Zweites Capitel.

# Die Theorie der Gewölbe.

§. 16. **Gewölbe.** Zur Ueberdeckung von Oeffnungen zwischen zwei festen Widerlagern oder Pfeilern dienen im Bauwesen die Gewölbe. Unter einem Gewölbe versteht man eine Vereinigung einer Anzahl von Steinen, welche vermöge ihrer Form mit ihren Seitenflächen sich gegen einander und gegen die festen Widerlager derartig stützen, daß sie unter dem Einfluße ihres Eigengewichtes sowie der auf ihnen ruhenden Belastung mit Hülfe der von den Widerlagern ausgeübten Reactionen im Zustande des Gleichgewichtes sind. Die gedachten Seitenflächen, in welchen je zwei benachbarte Steine sich gegen einander stützen, heißen Fugenflächen oder schlechtweg Fugen und zwar Lagerfugen, zum Unterschiede von den sogenannten Stoßfugen, d. h. den hierzu in der Regel senkrechten Flächen, in denen die einzelnen gewölbten Bogen mit ihren Stirnen zusammenstoßen. Unter den Wölbungen oder Leibungen werden diejenigen meist cylindrisch gekrümmten Flächen verstanden, welche durch die Kopfenden der Steine gebildet sind, und zwar versteht man unter der inneren Leibung die der Oeffnung zugekehrte untere Wölbfläche, während die obere, die Belastung aufnehmende Wölbfläche, die äußere Leibung heißt. Die Wölbflächen haben in den meisten Fällen die Form von Cylinderflächen mit horizontaler Axe und mehr oder minder großem Halbmesser, welcher bei den sogenannten scheitrechten Gewölben mit ebenen Wölbflächen als unendlich groß zu denken ist. Nur in einzelnen Fällen kommen abweichend gestaltete Gewölbe vor, unter welchen die sogenannten Kuppelgewölbe besonders hervorzuheben sind. Ebenso gehören conische Gewölbe, sowie cylindrische Gewölbe mit gegen den Horizont geneigten Axen, wie z. B. die sogenannten Kellerhalsgewölbe zu den selteneren Vorkommnissen; wie auch die Ueberwölbungen ringförmiger Räume nur ausnahmsweise, z. B. bei gewissen Ziegelöfen vorkommen. Je nachdem die beiden End- oder Stirnflächen eines Gewölbes senkrecht oder schief gegen die Axe gestellt sind, unterscheidet man die geraden von den schiefen Gewölben, von denen die letzteren eine besondere Wichtigkeit für den Brückenbau haben, da man durch örtliche Verhältnisse sehr häufig veranlaßt ist, die Ueberführung von Straßen und Eisenbahnen über Flüsse oder andere Straßen schräg gegen die letzteren anzuordnen. Je nachdem endlich die Widerlager hinsichtlich ihrer Anordnung symmetrisch zur Gewölbaxe sind oder nicht, je nachdem namentlich die Höhe der beiden Widerlagsfugen oder Kämpfer gleich oder verschieden ist, kann man die Gewölbe in symmetrische und unsymmetrische unterscheiden.

Der verticale Querschnitt der cylindrischen oder Tonnengewölbe kann sehr verschieden gewählt werden. Derselbe kann ebensowohl die Kreisform, und zwar die Gestalt eines Halbkreises oder eines flachen Segmentes, wie auch diejenige einer Ellipse, Kettenlinie und, wie schon bemerkt, auch einer geraden Linie haben, wonach man Kreisgewölbe, elliptische, Ketten- und scheitrechte Gewölbe unterscheidet. Anstatt der elliptischen Begrenzung wählt man der leichteren Darstellung wegen sehr häufig eine aus mehreren ohne Knick in einander übergehenden Kreisbögen zusammengesetzte sogenannte Korblinie, und spricht dann von Korbgewölben oder Korbbögen. Elliptische oder Korbbögen, bei denen die verticale Höhe in der Mitte, Pfeilhöhe, kleiner ist, als die horizontale Weite, Spannweite, heißen gedrückte Bögen, während man im entgegengesetzten Falle die Bögen wohl überhöhete nennt. Letztere kommen namentlich bei Tunnelgewölben vor, während für Brücken über Flüsse mit weiten Oeffnungen die flachen segmentförmigen, elliptischen oder Korbbögen angezeigt sind, welche dem Wasser genügenden Durchflußquerschnitt gewähren, ohne die unbequeme Höhe der Construction zu bedingen, wie sie Halbkreisbögen erfordern. Diese letzteren dagegen werden, wegen des geringen Seitenschubes gerade bei hohen Wegeüberführungen oder Viaducten meist angewendet. Eine besondere Form zeigt der bekannte, bei gothischen Bauten so viel angewendete Spitzbogen, dessen Querschnitt aus zwei, im höchsten Punkte oder Scheitel unter einem gewissen Winkel zusammenstoßenden Kreisbögen besteht, und welcher, wie aus dem Folgenden sich ergeben wird, insbesondere für eine starke Belastung des Scheitels sehr geeignet ist, wie sie bei Thurm- und Kirchenbauten vorkommt.

Auch die Belastung der Gewölbe ist sehr verschieden. Während die gewölbten Decken großer Räume, z. B. in Museen und Kirchen, nur ihr eigenes Gewicht zu tragen haben, sind die Brückengewölbe durch die darüber fahrenden Wagen belastet, und dazu kommt bei Durchlässen unter hohen Eisenbahndämmen sowie bei Tunneln der Druck der über den Gewölben befindlichen Erdmasse. Bei Gebäuden haben die gewölbten Zwischendecken die Belastung der Fußböden und die Fensterbögen das Gewicht der über ihnen befindlichen Mauermassen zu tragen. Bei der Berechnung der Gewölbe hinsichtlich ihrer Stabilität ist es gebräuchlich, die Belastung durch das Gewicht von Mauerwerk auszudrücken, welches mit dem Gewölbmaterial gleiches specifisches Gewicht hat, und es kommt daher, wie in dem Folgenden mehrfach gezeigt werden wird, in jedem einzelnen Falle darauf an, die für jeden Punkt des Gewölbes der daselbst stattfindenden Belastung entsprechende Höhe des Belastungskörpers zu ermitteln.

Als Material für die Gewölbe dienen bei den größten Spannweiten und Belastungen der Brücken meistens natürliche Bausteine, insbesondere Sand= und Kalksteine, während man in Backsteingebäuden die Gewölbe in der Regel ebenfalls aus Ziegelmauerwerk darstellt. Hierbei pflegt man bei der Verwendung von Hausteinmaterial die einzelnen Wölbsteine von solcher Länge anzuwenden, daß sie durch die ganze Gewölbstärke von der inneren bis zur äußeren Leibung hindurchreichen. Stärkere Gewölbe aus Ziegelmauerwerk dagegen führt man in einzelnen, der geringen Ziegellänge entsprechend dicken Gewölbschichten aus, welche entweder unter einander in regelrechtem Verbande, oder in isolirten Schichten dargestellt werden.

Wenn man bei der Ausführung auch, besonders bei Ziegelgewölben, in der Regel einen ausgezeichneten Cementmörtel verwendet, so pflegt man doch bei der Berechnung auf die Bindekraft des Mörtels nicht zu rücksichtigen, sondern anzunehmen, daß die Steine mit den Fugenflächen einfach auf einander gelegt sind, und daher zwischen den Fugen nur die betreffende Reibung auftritt. Diese Annahme muß gemacht werden, weil jedes Gewölbe, auch bei der sorgfältigsten Ausführung, durch Erschütterungen oder in Folge ungleichen Setzens der Widerlager Risse in den Fugen erhalten kann, wodurch also der Zusammenhang der Mörtelmasse verloren geht. Man hat die Wirkung des Mörtels hauptsächlich in einer Ausgleichung der Unebenheiten zu suchen, mit denen die Flächen der Steine immer mehr oder minder behaftet sind. Es ist klar, daß dieser Annahme zufolge in den Fugen eines Gewölbes nur rückwirkende Pressungen, aber keine Zugspannungen auftreten können.

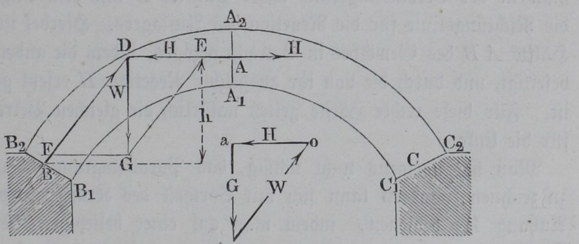
Was die Größe, d. h. die Spannweite der Gewölbe anbetrifft, so ist man hierin durch die entsprechende Widerstandsfähigkeit des Wölbsteinmaterials innerhalb gewisser Grenzen beschränkt. Die größten Spannweiten, welche man durch Gewölbe aus natürlichen Bausteinen hat überbrücken können, dürften wohl kaum mehr als etwa 60 m betragen*), während

*) Die Grosvenorbrücke über den Dee in England hat eine Spannweite von 195′ = 61 m.

Spannweiten von 40 bis 50 m bei Brückenbögen häufig vorkommen. Die Höhe der Gewölbe steigt bei Brücken und Wegeüberführungen zuweilen bis 80 m*) und darüber. Was die Länge der Gewölbe in der Axenrichtung anbetrifft, so ist dieselbe, den jeweiligen Umständen entsprechend, sehr verschieden. Während die Bögen über Fenster- und Thüröffnungen in Gebäuden nur eine Breite gleich der Dicke der zu tragenden Mauern haben, erstrecken sich die Gewölbe der Tunnel natürlich auf deren ganze oft viele Kilometer große Länge, wogegen die Breite der Brücken etwa zwischen 5 m und 20 m schwankt. Auf die Berechnung der Gewölbe ist, eine der ganzen Länge nach überall gleichmäßige Belastung vorausgesetzt, die Längenerstreckung ohne Einfluß, und es soll in den folgenden Untersuchungen immer ein Gewölbe vorausgesetzt werden, dessen Länge nach der Richtung der Axe 1 m beträgt. Ferner sollen zunächst die symmetrisch geformten und symmetrisch belasteten Tonnengewölbe besprochen und daran die Betrachtungen über die Verhältnisse abweichender Gewölbe angeschlossen werden.

**Die Stützlinie.** Es sei $ABC$, Fig. 44, der Durchschnitt durch ein horizontales symmetrisches Tonnengewölbe von der axialen Länge gleich 1 m, welches zunächst nur sein Eigengewicht $2\,G$ zu tragen haben soll, und man denke sich dieses Gewölbe durch die Scheitelfuge $A_1 A_2$ in zwei gleiche Theile $AB$ und $AC$ zerlegt, welche sich gegen die festen Widerlagsflächen $B_1 B_2$ §. 17.

Fig. 44.




und $C_1 C_2$ stützen, im Uebrigen aber zunächst als starre Balken angesehen werden sollen. Setzt man die Widerlager als unverrückbar fest voraus, so können die beiden Gewölbhälften ihrem Bestreben, zu fallen, nicht folgen. Es müssen daher, um das Gleichgewicht herzustellen, in den Stützflächen $B_1 B_2$

*) Die Göltzschthalbrücke der sächsisch-bayrischen Eisenbahn hat in vier über einander stehenden Bogenreihen eine Höhe von $250' = 73$ m, und der römische Aquäduct zu Nismes in Frankreich hat bei drei über einander stehenden Bogenreihen $150' = 49$ m Höhe.

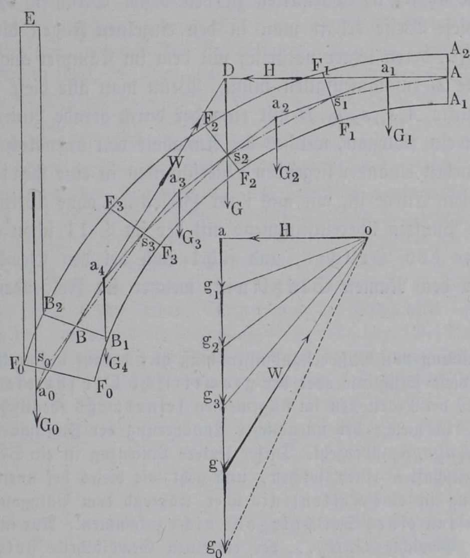
und $C_1\ C_2$ gewisse Reactionen $W$ der Widerlager auftreten, und ebenso müssen die beiden Gewölbhälften im Scheitel zwei gleiche und entgegengesetzte Reactionen $H$ auf einander ausüben, welche sich gegenseitig aufheben. Aus der Symmetrie der ganzen Anordnung und Gewichtsvertheilung ergiebt sich, daß die letztgedachten Scheitelreactionen $H$ nur horizontal gerichtet sein können, im Uebrigen kennt man weder die Angriffspunkte noch die Größe der Kräfte $H$ und $W$, und von letzteren auch nicht die Richtung; höchstens läßt sich aus der symmetrischen Anordnung die Uebereinstimmung der Widerstände $W$ zu beiden Seiten $B$ und $C$ schließen. Die Aufgabe, die Reactionen $W$ und $H$ zu bestimmen, ist sonach von vornherein gänzlich unbestimmt, da den Gleichgewichtsbedingungen in unendlich verschiedener Weise durch Kräfte $H$ und $W$ genügt werden kann. Macht man jedoch gewisse einschränkende Annahmen, sei es über die Größe und Richtung von $W$ oder über die Größe von $H$, so wird die Aufgabe bestimmt, sobald man von diesen gedachten drei Elementen zwei festsetzt. Sei z. B. die Lage des Angriffspunktes in der Scheitelfuge in $A$ und in der Kämpferfuge in $B$ resp. $C$ angenommen, so ergiebt sich aus dem bekannten Gewichte $G$ der Gewölbhälfte, welches durch $D\,G$ dargestellt sein mag, durch das Parallelogramm der Kräfte die Größe von $H = ED$ und in $DF$ der Größe und Richtung nach der Druck gegen das Widerlager $B$. Um das Parallelogramm zu zeichnen, hat man nur den Schnittpunkt $D$ zu suchen, in welchem die in $A$ horizontale Scheitelreaction $H$ die Schwerlinie $D\,G$ der Gewölbhälfte schneidet, dann findet man in der Verbindungslinie dieses Punktes $D$ mit dem Angriffspunkte $B$ die Richtungslinie für die Reaction des Auflagers. Hierbei ist nur die eine Hälfte $A\,B$ des Gewölbes in Betracht gezogen, indem die andere Hälfte $A\,C$ beseitigt, und durch die von ihr ausgeübte Reaction $H$ ersetzt gedacht worden ist. Für diese rechte Hälfte gelten natürlich die gleichen Betrachtungen wie für die linke.

