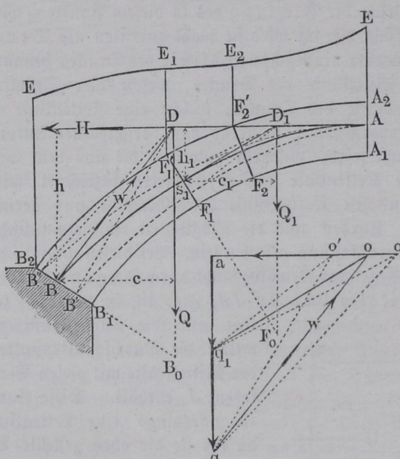
Fuge zukommenden Punkt der Stützlinie durch Vereinigung der im Scheitel A wirkenden Horizontalkraft H mit dem Gewichte des Gewölbtheils $A_1 F_1 F_2 L E$ erhalten, während s_1 durch Zusammensetzung von H mit dem Gewichte des Stückes $A_1 J_1 J_2 E$ gefunden ist. In welcher Weise die analytische Behandlung des Gewölbes mit Hülfe einer solchen Zerlegung durch Verticalebenen geschehen kann, wird weiter unten gezeigt werden.

§ 18. Eigenschaften der Stützlinie. Da die Stützlinie für die Beurtheilung der Stabilität der Gewölbe von großer Bedeutung ist, so mögen zunächst die wichtigsten hier in Frage kommenden Eigenschaften derselben näher ins Auge gefaßt werden. Aus dem vorhergehenden Paragraphen ist es deutlich, wie man für irgend ein symmetrisches Gewölbe, dessen Belastungsverhältnisse gegeben sind, die Stützlinie jederzeit construiren kann, sobald die Horizontalkraft H Fig. 47 und deren Angriffspunkt A im Scheitel bekannt sind, oder sobald man außer dem Angriffspunkte A im Scheitel noch den Angriffspunkt in einer zweiten Fuge kennt, sei es in der Kämpferfuge B oder in irgend einer anderen. Denkt man sich zunächst in der schon oben angedeuteten Weise alle auf das Gewölbe wirkenden Belastungen durch Mauerkörper von gleichem specifischen Gewichte mit dem eigentlichen Gewölbmaterial dargestellt, und gleichmäßig über die ganze Länge (nach der Axe) des Gewölbes vertheilt, so erhält man im verticalen Querschnitte eine gewisse gerade oder krumme Linie EE als obere Profillinie der auf dem Gewölbe ruhenden Belastungsmasse, welche Linie schlechtweg Belastungslinie genannt wird. Indem man beliebig viele Fugen wie $F_1 F_1'$ und durch F_1' die Verticale $F_1' E_1$ zeichnet, kann man durch Rechnung oder Construction die Gewichte und Schwerpunkte der einzelnen Gewölbsteine einschließlich der auf sie entfallenden Belastungen bestimmen. So z. B. würde für den durch die Fugen F_1 und F_2 begrenzten Wölbstein das Gewicht eines Mauerprismas von 1 m Länge und der durch $F_1 F_1' E_1 E_2 F_2' F_2$ dargestellten Grundfläche als Belastung gefunden werden.

Fig. 47.



