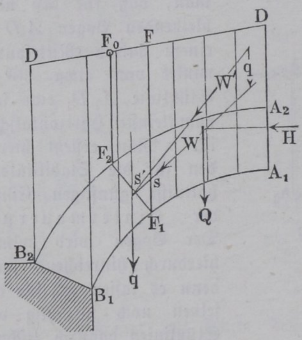
auch immer die Schubkraft sein möge, wenn der Punkt D_2 höher als A_1 gelegen ist. Das letztere ist der Fall bei sehr flachen und insbesondere bei allen scheitrechten Gewölben. Zeichnet man daher für ein scheitrechtes Gewölbe $A_1 A_2 B_2 B_1$, Fig. 66, in der erwähnten Art durch A_2 und B_1 die Stützlinie vom kleinsten Schube, so erhält man in diesem $H = oa$ diejenige Widerstandskraft, welche mindestens von den Widerlagern ausgeübt werden muß, wenn das Gewölbe am Herabfallen durch Kippen um einen Punkt der unteren Leibung verhindert werden soll. Ein Ueberkanten um eine Kante in der oberen Leibung $A_2 B_2$ ist aber niemals denkbar, wie groß auch der auf das Gewölbe ausgeübte Schub sein möge.

§. 22. **Die Kettenlinie als Stützlinie.** Die analytische Behandlung der Stützlinie von Gewölben, welche Linie im Vorstehenden als der geometrische Ort der Angriffspunkte der auf die Fugen des Gewölbes wirkenden Mittelkräfte in diesen Fugen charakterisirt worden ist, würde auf große, kaum lösbare Schwierigkeiten der Rechnung führen. Aus diesem Grunde pflegt man bei der Rechnung eine vereinfachende Voraussetzung zu machen, darin bestehend, daß man das Gewölbe sammt seiner Belastung durch einzelne verticale Ebenen wie FF_1, Fig. 67, in eine größere Anzahl von Streifen theilt und diejenige Stützlinie als Curve betrachtet, welche die Durchschnittspunkte s enthält, in denen diese verticalen Trennungsflächen von den bezüglichen Mittelkräften W getroffen werden. Diese Mittelkräfte selbst hat man sich wieder aus der Zusammensetzung des horizontalen Scheiteldruckes H mit dem Gewichte Q des Gewölbtheiles entstanden zu denken, der zwischen der betreffenden Theilungsebene FF_1 und dem Scheitel $A_1 A_2$ befindlich ist. Die so erhaltene Curve stimmt, streng genommen, nicht mit der dem wirklichen Fugenschnitte des Gewölbes zukommenden Stützlinie überein, denn wie aus Figur ersichtlich ist, erhält man für die durch F_1 gehende Gewölbfuge $F_1 F_2$ den Punkt s' der Stützlinie, indem man das Gewicht q des Trapezes $FF_1 F_2 F_0$ mit der in s angreifenden Mittelkraft W aus H und dem Gewichte Q des Stückes $A_1 DFF_1$ zu einer neuen Mittelkraft W' zusammensetzt. Die Abweichung zwischen den beiden diese Punkte s und bezw. s' aufnehmenden Curven wird um so kleiner sein, je kleiner die Gewölbstärke $F_1 F_2$ gegen die Belastungshöhe FF_1 und je geringer die Neigung der Fuge gegen

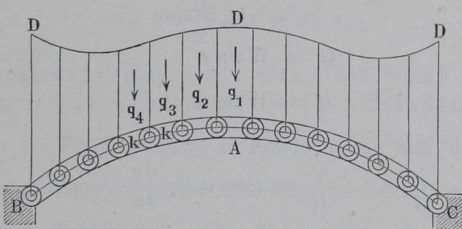
Fig. 67.



die Verticale ist. Diese erwähnte Abweichung wird daher für jedes Gewölbe in der Nähe des Scheitels unmerklich sein, und würde bei einer sehr kleinen Gewölbstärke in allen Punkten verschwinden, und da sie auch für die gewöhnlichen Gewölbe nur unbeträchtlich ausfällt, so hat man, wie schon bemerkt, bei den Rechnungen diese gedachte Linie der Punkte s als Stützlinie des Gewölbes angenommen und es soll dieselbe hier als solche bezeichnet werden. Nach dem im §. 17 über Stützlinien allgemein Gesagten ist es nun ersichtlich, daß die fragliche Linie s mit derjenigen Kettenlinie zusammenfällt, in welche das zur Construction der Stützlinie dienende Seilpolygon bei unendlich kleiner Breite der streifenförmigen Gewölbtheile übergeht, und welche im Vorstehenden mit dem Namen der Drucklinie oder Richtungslinie des Druckes bezeichnet wurde. Es ist auch schon in §. 17 darauf hingewiesen, daß diese beiden Linien zusammenfallen müssen, wenn die Fugen oder Trennungsebenen vertical angenommen werden.

