gedachte Werth $e$ ist.

Die größte Verschiebung $e$ des Scheitels der Stützlinie wird daher durch Gleichung (2) gegeben sein, und man wird die derselben entsprechende einseitige Belastung als die für den Gleichgewichtszustand der Brücke ungünstigste anzusehen und zu untersuchen haben, ob bei derselben die Stützlinie nicht den Wölbflächen zu nahe tritt, und zwar der äußeren Wölbfläche auf der belasteten und der inneren Wölbfläche auf der unbelasteten Seite. Die Zeichnung der Stützlinie für diesen äußersten Belastungszustand ist, da man nach (2) die Verticalebene für den Scheitel kennt, nach dem Vorangegangenen jederzeit leicht auszuführen. Die Lage des Scheitelpunktes $E'$ selbst ist in der Ebene $E_1 E_2$ noch in gewissem Maße willkürlich, und man hat zu untersuchen, ob sich wenigstens ein Punkt darin angeben läßt, für welchen als Scheitel die Stützlinie ganz innerhalb des Kernes verbleibt. Würde man etwa finden, daß für eine gewählte Lage $E$ des Scheitels der Stützlinie die letztere auf der belasteten Seite die äußere Kernbegrenzung durchschnitte, auf der unbelasteten Seite aber die innere Kernbegrenzung noch nicht erreichte, so hätte man zu untersuchen, ob man durch eine entsprechende Senkung des Scheitelpunktes und damit der ganzen Stützlinie parallel zu sich selbst den Zweig der belasteten Hälfte in das Innere des Kerns zurückziehen kann, ohne daß der andere Zweig in Folge der Senkung die innere Kernbegrenzung durchschneidet. Würde aber ein solches Durchschneiden dadurch herbeigeführt werden, so hätte man die Gewölbstärke entsprechend zu vergrößern. Würde sich für die gedachte ungünstigste einseitige Belastung eine Stützlinie ergeben, welche auf der einen Seite vom Scheitel die äußere, auf der anderen Seite die innere Kernbegrenzung berührte, so ist leicht einzusehen, daß diese Stützlinie die einzig mögliche wäre, denn sowohl eine Veränderung in der Höhenlage des Scheitels wie eine Aenderung der Horizontalkraft würde den einen oder anderen Zweig der Stützlinie aus der betreffenden Kernbegrenzung heraustreten lassen. In diesem Falle wäre das Gewölbe für den betrachteten Zustand der einseitigen Belastung im labilen Gleichgewichte, während dabei jedoch nicht ausgeschlossen ist, daß das Gewölbe für symmetrische Belastung eine gewisse Stabilität besitzen kann, d. h. daß es für diesen Zustand verschiedene Stützlinien giebt, für welche das Gleichgewicht möglich ist. Es ist zwar die bewegliche Last in den meisten Fällen, besonders bei kleinen Spannweiten, gegen das beträchtliche Eigengewicht der Brücken nur von untergeordneter Bedeutung, doch kann in besonderen Fällen, namentlich bei größeren Spannweiten, die seitliche Verschiebung des Scheitels erheblich genug werden, um eine besondere Prüfung der Stabilität mit Rücksicht auf die beweglichen Lasten nöthig zu machen.

Die Größe $e$ der seitlichen Verschiebung des Scheitels der Stützlinie aus der Mitte des Gewölbes ist zwar mit Hülfe der Gleichungen (1) oder (2) für jedes Gewölbe und jede einseitige Belastung einfach zu berechnen, doch läßt sich die betreffende Ermittelung auch aus einer Zeichnung entnehmen, welche zugleich

Fig. 85.




ein anschauliches Bild von dem betreffenden Vorgange gewährt. Zu dem Ende sei $BAC$, Fig. 85, ein symmetrisches Gewölbe mit der Belastungslinie $N_1 M N_2$, und es sei $D_1 D_0 = q$ die der mobilen Last zugehörige Belastungshöhe. Man denke sich dann jede Gewölbhälfte durch verticale Ebenen in $a_1\, a_2\, a_3$ . . . in eine Anzahl Lamellen getheilt, und in bekannter Art die Gewichte $G_1\, G_2\, G_3$ . . . dieser Lamellen bestimmt. Trägt man dann auf den durch die Theilpunkte $a$ gezogenen Verticalen die Strecken $a_1 g_1$, $a_2 g_2$, $a_3 g_3$ . . . so auf, daß jede dieser