Hat man in solcher Weise das Gewölbe in beliebig viele Theile zerlegt, und deren Gewichte sowie ihre Schwerlinien bestimmt, so findet man für eine bestimmte Horizontalkraft H, welche in dem Punkte A der Scheitelfuge angreifen soll, die Stützlinie leicht mit Hülfe des Kräftepolygons, in welchem $oa = H$ gemacht und aq vertical und gleich dem Gesammtgewichte Q der Gewölbhälfte angetragen ist. Zieht man nämlich durch A horizontal bis zum Durchschnitte D mit der Belastung Q, so liefert die durch D parallel mit oq gezogene Gerade DB in B den Angriffspunkt B in der Kämpferfuge. In gleicher Weise erhält man den Angriffspunkt s_1 der Fuge F_1, wenn man im Kräftepolygon aq_1 gleich dem Gewichte Q_1 des Gewölbtheiles zwischen F_1 und dem Scheitel A macht und eine zu oq_1 parallele Gerade $D_1 s_1$ durch den Punkt D_1 zieht, in welchem das besagte Gewicht Q_1 von der Horizontalkraft H getroffen wird. Wenn nicht H, sondern dafür außer dem Scheitelangriffspunkte A noch ein zweiter Punkt, z. B. s_1 gegeben ist, so ergiebt sich die Construction ohne Weiteres, wenn man diesen zweiten Punkt s_1 mit dem Durchschnitte D_1 verbindet und mit dieser Verbindungslinie eine Parallele durch q_1 im Kräftepolygon zieht, welche auf der Horizontalen die Schubkraft $H = oa$ abschneidet.

Es geht aus Obigem hervor, daß für irgend welche Fuge die horizontale Componente der auf sie wirkenden Druckkraft W eine und dieselbe Größe mit der Kraft H hat, welche im Scheitel wirkt, und man spricht daher bei einem Gewölbe schlechtweg von der Horizontalkraft oder der Schubkraft desselben, welche nach dem Vorstehenden für alle Punkte eine constante Größe H hat.

Gesetzt, die Curve As_1B wäre die mit $H = oa$ gezeichnete Stützlinie, so erkennt man sogleich, das bei Festhaltung desselben Angriffspunktes A, aber bei Aenderung der Größe des Schubes H, die sich ergebende Stützlinie eine andere wird, und zwar wird bei einem kleineren Werthe von H etwa gleich $o'a$ die neue Stützlinie AB' von A aus ganz unterhalb der vorherigen AB verbleiben, da alle im Kräfteplane von o' gezogenen Strahlen wie $o'q_1$, $o'q\dots$ größere Neigungen gegen den Horizont haben, als die entsprechenden von o aus gezogenen Geraden oq_1, $oq\dots$ Ebenso wird ein größerer Schub H, etwa gleich $o''a$, eine flachere Stützlinie AB'' liefern, welche von A aus ganz oberhalb der zuerst gezeichneten AB verbleibt. Würde man H bis ins Unendliche wachsen lassen, so würde man als Stützlinie die Horizontale AH bekommen, da gegen ein unendlich großes H die endlichen Werthe von Q verschwinden. Dagegen erhält man bei einer Abnahme der Schubkraft H bis zu Null eine Stützlinie, welche die Durchschnitte B_0, $F_0\dots$ der Gewichte Q mit den zugehörigen Fugenverlängerungen in sich aufnimmt.

Hieraus geht hervor, daß es für irgend einen Punkt A der Scheitelfuge als Angriffspunkt des Horizontalschubes eine unendlich große Anzahl von Stützlinien giebt, welche sich von einander durch die Größe der Schubkraft H unterscheiden, und von denen je zwei außer dem gemeinschaftlichen Angriffspunkte A keinen zweiten Punkt mit einander gemein haben können.

Die letztere Behauptung erhellt ohne Weiteres aus der Bemerkung, daß für jeden Punkt einer Stützlinie die Momentensumme aller derjenigen Kräfte gleich Null sein muß, die auf ein beliebiges Gewölbstück wirken, welches von der Fuge durch diesen Punkt seinen Ausgang nimmt. So hat man z. B. für den Punkt B die Momentengleichung $Qc = Hh$ oder $H = Q\frac{c}{h}$, wenn h die verticale Höhe von H über B und c den horizontalen Abstand des Gewichtes Q von B bedeutet. In derselben Weise gilt für den Punkt s_1 der Fuge F_1, wenn dessen Abstand von H durch h_1 und von Q_1 durch c_1 bezeichnet wird, auch

$$Q_1 c_1 = H h_1 \text{ oder } H = Q_1 \frac{c_1}{h_1}.$$

Sollten daher irgend zwei der oben erwähnten durch A gehenden Stützlinien mit den verschiedenen Schubkräften H_1 und H_2 sich noch in einem Punkte schneiden, dessen Tiefe unter A etwa h_0 sein möge, und für welchen das Moment des zwischen diesem Punkte und dem Scheitel A gelegenen Gewölbtheiles durch $Q_0 c_0$ gegeben sein mag, so hätte man

