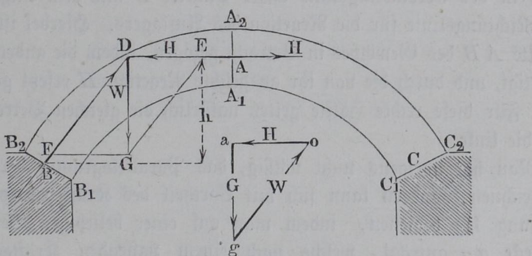
Spannweiten von 40 bis 50 m bei Brückenbögen häufig vorkommen. Die Höhe der Gewölbe steigt bei Brücken und Wegeüberführungen zuweilen bis 80 m*) und darüber. Was die Länge der Gewölbe in der Axenrichtung anbetrifft, so ist dieselbe, den jeweiligen Umständen entsprechend, sehr verschieden. Während die Bögen über Fenster- und Thüröffnungen in Gebäuden nur eine Breite gleich der Dicke der zu tragenden Mauern haben, erstrecken sich die Gewölbe der Tunnel natürlich auf deren ganze oft viele Kilometer große Länge, wogegen die Breite der Brücken etwa zwischen 5 m und 20 m schwankt. Auf die Berechnung der Gewölbe ist, eine der ganzen Länge nach überall gleichmäßige Belastung vorausgesetzt, die Längenerstreckung ohne Einfluß, und es soll in den folgenden Untersuchungen immer ein Gewölbe vorausgesetzt werden, dessen Länge nach der Richtung der Axe 1 m beträgt. Ferner sollen zunächst die symmetrisch geformten und symmetrisch belasteten Tonnengewölbe besprochen und daran die Betrachtungen über die Verhältnisse abweichender Gewölbe angeschlossen werden.

Die Stützlinie. Es sei ABC, Fig. 44, der Durchschnitt durch ein horizontales symmetrisches Tonnengewölbe von der axialen Länge gleich 1 m, welches zunächst nur sein Eigengewicht $2\,G$ zu tragen haben soll, und man denke sich dieses Gewölbe durch die Scheitelfuge $A_1 A_2$ in zwei gleiche Theile AB und AC zerlegt, welche sich gegen die festen Widerlagsflächen $B_1 B_2$ §. 17.

Fig. 44.



und $C_1 C_2$ stützen, im Uebrigen aber zunächst als starre Balken angesehen werden sollen. Setzt man die Widerlager als unverrückbar fest voraus, so können die beiden Gewölbhälften ihrem Bestreben, zu fallen, nicht folgen. Es müssen daher, um das Gleichgewicht herzustellen, in den Stützflächen $B_1 B_2$

*) Die Göltzschthalbrücke der sächsisch-bayrischen Eisenbahn hat in vier übereinander stehenden Bogenreihen eine Höhe von $250' = 73$ m, und der römische Aquäduct zu Nismes in Frankreich hat bei drei über einander stehenden Bogenreihen $150' = 49$ m Höhe.

