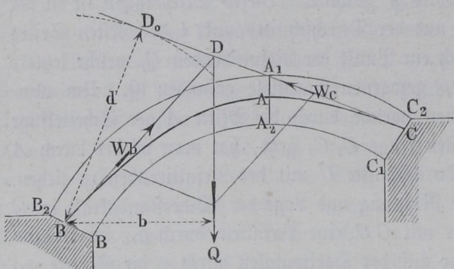
wölbe zugehörige Stützlinie nicht mehr genau mit $A \sigma_1 \sigma_2 \ldots C$ zusammenfällt. Zeichnet man daher in der vorgedachten Weise durch Wiederholung des angegebenen Verfahrens die neue Stützlinie, und betrachtet diese letztere als Mittellinie, so wird nunmehr die damit verbundene Abänderung so gering ausfallen, daß man die gefundene Form als die der Aufgabe entsprechende ansehen darf.

§. 25. **Unsymmetrische Gewölbe.** Bisher wurde immer eine gegen den Scheitel des Gewölbes symmetrische Form und Belastung desselben vorausgesetzt, in Folge dessen es genügte, eine Hälfte des Gewölbes zu betrachten, indem unter dieser Voraussetzung die Stützkraft H im Scheitel sowie die Tangente der Stützlinie daselbst die horizontale Richtung haben, und auch die Stützlinie zu beiden Seiten symmetrisch ausfallen muß. Wenn dagegen hinsichtlich der Form, oder der Belastungsart oder in Bezug auf beide Elemente zu beiden Seiten des Scheitels eine Verschiedenheit vorhanden ist, so wird auch die Stützlinie nicht mehr symmetrisch sein. Es wird in dem Scheitel, d. h. an der höchsten Stelle $A_1 A_2$, Fig. 81, des Gewölbes im Allgemeinen weder die Stützlinie noch die Stützkraft horizontal sein, vielmehr wird dies an einer anderen Stelle stattfinden, deren Lage von der Form und Lastvertheilung des Gewölbes abhängt. Es ist daher nöthig, diesen allgemeinen Fall noch einer besonderen Behandlung zu unterziehen, welche mit Rücksicht auf das Vorhergegangene besondere Schwierigkeiten nicht darbietet.

Fig. 81.



Während es nach dem Vorhergehenden (s. §. 18) für ein symmetrisches Gewölbe, dessen Lastvertheilung gegeben ist, zur Construction der Stützlinie genügt, irgend zwei verschieden hoch gelegene Punkte derselben zu kennen, reicht diese Bedingung für ein unsymmetrisches Gewölbe nicht mehr aus, wie sich leicht übersehen läßt. Denn nimmt man z. B. für das Gewölbe BAC, Fig. 81, dessen resultirende Gesammtbelastung Q in die Richtung DQ fallen möge, irgend zwei Punkte B und C an, durch welche die Stützlinie hindurchgehen soll, so läßt sich das Gleichgewicht zwischen der Belastung Q und zwei von B und C geäußerten Stützreactionen W_b und W_c in unendlich verschiedener Art herstellen. Man kann nämlich irgend welchen Punkt D in der Richtung von Q mit B und C verbinden, und erhält durch die Zerlegung von Q nach den beiden Richtungen DB und DC die gesuchten Stützreactionen W_b und W_c. Zur Beseitigung dieser Unbestimmtheit ist daher noch die Kenntniß eines dritten Elementes erforderlich, sei dies die Richtung oder die Größe einer der Stützreactionen, oder sei es ein dritter Punkt, durch welchen die Stützlinie ebenfalls hindurchgeht.

Ist z. B. außer B und C die Richtung der Reaction W_b gegeben, so ist damit auch der Schnittpunkt D unzweifelhaft festgestellt. Ebenso ist dies der Fall, wenn eine der Stützkräfte, z. B. W_c in C nur ihrer Größe nach, nicht aber ihrer Richtung nach bekannt ist, denn in diesem Falle erfordert das Gleichgewicht in Bezug auf den anderen Stützpunkt B, daß die Gleichung erfüllt sei:

$$Qb = W_c d,$$

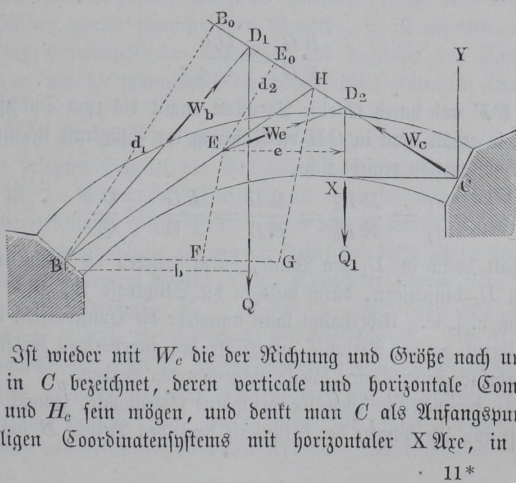
wenn b und d die betreffenden Hebelarme bedeuten. Zeichnet man daher mit dem aus obiger Gleichung zu berechnenden Hebelarme

$$d = \frac{Qb}{W_c}$$

als Radius einen Kreis um B, so giebt die von C an diesen Kreis gezogene Tangente CD_0 die Richtung von W_c und in D den Schnittpunkt mit Q, durch welchen auch die andere Reaction W_b hindurchgeht.

Wenn von der Stützlinie drei beliebige Punkte B, C und E, Fig. 82 gegeben sind, so läßt sich die Stützlinie ebenfalls leicht folgendermaßen be-

Fig. 82.



stimmen. Ist wieder mit W_c die der Richtung und Größe nach unbekannte Reaction in C bezeichnet, deren verticale und horizontale Componenten bezw. V_c und H_c sein mögen, und denkt man C als Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems mit horizontaler X Axe, in welchem

x_e, y_e, x_b und y_b die Coordinaten von E und B sind, so hat man wieder, unter Q und Q_1 die Gewichte von CB und CE und unter b und e deren Hebelarme für B und E verstanden, die Gleichungen

$$Q\,b = H_c y_b + V_c x_b \text{ für } B$$

und

$$Q_1 e = H_c y_e + V_c x_e \text{ für } E.$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind in jedem Falle die Componenten V_c und H_c der Stützreaction in C zu bestimmen, wodurch diese selbst ihrer Größe und Richtung nach festgestellt ist.

Man kann diese Reaction W_c aber auch graphisch leicht finden. Bezeichnet man nämlich mit d_1 und d_2 die Abstände der vorläufig noch unbekannten Richtung W_c von B und E, so hat man:

$$W_c d_1 = Q\,b \text{ für } B$$

und

$$W_c d_2 = Q_1 e \text{ für } E,$$

daher

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{Q\,b}{Q_1 e}.$$

Nun ist aber nach der Figur, wenn man BE zieht, auch

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{BH}{EH} = \frac{Q\,b}{Q_1 e},$$

woraus die Construction unmittelbar folgt: Man trage auf einer beliebig durch B gezogenen Geraden BG in einem ebenfalls beliebigen Maßstabe die Strecken BG und FG proportional den Momenten Qb und $Q_1 e$ auf so daß

$$\frac{BG}{FG} = \frac{Q\,b}{Q_1 e}$$

ist, ziehe FE und durch G eine Parallele damit bis zum Durchschnitte H mit BE, so erhält man in CH die Richtung der Stützkraft W_c in C, denn aus der Construction ergiebt sich

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{BB_0}{EE_0} = \frac{BH}{EH} = \frac{BG}{FG} = \frac{Q\,b}{Q_1 e}.$$

Man erhält dann in D_1 den Punkt, durch welchen die Stützkraft W_b in B und in D_2 denjenigen, durch welchen die Stützkraft W_e in E hindurchgehen muß u. s. w. Ueberhaupt kann nunmehr die Construction der Stützlinie in ihrem ganzen Verlaufe mit Hülfe des zugehörigen Kräftepolygons in der mehrfach besprochenen Weise vorgenommen werden.

Die für symmetrische Gewölbe gefundene Eigenschaft, wonach die Horizontalkraft für alle Punkte der Stützlinie denselben Betrag H hat, gilt allgemein auch für ein unsymmetrisch geformtes Gewölbe, welches durch verticale Kräfte in ganz beliebiger Weise belastet ist, und ebenso hat man für die verticalen Componenten V_b und V_c der Stützkräfte W_b und W_c zweier beliebigen Punkte B und C der Stützlinie die Beziehung

$$V_b + V_c = Q,$$

wenn Q die gesammte zwischen B und C auf das Gewölbe wirkende Belastung bedeutet. Bezeichnet allgemein V die verticale Componente in irgend einem Punkte der Stützlinie, so gilt für den Neigungswinkel α der Stützkraft gegen den Horizont in diesem Punkte ebenfalls die Gleichung