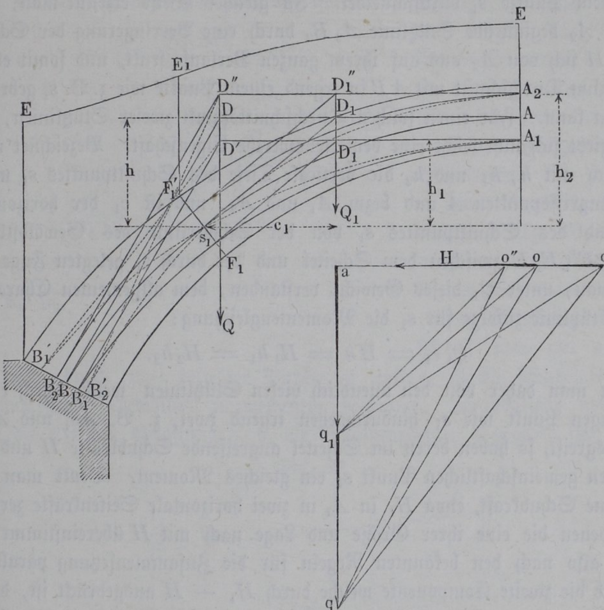
$$Q_0 c_0 = H_1 h_0 = H_2 h_0, \text{ d. h. also } H_1 = H_2,$$

oder die beiden Stützlinien, welche außer dem Scheitelangriffspunkte A noch einen Punkt gemein haben, fallen in eine einzige zusammen.

Aus dem Vorstehenden folgt auch, daß von irgend zwei durch denselben Punkt A gehenden Stützlinien, wie AB und AB', diejenige dem größeren Horizontalschube entspricht, welche der durch diesen Punkt A geführten Horizontalen am nächsten liegt, d. h. welche zwischen dieser Horizontalen und der anderen Stützlinie liegt. Es wird sich aus dem Nachfolgenden ergeben, daß dieses Verhalten allgemein gilt, auch wenn der Durchschnittspunkt nicht gerade im Scheitel liegt.

Es sei wieder As_1B, Fig. 48, eine für den Horizontalschub $H = oa$ construirte Stützlinie der Gewölbhälfte ABE, und man denke sich nunmehr unter Beibehaltung der Größe des Horizontalschubes H, dessen Angriffspunkt in der Scheitelfuge von A etwa nach A_1 verlegt, so wird dadurch an dem Kräftepolygon oaq nichts geändert, und die von o ausgezogenen Strahlen wie oq, oq_1 2c behalten sämmtlich ihre Richtung bei. Zeichnet man daher jetzt für denselben Horizontalschub $H = oa$ die durch A_1 gehende Stützlinie A_1B_1, so ist es klar, daß dieselbe in ihrem ganzen Verlaufe unterhalb der erstgezeichneten AB verbleiben muß, wenn A_1 tiefer als A angenommen wurde, während sie dagegen, wie A_2B_2 in allen Punkten oberhalb

Fig. 48.