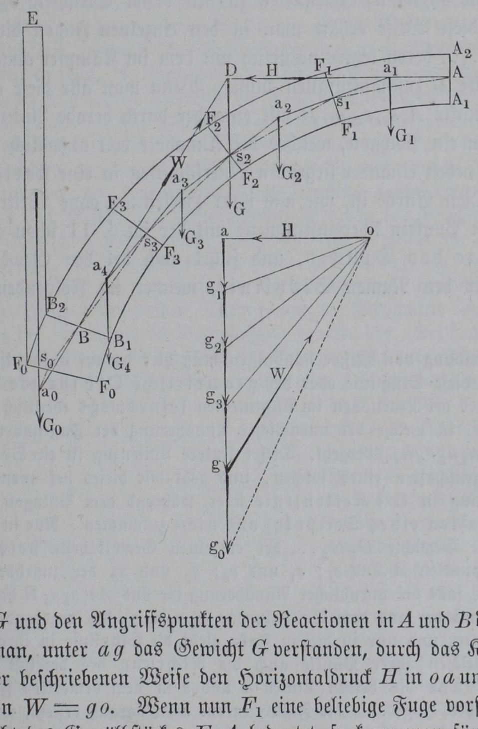
und C_1 C_2 gewisse Reactionen W der Widerlager auftreten, und ebenso müssen die beiden Gewölbhälften im Scheitel zwei gleiche und entgegengesetzte Reactionen H auf einander ausüben, welche sich gegenseitig aufheben. Aus der Symmetrie der ganzen Anordnung und Gewichtsvertheilung ergiebt sich, daß die letztgedachten Scheitelreactionen H nur horizontal gerichtet sein können, im Uebrigen kennt man weder die Angriffspunkte noch die Größe der Kräfte H und W, und von letzteren auch nicht die Richtung; höchstens läßt sich aus der symmetrischen Anordnung die Uebereinstimmung der Widerstände W zu beiden Seiten B und C schließen. Die Aufgabe, die Reactionen W und H zu bestimmen, ist sonach von vornherein gänzlich unbestimmt, da den Gleichgewichtsbedingungen in unendlich verschiedener Weise durch Kräfte H und W genügt werden kann. Macht man jedoch gewisse einschränkende Annahmen, sei es über die Größe und Richtung von W oder über die Größe von H, so wird die Aufgabe bestimmt, sobald man von diesen gedachten drei Elementen zwei festsetzt. Sei z. B. die Lage des Angriffspunktes in der Scheitelfuge in A und in der Kämpferfuge in B resp. C angenommen, so ergiebt sich aus dem bekannten Gewichte G der Gewölbhälfte, welches durch DG dargestellt sein mag, durch das Parallelogramm der Kräfte die Größe von $H = ED$ und in DF der Größe und Richtung nach der Druck gegen das Widerlager B. Um das Parallelogramm zu zeichnen, hat man nur den Schnittpunkt D zu suchen, in welchem die in A horizontale Scheitelreaction H die Schwerlinie DG der Gewölbhälfte schneidet, dann findet man in der Verbindungslinie dieses Punktes D mit dem Angriffspunkte B die Richtungslinie für die Reaction des Auflagers. Hierbei ist nur die eine Hälfte AB des Gewölbes in Betracht gezogen, indem die andere Hälfte AC beseitigt, und durch die von ihr ausgeübte Reaction H ersetzt gedacht worden ist. Für diese rechte Hälfte gelten natürlich die gleichen Betrachtungen wie für die linke.

Man hat übrigens nicht nöthig, das Parallelogramm der Kräfte selbst zu zeichnen, sondern kann sich mit Vortheil des Kräftepolygons (s. Thl. I Anhang II) bedienen, indem man auf einer beliebigen Verticallinie die Strecke ag anträgt, welche nach einem passenden Kräftemaßstabe das Gewicht G der Gewölbhälfte darstellt. Zieht man durch a dann eine Horizontale und durch g eine Parallele mit der Reactionsrichtung BD, so erhält man in den Strecken oa und go die Größen von H und W nach dem zu Grunde gelegten Kräftemaßstabe.

In dieser Weise soll auch im Folgenden das Kräftepolygon den Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Aus der Figur erkennt man den Einfluß, welchen die Lage der Angriffspunkte auf die Größe der Reactionskräfte H und W ausübt. Es ist deutlich, daß die Horizontalkraft $oa = H$ um so kleiner ausfällt, je steiler die Linie go oder BD ist, d. h. je höher man den Angriffspunkt A, und je tiefer man denjenigen B wählt, oder je größer der verticale Abstand h der beiden Angriffspunkte A und B ist und umgekehrt. Die kleinste Horizontalkraft H_{min} würde man daher in dem vorliegenden Falle vermöge der Annahme von B_1 und A_2 als Angriffspunkte erhalten, während den Punkten B_2 und A_1 die größte Horizontalkraft H_{max} entspricht.

Die hier für die Kämpferfuge angestellte Betrachtung gilt in vollständiger Allgemeinheit für jede beliebige Fuge, überhaupt für jeden beliebigen Querschnitt des Gewölbes, wie aus Fig. 45 leicht ersichtlich ist. Wenn hier durch AB wieder die Hälfte eines symmetrischen Tonnengewölbes mit dem

Fig. 45.