Ordinaten nach einem gewählten Kräftemaßstabe das Gewicht des zwischen dieser Ordinate und der Gewölbmitte $M$ gelegenen Gewölbtheils darstellt, daß also

$$a_1 g_1 = G_1; \; a_2 g_2 = G_1 + G_2; \; a_3 g_3 = G_1 + G_2 + G_3$$

u. s. w. ist, so erhält man durch die Endpunkte $g_1 g_2 g_3 \ldots$ eine gewisse Curve $M g_1 g_2 g_3 \ldots$ auf jeder Seite der Gewölbmitte. Die Ordinate dieser Curve in irgend einem Punkte wie z. B. $En$ in $E$ kann nun auch als das Maß für das in der Gleichung (1) vorkommende Moment $G_2 . 2l$ angesehen werden, vorausgesetzt, daß man den Hebelsarm $2l$ d. h. die Spannweite $BC$ des Gewölbes als Einheit des Hebelsarmes zu Grunde legt.

In derselben Weise kann man nun auch für das Gewölbe eine Curve $D_1 o_1 N$ zeichnen, deren Ordinate $Ff$ in jedem Punkte $F$ im Abstande $D_1 F = \lambda$ vom Kämpfer das Maß für das Moment $q \frac{\lambda^2}{2}$ der beweglichen Last bedeutet, die bis zu diesem Punkte $F$ vorgerückt ist, wobei natürlich derselbe Kräftemaßstab wie für die Gewichte $g_1 g_2 \ldots$ und auch die Länge $2l$ als Einheit für den Hebelsarm zu Grunde zu legen ist. Diese Curve ist offenbar eine Parabel mit dem Scheitel in $D_1$ und deren Ordinate in der Mitte oder für $\lambda = l$

$$MN = q \frac{l^2}{2} \frac{1}{2l} = q \frac{l}{4}$$

ist. Hat man also diese Größe, d. h. die Strecke für die Belastung einer Länge $\frac{l}{4}$ bestimmt und gleich $MN$ aufgetragen, so ist die Zeichnung der Parabel $D_1 o_1 N$ leicht ausgeführt. Eine symmetrische Parabel $D_2 o_2 N$ mit dem Scheitel in $D_2$ giebt in derselben Weise in ihren Ordinaten das Maß für die Momente der von $D_2$ aus aufgefahrenen Belastung in Bezug auf den Punkt $D_2$. So ist z. B. $i_2 k_2$ das Moment der von $D_2$ bis $i_2$ aufgefahrenen Belastung und $Er'$ dasjenige der Last, wenn dieselbe die Strecke $D_2 E$ bedeckt, folglich erhält man auch in $n'r' = Er' - i_2 k_2$ das Moment einer die Strecke $E i_2$ bedeckenden Last $q$ in Bezug auf den Punkt $D_2$. Hieraus folgt nun ohne Weiteres, daß die beiden symmetrisch zur Mitte $M$ im Abstande $e$ von derselben gelegenen Schnittpunkte $o_1$ und $o_2$ die Schwingungsweite für die vorstehend gedachte Verschiebung des Scheitels der Stützlinie ergeben, indem dieser Scheitel in die Verticalebene durch $o_1$ oder $o_2$ fällt, je nachdem die bewegliche Last entweder von $D_1$ bis $E_1$ oder von $D_2$ bis $E_2$ vorgerückt ist. Will man die Belastung finden, welcher die Brücke ausgesetzt sein muß, damit die Stützlinie in irgend einem zwischenliegenden Verticalschnitte z. B. dem durch $E$ geführten ihre horizontale Tangente hat, so giebt die Zeichnung hierüber ebenfalls Aufschluß. Zieht man nämlich zu dem Ende durch den Schnitt $n$ der betreffenden Verticalebene mit der Eigengewichtscurve $g_1 g_2 g_3 \ldots$ eine Horizontale bis zum Schnitte $k_1$ mit der Belastungscurve $D_1 N Q_1$, so erhält man in $k_1$ den Punkt, bis zu welchem die Last von $D_1$ vorgerückt sein muß, wenn die Stützlinie ihren Scheitel in der Verticalebene $E$ haben soll. Das Letztere findet aber noch bei einer zweiten Belastung statt, welche man, wie sich leicht ergiebt, findet, sobald man die Strecke $nr$ von der Belastungslinie $D_2 N Q_2$ abwärts gleich $r'n'$ abträgt und durch $n'$ eine Horizontale zieht, welche in $k_2$ den Punkt liefert, bis zu welchem die bewegliche Last von $D_1$ aus vorgerückt sein muß, um wieder den Scheitel der Stützlinie in die Verticalebene durch $E$ zu verschieben. Dies ergiebt sich mit Rücksicht darauf, daß nach der