AB gelegen ist, sobald der Scheitelangriff A_2 höher als A gelegt wird. Daß zwei mit gleicher Horizontalkraft H construirte von verschieden hoch gelegenen Punkten der Scheitelfuge ausgehende Stützlinien nirgend einen Punkt mit einander gemein haben können, folgt wie vorstehend schon daraus, daß für diesen Punkt die Momentengleichung bestehen muß

$$Qc = Hh_1 = Hh_2,$$

wenn h_1 und h_2 seine verticalen Abstände von den beiden Angriffspunkten im Scheitel bedeuten, und Qc das Moment des zwischen diesem Punkte und dem Scheitel gelegenen Gewölbtheils ist. Obige Gleichung kann nur durch die Bedingung $h_1 = h_2$ erfüllt werden, woraus sich wieder ergiebt, daß zwei Stützlinien von gleichem Horizontalschube H in eine einzige zusammenfallen, sobald sie einen Punkt mit einander gemein haben.

Denkt man sich nun für die durch A_1 gehende Stützlinie $A_1 B_1$ den Schub H vergrößert, so wird dieselbe dadurch nach dem Vorstehenden eine flachere Lage annehmen, und man erhält bei einer gewissen Vergrößerung von H auf H_1 eine neue Stützlinie $A_1 B'_1$, welche die zuerst gezeichnete AB in einem Punkte s_1 durchschneidet. In gleicher Weise erkennt man, wie die in A_2 beginnende Stützlinie $A_2 B_2$ durch eine Verringerung der Schubkraft H sich von A_2 aus auf ihrem ganzen Verlaufe senkt, und somit ebenfalls zum Durchschnitt mit AB in irgend einem Punkte wie z. B. s_1 gebracht werden kann. Für einen solchen Durchschnittspunkt zweier Stützlinien, wie s_1 ergiebt sich nun leicht eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Bezeichnet man nämlich mit h, h_1 und h_2 die verticale Tiefe des Schnittpunktes s_1 unter den Angriffspunkten A und bezw. A_1 und A_2, und ist c_1 der horizontale Abstand des Schnittpunktes s_1 von der Schwerlinie des Gewölbstückes $A_1 F_1 F'_1 E_1 E$ zwischen dem Scheitel und der durch s_1 gelegten Fuge, so hat man, unter Q_1 dieses Gewicht verstanden, dem allgemeinen Character der Stützlinie zufolge für s_1 die Momentengleichung:

$$Q_1 c_1 = Hh = H_1 h_1 = H_2 h_2.$$

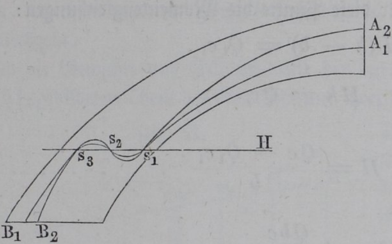
Wenn man daher von den unendlich vielen Stützlinien, welche durch einen beliebigen Punkt wie s_1 hindurchgehen irgend zwei, z. B. As_1 und $A_1 s_1$ herausgreift, so haben deren im Scheitel angreifende Schubkräfte H und H_1 für den gemeinschaftlichen Punkt s_1 ein gleiches Moment. Denkt man sich die eine Schubkraft, etwa H_1 in A_1 in zwei horizontale Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine ihrer Größe und Lage nach mit H übereinstimmt, so muß also nach den bekannten Regeln für die Zusammensetzung paralleler Kräfte die zweite Componente welche durch $H_1 - H$ ausgedrückt ist, durch den gemeinsamen Punkt s_1 gehen. Die erforderliche Größe von H_1 findet man leicht, wenn man s_1 mit dem Durchschnitte D'_1 verbindet und durch q_1 im Kräfteplane eine Parallele $q_1 o'$ mit $s_1 D'_1$ zieht, wodurch man

$$H_1 = o'a \text{ und } H_1 - H = o'o$$

erhält. Da dieselbe Betrachtung für irgend zwei durch s_1 gehende Stützlinien, also z. B. auch für As_1 und $A_2 s_1$ gilt, so muß auch die Schubkraft H_2 in A_2 sich zusammensetzen aus der Schubkraft H in A und einer durch s_1 gehenden Componente, welche in diesem Falle nach der entgegengesetzten Richtung von H wirkt, so daß H_2, wie schon bekannt, kleiner ausfällt als H. Zieht man mit $s_1 D''$ eine Parallele $q_1 o''$ durch q_1, so erhält man in $o''a$ die Schubkraft H_2 und in $o''o$ die entgegengesetzte Componente, welche mit H zusammen die Horizontalkraft H_2 ergiebt.