Man hat übrigens nicht nöthig, das Parallelogramm der Kräfte selbst zu zeichnen, sondern kann sich mit Vortheil des Kräftepolygons (s. Thl. I Anhang II) bedienen, indem man auf einer beliebigen Verticallinie die Strecke $a\,g$ anträgt, welche nach einem passenden Kräftemaßstabe das Gewicht $G$ der Gewölbhälfte darstellt. Zieht man durch $a$ dann eine Horizontale und durch $g$ eine Parallele mit der Reactionsrichtung $BD$, so erhält man in den Strecken $o\,a$ und $g\,o$ die Größen von $H$ und $W$ nach dem zu Grunde gelegten Kräftemaßstabe.

In dieser Weise soll auch im Folgenden das Kräftepolygon den Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Aus der Figur erkennt man den Einfluß, welchen die Lage der Angriffspunkte auf die Größe der Reactionskräfte $H$ und $W$ ausübt. Es ist deutlich, daß die Horizontalkraft $oa = H$ um so kleiner ausfällt, je steiler die Linie $g\,o$ oder $B\,D$ ist, d. h. je höher man den Angriffspunkt $A$, und je tiefer man denjenigen $B$ wählt, oder je größer der verticale Abstand $h$ der beiden Angriffspunkte $A$ und $B$ ist und umgekehrt. Die kleinste Horizontalkraft $H_{min}$ würde man daher in dem vorliegenden Falle vermöge der Annahme von $B_1$ und $A_2$ als Angriffspunkte erhalten, während den Punkten $B_2$ und $A_1$ die größte Horizontalkraft $H_{max}$ entspricht.

Die hier für die Kämpferfuge angestellte Betrachtung gilt in vollständiger Allgemeinheit für jede beliebige Fuge, überhaupt für jeden beliebigen Querschnitt des Gewölbes, wie aus Fig. 45 leicht ersichtlich ist. Wenn hier durch $AB$ wieder die Hälfte eines symmetrischen Tonnengewölbes mit dem

Fig. 45.



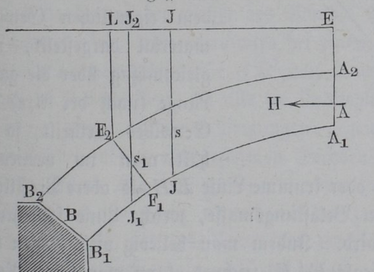

Gewichte $G$ und den Angriffspunkten der Reactionen in $A$ und $B$ dargestellt ist, so findet man, unter $ag$ das Gewicht $G$ verstanden, durch das Kräftepolygon $oag$ in der beschriebenen Weise den Horizontaldruck $H$ in $oa$ und die Widerlagsreaction $W = go$. Wenn nun $F_1$ eine beliebige Fuge vorstellt und $G_1$ das Gewicht des Gewölbstückes $F_1 A$ bedeutet, so kann man für dieses Stück die Fuge $F_1$ nunmehr als Widerlagsfuge betrachten, und es muß das Stück $F_1 A$ unter Einfluß der Horizontalkraft $H$, des Gewichtes $G_1$ und der von der Fuge $F_1$ ausgeübten Reaction $W_1$ im Gleichgewichte sein. Ueber den

Angriffspunkt $s_1$ dieser letzteren Reaction ist jetzt kein Zweifel mehr, da die Kraft $H$ auch ihrer Größe nach bestimmt ist. Man fände diesen Punkt $s_1$, wenn man an den Durchschnittspunkt $a_1$ zwischen $H$ und $G_1$ das Kräfteparallelogramm zeichnete, dessen Seiten die bekannten Kräfte $G_1$ und $H$ sind; die Diagonale gäbe dann die Druckkraft $W_1$ und in ihrem Durchschnitte $s_1$ mit der Fuge $F_1$ den gesuchten Angriffspunkt. Einfacher findet man $s_1$ durch Eintragen der Strecke $ag_1 = G_1$ in den Kräfteplan und die von $a_1$ mit $og_1$ parallele Gerade $a_1 s_1$. Es ist klar, daß man diese Construction für beliebig viele Fugenschnitte $F_2, F_3 \ldots$ wiederholen kann, wenn man nur in dem Kräftepolygon die Strecken $g_1 g_2, g_2 g_3, g_4 g$ gleich den Gewichten der einzelnen Gewölbtheile $F_1 F_2$, $F_2 F_3$ und $F_3 B$ macht und von den Durchschnitten $a_2, a_3, a_4$ Parallelen zu den bezw. Strahlen $og_2, og_3, og_4$ zieht. Auf diese Weise erhält man in den einzelnen Fugen die Angriffspunkte $s_2, s_3 \ldots$, deren letzter natürlich mit dem im Kämpfer angenommenen Angriffspunkte $B$ zusammenfallen muß. Wenn man alle diese aufeinander folgenden Punkte $A, s_1, s_2, s_3, B$ mit einander durch gerade Linien verbindet, so erhält man ein Polygon, welches bei Annahme von unendlich vielen, unendlich nahe neben einander liegenden Querschnitten in eine stetige Curve übergeht. Diese Curve ist, wie aus ihrer Herleitung ohne Weiteres hervorgeht, in allen Punkten übereinstimmend mit der im §. 11 schon angeführten Mittellinie des Druckes, und führt auch bei den Gewölben diesen Namen, oder den Namen Stützlinie, welcher im Folgenden gebraucht werden soll.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen muß hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß diese Stützlinie oder der geometrische Ort für die Angriffspunkte $s_1, s_2 \ldots$ der Reactionen im Allgemeinen keineswegs identisch ist mit derjenigen Curve, in welche bei unendlicher Annäherung der Fugenquerschnitte das Seilpolygon $a_1 a_2 a_3 a_4$ übergeht. Dieser letztere Linienzug ist ein Seilpolygon mit allen Eigenschaften eines solchen, und geht wie dieses bei unendlich kleiner Fugenentfernung in eine Kettenlinie über, während dem Polygon $As_1 s_2 s_3 B$ die Eigenschaften eines Seilpolygons nicht zukommen. Nur in demjenigen Falle, wo die Gewichte $G_1 G_2 \ldots$ der einzelnen Gewölbtheile stets zwischen den Angriffspunkten $A$ und $s_1$; $s_1$ und $s_2$; $s_2$ und $s_3$ der zugehörigen Fugen hindurchgehen, fällt bei unendlicher Annäherung die aus $As_1 s_2 s_3 B$ hervorgehende Stützlinie mit der aus dem Seilpolygone $a_1 a_2 a_3 a_4$ sich ergebenden Kettenlinie zusammen, und nur in diesem Falle giebt die Stützlinie in ihrer Tangente an irgend welchen ihrer Punkte auch die Richtung des daselbst ausgeübten Druckes an. Daß die beiden Linien $a$ und $s$ in dem bemerkten Falle in eine einzige übergehen, zeigt auch die Figur, indem man daraus ersieht, wie z. B. die Höhe des Punktes $a_2$ über $s_1 s_2$ um so geringer wird, je näher die beiden Fugen $F_1$ und $F_2$ zusammenrücken, und bei unendlich kleiner Entfernung derselben ebenfalls unendlich klein wird. Daß dieses Verhalten aber nur unter der gemachten Voraussetzung stattfindet, derzufolge das Gewicht $G_2$ unter allen Umständen, auch bei der kleinsten Entfernung der Fugen $F_1$ und $F_2$, zwischen deren Angriffspunkte $s_1$ und $s_2$ fällt, erkennt man ebenfalls aus der Figur. Denkt man sich nämlich in dem verlängert vorausgesetzten Bogen ein Element, durch die Fugen $B_1 B_2$ und $F_0 F_0$ begrenzt, welches, wie dies bei Gewölben immer der Fall ist, auf seiner Rückfläche $F_0 B_2$ durch ein Erd- oder Mauerprisma $B_2 F_0 E$ belastet ist, so geht die Schwerlinie $G_0$ dieses Elementes seitlich an $B$ vorüber, und man erhält den zugehörigen Schnittpunkt mit der vorhergehenden Seilpolygonseite $a_4 B$ in $a_0$. Macht man nun im Kräfteplan die Strecke $g g_0$ gleich dem Gewichte $G_0$ des betrachteten Elementes $B_2 F_0 E$, und zieht durch den erhaltenen Schnittpunkt $a_0$ eine Parallele mit $o g_0$, so erhält man den Punkt der Stützlinie in der Fuge $F_0$ rückwärts in $s_0$, und zwar bleibt die Entfernung $a_0 s_0$ immer eine meßbare Größe, auch wenn $F_0 F_0$ unendlich nahe an $B_1 B_2$ heranrückt. Man erkennt hieraus, daß die beiden gedachten Curven, die Stützlinie $s$ und die Kettenlinie $a$, nicht zusammenfallen können, und aus der durch Figur $B_1 F_0 E B_2$ dargestellten eigenthümlichen Belastungsart aller Gewölbe ergiebt sich leicht, daß die für das Zusammenfallen oben gestellte Bedingung streng genommen nur bei Gewölben erfüllt sein würde, deren Dicke unendlich klein wäre.

Diese Kettenlinie, in welche das Seilpolygon $a_1 a_2 a_3 a_4$ übergeht, hat, wie aus dem Vorstehenden folgt, die Eigenschaft, daß die von irgend einem Punkte der Stützlinie wie $s_3$ an sie gezogene Tangente die Richtung des in diesem Punkte $s_3$ wirksamen Druckes angiebt. Mit Rücksicht hierauf wird sie wohl zuweilen als Drucklinie oder von Scheffler bezeichnender als Richtungslinie des Druckes benannt. Dieser Unterschied zwischen der Mittellinie des Druckes, welche hier Stützlinie genannt wird und der Richtungslinie des Druckes, welche eine Kettenlinie ist, wurde zuerst von Moseley*) hervorgehoben, während von verschiedenen Autoren ein solcher Unterschied nicht gemacht wird, vielmehr zuweilen die aus dem Seilpolygon $a_1 a_2 a_3$ sich ergebende Kettenlinie als Stützlinie bezeichnet wird. Hierzu mag die für die gewöhnlichen Verhältnisse der Gewölbe nur geringe Abweichung zwischen den beiden Curven und die Möglichkeit einer analytischen Behandlung der Kettenlinie die Veranlassung gewesen sein. Bei diesen analytischen Behandlungen denkt man in der Regel das Gewölbe nicht durch Fugenschnitte, sondern durch eine Anzahl verticaler Ebenen $JJ$, Fig. 46, in Lamellen zerlegt und die Curve bestimmt, welche die Durchschnittspunkte $s$ der Mittelkräfte mit diesen Verticalen $J$ enthält. Diese Curve ist allerdings eine Kettenlinie, da für sie die oben gestellte Bedingung erfüllt ist, derzufolge das Gewicht $G_1$ jedes Elementes zwischen den beiden, diesem Elemente zugehörigen Punkten $s$ und $s_1$ hindurchgeht. Diese Linie ist aber, streng genommen, nicht die dem Fugenschnitte zukommende Mittellinie des Druckes, denn wenn man beispielsweise durch einen dieser Punkte wie $s_1$ die Fuge $F_1 F_2$ hindurchlegt, so würde man den dieser

Fig. 46.

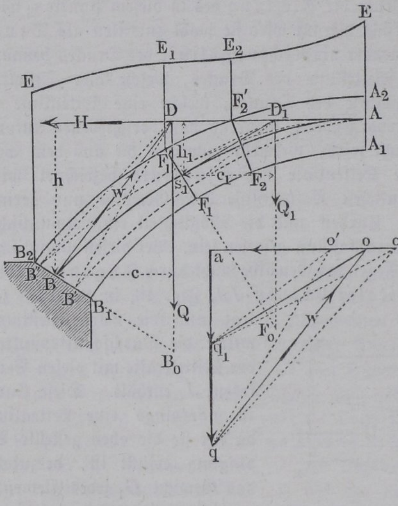



*) Moseley, The mechanical Principles of Engineering and Architecture, übersetzt von H. Scheffler.

Fuge zukommenden Punkt der Stützlinie durch Vereinigung der im Scheitel $A$ wirkenden Horizontalkraft $H$ mit dem Gewichte des Gewölbtheils $A_1 F_1 F_2 L E$ erhalten, während $s_1$ durch Zusammensetzung von $H$ mit dem Gewichte des Stückes $A_1 J_1 J_2 E$ gefunden ist. In welcher Weise die analytische Behandlung des Gewölbes mit Hülfe einer solchen Zerlegung durch Verticalebenen geschehen kann, wird weiter unten gezeigt werden.

§ 18. **Eigenschaften der Stützlinie.** Da die Stützlinie für die Beurtheilung der Stabilität der Gewölbe von großer Bedeutung ist, so mögen zunächst die wichtigsten hier in Frage kommenden Eigenschaften derselben näher ins Auge gefaßt werden. Aus dem vorhergehenden Paragraphen ist es deutlich, wie man für irgend ein symmetrisches Gewölbe, dessen Belastungsverhältnisse gegeben sind, die Stützlinie jederzeit construiren kann, sobald die Horizontalkraft $H$ Fig. 47 und deren Angriffspunkt $A$ im Scheitel bekannt sind, oder sobald man außer dem Angriffspunkte $A$ im Scheitel noch den Angriffspunkt in einer zweiten Fuge kennt, sei es in der Kämpferfuge $B$ oder in irgend einer anderen. Denkt man sich zunächst in der schon oben angedeuteten Weise alle auf das Gewölbe wirkenden Belastungen durch Mauerkörper von gleichem specifischen Gewichte mit dem eigentlichen Gewölbmaterial dargestellt, und gleichmäßig über die ganze Länge (nach der Axe) des Gewölbes vertheilt, so erhält man im verticalen Querschnitte eine gewisse gerade oder krumme Linie $EE$ als obere Profillinie der auf dem Gewölbe ruhenden Belastungsmasse, welche Linie schlechtweg **Belastungslinie** genannt wird. Indem man beliebig viele Fugen wie $F_1 F_1'$ und durch $F_1'$ die Verticale $F_1' E_1$ zeichnet, kann man durch Rechnung oder Construction die Gewichte und Schwerpunkte der einzelnen Gewölbsteine einschließlich der auf sie entfallenden Belastungen bestimmen. So z. B. würde für den durch die Fugen $F_1$ und $F_2$ begrenzten Wölbstein das Gewicht eines Mauerprismas von 1 m Länge und der durch $F_1 F_1' E_1 E_2 F_2' F_2$ dargestellten Grundfläche als Belastung gefunden werden.

Fig. 47.