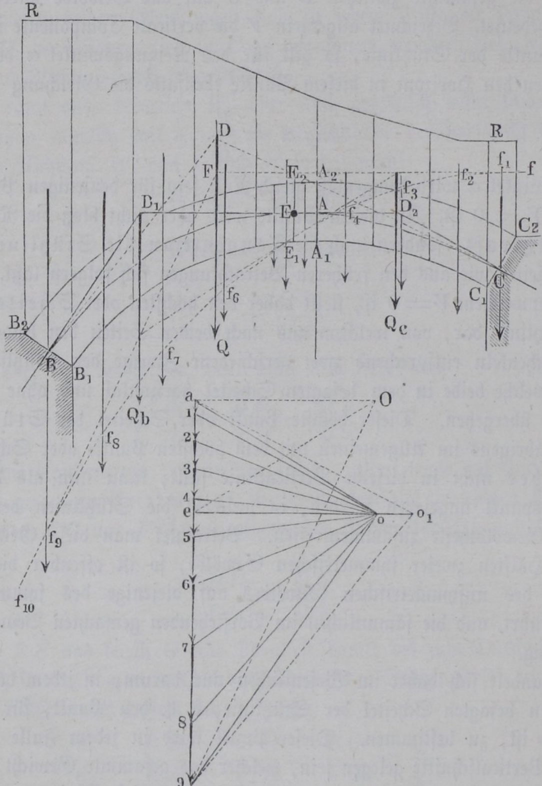
$$tang\ \alpha = \frac{V}{H}.$$

Dieser Winkel α wird demgemäß gleich Null sein für denjenigen Punkt, für welchen $V = 0$ ist. In diesem Punkte wird aber nicht bloß die Richtung der Stützkraft, sondern auch die Tangente an die Stützlinie horizontal sein, wie aus den früheren Betrachtungen sich folgern läßt. Dieser Punkt, in welchem $V = 0$ ist, stellt daher den höchsten oder Scheitelpunkt der Stützlinie dar, von welchem aus nach beiden Seiten den beiderseitigen Gewölbschenkeln entsprechend zwei verschiedene Zweige der Stützlinie ausgehen, welche beide in dem besagten Scheitel horizontal und ohne Knick in einander übergehen. Dieser höchste Punkt oder Scheitel der Stützlinie, welcher übrigens im Allgemeinen mit dem höchsten Punkte oder Scheitel des Gewölbes nicht in dieselbe Verticallinie fällt, kann nun als der Vereinigungspunkt angesehen werden, in welchem die Stützlinien der beiderseitigen Gewölbtheile zusammentreffen. Betrachtet man diese Gewölbtheile als die Hälften zweier symmetrischen Gewölbe, so ist offenbar die Untersuchung des unsymmetrischen Gewölbes auf diejenige des symmetrischen zurückgeführt, und die sämmtlichen im Vorstehenden gemachten Bemerkungen sind gültig.

Es handelt sich daher im Wesentlichen nur darum, in jedem besonderen Falle den besagten Scheitel der Stützlinie, d. h. den Punkt, für welchen $V = 0$ ist, zu bestimmen. Dieser Punkt wird in jedem Falle in demjenigen Verticalschnitte gelegen sein, welcher das gesammte Gewicht des Gewölbes Q so in zwei Theile Q_b und Q_c theilt, daß diese Theile gerade gleich den Verticalcomponenten V_b und V_c der Kämpferreactionen sind, denn aus der allgemeinen Gleichung $V_b + V = Q_b$ ergiebt sich mit $V_b = Q_b$ offenbar $V = 0$, d. h. die Bedingung für den Scheitel. Eine Ermittelung dieses Querschnittes wird in jedem besonderen Falle durch Rechnung oder Construction geschehen können, dagegen wird die Aufstellung allgemeiner Formeln nicht möglich sein, wenn Form und Belastungsart des Gewölbes ganz willkürlich angenommen werden. Am einfachsten wird man die Bestimmung des Gewölbscheitels und der beiden Stützlinienzweige durch Construction bewirken, und zwar kann dies etwa folgenderart geschehen.