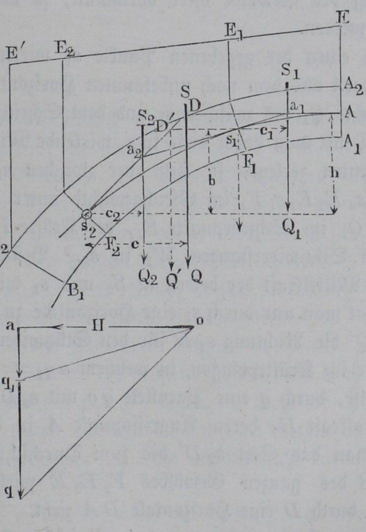
Aus dem Vorstehenden folgt ferner ohne Weiteres, daß, wenn zwei Stützlinien sich in mehr als einem Punkte durchschneiden sollten, dies nur in der Weise geschehen kann, daß sämmtliche Schnittpunkte auf einer und derselben Horizontallinie liegen müssen, denn für jeden einzelnen Schnittpunkt gilt die oben gefundene Beziehung, wonach durch denselben jene durch die Differenz der beiden Schubkräfte dargestellte Componente hindurchgehen muß. Zwei Stützlinien von der Form AB und $A_1 B_1$ Fig. 49, wie sie unter dem Einflusse isolirter Belastungen (s. weiter unten), wohl möglich sind, können sich daher nur in Punkten s_1, s_2, s_3 schneiden, welche sämmtlich auf einer und derselben Horizontallinie Hs_3 liegen.

Fig. 49.



Zwei Punkte s_1 und s_2 dagegen, Fig. 50, welche nicht in gleicher Höhe liegen, können nicht zwei verschiedenen Stützlinien angehören, oder mit anderen Worten, durch zwei beliebige Punkte s_1 und s_2 ist die Stützlinie eines symmetrischen Gewölbes unzweideutig bestimmt, vorausgesetzt natürlich, daß die Art der Belastung d. h. die Belastungslinie E gegeben ist. Will

Fig. 50.



man in diesem Falle zur Ermittelung der Stützlinie die noch unbekannte Schubkraft H, sowie deren ebenfalls noch nicht bekannten Angriffspunkt A in der Scheitelfuge durch Rechnung bestimmen, so sei unter Q_1 das Gewicht des Gewölbstückes $F_1 E$ und unter c_1 dessen horizontaler Abstand von s_1, ebenso unter Q das Gewicht von $F_2 E$ und unter c dessen Abstand von s_2 verstanden. Ferner sei b der verticale Höhenunterschied der gegebenen Punkte s_1 und s_2 und h die noch unbekannte Höhe des Scheitelangriffes A über s_2. Dann hat man für diese Punkte die Momentengleichungen:

$$H(h - b) = Q_1 c_1$$

und

$$Hh = Qc,$$

woraus

$$H = \frac{Qc - Q_1 c_1}{b} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

und

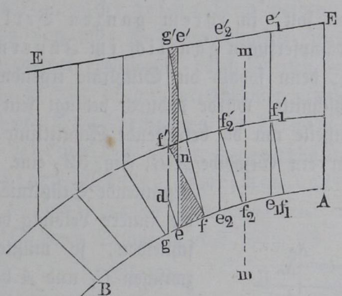
$$h = \frac{Qbc}{Qc - Q_1 c_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

folgt. Diese Formeln können dazu dienen, die Elemente H und h für die Bestimmung der Stützlinie durch Rechnung zu bestimmen. Es läßt sich aber auch durch Construction die Aufgabe leicht lösen: durch zwei gegebene Punkte eines symmetrischen Gewölbes die Stützlinie zu zeichnen. Da diese Aufgabe bei der Prüfung der Gewölbe öfter vorkommt, so mag ihre Lösung hier noch angeführt werden.