Hat man in solcher Weise das Gewölbe in beliebig viele Theile zerlegt, und deren Gewichte sowie ihre Schwerlinien bestimmt, so findet man für eine bestimmte Horizontalkraft $H$, welche in dem Punkte $A$ der Scheitelfuge angreifen soll, die Stützlinie leicht mit Hülfe des Kräftepolygons, in welchem $oa = H$ gemacht und $aq$ vertical und gleich dem Gesammtgewichte $Q$ der Gewölbhälfte angetragen ist. Zieht man nämlich durch $A$ horizontal bis zum Durchschnitte $D$ mit der Belastung $Q$, so liefert die durch $D$ parallel mit $oq$ gezogene Gerade $DB$ in $B$ den Angriffspunkt $B$ in der Kämpferfuge. In gleicher Weise erhält man den Angriffspunkt $s_1$ der Fuge $F_1$, wenn man im Kräftepolygon $aq_1$ gleich dem Gewichte $Q_1$ des Gewölbtheiles zwischen $F_1$ und dem Scheitel $A$ macht und eine zu $oq_1$ parallele Gerade $D_1 s_1$ durch den Punkt $D_1$ zieht, in welchem das besagte Gewicht $Q_1$ von der Horizontalkraft $H$ getroffen wird. Wenn nicht $H$, sondern dafür außer dem Scheitelangriffspunkte $A$ noch ein zweiter Punkt, z. B. $s_1$ gegeben ist, so ergiebt sich die Construction ohne Weiteres, wenn man diesen zweiten Punkt $s_1$ mit dem Durchschnitte $D_1$ verbindet und mit dieser Verbindungslinie eine Parallele durch $q_1$ im Kräftepolygon zieht, welche auf der Horizontalen die Schubkraft $H = oa$ abschneidet.

Es geht aus Obigem hervor, daß für irgend welche Fuge die horizontale Componente der auf sie wirkenden Druckkraft $W$ eine und dieselbe Größe mit der Kraft $H$ hat, welche im Scheitel wirkt, und man spricht daher bei einem Gewölbe schlechtweg von der Horizontalkraft oder der Schubkraft desselben, welche nach dem Vorstehenden für alle Punkte eine constante Größe $H$ hat.

Gesetzt, die Curve $A s_1 B$ wäre die mit $H = oa$ gezeichnete Stützlinie, so erkennt man sogleich, das bei Festhaltung desselben Angriffspunktes $A$, aber bei Aenderung der Größe des Schubes $H$, die sich ergebende Stützlinie eine andere wird, und zwar wird bei einem kleineren Werthe von $H$ etwa gleich $o'a$ die neue Stützlinie $AB'$ von $A$ aus ganz unterhalb der vorherigen $AB$ verbleiben, da alle im Kräfteplane von $o'$ gezogenen Strahlen wie $o'q_1$, $o'q \ldots$ größere Neigungen gegen den Horizont haben, als die entsprechenden von $o$ aus gezogenen Geraden $oq_1$, $oq \ldots$ Ebenso wird ein größerer Schub $H$, etwa gleich $o''a$, eine flachere Stützlinie $AB''$ liefern, welche von $A$ aus ganz oberhalb der zuerst gezeichneten $AB$ verbleibt. Würde man $H$ bis ins Unendliche wachsen lassen, so würde man als Stützlinie die Horizontale $AH$ bekommen, da gegen ein unendlich großes $H$ die endlichen Werthe von $Q$ verschwinden. Dagegen erhält man bei einer Abnahme der Schubkraft $H$ bis zu Null eine Stützlinie, welche die Durchschnitte $B_0$, $F_0 \ldots$ der Gewichte $Q$ mit den zugehörigen Fugenverlängerungen in sich aufnimmt.

Hieraus geht hervor, daß es für irgend einen Punkt $A$ der Scheitelfuge als Angriffspunkt des Horizontalschubes eine unendlich große Anzahl von Stützlinien giebt, welche sich von einander durch die Größe der Schubkraft $H$ unterscheiden, und von denen je zwei außer dem gemeinschaftlichen Angriffspunkte $A$ keinen zweiten Punkt mit einander gemein haben können.

Die letztere Behauptung erhellt ohne Weiteres aus der Bemerkung, daß für jeden Punkt einer Stützlinie die Momentensumme aller derjenigen Kräfte gleich Null sein muß, die auf ein beliebiges Gewölbstück wirken, welches von der Fuge durch diesen Punkt seinen Ausgang nimmt. So hat man z. B. für den Punkt $B$ die Momentengleichung $Qc = Hh$ oder $H = Q\frac{c}{h}$, wenn $h$ die verticale Höhe von $H$ über $B$ und $c$ den horizontalen Abstand des Gewichtes $Q$ von $B$ bedeutet. In derselben Weise gilt für den Punkt $s_1$ der Fuge $F_1$, wenn dessen Abstand von $H$ durch $h_1$ und von $Q_1$ durch $c_1$ bezeichnet wird, auch

$$Q_1 c_1 = H h_1 \text{ oder } H = Q_1 \frac{c_1}{h_1}.$$

Sollten daher irgend zwei der oben erwähnten durch $A$ gehenden Stützlinien mit den verschiedenen Schubkräften $H_1$ und $H_2$ sich noch in einem Punkte schneiden, dessen Tiefe unter $A$ etwa $h_0$ sein möge, und für welchen das Moment des zwischen diesem Punkte und dem Scheitel $A$ gelegenen Gewölbtheiles durch $Q_0 c_0$ gegeben sein mag, so hätte man

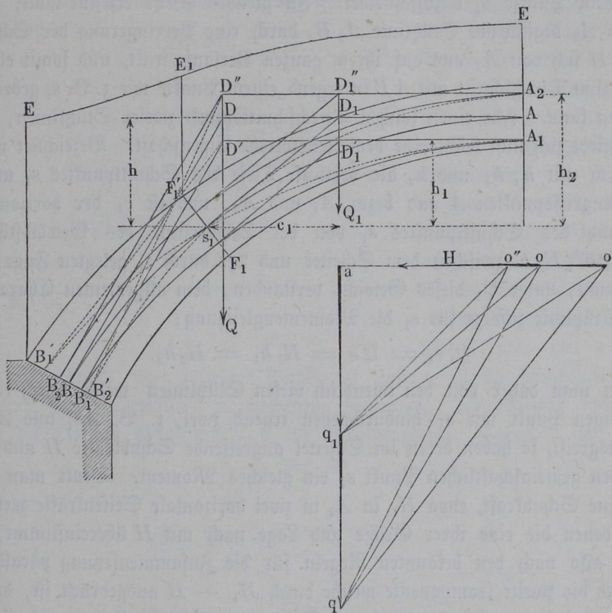
$$Q_0 c_0 = H_1 h_0 = H_2 h_0, \text{ d. h. also } H_1 = H_2,$$

oder die beiden Stützlinien, welche außer dem Scheitelangriffspunkte $A$ noch einen Punkt gemein haben, fallen in eine einzige zusammen.

Aus dem Vorstehenden folgt auch, daß von irgend zwei durch denselben Punkt $A$ gehenden Stützlinien, wie $AB$ und $AB'$, diejenige dem größeren Horizontalschube entspricht, welche der durch diesen Punkt $A$ geführten Horizontalen am nächsten liegt, d. h. welche zwischen dieser Horizontalen und der anderen Stützlinie liegt. Es wird sich aus dem Nachfolgenden ergeben, daß dieses Verhalten allgemein gilt, auch wenn der Durchschnittspunkt nicht gerade im Scheitel liegt.

Es sei wieder $As_1B$, Fig. 48, eine für den Horizontalschub $H = oa$ construirte Stützlinie der Gewölbhälfte $ABE$, und man denke sich nunmehr unter Beibehaltung der Größe des Horizontalschubes $H$, dessen Angriffspunkt in der Scheitelfuge von $A$ etwa nach $A_1$ verlegt, so wird dadurch an dem Kräftepolygon $oaq$ nichts geändert, und die von $o$ ausgezogenen Strahlen wie $oq, oq_1$ ꝛc behalten sämmtlich ihre Richtung bei. Zeichnet man daher jetzt für denselben Horizontalschub $H = oa$ die durch $A_1$ gehende Stützlinie $A_1B_1$, so ist es klar, daß dieselbe in ihrem ganzen Verlaufe unterhalb der erstgezeichneten $AB$ verbleiben muß, wenn $A_1$ tiefer als $A$ angenommen wurde, während sie dagegen, wie $A_2B_2$ in allen Punkten oberhalb

Fig. 48.




$AB$ gelegen ist, sobald der Scheitelangriff $A_2$ höher als $A$ gelegt wird. Daß zwei mit gleicher Horizontalkraft $H$ construirte von verschieden hoch gelegenen Punkten der Scheitelfuge ausgehende Stützlinien nirgend einen Punkt mit einander gemein haben können, folgt wie vorstehend schon daraus, daß für diesen Punkt die Momentengleichung bestehen muß

$$Qc = Hh_1 = Hh_2,$$

wenn $h_1$ und $h_2$ seine verticalen Abstände von den beiden Angriffspunkten im Scheitel bedeuten, und $Qc$ das Moment des zwischen diesem Punkte und dem Scheitel gelegenen Gewölbtheils ist. Obige Gleichung kann nur durch die Bedingung $h_1 = h_2$ erfüllt werden, woraus sich wieder ergiebt, daß zwei Stützlinien von gleichem Horizontalschube $H$ in eine einzige zusammenfallen, sobald sie einen Punkt mit einander gemein haben.

Denkt man sich nun für die durch $A_1$ gehende Stützlinie $A_1 B_1$ den Schub $H$ vergrößert, so wird dieselbe dadurch nach dem Vorstehenden eine flachere Lage annehmen, und man erhält bei einer gewissen Vergrößerung von $H$ auf $H_1$ eine neue Stützlinie $A_1 B'_1$, welche die zuerst gezeichnete $AB$ in einem Punkte $s_1$ durchschneidet. In gleicher Weise erkennt man, wie die in $A_2$ beginnende Stützlinie $A_2 B_2$ durch eine Verringerung der Schubkraft $H$ sich von $A_2$ aus auf ihrem ganzen Verlaufe senkt, und somit ebenfalls zum Durchschnitt mit $AB$ in irgend einem Punkte wie z. B. $s_1$ gebracht werden kann. Für einen solchen Durchschnittspunkt zweier Stützlinien, wie $s_1$ ergiebt sich nun leicht eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Bezeichnet man nämlich mit $h$, $h_1$ und $h_2$ die verticale Tiefe des Schnittpunktes $s_1$ unter den Angriffspunkten $A$ und bezw. $A_1$ und $A_2$, und ist $c_1$ der horizontale Abstand des Schnittpunktes $s_1$ von der Schwerlinie des Gewölbstückes $A_1 F_1 F'_1 E_1 E$ zwischen dem Scheitel und der durch $s_1$ gelegten Fuge, so hat man, unter $Q_1$ dieses Gewicht verstanden, dem allgemeinen Character der Stützlinie zufolge für $s_1$ die Momentengleichung:

$$Q_1 c_1 = Hh = H_1 h_1 = H_2 h_2.$$

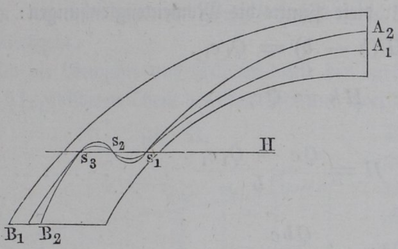
Wenn man daher von den unendlich vielen Stützlinien, welche durch einen beliebigen Punkt wie $s_1$ hindurchgehen irgend zwei, z. B. $As_1$ und $A_1 s_1$ herausgreift, so haben deren im Scheitel angreifende Schubkräfte $H$ und $H_1$ für den gemeinschaftlichen Punkt $s_1$ ein gleiches Moment. Denkt man sich die eine Schubkraft, etwa $H_1$ in $A_1$ in zwei horizontale Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine ihrer Größe und Lage nach mit $H$ übereinstimmt, so muß also nach den bekannten Regeln für die Zusammensetzung paralleler Kräfte die zweite Componente welche durch $H_1 - H$ ausgedrückt ist, durch den gemeinsamen Punkt $s_1$ gehen. Die erforderliche Größe von $H_1$ findet man leicht, wenn man $s_1$ mit dem Durchschnitte $D'_1$ verbindet und durch $q_1$ im Kräfteplane eine Parallele $q_1 o'$ mit $s_1 D'_1$ zieht, wodurch man

$$H_1 = o'a \text{ und } H_1 - H = o'o$$

erhält. Da dieselbe Betrachtung für irgend zwei durch $s_1$ gehende Stützlinien, also z. B. auch für $As_1$ und $A_2 s_1$ gilt, so muß auch die Schubkraft $H_2$ in $A_2$ sich zusammensetzen aus der Schubkraft $H$ in $A$ und einer durch $s_1$ gehenden Componente, welche in diesem Falle nach der entgegengesetzten Richtung von $H$ wirkt, so daß $H_2$, wie schon bekannt, kleiner ausfällt als $H$. Zieht man mit $s_1 D''$ eine Parallele $q_1 o''$ durch $q_1$, so erhält man in $o''a$ die Schubkraft $H_2$ und in $o''o$ die entgegengesetzte Componente, welche mit $H$ zusammen die Horizontalkraft $H_2$ ergiebt.

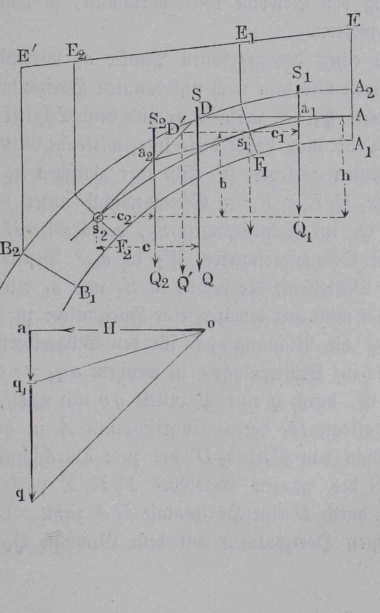
Aus dem Vorstehenden folgt ferner ohne Weiteres, daß, wenn zwei Stützlinien sich in mehr als einem Punkte durchschneiden sollten, dies nur in der Weise geschehen kann, daß sämmtliche Schnittpunkte auf einer und derselben Horizontallinie liegen müssen, denn für jeden einzelnen Schnittpunkt gilt die oben gefundene Beziehung, wonach durch denselben jene durch die Differenz der beiden Schubkräfte dargestellte Componente hindurchgehen muß. Zwei Stützlinien von der Form $AB$ und $A_1 B_1$ Fig. 49, wie sie unter dem Einflusse isolirter Belastungen (s. weiter unten), wohl möglich sind, können sich daher nur in Punkten $s_1$, $s_2$, $s_3$ schneiden, welche sämmtlich auf einer und derselben Horizontallinie $Hs_3$ liegen.

Fig. 49.