Demgemäß kann man sich nun, wie Schwedler ausführt, dessen Darstellung *) hier im Wesentlichen beibehalten worden ist, das Gewölbe als eine aus einzelnen Gliedern k bestehende Kette, Fig. 68, vorstellen, deren Glieder k so gegen einander und gegen zwei feste Widerlager B und C gestellt sind,

Fig. 68.



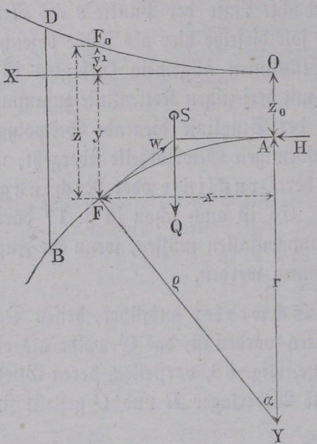
daß sie unter Einfluß der auf die einzelnen Glieder wirkenden Belastungen $q_1 q_2 q_3 \ldots$ mit einander im Gleichgewichte stehen. Denkt man sich diese Belastungen wieder durch entsprechend hohe Prismen aus der Wölbsteinmasse ersetzt, deren Breite gleich der Horizontalprojection der betreffenden Kettenglieder ist, so bestimmen die oberen Enden dieser Prismen die bekannte Belastungslinie des Gewölbes, für welche zunächst ebenso wie für das Gewölbe selbst eine symmetrische Gestalt zu beiden Seiten des Gewölbscheitels vorausgesetzt werden soll.

Die Untersuchung geschieht nun ähnlich wie für eine hängende Kette, (s. Thl. I.), in folgender Art. Ist AFB, Fig. 69, die besagte Kettenlinie

*) S. Theorie der Stützlinie von Schwedler, Zeitschr. für Bauwesen 1859.

für eine Belastungslinie $O F_0 D$, deren Ordinaten über der Kettenlinie im Scheitel $A O = z_0$ und für irgend einen Punkt F durch $F F_0 = z$ ausgedrückt sind, so wähle man O zum Anfangspunkte eines rechtwinkeligen Coordinatensystems mit verticaler, in die Symmetrieebene des Gewölbes fallender Y Axe. Auf das zwischen dem Scheitel A und dem beliebigen Punkte F mit den Coordinaten x, y gelegene Kettenstück AF wirken nun die Horizontalkraft H im Scheitel, das Gewicht Q des Belastungsfeldes $O A F F_0$ in seinem Schwerpunkte S und in dem Querschnitte bei F der Widerstand des Gewölbes W, welcher, in der Tangente an die Kettenlinie wirkend, mit dem Horizonte den Winkel α bilden möge. Man findet für das Gleichgewicht ohne Weiteres die Beziehungen

Fig. 69.



$$Q = W \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$H = W \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und

$$\frac{Q}{H} = tang\, \alpha = \frac{dy}{dx} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hierin kann man den Voraussetzungen gemäß,

$$Q = \int_{z_0}^{z} z\, d x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

setzen, wenn man wieder ein Gewölbe von 1 m Länge in Betracht zieht und das Gewicht von 1 cbm Wölbsteinmaterial als Gewichtseinheit annimmt, so daß aus (3) und (4)

$$H \frac{dy}{dx} = \int_{z_0}^{z} z\, d x$$

folgt, woraus man durch Differentiation

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{z}{H} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

erhält.

Bezeichnet man nun mit ϱ den Krümmungshalbmesser der Kettenlinie in F, welcher bekanntlich durch

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^2}} = \frac{(1 + tang^2\, \alpha)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^3}} = \frac{1}{cos^3\, \alpha \, \frac{d^2 y}{d x^2}} \; . \; . \quad (6)$$

ausgedrückt ist, so findet man aus (5) und (6):

$$\varrho = \frac{H}{z \, cos^3\, \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

als allgemeine Gleichung für den Krümmungsradius der Stützlinie in irgend welchem Punkte, in welchem die Tangente mit dem Horizonte, also auch die Krümmungsradius mit der Verticalen den Winkel α bildet. Für den Scheitel erhält man daraus mit $\alpha = 0$ und $z = z_0$, wenn man daselbst den Halbmesser r nennt,

$$r = \varrho = \frac{H}{z_0} \text{ oder } H = r z_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

d. h. **der Horizontalschub eines Gewölbes wächst direct mit der Krümmung im Scheitel und mit der Belastung daselbst.**