Die in dem einen der gegebenen Punkte s_1 wirkende Mittelkraft W_1 setzt sich zusammen aus dem noch unbekannten Horizontalschube H und dem bekannten Gewichte Q_1 des zwischen s_1 und dem Scheitel gelegenen Gewölbtheiles $F_1 E$. Denkt man daher diese in s_1 wirkende Mittelkraft W_1 in diese beiden Componenten zerlegt, so steht der zwischen s_1 und s_2 enthaltene Gewölbtheil $F_2 s_2 E_2 E_1 s_1 F_1$ im Gleichgewichte unter dem Einflusse seines Eigengewichtes Q_2 im Schwerpunkte S_2, der Kräfte H und Q_1 in s_1 und des unbekannten Stützwiderstandes W_2 in s_2. Bestimmt man daher in Q' die verticale Mittelkraft der beiden in S_2 und s_1 wirkenden Belastungen Q_2 und Q_1, so hat man nur durch s_1 eine Horizontale zu legen, deren Durchschnitt D' mit Q' die Richtung $s_2 D'$ für den Stützwiderstand in s_2 angiebt. Zieht man daher im Kräftepolygon, in welchem $a q_1 = Q_1$ und $q_1 q = Q_2$ also $a q = Q$ ist, durch q eine Parallele $q o$ mit $s_2 D'$, so erhält man in oa die Horizontalkraft H, deren Angriffspunkt A in der Scheitelfuge sich ergiebt, wenn man das Seil $s_2 D'$ bis zum Durchschnitte D mit dem im Schwerpunkte S des ganzen Gewölbes $F_2 E_2 E$ wirkenden Gewichte Q verlängert, und durch D eine Horizontale DA zieht. Der Durchschnitt a_1 dieser letztgedachten Horizontalen mit dem Gewichte Q_1 muß übrigens bei genauer Construction, wie leicht zu erkennen ist, mit dem Stützpunkte s_1 und dem Durchschnittspunkte a_2 zwischen dem Gewichte Q_2 und dem Seile $s_2 D$ auf einer und derselben Geraden liegen, welche mit $o q_1$ im Kräfteplane parallel ist. Zur Bestimmung der Schwerlinie SQ, sowie der Mittelkraft Q' kann man sich am Besten des Kräfteplans bedienen, indem man unter Annahme einer ganz beliebigen Horizontalkraft ein Seilpolygon construirt, dessen Endseile in bekannter Weise in ihrem Durchschnitte einen Punkt ergeben, durch welchen die gesuchte Resultirende der betreffenden Schwerkräfte hindurchgeht.

Um die Gewichte und Schwerpunkte der durch die Fugenschnitte $f_1 f_2 \ldots$, Fig. 51, gebildeten Theile des Gewölbes und ihrer Belastung wie $f_2 f_2' e_2' e_1' f_1' f_1$ zu ermitteln, kann man zwar nach den bekannten Regeln die Verwandlung dieser Querschnitte in Rechtecke von einer gemeinschaftlichen Basis b, (s. §. 15) vornehmen, doch wird man schneller und in den meisten Fällen mit hinreichender Genauigkeit zum Ziele kommen, wenn man durch die äußeren Fugenkanten $f_1' f_2' \ldots$ verticale Ebenen e_1, $e_2 \ldots$ gelegt denkt und für die gedachte Querschnittsfigur

Fig. 51.