Zwei Punkte $s_1$ und $s_2$ dagegen, Fig. 50, welche nicht in gleicher Höhe liegen, können nicht zwei verschiedenen Stützlinien angehören, oder mit anderen Worten, durch zwei beliebige Punkte $s_1$ und $s_2$ ist die Stützlinie eines symmetrischen Gewölbes unzweideutig bestimmt, vorausgesetzt natürlich, daß die Art der Belastung d. h. die Belastungslinie $E$ gegeben ist. Will

Fig. 50.



man in diesem Falle zur Ermittelung der Stützlinie die noch unbekannte Schubkraft $H$, sowie deren ebenfalls noch nicht bekannten Angriffspunkt $A$ in der Scheitelfuge durch Rechnung bestimmen, so sei unter $Q_1$ das Gewicht des Gewölbstückes $F_1 E$ und unter $c_1$ dessen horizontaler Abstand von $s_1$, ebenso unter $Q$ das Gewicht von $F_2 E$ und unter $c$ dessen Abstand von $s_2$ verstanden. Ferner sei $b$ der verticale Höhenunterschied der gegebenen Punkte $s_1$ und $s_2$ und $h$ die noch unbekannte Höhe des Scheitelangriffes $A$ über $s_2$. Dann hat man für diese Punkte die Momentengleichungen:

$$H(h - b) = Q_1 c_1$$

und

$$H h = Q c,$$

woraus

$$H = \frac{Q c - Q_1 c_1}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und

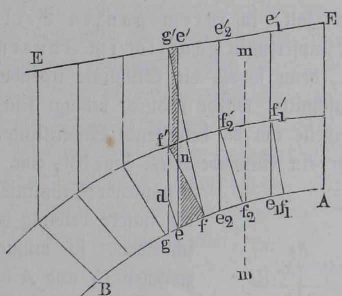
$$h = \frac{Q b c}{Q c - Q_1 c_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

folgt. Diese Formeln können dazu dienen, die Elemente $H$ und $h$ für die Bestimmung der Stützlinie durch Rechnung zu bestimmen. Es läßt sich aber auch durch Construction die Aufgabe leicht lösen: durch zwei gegebene Punkte eines symmetrischen Gewölbes die Stützlinie zu zeichnen. Da diese Aufgabe bei der Prüfung der Gewölbe öfter vorkommt, so mag ihre Lösung hier noch angeführt werden.

Die in dem einen der gegebenen Punkte $s_1$ wirkende Mittelkraft $W_1$ setzt sich zusammen aus dem noch unbekannten Horizontalschube $H$ und dem bekannten Gewichte $Q_1$ des zwischen $s_1$ und dem Scheitel gelegenen Gewölbtheiles $F_1 E$. Denkt man daher diese in $s_1$ wirkende Mittelkraft $W_1$ in diese beiden Componenten zerlegt, so steht der zwischen $s_1$ und $s_2$ enthaltene Gewölbtheil $F_2 s_2 E_2 E_1 s_1 F_1$ im Gleichgewichte unter dem Einflusse seines Eigengewichtes $Q_2$ im Schwerpunkte $S_2$, der Kräfte $H$ und $Q_1$ in $s_1$ und des unbekannten Stützwiderstandes $W_2$ in $s_2$. Bestimmt man daher in $Q'$ die verticale Mittelkraft der beiden in $S_2$ und $s_1$ wirkenden Belastungen $Q_2$ und $Q_1$, so hat man nur durch $s_1$ eine Horizontale zu legen, deren Durchschnitt $D'$ mit $Q'$ die Richtung $s_2 D'$ für den Stützwiderstand in $s_2$ angiebt. Zieht man daher im Kräftepolygon, in welchem $a q_1 = Q_1$ und $q_1 q = Q_2$ also $a q = Q$ ist, durch $q$ eine Parallele $q o$ mit $s_2 D'$, so erhält man in $o a$ die Horizontalkraft $H$, deren Angriffspunkt $A$ in der Scheitelfuge sich ergiebt, wenn man das Seil $s_2 D'$ bis zum Durchschnitte $D$ mit dem im Schwerpunkte $S$ des ganzen Gewölbes $F_2 E_2 E$ wirkenden Gewichte $Q$ verlängert, und durch $D$ eine Horizontale $D A$ zieht. Der Durchschnitt $a_1$ dieser letztgedachten Horizontalen mit dem Gewichte $Q_1$ muß übrigens bei genauer Construction, wie leicht zu erkennen ist, mit dem Stützpunkte $s_1$ und dem Durchschnittspunkte $a_2$ zwischen dem Gewichte $Q_2$ und dem Seile $s_2 D$ auf einer und derselben Geraden liegen, welche mit $o q_1$ im Kräfteplane parallel ist. Zur Bestimmung der Schwerlinie $SQ$, sowie der Mittelkraft $Q'$ kann man sich am Besten des Kräfteplans bedienen, indem man unter Annahme einer ganz beliebigen Horizontalkraft ein Seilpolygon construirt, dessen Endseile in bekannter Weise in ihrem Durchschnitte einen Punkt ergeben, durch welchen die gesuchte Resultirende der betreffenden Schwerkräfte hindurchgeht.

Um die Gewichte und Schwerpunkte der durch die Fugenschnitte $f_1 f_2 \ldots$, Fig. 51, gebildeten Theile des Gewölbes und ihrer Belastung wie $f_2 f_2' e_2' e_1' f_1' f_1$ zu ermitteln, kann man zwar nach den bekannten Regeln die Verwandlung dieser Querschnitte in Rechtecke von einer gemeinschaftlichen Basis b, (s. §. 15) vornehmen, doch wird man schneller und in den meisten Fällen mit hinreichender Genauigkeit zum Ziele kommen, wenn man durch die äußeren Fugenkanten $f_1' f_2' \ldots$ verticale Ebenen $e_1, e_2 \ldots$ gelegt denkt und für die gedachte Querschnittsfigur

Fig. 51.




$f_2 f_2' e_2' e_1' f_1' f_1$ den als Trapez anzusehenden Querschnitt $e_1 e_1' e_2' e_2$ einführt, dessen Schwerlinie in seiner Mittellinie $mm$ vorausgesetzt werden kann. Bei flachen Gewölben und hohen Belastungen wird der hierdurch begangene Fehler nur klein sein und insbesondere für die nahe dem Scheitel gelegenen Fugen gering ausfallen. Will man jedoch für stärker geneigte Fugen, wie z. B. $ff'$ eine größere Genauigkeit erzielen, so kann man durch eine Correctur, (Fugencorrectur), anstatt der durch $f'$ geführten Verticalebene $f'g'$ eine andere verticale Theilungsebene $ee'$ von solcher Lage einführen, daß die beiden schraffirten Figuren $enf$ und $nf'g'e'$ gleichen Flächeninhalt haben. Um $ee'$ zu ermitteln, kann man noch durch die Mitte $d$ von $f'g$ eine Parallele $de$ zu $g'f$ legen, um in $e$ den Punkt zu erhalten, durch welchen die corrigirte Theilebene $ee'$ geführt werden muß. Die Richtigkeit dieser Construction ergiebt sich leicht mit Rücksicht darauf, daß wegen der gezogenen Parallelen

$$g'g : gf = dg : ge = dg \sin\gamma : ge \sin\gamma$$

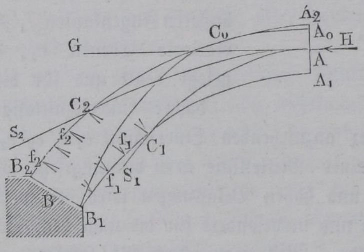
ist, wenn $\gamma$ den Winkel bei $g$ bedeutet; also ist auch

$$g'g \,.\, ge \sin\gamma = gf \sin\gamma \; \frac{1}{2} f'g,$$

d. h. das Dreieck $f'gf$ ist annähernd gleich dem Trapez $g'gee'$, folglich sind auch nach Abzug von $gf'ne$ die schraffirten Flächenstücke annähernd gleich groß.

§. 19. **Mögliche Stützlinien.** Von den unendlich vielen Stützlinien, welche sich nach dem Vorhergehenden für ein Gewölbe zeichnen lassen, indem man der Schubkraft $H$ alle möglichen Größen von 0 bis $\infty$ ertheilt denkt und ihren Angriff $A$ im Scheitel beliebig annimmt, werden nur gewisse Stützlinien mit der Stabilität und Widerstandsfähigkeit des Gewölbes verträglich sein. Zunächst ist es klar, daß eine Stützlinie, welche einem Gleichgewichtszustande des Gewölbes entsprechen soll, in ihrem ganzen Verlaufe zwischen dem Scheitel und den Kämpferfugen gänzlich im Innern der Gewölbedicke verbleiben muß, denn sobald die Stützlinie irgendwo die innere oder äußere Leibung durchschnitte, würde dadurch bedingt sein, daß eine Bewegung einzelner Gewölbtheile um die betreffende Schnittlinie stattfinden müßte. Würde z. B. für ein Gewölbe $AB$, Fig. 52, eine in $A$ beginnende Stützlinie $AS_1$ die innere Leibung bei $C_1$ schneiden, so müßte das zwischen $C_1$ und $A$ befindliche Gewölbstück nicht nur um die Kante $C_1$ eine Rechtsdrehung annehmen und herabfallen, sondern es würden auch alle zwischen $C_1$ und dem Widerlager $B$ befindlichen Gewölbtheile herabstürzen, indem die inneren Kanten $f_1$ der Fugen als Drehkanten anzusehen wären, diese Fugen sich daher außen öffneten. Wollte man, um dieses Herabstürzen zu verhindern, der Horizontalkraft $H$ einen größeren Werth geben, so würde nach dem Vorhergehenden dadurch die Stützlinie der Horizontallinie genähert, also gehoben und sie würde, wenn sie etwa nach $AB$ fiele, einem möglichen Gleichgewichtszustande des Gewölbes entsprechen können. Daß die gedachte Vergrößerung von $H$ und die damit verbundene Erhebung der Stützlinie gewisse Grenzen nicht überschreiten darf, lehrt gleichfalls die Zeichnung, denn wenn die Stützlinie in Folge vergrößerter Horizontalkraft $H$ etwa wie $AS_2$ in $C_2$ die äußere Leibung schnitte, so würde die Hori-

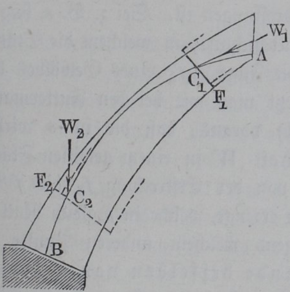
Fig. 52.



zontalkraft $H$ nicht nur das Gewölbstück $C_2 A$ um die Kante $C_2$ linksum drehen, sondern auch sämmtliche Wölbsteine zwischen $C_2$ und $B$ um ihre äußeren Fugenkanten $f_2$ überkanten, die Fugen würden sich in diesem Falle nach innen öffnen. In beiden Fällen würde also das Gewölbe zusammenstürzen, und mit Rücksicht auf die Stabilität des Gewölbes in Bezug auf Kippen oder Kanten gilt daher für die Stützlinie die Bedingung, daß dieselbe in ihrem ganzen Verlaufe innerhalb des Gewölbequerschnittes verbleiben muß. Höchstens darf daher mit Rücksicht auf diese Bedingung die Stützlinie durch einen der Punkte $A_1$ und $A_2$ der Scheitelfuge sowie $B_1$ und $B_2$ der Widerlagsfuge gehen, und wenn sie sonst wie z. B. $A_0 C_0 B_0$ einen Punkt mit der äußeren oder inneren Wölbfläche gemein haben sollte, so darf die letztere daselbst von der Stützlinie nur berührt, nicht geschnitten werden.

Da nun aber die Standfähigkeit eines Gewölbes, ähnlich wie die einer Futtermauer ebensowohl durch Gleiten wie durch Kippen gefährdet werden kann, so tritt zu der vorerwähnten ersten Bedingung noch eine zweite, wonach die Druckrichtung in keinem Punkte der Stützlinie von der Normallinie zur Fugenfläche dieses Punktes um einen größeren Winkel abweichen darf, als der Reibungswinkel des Gewölbmaterials angiebt. Würde z. B. in dem Punkte $C_1$ oder $C_2$ einer Stützlinie $AB$, Fig. 53, die Richtung der Stützkraft $W_1$ oder $W_2$ mit den Fugenflächen $F_1$ und $F_2$ Winkel bilden, welche kleiner als $90^0 - \varrho$ wären, unter $\varrho$ den gedachten Reibungswinkel verstanden, so würde das Gewölbstück $C_1 A$ auf der Fugenfläche $F_1$ nach außen und der Gewölbtheil $C_2 A$ auf der Fuge $F_2$ nach innen gleiten, wie in der Figur durch Punktirung angedeutet ist. Das Gewölbe müßte daher in diesem Falle durch Gleiten einstürzen, welchem sich dann auch ein Drehen beigesellen würde. Die Richtungen der Stützkräfte $W_1$ und $W_2$ fallen nach dem im Vorhergehenden Gesagten nicht genau mit der Tangente an die Stützlinie zusammen, sondern werden durch die von $C_1$ bezw. $C_2$ aus an die Drucklinie gezogenen Tangenten angegeben. Bei der geringen Abweichung, welche indessen bei den gewöhnlichen Gewölben zwischen der Stützlinie und Drucklinie besteht, wird man in den meisten Fällen die Stützkraft annähernd in der Richtung der Stützlinie wirkend annehmen

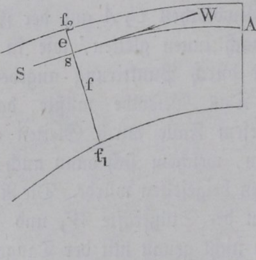
Fig. 53.



dürfen. Bei dem meist bedeutenden Reibungscoefficienten, welcher für die Gewölbsteine gilt, und wegen der mehr oder minder großen Adhärenz des Mörtels, welcher die einzelnen Steine verbindet, wird ein Gewölbebruch durch Gleiten in der Regel nicht zu besorgen sein. Auch kann man einem Gleiten, sollte dasselbe dennoch befürchtet werden, durch einen geeigneten Fugenschnitt wirksam begegnen, wie bereits gelegentlich des Gleitens der Futtermauern in §. 13 angeführt worden ist.

Wenn nun in einem Gewölbe sich eine Stützlinie angeben läßt, welche den vorgedachten beiden Bedingungen entspricht, so würde zwar für das Gewölbe den Erfordernissen der Stabilität Genüge gethan sein, aber offenbar nur dann, wenn die Widerstandsfähigkeit des Gewölbsteinmaterials eine unbeschränkte wäre. Denn wenn die Stützlinie durch irgend welchen Punkt der inneren oder äußeren Wölbfläche hindurchginge, so müßte an dieser Stelle der betreffende Stein den ganzen Stützdruck in seiner Kante, d. h. also in einer Fläche von unendlich geringer Breite aufnehmen, d. h. die specifische Pressung würde daselbst unendlich groß werden. Da nun auch die festesten Bausteine nur eine begrenzte Widerstandsfähigkeit besitzen, und, wie alle festen Körper unter Einfluß von Pressungen zusammengedrückt werden, so muß man annehmen, daß derjenige Punkt, in welchem der resultirende Druck $W$ eine Fuge trifft, nicht allein diesem Drucke widersteht, sondern daß auch die ihn benachbarten Fugenelemente gewissen Pressungen ausgesetzt sind. Diese Pressungen hat man dann in solcher Weise über die gedrückte Fläche vertheilt anzunehmen, daß der besagte Durchschnittspunkt der Stützlinie der Mittelpunkt aller parallelen Elementarpressungen ist. Sei z. B. $s$, Fig. 54, der Durchschnitt, in welchem die Stützlinie $AS$ die Fuge $f_1 f_2$ eines Gewölbes trifft, und setzt man wie bei den Futtermauern, (§. 14) voraus, daß die in $s$ wirkende Druckkraft $W$ in einem gewissen Flächenstücke von der Erstreckung $f_2$ bis $f$ Pressungen erzeuge, welche in $f$ gleich Null und in irgend welchem anderen Punkte dem Abstande desselben von $f$ proportional, also in der Kante $f_2$ am größten sind, so hat man $s$ als den Schwerpunkt eines Dreiecks von der Basis $ff_2$, also

Fig. 54.