Es sei BAC, Fig. 83, der Querschnitt irgend eines Gewölbes, dessen Kämpferfugen durch $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ dargestellt sind, und dessen Scheitel

Fig. 83.



in der Verticalebene durch A gelegen ist. Die ganz beliebig vertheilte Belastung sei auf das specifische Gewicht des Gewölbmaterials reducirt und die Belastungslinie durch RR dargestellt. Es mögen zunächst die beliebigen Punkte B und C in den Kämpferfugen als Punkte der Stützlinie vorausgesetzt und es soll der noch zu suchende Scheitel der Stützlinie in der Mitte der Gewölbstärke liegend angenommen werden. Zunächst sucht man die Schwerlinie DQ des ganzen Gewölbes nebst Belastung, was am einfachsten mit

Hülfe des Kräfteplans $a\,1\,2\,\ldots\,9$ geschieht, welcher in den einzelnen Strecken $a\,1$, $1\,2$, $2\,3\,\ldots\,8\,9$ die Gewichte der einzelnen Streifen darstellt, in welche das Gewölbe durch eine Anzahl verticaler Ebenen zerlegt wird. Nimmt man ganz beliebig irgendwo einen Pol O an, und construirt mit Hülfe desselben das in der Figur punktirte Seilpolygon $f f_1 f_2 \ldots$, so erhält man bekanntlich in dem Schnittpunkte F der Endseile einen Punkt, durch welchen die Schwerlinie des ganzen Gewölbes hindurchgeht, dessen Gewicht nach dem gewählten Kräftemaßstabe durch die Strecke $a\,9$ dargestellt ist. Zieht man nun durch irgend einen Punkt D dieser Schwerlinie Strahlen nach B und C, und damit im Kräfteplane durch a und 9 Parallelen, welche sich in o_1 treffen, so erhält man in $a\,o_1$ und $o_1\,9$ die Stützkräfte W_c und W_b gegen die Kämpfer in C und B, daher ist, wenn noch $o_1\,e$ horizontal gezogen wird,

$$a e = V_c \text{ und } e\,9 = V_b.$$

Der Punkt e im Kräftepolygone entspricht dem Verticalschnitte $E_1 E_2$ im Gewölbe, und folglich muß in dieser Verticalebene der gesuchte Scheitel der Stützlinie liegen. Wählt man der Bedingung gemäß die Mitte E zwischen E_1 und E_2 als diesen Punkt der Stützlinie, so ist die letztere nunmehr leicht nach bekannten Regeln zu zeichnen. Sucht man nämlich mit Hülfe des Seilpolygons $f f_1 f_2 \ldots$ die Schwerlinien $D_1 Q_b$ und $D_2 Q_c$ der beiden Gewölbtheile EB und EC, so hat man nur durch E eine Horizontale bis zu diesen Verticalen zu ziehen, um in D_1 und D_2 Punkte zu erhalten, durch welche die Stützkräfte der Kämpfer in B und C hindurchgehen. Zieht man daher durch a eine Parallele mit $D_2 C$ und durch 9 eine Parallele zu $D_1 B$, so erhält man in dem Durchschnitte o dieser Linien, welcher übrigens auf der Horizontalen $o_1 e$ liegen muß, den Pol, mit dessen Strahlen $o a$, $o\,1$, $o\,2\,\ldots\,o e$ der rechte Zweig EC der Stützlinie gezeichnet wird, während die Strahlen $o e$, $o\,5$, $o\,6\,\ldots\,o\,9$ für den linksseitigen Zweig EB dienen. Die Strecke $o e$ giebt die Größe des Horizontalschubes H, welcher, wie schon bemerkt worden, für das ganze Gewölbe constant ist, und die Zeichnung giebt über alle Verhältnisse genügend Aufschluß, wie z. B. über die Richtung der Stützkräfte durch die Neigung der Polstrahlen u. s. w.

Für jeden der beiden Zweige der Stützlinie gelten nunmehr die in den vorhergehenden Paragraphen für symmetrische Gewölbe angeführten Bemerkungen, und man kann beispielsweise die Form des Gewölbes derart verändern, daß die gefundene Stützlinie eine Mittellinie des Gewölbes wird. Mit dieser Veränderung ist dann zwar auch eine geringe Abänderung der Lastvertheilung verbunden, doch wird die Abweichung der nunmehrigen Stützlinie in den meisten Fällen so unbeträchtlich sein, daß eine Wiederholung derselben Construction für die neue Gewölbform nur ausnahmsweise nöthig werden wird.