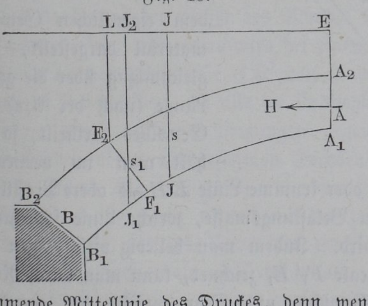
Gewichte G und den Angriffspunkten der Reactionen in A und B dargestellt ist, so findet man, unter ag das Gewicht G verstanden, durch das Kräftepolygon oag in der beschriebenen Weise den Horizontaldruck H in oa und die Widerlagsreaction $W = go$. Wenn nun F_1 eine beliebige Fuge vorstellt und G_1 das Gewicht des Gewölbstückes $F_1 A$ bedeutet, so kann man für dieses Stück die Fuge F_1 nunmehr als Widerlagsfuge betrachten, und es muß das Stück $F_1 A$ unter Einfluß der Horizontalkraft H, des Gewichtes G_1 und der von der Fuge F_1 ausgeübten Reaction W_1 im Gleichgewichte sein. Ueber den

Angriffspunkt s_1 dieser letzteren Reaction ist jetzt kein Zweifel mehr, da die Kraft H auch ihrer Größe nach bestimmt ist. Man fände diesen Punkt s_1, wenn man an den Durchschnittspunkt a_1 zwischen H und G_1 das Kräfteparallelogramm zeichnete, dessen Seiten die bekannten Kräfte G_1 und H sind; die Diagonale gäbe dann die Druckkraft W_1 und in ihrem Durchschnitte s_1 mit der Fuge F_1 den gesuchten Angriffspunkt. Einfacher findet man s_1 durch Eintragen der Strecke $a g_1 = G_1$ in den Kräfteplan und die von a_1 mit $o g_1$ parallele Gerade $a_1 s_1$. Es ist klar, daß man diese Construction für beliebig viele Fugenschnitte $F_2, F_3 \ldots$ wiederholen kann, wenn man nur in dem Kräftepolygon die Strecken $g_1 g_2, g_2 g_3, g_4 g$ gleich den Gewichten der einzelnen Gewölbtheile $F_1 F_2$, $F_2 F_3$ und $F_3 B$ macht und von den Durchschnitten a_2, a_3, a_4 Parallelen zu den bezw. Strahlen $o g_2, o g_3, o g_4$ zieht. Auf diese Weise erhält man in den einzelnen Fugen die Angriffspunkte $s_2, s_3 \ldots$, deren letzter natürlich mit dem im Kämpfer angenommenen Angriffspunkte B zusammenfallen muß. Wenn man alle diese aufeinander folgenden Punkte A, s_1, s_2, s_3, B mit einander durch gerade Linien verbindet, so erhält man ein Polygon, welches bei Annahme von unendlich vielen, unendlich nahe neben einander liegenden Querschnitten in eine stetige Curve übergeht. Diese Curve ist, wie aus ihrer Herleitung ohne Weiteres hervorgeht, in allen Punkten übereinstimmend mit der im §. 11 schon angeführten Mittellinie des Druckes, und führt auch bei den Gewölben diesen Namen, oder den Namen Stützlinie, welcher im Folgenden gebraucht werden soll.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen muß hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß diese Stützlinie oder der geometrische Ort für die Angriffspunkte $s_1, s_2 \ldots$ der Reactionen im Allgemeinen keineswegs identisch ist mit derjenigen Curve, in welche bei unendlicher Annäherung der Fugenquerschnitte das Seilpolygon $a_1 a_2 a_3 a_4$ übergeht. Dieser letztere Linienzug ist ein Seilpolygon mit allen Eigenschaften eines solchen, und geht wie dieses bei unendlich kleiner Fugenentfernung in eine Kettenlinie über, während dem Polygon $A s_1 s_2 s_3 B$ die Eigenschaften eines Seilpolygons nicht zukommen. Nur in demjenigen Falle, wo die Gewichte $G_1 G_2 \ldots$ der einzelnen Gewölbtheile stets zwischen den Angriffspunkten A und s_1; s_1 und s_2; s_2 und s_3 der zugehörigen Fugen hindurchgehen, fällt bei unendlicher Annäherung die aus $A s_1 s_2 s_3 B$ hervorgehende Stützlinie mit der aus dem Seilpolygone $a_1 a_2 a_3 a_4$ sich ergebenden Kettenlinie zusammen, und nur in diesem Falle giebt die Stützlinie in ihrer Tangente an irgend welchen ihrer Punkte auch die Richtung des daselbst ausgeübten Druckes an. Daß die beiden Linien a und s in dem bemerkten Falle in eine einzige übergehen, zeigt auch die Figur, indem man daraus ersieht, wie z. B. die Höhe des Punktes a_2 über $s_1 s_2$ um so geringer wird, je näher die beiden Fugen F_1 und F_2 zusammenrücken, und bei unendlich kleiner Entfernung derselben ebenfalls unendlich klein wird. Daß dieses Verhalten aber nur unter der gemachten Voraussetzung stattfindet, derzufolge das Gewicht G_2 unter allen Umständen, auch bei der kleinsten Entfernung der Fugen F_1 und F_2, zwischen deren Angriffspunkte s_1 und s_2 fällt, erkennt man ebenfalls aus der Figur. Denkt man sich nämlich in dem verlängert vorausgesetzten Bogen ein Element, durch die Fugen $B_1 B_2$ und $F_0 F_0$ begrenzt, welches, wie dies bei Gewölben immer der Fall ist, auf seiner Rückfläche $F_0 B_2$ durch ein Erd- oder Mauerprisma $B_2 F_0 E$ belastet ist, so geht die Schwerlinie G_0 dieses Elementes seitlich an B vorüber, und man erhält den zugehörigen Schnittpunkt mit der vorhergehenden Seilpolygonseite $a_4 B$ in a_0. Macht man nun im Kräfteplan die Strecke $g g_0$ gleich dem Gewichte G_0 des betrachteten Elementes $B_2 F_0 E$, und zieht durch den erhaltenen Schnittpunkt a_0 eine Parallele mit $o g_0$, so erhält man den Punkt der Stützlinie in der Fuge F_0 rückwärts in s_0, und zwar bleibt die Entfernung $a_0 s_0$ immer eine meßbare Größe, auch wenn $F_0 F_0$ unendlich nahe an $B_1 B_2$ heranrückt. Man erkennt hieraus, daß die beiden gedachten Curven, die Stützlinie s und die Kettenlinie a, nicht zusammenfallen können, und aus der durch Figur $B_1 F_0 E B_2$ dargestellten eigenthümlichen Belastungsart aller Gewölbe ergiebt sich leicht, daß die für das Zusammenfallen oben gestellte Bedingung streng genommen nur bei Gewölben erfüllt sein würde, deren Dicke unendlich klein wäre.