$f_2 s = \frac{1}{3} ff_2$ anzunehmen. Diese Erstreckung $ff_2$ der gepreßten Fläche hängt, außer von dem Drucke $W$, von der Widerstandsfähigkeit oder Preßbarkeit des Gewölbematerials ab, und bestimmt sich, unter $p$ die äußerste noch zulässige Pressung in $f_2$ verstanden, bekanntlich durch die Beziehung:

$$W = \frac{1}{2} p \, . f f_2,$$

woraus

$$f f_2 = 2 \frac{W}{p}$$

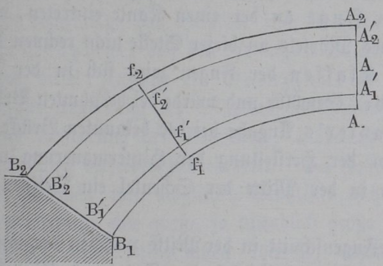
und

$$f_2 s = e = \frac{2}{3} \frac{W}{p}$$

folgt.

Wenn man daher, den vorstehenden Betrachtungen gemäß, für jede Fuge, wie $f_1 f_2$ eines Gewölbes, Fig. 55, aus der höchstens zulässigen Pressung $p$ des Materials und aus dem Stützdrucke $W$, der sich nach Obigem als Resultirende der Schubkraft $H$ und des Gewichtes $G_1$ vom Gewölbestück $f_1 f_2 A$ ergiebt, den Abstand

Fig. 55.




$$e = \frac{2}{3} \frac{W}{p}$$

bestimmt, und diesen Abstand von der inneren und äußeren Kante

$$e = f_1 f_1' = f_2 f_2'$$

anträgt, so erhält man dadurch zwei ideale Flächen bezw. Durchschnittslinien $A_1' f_1' B_1'$ und $A_2' f_2' B_2'$, welche im Innern des Gewölbes einen gewissen Raum, den sogenannten Kern begrenzen, innerhalb dessen die Stützlinie enthalten sein muß, wenn sowohl die Bedingung der Stabilität gegen Kanten erfüllt, als auch die gehörige Rücksicht auf die Festigkeit des Materials genommen werden soll. Es ist natürlich, daß hinsichtlich des Gleitens die früher angeführte Bedingung bestehen bleibt, wonach die Druckrichtung mit keiner Fuge einen Winkel, kleiner als $90^0 - \varrho$, bilden darf.

Was die Größe des hier mit $e$ bezeichneten Abstandes betrifft, in welchem die Begrenzung des Kerns von den Wölbflächen anzunehmen ist, so sind die Angaben hierüber ziemlich verschieden. Meistens nimmt man für $e$ einen gewissen Bruchtheil der nach der Fugenrichtung $f_1 f_2$ gemessenen Gewölbdicke $d$ an, was der Annahme entsprechend ist, daß diese Gewölbstärke in den einzelnen Fugen dem auf diese übertragenen Drucke $W$ proportional gemacht sei. Dieser Abstand $e$ wird von Vielen zu $\frac{1}{3} d$ angenommen, so daß also für den Kern ebenfalls die Breite $\frac{1}{3}\,d$ verbleibt, während von Anderen, z. B. von Scheffler angegeben wird, daß bei Kalk- und Sandsteinen der Kern sich den Leibungen viel mehr nähern könne, und daß nur bei weichem Materiale, wie Ziegelmauerwerk für den Abstand $e$ etwa $^1/_4\,d$ zu setzen sei. Nimmt man den Abstand $e = \frac{1}{3}\,d$, so würde nach dem im vorigen Capitel über Futtermauern Gesagten, in einer Fuge, in welcher die Stützlinie die Grenze des Kerns erreicht, die ganze Fugenfläche gepreßt werden, und zwar würde die Spannung an der inneren oder äußeren Kante gerade Null sein, je nachdem die Stützlinie die äußere oder die innere Schale des Kernes trifft. Bei einem geringeren Abstande, also für $e < \frac{1}{3}\,d$ dagegen wird ein Oeffnen der Fuge an der einen Kante eintreten, wenn man auf eine Zugspannung des Mörtels an dieser Stelle nicht rechnen darf. Ein solches Oeffnen oder Klaffen der Fugen zeigt sich in der That öfter nach dem Ausrüsten der Gewölbe und wurde bei berühmten Brücken beobachtet, wie z. B. nach Navier's Augabe bei der bekannten Brücke von Neuilly, deren Korbbögen vor der Herstellung der Hintermauerung innen im Scheitel und außen etwa in der Mitte der Schenkel ein Oeffnen der Fugen zeigten.

Wenn die Stützlinie einen Fugenschnitt in der Mitte zwischen der inneren und äußeren Wölbung trifft, so vertheilt sich der Stützdruck $W$ daselbst gleichförmig über die ganze Fugenfläche, wodurch natürlich die Maximalspannung in diesem Querschnitte den möglich kleinsten Werth annimmt. Man hat sich daher vielfach bemüht, Gewölbe so zu construiren, daß ihre Mittellinie eine Stützlinie ist, unter welcher Bedingung natürlich die Gewölbeform und Belastungslinie nicht mehr beliebig, sondern in bestimmter, unten näher zu besprechender Art von einander abhängig sind. Diese Construction, auf welche später noch specieller eingegangen werden soll, liefert nach dem vorstehend Bemerkten Gewölbe von verhältnißmäßig großer Stabilität, da unter Zugrundelegung der Mittellinie als Stützlinie die specifischen Pressungen den relativ kleinsten Werth annehmen. Daher pflegen denn auch die bedeutendsten Brückenconstructeure diese Methode vielfach anzuwenden. Es würde jedoch unberechtigt sein, wenn man daraus, daß die Mittellinie des Gewölbes eine von den vielen möglichen Stützlinien ist, die sich in dasselbe einzeichnen lassen, schließen wollte, daß diese Mittellinie nun auch die wirkliche Stützlinie sei, welche bei der gewöhnlichen Belastung des Gewölbes für die Druckübertragung maßgebend ist. Dies wird im allgemeinen nicht der Fall sein, wie sich aus dem folgenden Paragraphen ergeben wird, welcher sich mit der wirklichen Stützlinie beschäftigen soll, d. h. derjenigen, für deren Auftreten unter den vielen möglichen Stützlinien die größte Wahrscheinlichkeit besteht.

**Die wirkliche Stützlinie.** Aus den vorhergehenden Betrachtungen haben sich die Bedingungen ergeben, denen die Stützlinie eines Gewölbes genügen muß, welche dem Zustande des Gleichgewichtes entspricht. Wenn eine diese Bedingungen erfüllende Stützlinie sich nicht zeichnen läßt, so ist es sicher, daß das betreffende Gewölbe nicht stabil sein kann und einstürzen muß. Wenn sich dagegen eine Stützlinie der verlangten Art angeben läßt, so liegt kein Grund vor, ein Einstürzen des Gewölbes zu befürchten, denn zum Gleichgewichte ist es nur erforderlich, daß der dieser Stützlinie zukommende Horizontalschub $H$ von den Widerlagern ausgeübt werde, was immer möglich ist, wenn diese Widerlager selbst hinreichend fest sind, worüber in einem folgenden Paragraphen eine nähere Untersuchung angestellt werden soll. Es würde demzufolge das Gewölbe auch noch stabil sein, wenn nur eine einzige Stützlinie von den verlangten Eigenschaften sich angeben ließe, doch würde dieser Zustand ein Grenzzustand sein, welchen aufzuheben die geringste Aenderung der Stützlinie im Stande wäre, wie sie etwa durch zufällige Aenderung der Belastung, insbesondere durch eine unsymmetrische Vertheilung derselben sich einstellt. Bei stabilen Gewölben wird dieser Fall einer einzigen nur möglichen Stützlinie nicht vorkommen, man wird bei ihnen vielmehr eine große, ja unendlich große Anzahl von Stützlinien innerhalb des Kerns einzeichnen können, welche sich nach §. 18 entweder durch die Höhenlage des Scheitelangriffes $A$, oder durch die Größe des Horizontalschubes $H$, oder nach beiden Hinsichten von einander unterscheiden. Es ist nach dem Vorstehenden klar, daß jede dieser Stützlinien dem Gleichgewichtszustande entspricht, denn für jede ist die zugehörige Horizontalkraft $H$ im Stande, das Kanten oder Gleiten unbeschadet der Festigkeit des Materials zu verhüten. Die Frage, welche von diesen unendlich vielen möglichen Stützlinien in Wirklichkeit dem belasteten Gewölbe zukommt, ist demnach eine unbestimmte, welche mit Sicherheit zu bestimmen, man nur würde hoffen können, wenn die Elasticitätsverhältnisse der Gewölbe gehörig berücksichtigt werden könnten, in ähnlicher Art etwa, wie man über die Auflagerdrucke und Anspannungen eines auf drei oder mehr Stützen ruhenden continuirlichen Balkens nur durch Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse Aufschluß erlangen kann. Einer derartigen auf die Elasticitätslehre begründeten Lösung der Frage ist man zwar in der neuesten Zeit durch die vortrefflichen Arbeiten von Winkler, Steiner *), Culmann, Föppel **) §. 20.

---

*) Förster'sche Bauztg. 1874 und 1878.

**) Theorie der Gewölbe von A. Föppel. Leipzig 1880.

und Anderen näher getreten, doch muß man zur Zeit auf eine Anwendung dieser Theorie wegen der ungenügenden Kenntniß der Preßbarkeit des Materials und wegen der Schwierigkeiten der Rechnung verzichten, und man hat sich damit zu begnügen, gewisse Grenzen festzusetzen, innerhalb deren die wirkliche Stützlinie jedenfalls nur liegen kann, und höchstens zu ermitteln, welche Stützlinie in bestimmtem Falle die wahrscheinlichste sein wird.

Zunächst ist es ersichtlich, daß unter den vielen, durch die Größe des Horizontalschubes $H$ unterschiedenen Stützlinien, welche sich im Innern eines stabilen Gewölbes angeben lassen, eine vorhanden ist, welcher der kleinste Werth von $H$ zukommt, während einer anderen das Maximum von $H$ entspricht. Diese beiden Stützlinien vom kleinsten und bezw. größten Schube sind, wie sich durch einfache Betrachtungen ergiebt, dadurch charakterisirt, daß sie mit jeder der beiden Wölbflächen je einen Punkt gemein haben müssen, wobei es gleichgültig ist, ob dieser gemeinsame Punkt in der Scheitel- oder Kämpferfuge, also in $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ liegt, oder ein Berührungspunkt zwischen dem Scheitel $A$ und dem Widerlager $B$ ist. In Fig. 56 und 57 sind zwei solche Stützlinien durch $A\, C_1\, C_2\, B$ dargestellt, und man erkennt leicht, daß die Stützlinie in Fig. 56, bei welcher in der Richtung vom Scheitel $A$ aus nach dem Widerlager $B$ hin zuerst die äußere und dann die innere Wölbung getroffen wird, einem Minimum der Schubkraft entspricht, während die Stützlinie, Fig. 57, dem Maximum von $H$ zukommt, sobald vom Scheitel aus zuerst die innere, und dann die äußere Wölbung von der Stützlinie berührt wird. Um dies zu beweisen, kann man zunächst bemerken, daß in Fig. 56 überhaupt keine ganz in das Gewölbe fallende Stützlinie möglich sein kann, deren Scheitelangriff höher als $A$, also zwischen $A$ und $A_2$ gelegen ist. Denn würde hierfür die Horizontalkraft ebenso groß, oder größer sein als diejenige für $A\, C_1\, C_2\, B$, so müßte nach dem Früheren diese Stützlinie irgendwo

Fig. 56.

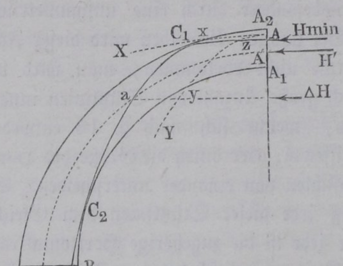
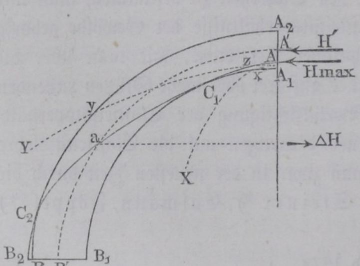



Fig. 57.



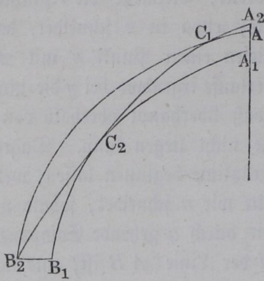
zwischen $A_2$ und $C_1$ etwa bei $x$ durch die äußere Wölbung heraustreten, wie die punktirte Linie $X$ zeigt. Man könnte zwar durch einen geringeren Werth von $H$ in diesem Falle die Stützlinie soweit senken, daß sie nicht aus der äußeren Wölbfläche $A_1 C_1$ heraustritt, vielmehr die Stützlinie $AB$ zwischen $A$ und $C_1$ in einem Punkte, etwa in $z$ schneidet, dann würde aber diese Linie $zY$, da sie nur diesen einen Punkt $z$ mit $AB$ gemeinsam haben kann, auf ihrem weiteren Verlaufe irgendwo bei $y$ die innere Wölbfläche durchschneiden. Daraus folgt, daß überhaupt oberhalb von $A$ der Angriffspunkt einer möglichen Stützfläche nicht liegen kann. Dagegen kann man unterhalb $A$, etwa in $A'$ eine Stützlinie beginnen lassen, welche die Stützlinie $AB$ in einem beliebigen Punkte wie $a$ schneidet, sobald man den Horizontaldruck $H'$ dieser Linie um eine durch $a$ gehende Componente $\varDelta H$ größer annimmt, als der Schub $H$ der Linie $AB$ ist, und diese Linie $A'aB'$ wird, vorausgesetzt, daß die Vergrößerung $\varDelta H$ der Schubkraft gewisse Grenzen nicht überschreitet, auch zwischen $a$ und dem Widerlager $B$ ganz innerhalb des Gewölbes verbleiben können. Hieraus geht hervor, daß sich außer der Stützlinie $AB$, deren Schub $H$ ist, nur solche andere Stützlinien in dem Gewölbe angeben lassen, deren Horizontalschub $H'$ größer ist als $H$, d. h. die Linie $AB$ in Fig. 56 entspricht dem kleinsten Schube $H_{min}$.