Construction die beiden in $E$ zusammenstoßenden Gewölbtheile $EB$ und $EC$ gleiche Momente in Bezug auf $B$ und $C$ haben, denn es ist nach der Construction $Er = En + n'r'$, und nach dem Vorbemerkten ist $n'r'$ gleich dem Momente der über $Ei_2$ befindlichen Last, in Bezug auf $D_2$ oder $C$. Bezeichnet daher wieder $G_1 a_1$ das Moment des Gewölbstückes $BE$ in Bezug auf $B$, und ist $G_2$ das Gewicht des Stückes $ME$, so hat man das Moment des Theils $BE$ in Bezug auf $B$, gleich $M_1 = G_1 a_1 + Er$, und dasjenige von $EC$ in Bezug auf $C$ gleich

$$M_2 = G_1 a_1 + 2 G_2 . l + n'r' = G_1 a_1 + En + nr = M_1.$$

§. 27. **Gewölbstärke.** Wenn für ein Gewölbe in der vorstehend angegebenen Weise für eine bestimmte Belastung die Form des Bogens, oder für eine gegebene Bogenform die Vertheilung der Last so bestimmt ist, daß sich eine ganz im Innern des Gewölbes, resp. des Kerns verbleibende Stützlinie einzeichnen läßt, so ist das Gewölbe hinsichtlich seiner Stabilität gegen Drehung als gesichert zu betrachten. Wenn ferner die Fugenstellung so gewählt wird, daß die Richtung der Stützkraft nirgend um den Reibungswinkel von der Normalen zur Fuge abweicht, so kann auch kein Gleiten der einzelnen Wölbsteine stattfinden. Diese letztere Bedingung wird immer leicht zu erfüllen sein, denn wenn man, wie dies wohl allgemein geschieht, die Fugen überall normal zur Mittellinie oder auch wohl zur inneren Bogenfläche anordnet, so wird man im Allgemeinen fast immer finden, daß der gedachte Abweichungswinkel der Stützkraft von der Fugennormalen für die verschiedenen möglichen Stützlinien wesentlich unter dem Reibungswinkel für die Steine bleibt, und daß man nicht genöthigt ist, auf eine besondere Cohäsion oder Scheerfestigkeit des Mörtels zu rücksichtigen. Das Gewölbe ist aber außer auf seine Stabilität auch in Hinsicht seiner Festigkeit zu prüfen, und dazu ist es erforderlich, daß die einzelnen Wölbsteine mit hinreichend großen Flächen sich gegen einander stützen, um nicht durch den auf sie wirkenden Druck zermalmt zu werden. Bezeichnet man allgemein mit $W$ den Normaldruck zwischen zwei beliebigen Wölbsteinen, und ist $p$ die Druckspannung pro Flächeneinheit, welche man für das Wölbmaterial als zulässig erachtet, so ist zur Aufnahme dieses Druckes eine Fläche $F = \frac{W}{p}$ erforderlich. Dieser Werth würde in dem Falle gleich der ganzen Fugenfläche zu setzen sein, wenn der Druck $W$ in der Mitte der Fuge wirkte, weil in diesem Falle eine gleichmäßige Vertheilung des Druckes angenommen werden kann. Wenn jedoch der Angriffspunkt der Druckkraft außerhalb der Mitte gelegen ist, etwa in einem Abstande $e$ von derselben, so findet eine ungleiche Vertheilung der Pressung statt, und es gelten hierfür die gleichen Betrachtungen, welche in §. 14 in Bezug auf die Futtermauern angeführt worden sind. Insbesondere wird die Pressung an der einen