Diese Kettenlinie, in welche das Seilpolygon $a_1 a_2 a_3 a_4$ übergeht, hat, wie aus dem Vorstehenden folgt, die Eigenschaft, daß die von irgend einem Punkte der Stützlinie wie s_3 an sie gezogene Tangente die Richtung des in diesem Punkte s_3 wirksamen Druckes angiebt. Mit Rücksicht hierauf wird sie wohl zuweilen als Drucklinie oder von Scheffler bezeichnender als Richtungslinie des Druckes benannt. Dieser Unterschied zwischen der Mittellinie des Druckes, welche hier Stützlinie genannt wird und der Richtungslinie des Druckes, welche eine Kettenlinie ist, wurde zuerst von Moseley*) hervorgehoben, während von verschiedenen Autoren ein solcher Unterschied nicht gemacht wird, vielmehr zuweilen die aus dem Seilpolygon $a_1 a_2 a_3$ sich ergebende Kettenlinie als Stützlinie bezeichnet wird. Hierzu mag die für die gewöhnlichen Verhältnisse der Gewölbe nur geringe Abweichung zwischen den beiden Curven und die Möglichkeit einer analytischen Behandlung der Kettenlinie die Veranlassung gewesen sein. Bei diesen analytischen Behandlungen denkt man in der Regel das Gewölbe nicht durch Fugenschnitte, sondern durch eine Anzahl verticaler Ebenen JJ, Fig. 46, in Lamellen zerlegt und die Curve bestimmt, welche die Durchschnittspunkte s der Mittelkräfte mit diesen Verticalen J enthält. Diese Curve ist allerdings eine Kettenlinie, da für sie die oben gestellte Bedingung erfüllt ist, derzufolge das Gewicht G_1 jedes Elementes zwischen den beiden, diesem Elemente zugehörigen Punkten s und s_1 hindurchgeht. Diese Linie ist aber, streng genommen, nicht die dem Fugenschnitte zukommende Mittellinie des Druckes, denn wenn man beispielsweise durch einen dieser Punkte wie s_1 die Fuge $F_1 F_2$ hindurchlegt, so würde man den dieser