In ähnlicher Weise findet sich, daß in Fig. 57 keine Stützlinie möglich ist, deren Angriffspunkt zwischen $A$ und $A_1$ gelegen ist, da dieselbe entweder wie die Linie $X$ die innere Wölbfläche bei $x$ durchsetzt, wenn ihre Schubkraft ebenso groß oder kleiner als die von $AB$ angenommen wird, oder wie die Linie $Y$ durch die äußere Leibung bei $y$ hindurchgeht, wenn bei einer größeren Schubkraft ein Durchschneiden der Stützlinie $AB$ in $z$ stattfindet. Daher sind hier nur Stützlinien wie $A'B'$ möglich von denen jede einer Schubkraft $H'$ angehört, die aus $H$ in $A$ und der entgegengesetzt gerichteten Componente $\varDelta H$ in $a$ sich zusammensetzt, also kleiner ist als $H$.

Die Linie $AB$ in Fig. 57 ist daher die Stützlinie des größten Schubes $H_{max}$. Wie schon erwähnt, kann in beiden Fällen der Punkt $C_1$ auch mit $A_2$ oder $A_1$, und der Punkt $C_2$ mit $B_1$ oder $B_2$ zusammentreffen, in welchem letzteren Falle die Stützlinie auch die Wölbflächen in $B_1$ oder $B_2$ schneiden kann, anstatt sie zu berühren.

Aus dem Vorhergehenden folgt sogleich, daß, wenn in einem Gewölbe eine Stützlinie sich zeichnen läßt, welche wie $A\,C_1\,C_2\,B_2$, Fig. 58, mit einer der Wölbflächen etwa der äußeren $A_2 B_2$ zwei Punkte $C_1$ und $B_2$ gemein hat, und die andere Leibung in einem zwischenliegenden Punkte $C_2$ berührt, also das Gewölbe zweimal durchkreuzt, diese Linie, da sie zugleich dem größten wie dem kleinsten Schube entspricht, offenbar die einzige überhaupt mögliche Stützlinie für das Gewölbe ist. Das Gewölbe würde in diesem Falle im Grenzzustande sich befinden, und man hätte, ganz abgesehen von der Widerstandsfähigkeit des Materials, die Gewölbstärke entsprechend zu vergrößern, wenn man eine gewisse Stabilität erlangen wollte.

Fig. 58.




Wie nun bereits oben bemerkt worden, ist von vornherein nicht anzugeben, welche von den unendlich vielen Stützlinien, die zwischen den beiden Grenzlinien des kleinsten und größten Druckes angegeben werden können, die wirkliche ist. Um diese Unbestimmtheit zu beseitigen, hat man wohl verschiedene Hypothesen gemacht, und es ist in dieser Beziehung von Moseley *) ein Gesetz ausgesprochen, welches unter dem Namen des Princips vom kleinsten Widerstande bekannt geworden ist. Nach diesem Principe, dessen Beweis an der unten angezeigten Stelle sowie in dem schon oben erwähnten Werke von Scheffler **) nachgesehen werden kann, hätte man bei einem Gewölbe, wenn dasselbe aus einem vollkommen starren und nicht zusammendrückbaren Material bestehen würde, als wirkliche Stützlinie diejenige vom kleinsten Horizontalschube anzusehen.

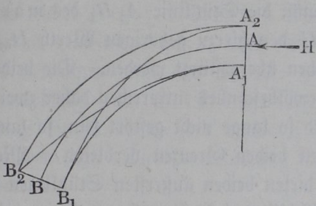
Anmerkung. Das erwähnte Princip des kleinsten Widerstandes, wie es von Scheffler definirt wird, läßt sich in der Hauptsache etwa folgendermaßen aussprechen. Denkt man sich ein System fester Körper, die nur durch Berührung ihrer Oberflächen mit einander in Verbindung stehen, unter Einfluß äußerer Kräfte sich gegen einzelne feste, widerstehende Punkte stützend, und zerlegt man die Resultirende $Q$ aller äußeren Kräfte in lauter parallele Componenten $q$, die durch jene widerstehenden Punkte gehen, so müssen, wenn jene Punkte nicht fähig sind, in der Richtung dieser Componenten zu widerstehen, noch gewisse zu $Q$ senkrechte Seitenkräfte $p$ in jenen Punkten rege werden, welche unter sich für das ganze System im Gleichgewichte sind, und von denen jede einzelne zusammen mit der in diesem Punkte wirkenden Componente $q$ eine Mittelkraft $w$ von der Art giebt, daß sie von dem festen Stützpunkte aufgenommen werden kann. Von den unendlich vielen möglichen Systemen der Seitenkräfte $p$ hat nun dem gedachten Principe gemäß nur dasjenige in der Wirklichkeit Anspruch auf Existenz, bei welchem sämmtliche auf der Richtung der resultirenden Kraft $Q$ senkrechte Seitenkräfte $p$ gleichzeitig den möglich kleinsten Werth annehmen. In dem vorliegenden Falle ist also unter der Mittelkraft der äußeren Kräfte das Gewicht $Q$ einer Gewölbhälfte sammt ihrer Belastung zu verstehen, während die gedachten Seitenkräfte $p$ durch die in der Scheitelfuge und am Kämpfer auftretende horizontale Schubkraft $H$ dargestellt sind, welche dem angeführten Gesetze zufolge daher $H_{min}$ sein soll.

*) S. Moseley, Philosophical Magazine, October 1833.

**) Scheffler, Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. eis. Brücken 1857.

Man hätte sich hiernach den Zustand der Gewölbe etwa in folgender Weise zu verdeutlichen. Es sei $A_1 A_2 B_1 B_2$, Fig. 59, die Hälfte eines zunächst aus absolut unpreßbarem Materiale bestehenden Gewölbes, welches noch durch das beim Baue erforderliche Lehrgerüst unterstützt ist, so daß angenommen werden muß, daß im Scheitel $A_1 A_2$ überhaupt noch keine Schubkraft zwischen den beiden Gewölbhälften vorhanden ist. Denkt man sich nun das unterstützende Lehrgerüst weggenommen, so würde die zunächst noch nicht durch eine Horizontalkraft gestützte Gewölbhälfte ihrem Bestreben, zu fallen, Genüge leisten, wenn nicht gleichzeitig mit diesem Bestreben eine gewisse Horizontalkraft in der Scheitelfuge $A_1 A_2$ von der rechtsseitigen Gewölbhälfte ausgeübt würde, welche einen hinreichend großen Werth $H$ hat, um das Gewölbe am Einstürzen zu hindern. Hierbei wird man sich vorstellen müssen, daß diese Horizontalkraft nicht momentan und gewissermaßen sprungweise von dem Werthe 0 auf $H$ sich erhebt, sondern es wird eine gewisse, wenn auch unmessbar kleine Zeit vergehen, während welcher die Schubkraft in schneller Aufeinanderfolge alle Werthe von 0 bis zu dem erforderlichen Werthe $H$ durchläuft. Wenn dabei die Schubkraft bei dieser Zunahme den Werth $H_{min}$ erreicht hat, welcher gerade genügt, um das Gleichgewicht herzustellen, so fällt nunmehr gerade wegen dieses alsdann bestehenden Gleichgewichts jeder Grund fort, weshalb eine noch weiter gehende Vergrößerung von $H$ über $H_{min}$ hinaus stattfinden sollte, und man muß daher annehmen, daß das Gewölbe unter Einfluß seiner Belastung in demjenigen Zustande sich befindet, welchem die Stützlinie des kleinsten Horizontalschubes zukommt.

Fig. 59.




Die hier auftretende Schubkraft $H$ ist eine passive oder, wie sie auch wohl genannt wird, latente Kraft, welche stets nur genau in dem Betrage ersteht, in welchem sie gefordert wird. Anders gestaltet sich die Sachlage, wenn $H$ eine von außen auf das Gewölbe ausgeübte active Kraft ist, wie sie etwa durch den Schub eines benachbarten Gewölbes ausgeübt, und durch die rechtsseitige Gewölbhälfte auf die Scheitelfuge $A_1 A_2$ übertragen wird. Wenn in diesem Falle die Kraft $H$ den Betrag $H_{min}$ überschreitet, so kann das Gleichgewicht unter Beibehaltung der Stützlinie $A_2 B_1$ nicht mehr bestehen, es würde alsdann, wenn die vergrößerte Schubkraft wirklich in $A_2$ angriffe, das Gewölbe nach oben übergekippt werden. Da aber das Gewölbe im Scheitel und im Widerlager nicht in den Punkten $A_2 B_1$, sondern in den Flächen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ gestützt wird, so muß man annehmen, daß bei der gedachten Vergrößerung der Schubkraft $H$ die Angriffspunkte von $A_2$ und $B_1$ aus in das Innere des Gewölbes hineinrücken können, so daß die Stützlinie wie etwa $AB$ in dem Maße flacher wird, wie die Vergrößerung von $H$ es erfordert. Als letzter Grenzzustand, für welchen gerade noch das Gleichgewicht bestehen kann, gilt demgemäß die Stützlinie $A_1B_2$ des maximalen Schubes, und erst, wenn $H$ den hierzu gehörigen Werth $H_{max}$ überschreitet, wird das Gewölbe nach oben übergestürzt werden. Die beiden Stützlinien des kleinsten und größten Gewölbeschubes entsprechen daher zweien Grenzzuständen, und die Stabilität wird so lange nicht gestört sein, so lange die zugehörige Stützlinie zwischen diesen beiden Grenzen verbleibt. Man könnte daher die Entfernung zwischen diesen beiden äußersten Stützlinien in gewissem Sinne als ein Maß für die Stabilität eines Gewölbes ansehen, insofern die mögliche Veränderlichkeit der Stützlinie mit jener Entfernung zwischen $A_1B_2$ und $A_2B_1$ wächst und zu Null wird, sobald, wie in Fig. 58, die Stützlinie des kleinsten gleichzeitig diejenige des größten Gewölbeschubes, also die einzige überhaupt mögliche Stützlinie ist.

Da nun in Wirklichkeit das Material der Gewölbe niemals wie im Vorstehenden zunächst vorausgesetzt wurde, vollkommen starr und unpreßbar ist, so kann die wahre Stützlinie auch niemals durch die Kanten der Steine gehen, sondern muß sich wegen deren Zusammendrückung in gewissem Grade mehr in das Innere des Gewölbes hineinziehen. Scheffler nimmt an, daß an den Stellen, wo die Stützlinie des kleinsten Schubes die äußere oder innere Gewölbfläche trifft, auch die stärkste Zusammendrückung der Wölbsteine in der Nähe der betreffenden äußeren und inneren Kante liegen wird, d. h. daß die wahre Stützlinie, welche bei unpreßbarem Material mit der Stützlinie vom kleinsten Schub wirklich zusammentreffen würde, bei preßbarem Material sich dieser Linie möglichst zu nähern strebt. Ferner wird von demselben angeführt, daß Beobachtungen an ausgeführten Bauten aus Granit, hartem Kalk- und Sandstein zeigen, daß die Stützlinie dabei fast genau die eigentliche Kante des Fugenschnittes erreiche. Nach dieser Voraussetzung darf man keine gleichmäßige Vertheilung des Druckes über die ganze Fugenfläche bei allen Steinen annehmen, da dies offenbar nur bei einer solchen Fuge der Fall sein kann, welche von der Stützlinie in ihrer Mitte getroffen wird. Letzteres wird aber selbst bei einem Gewölbe, für welches die Mittellinie als eine mögliche Stützlinie construirt ist (s. §. 19), nicht in allen Fugen der Fall sein, wenn die wirkliche Stützlinie sich derjenigen vom kleinsten Schube möglichst zu nähern strebt. In diesem Falle muß selbstverständlich die specifische Pressung des Materials in den Fugen um so größer ausfallen, je weiter sich in ihnen die wahre Stützlinie von der Mittellinie des Gewölbes entfernt.

Unter Zugrundelegung dieser Voraussetzung, welche vielfach gemacht wird, hat man die Prüfung eines Gewölbes in der Weise vorzunehmen, daß man die Begrenzungen des Kerns (s. §. 19) einzeichnet, und diejenige Stützlinie aufsucht, welche ganz innerhalb dieses Kerns verbleibend, dem kleinsten Horizontalschube entspricht, d. h. einen Punkt mit der äußeren und einen tiefer liegenden Punkt mit der inneren Begrenzung dieses Kerns gemeinsam hat. Diese Stützlinie hat man dann als die wirkliche zu betrachten und ein Gewölbe hinsichtlich seiner Stabilität und Widerstandsfähigkeit nicht als genügend stark anzusehen, wenn sich eine solche Stützlinie von der verlangten Eigenschaft innerhalb des Kerns nicht angeben läßt. Diese Untersuchung soll im nächsten Paragraphen durchgeführt werden.

Ueber die Beschaffenheit der in einem Gewölbe auftretenden wirklichen Stützlinie sind auch andere Behauptungen aufgestellt worden, so u. A. von Culmann*). Derselbe spricht den Satz aus: „Von allen Drucklinien, welche eingezeichnet werden können, ist diejenige die wirkliche Drucklinie eines Gewölbes, welche sich der Axe desselben in der Art am meisten nähert, daß der Druck in den am stärksten comprimirten Fugenkanten ein Minimum ist.

Es kann bemerkt werden, daß die so charakterisirte Stützlinie nicht sowohl dem Minimum des Horizontalschubes $H$, sondern der relativ kleinsten Pressung, also der günstigsten Anstrengung des Materials entspricht. Demgemäß würde z. B. für ein Gewölbe, das so construirt ist, daß seine Axe oder Mittellinie eine mögliche Stützlinie ist, diese Mittellinie auch die wirkliche Stützlinie sein, denn die Bedingung der kleinsten specifischen Pressung eines Querschnitts wird bei einer gleichmäßigen Druckvertheilung d. h. also dann erfüllt sein, wenn die resultirende Druckkraft durch die Mitte des Querschnitts geht. Culmann giebt übrigens an, daß, da die Aufsuchung der gedachten Stützlinie von der relativ kleinsten Pressung zu umständlich sei, man gewöhnlich das oben angedeutete Verfahren anwenden werde, zu untersuchen, ob sich innerhalb des Kerns eine Stützlinie einzeichnen läßt.

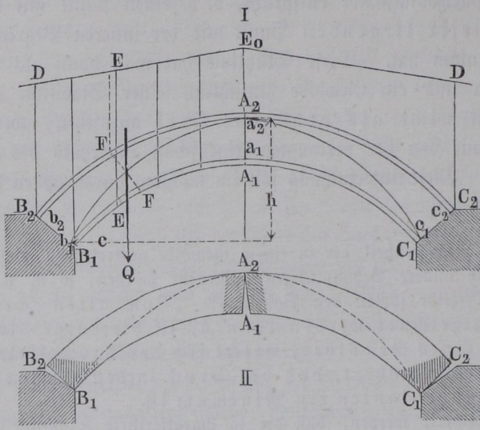
Ist dies der Fall, so ist damit auch der Beweis geliefert, daß es außer dieser Stützlinie noch eine günstigere geben müsse, nämlich die als wirkliche angegebene, welche sich der Mittellinie des Gewölbes noch mehr nähern wird.