$f_2 f_2' e_2' e_1' f_1' f_1$ den als Trapez anzusehenden Querschnitt $e_1 e_1' e_2' e_2$ einführt, dessen Schwerlinie in seiner Mittellinie mm vorausgesetzt werden kann. Bei flachen Gewölben und hohen Belastungen wird der hierdurch begangene Fehler nur klein sein und insbesondere für die nahe dem Scheitel gelegenen Fugen gering ausfallen. Will man jedoch für stärker geneigte Fugen, wie z. B. ff' eine größere Genauigkeit erzielen, so kann man durch eine Correctur, (Fugencorrectur), anstatt der durch f' geführten Verticalebene $f'g'$ eine andere verticale Theilungsebene ee' von solcher Lage einführen, daß die beiden schraffirten Figuren enf und $nf'g'e'$ gleichen Flächeninhalt haben. Um ee' zu ermitteln, kann man noch durch die Mitte d von $f'g$ eine Parallele de zu $g'f$ legen, um in e den Punkt zu erhalten, durch welchen die corrigirte Theilebene ee' geführt werden muß. Die Richtigkeit dieser Construction ergiebt sich leicht mit Rücksicht darauf, daß wegen der gezogenen Parallelen

$$g'g : gf = dg : ge = dg \sin\gamma : ge \sin\gamma$$

ist, wenn γ den Winkel bei g bedeutet; also ist auch

$$g'g \, . \, ge \sin\gamma = gf \sin\gamma \, \frac{1}{2} f'g,$$

d. h. das Dreieck $f'gf$ ist annähernd gleich dem Trapez $g'gee'$, folglich sind auch nach Abzug von $gf'ne$ die schraffirten Flächenstücke annähernd gleich groß.

§. 19. Mögliche Stützlinien. Von den unendlich vielen Stützlinien, welche sich nach dem Vorhergehenden für ein Gewölbe zeichnen lassen, indem man der Schubkraft H alle möglichen Größen von 0 bis ∞ ertheilt denkt und ihren Angriff A im Scheitel beliebig annimmt, werden nur gewisse Stützlinien mit der Stabilität und Widerstandsfähigkeit des Gewölbes verträglich sein. Zunächst ist es klar, daß eine Stützlinie, welche einem Gleichgewichtszustande des Gewölbes entsprechen soll, in ihrem ganzen Verlaufe zwischen dem Scheitel und den Kämpferfugen gänzlich im Innern der Gewölbedicke verbleiben muß, denn sobald die Stützlinie irgendwo die innere oder äußere Leibung durchschnitte, würde dadurch bedingt sein, daß eine Bewegung einzelner Gewölbtheile um die betreffende Schnittlinie stattfinden müßte. Würde z. B. für ein Gewölbe AB, Fig. 52, eine in A beginnende Stützlinie AS_1 die innere Leibung bei C_1 schneiden, so müßte das zwischen C_1 und A befindliche Gewölbstück nicht nur um die Kante C_1 eine Rechtsdrehung annehmen und herabfallen, sondern es würden auch alle zwischen C_1 und dem Widerlager B befindlichen Gewölbtheile herabstürzen, indem die inneren Kanten f_1 der Fugen als Drehkanten anzusehen wären, diese Fugen sich daher außen öffneten. Wollte man, um dieses Herabstürzen zu verhindern, der Horizontalkraft H einen größeren Werth geben, so würde nach dem Vorhergehenden dadurch die Stützlinie der Horizontallinie genähert, also gehoben und sie würde, wenn sie etwa nach AB fiele, einem möglichen Gleichgewichtszustande des Gewölbes entsprechen können. Daß die gedachte Vergrößerung von H und die damit verbundene Erhebung der Stützlinie gewisse Grenzen nicht überschreiten darf, lehrt gleichfalls die Zeichnung, denn wenn die Stützlinie in Folge vergrößerter Horizontalkraft H etwa wie AS_2 in C_2 die äußere Leibung schnitte, so würde die Hori-

Fig. 52.