Fig. 46.

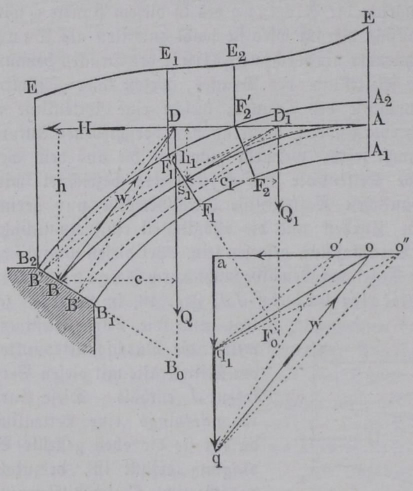


*) Moseley, The mechanical Principles of Engineering and Architecture, übersetzt von H. Scheffler.

Fuge zukommenden Punkt der Stützlinie durch Vereinigung der im Scheitel A wirkenden Horizontalkraft H mit dem Gewichte des Gewölbtheils $A_1 F_1 F_2 L E$ erhalten, während s_1 durch Zusammensetzung von H mit dem Gewichte des Stückes $A_1 J_1 J_2 E$ gefunden ist. In welcher Weise die analytische Behandlung des Gewölbes mit Hülfe einer solchen Zerlegung durch Verticalebenen geschehen kann, wird weiter unten gezeigt werden.

§ 18. **Eigenschaften der Stützlinie.** Da die Stützlinie für die Beurtheilung der Stabilität der Gewölbe von großer Bedeutung ist, so mögen zunächst die wichtigsten hier in Frage kommenden Eigenschaften derselben näher ins Auge gefaßt werden. Aus dem vorhergehenden Paragraphen ist es deutlich, wie man für irgend ein symmetrisches Gewölbe, dessen Belastungsverhältnisse gegeben sind, die Stützlinie jederzeit construiren kann, sobald die Horizontalkraft H Fig. 47 und deren Angriffspunkt A im Scheitel bekannt sind, oder sobald man außer dem Angriffspunkte A im Scheitel noch den Angriffspunkt in einer zweiten Fuge kennt, sei es in der Kämpferfuge B oder in irgend einer anderen. Denkt man sich zunächst in der schon oben angedeuteten Weise alle auf das Gewölbe wirkenden Belastungen durch Mauerkörper von gleichem specifischen Gewichte mit dem eigentlichen Gewölbmaterial dargestellt, und gleichmäßig über die ganze Länge (nach der Axe) des Gewölbes vertheilt, so erhält man im verticalen

Fig. 47.



Querschnitte eine gewisse gerade oder krumme Linie EE als obere Profillinie der auf dem Gewölbe ruhenden Belastungsmasse, welche Linie schlechtweg Belastungslinie genannt wird. Indem man beliebig viele Fugen wie $F_1 F_1'$ und durch F_1' die Verticale $F_1' E_1$ zeichnet, kann man durch Rechnung oder Construction die Gewichte und Schwerpunkte der einzelnen Gewölbsteine einschließlich der auf sie entfallenden Belastungen bestimmen. So z. B. würde für den durch die Fugen F_1 und F_2 begrenzten Wölbstein das Gewicht eines Mauerprismas von 1 m Länge und der durch $F_1 F_1' E_1 E_2 F_2' F_2$ dargestellten Grundfläche als Belastung gefunden werden.