**Prüfung der Gewölbe.** Um ein Gewölbe hinsichtlich seiner Stabilität auf graphischem Wege zu prüfen, zeichnet man zu dem Gewölbe zunächst die Belastungslinie, indem man, wie oben angegeben, sämmtliche darauf ruhenden Lasten durch Mauerkörper von dem specifischen Gewichte des Gewölbmaterials ersetzt und gleichmäßig über die ganze Gewölbbreite in der Axenrichtung vertheilt denkt. Diese gleichmäßige Vertheilung nach der Axenrichtung gilt auch insbesondere bei den Brücken für die Brustmauern, welche die Brückenbahn beiderseits begrenzen. Zunächst soll im Folgenden, wie bisher immer eine symmetrische Belastung des Gewölbes vorausgesetzt §. 21.

*) S. dessen „Graphische Statik“. 1. Auflage, 1866.

werden, indem der Einfluß einseitiger und isolirter Lasten später besonders besprochen werden soll. Wenn man in dieser Weise für ein Gewölbe, Fig. 60

Fig. 60.




die Belastungslinie $D E_0 D$ gezeichnet hat, so kann man dasselbe durch eine Anzahl Ebenen, am einfachsten von vertikaler Stellung wie $EE$, in eine Reihe von Streifen von beliebiger Breite theilen, und die Gewichte $Q_1, Q_2 \ldots$ dieser Streifen von 1 m Länge in bekannter Weise, unter Zugrundelegung einer gewissen Basis b für den Kräftemaßstab, durch Strecken darstellen, welche man in dem Kräfteplane in verticaler Richtung aneinandersetzt. Gleichzeitig kann man die den Theilungsebenen $E$ zugehörigen corrigirten Fugen $F$ in der in §. 18 angegebenen Weise ermitteln, und in der daselbst angeführten Art mit Hülfe des Kräftepolygons irgend eine Stützlinie zeichnen, welche durch einen beliebigen Punkt der Scheitelfuge $A_1 A_2$ und durch einen ebenfalls beliebig angenommenen Punkt der Widerlager $B_1 B_2$ bezw. $C_1 C_2$ geht. Jede solche Stützlinie ist in dem vorliegenden Falle symmetrisch gegen die Scheitelfuge, in welcher sie eine horizontale Tangente haben muß. Zeichnet man nun noch in der dem Materiale entsprechenden Entfernung (s. §. 19) von den Wölbflächen die Begrenzungen $b_1 a_1 c_1$ und $b_2 a_2 c_2$ des Kerns ein, so kommt es darauf an, innerhalb dieses Kerns die mehrbesagte Stützlinie der kleinsten Schubkraft zu entwerfen.

Zu diesem Ziele gelangt man am einfachsten durch die Zeichnung einer **Probestützlinie**, welche man unter willkührlicher Annahme eines Punktes in $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ entwirft, und welche man passend corrigirt, falls sie, wie dies meistens der Fall sein wird, den an die wirkliche Stützlinie zu stellenden Anforderungen noch nicht genügt. Dabei wird es sich fast immer empfehlen, den höchsten Punkt $a_2$ im Scheitel und den tiefsten Punkt $b_1$ im Widerlager als die willkührlich anzunehmenden Punkte zu wählen; denn da für diese Punkte der Verticalabstand $h$ ein Maximum ist, so ist zu erwarten, daß die ihnen zugehörige Stützlinie derjenigen vom kleinsten Schube nahe liegt, indem der Schub irgend welcher Stützlinie sich durch $H = Q\,\frac{c}{h}$ ausdrückt, also um so kleiner ausfällt, je größer der besagte Verticalabstand $h$ zwischen Scheitel= und Kämpferangriff ausfällt.

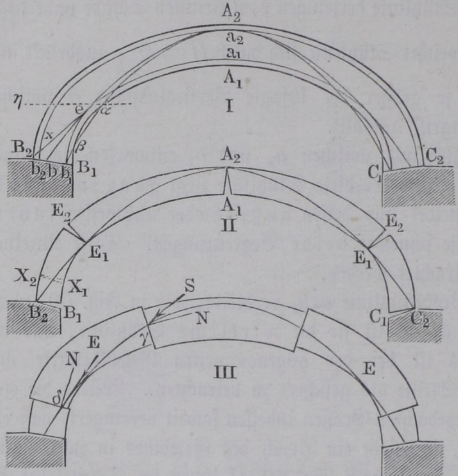
Hat man diese Probestützlinie zwischen $a_2$ und $b_1$ entworfen, so können folgende Fälle eintreten. Entweder diese Stützlinie liegt ganz innerhalb des Kerns, oder sie schneidet nur dessen äußere oder nur dessen innere Begrenzung oder aber, sie schneidet beide Begrenzungen. Diese einzelnen Fälle sollen gesondert betrachtet werden.

Gesetzt zunächst, die Probestützlinie $a_2 b_1$ verbleibt, wie in Fig. 60, gänzlich innerhalb des Kerns, so ist sie die wirkliche Stützlinie, und die Stabilität des Gewölbes ist bei der angenommenen Gewölbestärke und Widerstandsfähigkeit der Steine als gesichert zu betrachten. Würde die eine oder die andere dieser letztgedachten Größen indessen soweit verringert, daß ein Einsturz erfolgen müßte, so würde ein Bruch des Gewölbes in zwei Theile eintreten, derart, daß die Fugen nach Fig. 60, II innen im Scheitel bei $A_1$ und außen in den Kämpfern bei $B_2, C_2$ sich öffnen würden. Diese gefährlichsten Stellen bei $A$, $B$ und $C$ nennt man daher bei diesem Gewölbe die Bruchfugen, welchen Namen man auch bei einem stabilen Gewölbe beibehält, welches dem Bruche nicht ausgesetzt ist. Bei der Zeichnung wird man finden, daß der hier angegebene Fall im Allgemeinen sich einstellt bei kreisförmigen Tonnengewölben, deren Mittelpunktswinkel zu jeder Seite des Scheitels den Betrag von $60^0$ nicht übersteigt. Ein Gleiten der Wölbsteine auf einander wird in diesem Falle in der Regel nicht zu befürchten sein, da die Richtung des Fugendruckes von der Fugennormalen nirgends um den Reibungswinkel abweichen wird. Die größte specifische Pressung der Steine findet selbstredend in den Bruchfugen statt.

Wenn dagegen, wie es bei Halbkreisgewölben, gedrückt elliptischen oder Korbbögen meistens der Fall sein wird, die durch $a_2$ und $b_1$ gehende Stützlinie, Fig. 61, die innere Grenze $a_1 b_1$ des Kerns oder gar die innere Wölbfläche $A_1 B_1$ bei $\alpha\beta$ durchsetzt, so erhält man genau genug die wirkliche Stützlinie in derjenigen, welche durch denselben Punkt $a_2$ im Scheitel und außerdem durch denjenigen Punkt $e$ der inneren Kernbegrenzung geht, welcher von der Probestützlinie zwischen $\alpha$ und $\beta$ die größte Entfernung hat. Zeichnete man diese Stützlinie, und sollte sich herausstellen, daß dieselbe doch noch an einer Stelle den Kern überschreitet, so würde eine Widerholung dieser Construction in jedem Falle mit genügender Genauigkeit die wirkliche Stütz=

linie $aeb$ liefern. Hierbei ist nur zu beachten, daß diese letztere nicht die äußere Begrenzung des Kerns etwa bei $x$ schneide, denn wenn dies der Fall sein würde, so wäre in dem Gewölbe überhaupt keine Stützlinie möglich, und man müßte, um den Einsturz zu verhüten, die Schenkel bei $B_2$ und $C_2$ durch eine daselbst aufgeführte Hintermauerung verstärken, so daß die Stützlinie auch dort innerhalb des Kerns verbleibt. Wenn man diese Hintermauerung bis etwa zu der Horizontalen $\alpha\eta$ durch $\alpha$ aufführt, so erkennt man leicht, daß der vorliegende Fall auf den vorhergehenden durch Fig. 60 dargestellten zurückgeführt ist.

Fig. 61.

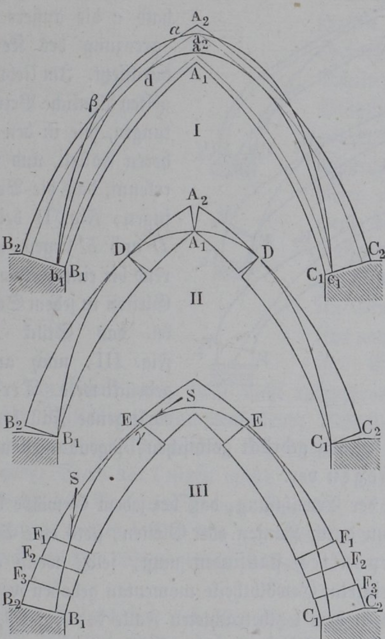



Die Bruchfugen, welche sich bei einer ungenügenden Stärke des Gewölbes, Fig. 61, einstellen, liegen im Scheitel $A_1 A_2$ und in den Schenkeln bei $E_1 E_2$, Fig. II. Während die Scheitelfuge bei $A_1$ sich innen öffnet, erfolgt bei $E_2$ ein Oeffnen außerhalb für alle die Fugen, welche in dem zwischen $\alpha$ und $\beta$ erhaltenen Stücke von der Stützlinie nicht getroffen werden. Die Füße der Schenkel zwischen $\beta$ und den Widerlagern bleiben dabei stehen, sobald die Stützlinie bei $b$ innerhalb des Kerns endigt, und aus dem Gewölbe fallen die beiden im Scheitel sich trennenden mittleren Theile $AE$ heraus. Würde dagegen die Stützlinie noch oberhalb des Kämpfers $B$, etwa bei $x$, auch die äußere Begrenzung durchschneiden, so würden an dieser Stelle die Fugen sich innerlich bei $X_1$ öffnen und das Gewölbe dementsprechend in mehrere Theile zerfallen.

Wenn die Richtung des Stützdruckes $S$ die Fugen des Gewölbes etwa bei $\gamma$ und $\delta$, Fig. III, unter Neigungen gegen die Normalen $N$ treffen würde, die größer sind, als der Reibungswinkel $\varrho$ der Wölbsteine aufeinander, so würde, wenn man dies nicht durch geeignete Fugenrichtung verhinderte, eine Störung des Gleichgewichtes durch Gleiten eintreten, wobei das Mittelstück abwärts rutschen, und die beiden Seitenstücke $E$ seitwärts hinausdrängen würde.

Setzt man ferner voraus, die durch $a_2\,b_1$ Fig. 62, I, gehende Stützlinie durchschneide die äußere Begrenzung des Kerns oder gar des Gewölbes bei $\alpha$ und $\beta$, so zeichnet man die wirkliche Stützlinie $a\,d\,b_1$ durch $b_1$ und den Punkt $d$ der Kernbegrenzung, welcher von der Probestützlinie $a_2\,\alpha\,\beta\,b_1$ zwischen $\alpha$ und $\beta$ die größte Entfernung hat, und es gelten für diesen Fall, welcher besonders bei gothischen Bögen mit geneigten Widerlagsfugen vorkommt, ähnliche Betrachtungen, wie für den vorhergehenden. Die Bruchfugen treten hier, außer im Scheitel $A$ und in den Kämpfern $B$ und $C$, woselbst ein Oeffnen nach außen stattfindet, noch bei $D$ zu beiden Seiten des Scheitels auf, so daß der Bogen in der aus Fig. II ersichtlichen Weise in mehrere Stücke zerfällt. Dabei wird das Oeffnen bei $D$ entweder nur auf eine Fuge oder auf mehrere neben einander liegende sich erstrecken, je nachdem die Stützlinie die betreffende Wölbfläche berührt, oder durchschneidet.

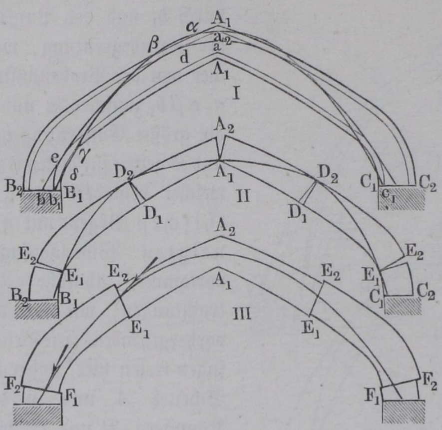
Fig. 62.




Was den Zustand des Gleitens anbetrifft, so wird, wenn die Druckrichtung $S$ bei $\gamma$ um mehr als den Reibungswinkel gegen die Fugennormale geneigt ist, jeder Schenkel bei $E$ einwärts gleiten, während in den Fußstücken $BF$ und $CF$ ein Gleiten der Steine in allen den Fugen stattfindet, für welche die besagte Abweichung der Stützkraft $S$ von der Normalen größer als der Reibungswinkel ist.

Wenn endlich der Fall, Fig. 63, I, vorliegt, daß die Probestützlinie $a_2 b_1$ beide Begrenzungen des Kerns und zwar zuerst die äußere bei $\alpha\beta$ und dann die innere bei $\gamma\delta$ durchschneidet, so zeichnet man diejenige Stützlinie $adeb$ ein, welche durch die beiden Punkte $d$ und $e$ der Kernbegrenzungen geht, die von der Stützlinie $a_2 b_1$ am entferntesten sind, wozu das in §. 18 angegebene Verfahren am bequemsten dienen kann. Diese Stützlinie wird die wirkliche sein, sobald sie weder oberhalb $d$ die innere, noch unterhalb $e$ die äußere Begrenzung des Kerns durchsetzt. Im Uebrigen gelten ähnliche Betrachtungen, wie in den früheren Fällen, und man erkennt, daß die Bruchfugen, Fig. II bei $A$, $D$ und $E$ liegen, während bei einem etwaigen Gleiten in jedem Schenkel das Stück $EF$ Fig. III, nach außen gedrückt wird. Der hier vorliegende Fall kommt in der Wirklichkeit besonders bei den gedrückt gothischen, sogenannten normännischen oder Tudorbögen vor.

Fig. 63.



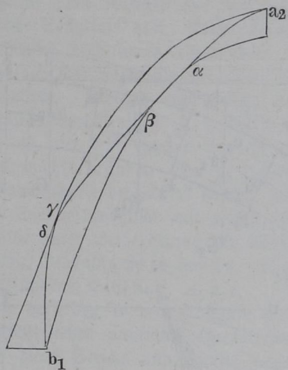

Es bedarf schließlich kaum der Erwähnung, daß bei jedem Gewölbe beim Einsturze, geschehe derselbe nun durch Kanten oder Gleiten, stets eine Senkung des Gesammtschwerpunktes stattfinden muß, selbst wenn auch im Beginne des Einstürzens einzelne Gewölbtheile momentan gehoben werden sollten, wie dies beispielsweise in dem letztbetrachteten Falle der Fig. 63, III mit den Stücken $EF$ in der That geschieht.