Die Form der Stützlinie hängt wesentlich ab von dem Verhältniß $\frac{r}{z_0}$ des Krümmungshalbmessers zu der Belastung im Scheitel, und man hat, wenn man dieses Verhältniß $\frac{r}{z_0}$, welches auch wohl der **Modulus** des Gewölbes genannt wird, mit a bezeichnet, nach (8)

$$H = a z_0^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

und erhält damit aus (7)

$$\varrho = \frac{a}{cos^3\, \alpha} \frac{z_0^2}{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Schreibt man diese letztere Gleichung

$$\varrho = \frac{a}{cos^3\, \alpha} \frac{z_0}{z} z_0,$$

so erkennt man, daß für denselben Werth des Modulus a der Krümmungshalbmesser ϱ für einen beliebigen Winkel α proportional mit der Scheitelbelastung z_0 wächst, sobald auch das Verhältniß $\frac{z_0}{z}$ für diesen Winkel constant bleibt, d. h. sobald die Belastung z überall durch dieselbe Funktion von α ausgedrückt ist, mit anderen Worten, sobald die Art der Lastvertheilung dieselbe bleibt. Unter dieser Voraussetzung sind also alle Stützlinien von gleichem Modul unter einander ähnlich.

Um daher die verschiedenen Stützlinien gleicher Belastungsart zu beurtheilen, genügt es, für verschiedene Werthe des Moduls a je eine Stützlinie herauszugreifen, für welche der Halbmesser r im Scheitel eine bestimmte Größe hat, die man etwa gleich der Einheit annehmen darf, indem diese Stützlinie mit allen übrigen, demselben Modul angehörigen Stützlinien gleicher Belastungsart geometrisch ähnlich ist. Der Modul ist in Wirklichkeit natürlich sehr verschieden, er wird aber selten den Werth 25 übersteigen, in welchem Falle also die Höhe der Scheitelbelastung nur 4 Proc. des Gewölbhalbmessers beträgt; während andererseits bei hohen Belastungen der Werth $a = \frac{r}{z_0}$ bis auf einen kleinen ächten Bruch ($^1/_4$ bis $^1/_{10}$) herabgehen kann.

Setzt man zunächst den für Bauausführungen häufigen Fall voraus, daß die Stützlinie ein Kreisbogen ist, so hat man dafür in den vorstehenden Formeln den Krümmungshalbmesser ϱ an jeder Stelle gleich dem Scheitelhalbmesser r zu setzen, und erhält damit aus (7) und (8):

$$r = \frac{H}{z \cos^3 \alpha} = \frac{H}{z_0},$$

oder

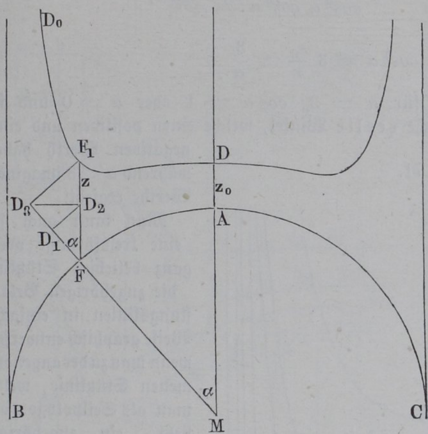
$$z = \frac{z_0}{\cos^3 \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Diese Gleichung gewährt ein einfaches Mittel, für ein gegebenes Kreisgewölbe vom Halbmesser r und für eine gegebene Scheitelbelastung z_0 die Größe der einem beliebigen Winkel α entsprechenden Belastungsordinate z durch Rechnung oder Construction zu finden. Zu letzterem Zwecke hat man nur, wenn AD, Fig. 70, die Ordinate z_0 der Belastung im Scheitel des kreisförmigen Gewölbes CAB ist, für einen Punkt F im Abstande $AMF = \alpha$ vom Scheitel auf dem Radius MF die Strecke $FD_1 = AD$ zu machen, dann $D_1 D_2$ senkrecht zum Radius bis zur Verticalen FF_1 durch F zu ziehen, $D_2 D_3$ senkrecht auf FF_1 und endlich $D_3 F_1$ wieder senkrecht zu FD_3 zu machen, um in

$$FF_1 = \frac{FD_3}{\cos \alpha} = \frac{FD_2}{\cos^2 \alpha} = \frac{FD_1}{\cos^3 \alpha} = \frac{z_0}{\cos^3 \alpha} = z$$

die gesuchte Belastungsordinate für den Winkel α zu erhalten. Wiederholt man diese Construction für genügend viele Winkel α, so erhält man als Belastungslinie die Curve $D F_1 D_0$, welche sich beiderseits asymptotisch an die durch B und C gelegten Verticalen anschließt.

Fig. 70.



Wenn man entweder in dieser Weise oder durch Rechnung die Belastungslinien für ein und dasselbe Kreisgewölbe vom Radius r, aber für verschiedene Model a, d. h. für verschiedene Scheitelbelastungen

$$\frac{r}{a} = z_0$$

zeichnet, so erhält man eine Darstellung, wie Fig. 71 (a. f. S.), in welcher die Belastungslinien für die Werthe von $a = 1, 2, 3, 5, 10$, und 20 eingetragen sind.

Diese Figur zeigt, daß unter diesen Stützlinien die dem Modul $a = 3$ zugehörige, welche für eine Erstreckung von etwa 20^0 zu jeder Seite vom Scheitel nahezu eine horizontale Gerade wird, in gewissem Sinne eine Grenze bildet zwischen den Formen der Stützlinien mit größerem und denjenigen mit kleinerem Modul. Während nämlich die letzteren ihren tiefsten Punkt im Scheitel haben und durchweg ihre convexe Seite abwärts kehren, sind die übrigen Stützlinien in ihrem mittleren Theile auf einer um so größeren Erstreckung nach unten concav gebogen, ehe sie sich an den Schenkeln wieder erheben, je größer der Modul a ist. Der asymptotische Anschluß aller Stützlinien zeigt, daß es in Wirklichkeit nicht möglich ist, eine Belastung anzugeben, welcher die Form des vollen Halbkreises als Stützlinie zukommt, daß dies dagegen möglich ist für kleinere Mittelpunktswinkel, welche etwa zu $\alpha = 20^0$ für $a = 3$; zu $\alpha = 30^0$ für $a = 5$ u. s. w. aber selbst für $a = 25$ nicht größer als etwa 70^0 nach jeder Seite vom Scheitel anzunehmen sein dürften.

Daß die gedachte Grenze durch diejenige Stützlinie gegeben ist, welche genau dem Modul $a = 3$ entspricht, läßt sich leicht nachweisen. Bezeichnet man mit y' die verticale Ordinate einer Belastungslinie in Bezug auf ihren im Scheitel gelegenen Punkt als Coordinatenanfang, so hat man nach Fig. 69:

$$y' = z - y = z - z_0 - r\,(1 - \cos\alpha) = \frac{z_0}{\cos^3\alpha} + r\cos\alpha - (z_0 + r).$$

Für das Maximum oder Minimum von y' hat man daher

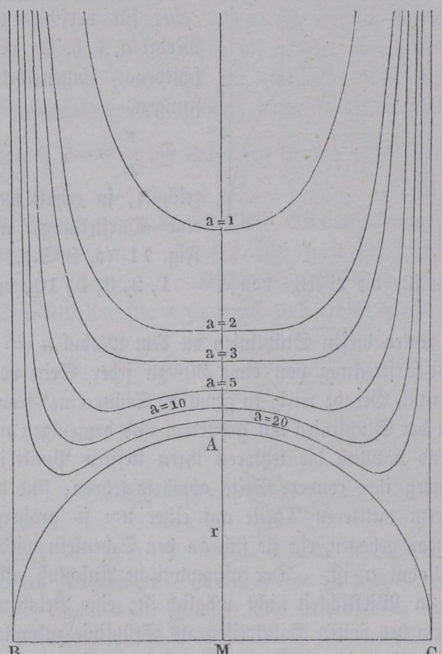
$$0 = \frac{d\,y'}{d\,\alpha} = 3\,\frac{z_0}{\cos^2\alpha}\,\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - r\sin\alpha,$$

woraus

$$\cos^4\alpha = 3\,\frac{z_0}{r} = \frac{3}{a}$$

folgt. Hieraus ergiebt sich für $a = 3$; $\cos\alpha = 1$ oder $\alpha = 0$ und für $a > 3$ erhält man zwei gleiche reelle Winkel, welche einen positiven und einen negativen Werth haben, während $a < 3$ imaginäre Werthe ergiebt.

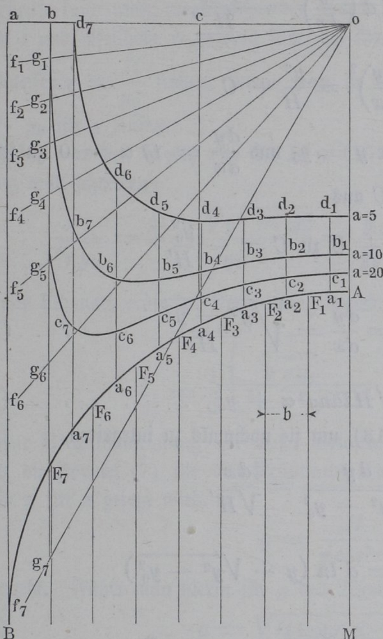
Fig. 71.



Man kann auch für eine kreisförmige oder ganz beliebige Stützlinie die zugehörigen Belastungslinien in einfacher Weise graphisch entwerfen, wenn man zu der angenommenen Stützlinie, welche man als Seilpolygon ansieht, ein zugehöriges Kräftepolygon zeichnet. Diese Construction ist in Fig. 72 für ein Kreisgewölbe $M\,A\,B$ dargestellt. Denkt man sich das halbe Gewölbe durch eine möglichst große Anzahl verticaler Theilungsebenen $F_1 F_2 F_3 \ldots$ in einzelne Streifen von gleicher Breite b getheilt, so hat man die Stützkräfte des Bogens in den Theilpunkten $A, F_1, F_2, F_3 \ldots$ in den Richtungen der Tangenten dieser Punkte anzunehmen. Legt man daher durch einen beliebig angenommenen Pol o ein Strahlenbüschel, dessen Strahlen $o\,a, o\,f_1, o\,f_2 \ldots$ mit den Tangenten in $A, F_1, F_2 \ldots$ parallel sind, so liefert dieses Strahlenbüschel das zugehörige Kräftepolygon, sobald man die Belastung des Gewölbes auf einer Verticallinie in gehöriger Weise einträgt. Zieht man z. B. durch den Punkt b des horizontalen Strahls $o\,a$ die Verticale $b\,g_7$, so stellen die einzelnen Strecken $b\,g_1, g_1\,g_2, g_2\,g_3 \ldots$ dieser Verticallinie zwischen den Strahlen die auf die Bogenelemente $A\,F_1, F_1\,F_2, F_2\,F_3 \ldots$ entfallenden Belastungen nach einem gewissen

Kräftemaßstabe dar. Wenn man nun für diesen Kräftemaßstab die Breite b der einzelnen Gewölbstreifen als Basis annimmt, so ergiebt sich die dem Kräftepolygone $o\,b\,g_7$ zugehörige Belastungslinie in der Curve $b_1\,b_2\,b_3 \ldots$, welche man erhält, wenn man in den Mitten $a_1\,a_2\,a_3 \ldots$ der Bogenelemente die verticalen Ordinaten $a_1 b_1 = b g_1$, $a_2 b_2 = g_1 g_2, a_3 b_3 = g_2 g_3 \ldots$ aufträgt. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction ergiebt sich einfach aus der Bemerkung, daß das angegebene Verfahren im Wesentlichen nur eine Umkehrung des zur Construction der Stützlinie für eine vorgeschriebene Belastungslinie angegebenen ist, und es folgt daraus, daß die Construction gültig bleibt, auch wenn man anstatt des Kreisbogens MAB eine beliebige Curve als Stützlinie voraussetzt. Es läßt sich daher ebensowohl für jede angenommene Stützlinie die Vertheilung der Last ermitteln, wie umgekehrt aus jeder Belastungslinie die zugehörige Stützlinie sich ergiebt. In der Figur ist der Punkt b in solchem Abstande von o gewählt, daß $b g_1 = \frac{1}{10}\,MA$ ist, daher wird die Linie $b_1\,b_2\,b_3 \ldots$ einem Modul des Gewölbes $a = 10$ entsprechen. Die Verticale durch c, welcher Punkt in der Mitte zwischen o und b angenommen ist, giebt folglich die dem Modul 20 zukommende Belastungslinie $c_1\,c_2\,c_3 \ldots$ während ebenso für die Construction der dem Modul $a = 5$ zukommenden Belastungslinie $d_1\,d_2\,d_3 \ldots$ eine Verticale angenommen wurde, welche vom Pole o einen doppelt so großen Abstand hat, als $b\,g_7$.

Fig. 72.



Horizontal begrenzte Belastung. In derselben Weise, wie im vorhergehenden Paragraphen zu einer bestimmt angenommenen Stützlinie die zugehörige Belastungslinie ermittelt worden ist, läßt sich, wie schon bemerkt wurde, auch umgekehrt für eine vorgeschriebene Belastung die zugehörige Stützlinie bestimmen. Es möge der häufige Fall vorausgesetzt werden, daß die Belastungslinie des Gewölbes durch eine horizontale Gerade dargestellt ist, so hat man für diesen Fall einfach in den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen überall y für z zu setzen, und erhält daher zunächst aus (5) §. 23.