Mit den hier vorgeführten Beispielen sind sämmtliche in der Wirklichkeit vorkommende Fälle erledigt, denn wenn z. B. die gedachte Probestützlinie $a_2 b_1$, Fig. 64, zuerst die innere Begrenzung des Kerns in $\alpha$ und $\beta$ und dann die äußere in $\gamma$ und $\delta$ durchschneidet, so ist überhaupt für das betreffende Gewölbe keine Stützlinie und daher keine Stabilität möglich, wie aus den in §. 18 angegebenen Betrachtungen über die allgemeinen Eigenschaften der Stützlinie sich unschwer ergiebt.

Wenn man für irgend ein Gewölbe diejenige Stützlinie $S$ entworfen hat, welche durch die Mitten der Fugen im Scheitel und den Kämpfern geht, so kann man sich die Aufgabe stellen, das Material des Gewölbes so zu vertheilen, bezw. die Gewölbform so zu verändern, daß die gezeichnete Stützlinie zur geometrischen Mittellinie des Bogens wird. Ist dies geschehen, indem man zu jeder Seite der besagten Stützlinie $S$ die halbe

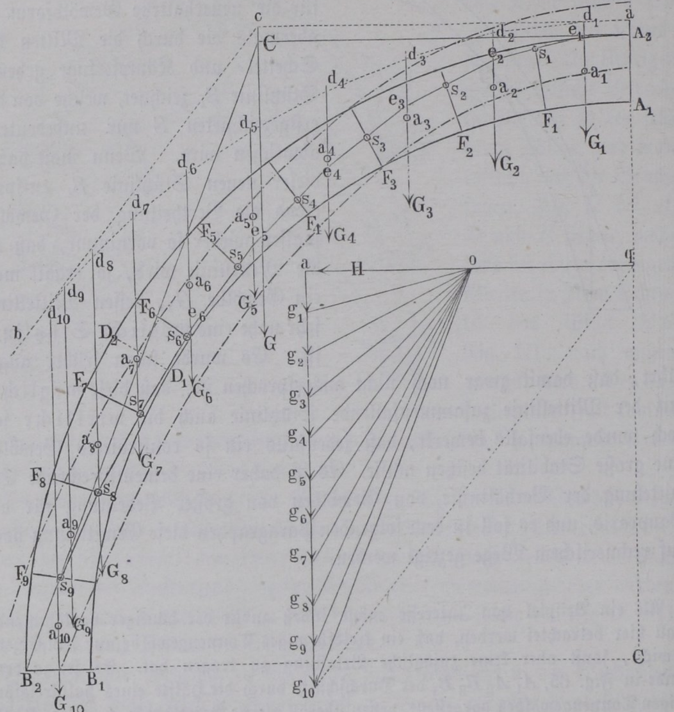
Gewölbdicke an dieser Stelle anträgt, so wird zwar für diese etwas geänderte Gewölbeform $G$ die ursprüngliche Stützlinie nicht mehr genau eine Stützlinie sein. Man kann indessen leicht die erforderliche Correction der Gewölbform dadurch vornehmen, daß man für die neuerhaltene Gewölbform $G$ abermals die durch die Mitten der Scheitel- und Kämpferfuge gehende Stützlinie $S_1$ zeichnet, welche von der erstgezeichneten $S$ nur unbedeutend abweichen wird. Wenn man daher dieser neuen Stützlinie $S_1$ entsprechend die Vertheilung der Gewölbmassen wieder so vornimmt, daß $S_1$ die Mittellinie wird, so erhält man ein Gewölbe $G_1$, dessen Mittellinie sehr nahe eine mögliche Stützlinie ist. Es wurde schon früher angeführt, daß damit zwar noch nicht ausgesprochen ist, daß diese mögliche, mit der Mittellinie zusammenfallende Stützlinie auch die wirkliche sei, doch wurde ebenfalls bemerkt, daß jedenfalls ein so construirtes Gewölbe eine große Stabilität besitzen müsse. Es ist daher eine dementsprechende Ermittelung der Verhältnisse von Gewölben von großer Bedeutung für die Baupraxis, und es soll in dem folgenden Paragraphen diese Ermittelung noch auf rechnerischem Wege gezeigt werden.

Fig. 64.




Als ein Beispiel von Interesse möge indeß zuvor der häufiger vorkommende Fall hier betrachtet werden, daß ein kreisförmiges Tonnengewölbe nur sein Eigengewicht, sonst aber keine zusätzliche Belastung zu tragen hat. Es sei zu dem Ende in Fig. 65, $A_1 A_2 B_2 B_1$ der Durchschnitt durch die Hälfte eines halbkreisförmigen Tonnengewölbes dargestellt, dessen überall gleiche Gewölbdicke $A_1 A_2 = B_1 B_2$ gleich 0,1 des äußeren Halbmessers $CA_2 = CB_2$ angenommen wurde. Denkt man nun diese Gewölbhälfte, deren axial gemessene Dimension gleich 1 m vorausgesetzt werde, durch radiale Ebenen $F_1 F_2 ..$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zerlegt, und ermittelt unter Zugrundelegung eines gewissen Kräftemaßstabes die Strecken, welche den Gewichten $G_1 G_2 G_3$ u. s. w. der einzelnen Gewölbtheile entsprechen, so erhält man durch Antragen dieser Strecken auf einer Verticallinie den Kräfteplan $a g_1 g_2 \ldots g_{10}$. In dem vorliegenden Falle, in welchem das Gewölbe in lauter unter sich gleiche Theile getheilt wurde, fallen auch die einzelnen Strecken $a g_1$, $g_1 g_2$, $g_2 g_3 \ldots$ gleich groß aus, so daß man nur die dem Gesammtgewichte $G$ des halben Gewölbes entsprechende Strecke $a g_{10}$ in ebenso viel gleiche Theile zu theilen hat, wie das Gewölbe, um die Einzelgewichte der Theile zu erhalten. Die Einzelgewichte denkt man sich in den Schwerpunkten $a_1, a_2, a_3, ..$ der einzelnen trapezförmigen Gewölbtheile wirksam und findet nun zunächst die Lage der Schwerkraft $G$ des halben Gewölbes in bekannter Weise durch eine Hülfsconstruction. Nimmt man nämlich ganz beliebig außerhalb $a g_{10}$, etwa auf der in $a$ zu $a g_{10}$ Senkrechten in $p$ einen Punkt als Pol

Fig. 65.

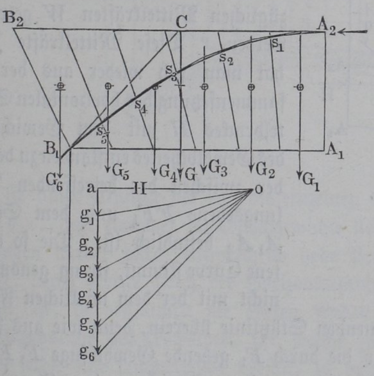


an und construirt mit Hülfe desselben in bekannter Weise ein Seilpolygon $a d_1 d_2 d_3 \ldots d_{10} b$, so erhält man in dem Durchschnittspunkte $c$ der beiden Endstrahlen $a d_1$ und $b d_{10}$ einen Punkt, durch welchen die verticale Schwerkraft $G$ der Gewölbhälfte hindurchgeht. Wenn man nun zwei Punkte für eine Stützlinie des Gewölbes annimmt, etwa einen in der Scheitelfuge $A_1 A_2$ und den anderen im Widerlager $B_1 B_2$, so ist es nach dem Vorhergegangenen leicht, diese Stützlinie selbst zu zeichnen. Wählt man als solche Punkte etwa $A_2$ und $B_2$, so zieht man durch $A_2$ die Horizontale bis zum Durchschnitte $C$ mit dem Gewichte $G$, um in der von $C$ durch $B_2$ gehenden Geraden die Richtung des Strahls $g_{10} o$ im Kräfteplane zu erhalten, welcher in $o a$ die Schubkraft $H$ ergiebt. Betrachtet man nunmehr $o$ als Pol des Kräftepolygons, und zeichnet danach das Seilpolygon $A_2 e_1 e_2 e_3 \ldots B_2$, so erhält man in den Durchschnitten $s_1 s_2 s_3 \ldots$ der

Seiten dieses Polygons mit den Fugen $F$ Punkte der gesuchten Stützlinie $A_2 s_1 s_2 \ldots B_2$. Diese Stützlinie nähert sich bei $D_1$ zwischen $s_6$ und $s_7$ in einem Abstande von etwa 60° vom Scheitel der inneren Gewölbeleibung fast bis zur Berührung, und sie stellt daher nach dem in §. 19 Bemerkten gleichzeitig die Stützlinie vom kleinsten wie diejenige vom größten Schube, folglich die einzig mögliche Stützlinie dar. Man erkennt auch aus der Figur leicht, daß durch eine Verrückung nach innen eines ihrer Angriffspunkte sowohl im Scheitel wie im Widerlager die Stützlinie die innere Wölbfläche in der Nähe von $D_1$ durchschneiden würde. Hieraus ergiebt sich, daß ein halbkreisförmiges Gewölbe von den gewählten Verhältnissen, d. h. dessen Stärke nur $^1/_{10}$ seines Halbmessers beträgt, wenn es nur sein eigenes Gewicht zu tragen hat, sich im Grenzzustande des Gleichgewichts befindet. Um dem Gewölbe Stabilität zu verleihen, würde daher die Gewölbstärke vergrößert werden müssen, während die geringste Verminderung dieser Stärke unfehlbar mit einem Einsturz verbunden wäre. Wollte man das Gewölbe unter Beibehaltung der Stärke und Spannweite stabil erhalten, so hätte man die Gewölbform zu ändern. Dies kann z. B. dadurch geschehen, daß man die gefundene Stützlinie $A_2 s_1 s_1 \ldots B_2$ als Mittellinie auffaßt, und zu beiden Seiten derselben in dem Abstande gleich der halben Gewölbdicke die Begrenzung der Wölbflächen annimmt, in welchem Falle man ein Gewölbe von der in der Figur durch Striche und Punkte angedeuteten, annähernd parabolischen Gestalt erhält.

Wenn man das Gewölbe nur bis zu der Bruchfuge $D_1 D_2$ ausführt, etwa derart, daß man den Schenkel zwischen $D$ und $B$ durch kräftige Hintermauerung gewissermaßen zu einem Bestandtheile des festen Widerlagers ausbildet, so erkennt man, daß für den übrigbleibenden Bogen $AD$ von einem halben Mittelpunktswinkel von etwa 60° die Stützlinie $A_2 D_1$ eine solche vom kleinsten Horizontalschube ist. Man ersieht hieraus den für die Stabilitätsverhältnisse günstigen Einfluß der **Hintermauerung**. Der Bogen wird nämlich hierdurch hinreichend stabil, denn es lassen sich für denselben noch unzählig viele Stützlinien dadurch zeichnen, daß man den Scheitelangriff von $A_2$ herunterrückt, und den Kämpferangriff von $D_1$ nach $D_2$ hin erhebt. Für alle diese Stützlinien ist der zugehörige Horizontalschub größer, als der der Linie $A_2 s_1 s_2 .. D_1$ zukommende $H_{min}$, und man erhält den größten Werth $H_{max}$ für die durch $A_2$ und $D_2$ gehende Stützlinie. Es ist ohne Weiteres klar, daß ein unter $H_{min}$ sinkender Schub die Gewölbhälfte $AD$ am Herunterfallen nach innen nicht hindern kann, während eine Schubkraft größer als $H_{max}$ die Gewölbhälfte um $D_2$ nach außen umkantet. Ein solches Ueberkanten nach außen wird indessen nicht eintreten können, wie groß

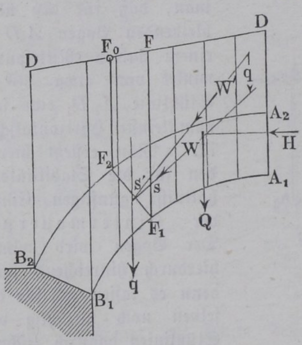
Fig. 66.



auch immer die Schubkraft sein möge, wenn der Punkt $D_2$ höher als $A_1$ gelegen ist. Das letztere ist der Fall bei sehr flachen und insbesondere bei allen scheitrechten Gewölben. Zeichnet man daher für ein scheitrechtes Gewölbe $A_1 A_2 B_2 B_1$, Fig. 66, in der erwähnten Art durch $A_2$ und $B_1$ die Stützlinie vom kleinsten Schube, so erhält man in diesem $H = oa$ diejenige Widerstandskraft, welche mindestens von den Widerlagern ausgeübt werden muß, wenn das Gewölbe am Herabfallen durch Kippen um einen Punkt der unteren Leibung verhindert werden soll. Ein Ueberkanten um eine Kante in der oberen Leibung $A_2 B_2$ ist aber niemals denkbar, wie groß auch der auf das Gewölbe ausgeübte Schub sein möge.

§. 22. **Die Kettenlinie als Stützlinie.** Die analytische Behandlung der Stützlinie von Gewölben, welche Linie im Vorstehenden als der geometrische Ort der Angriffspunkte der auf die Fugen des Gewölbes wirkenden Mittelkräfte in diesen Fugen charakterisirt worden ist, würde auf große, kaum lösbare Schwierigkeiten der Rechnung führen. Aus diesem Grunde pflegt man bei der Rechnung eine vereinfachende Voraussetzung zu machen, darin bestehend, daß man das Gewölbe sammt seiner Belastung durch einzelne verticale Ebenen wie $FF_1$, Fig. 67, in eine größere Anzahl von Streifen theilt und diejenige Stützlinie als Curve betrachtet, welche die Durchschnittspunkte $s$ enthält, in denen diese verticalen Trennungsflächen von den bezüglichen Mittelkräften $W$ getroffen werden. Diese Mittelkräfte selbst hat man sich wieder aus der Zusammensetzung des horizontalen Scheiteldruckes $H$ mit dem Gewichte $Q$ des Gewölbtheiles entstanden zu denken, der zwischen der betreffenden Theilungsebene $FF_1$ und dem Scheitel $A_1 A_2$ befindlich ist. Die so erhaltene Curve stimmt, streng genommen, nicht mit der dem wirklichen Fugenschnitte des Gewölbes zukommenden Stützlinie überein, denn wie aus Figur ersichtlich ist, erhält man für die durch $F_1$ gehende Gewölbfuge $F_1 F_2$ den Punkt $s'$ der Stützlinie, indem man das Gewicht $q$ des Trapezes $FF_1 F_2 F_0$ mit der in $s$ angreifenden Mittelkraft $W$ aus $H$ und dem Gewichte $Q$ des Stückes $A_1 DFF_1$ zu einer neuen Mittelkraft $W'$ zusammensetzt. Die Abweichung zwischen den beiden diese Punkte $s$ und bezw. $s'$ aufnehmenden Curven wird um so kleiner sein, je kleiner die Gewölbstärke $F_1 F_2$ gegen die Belastungshöhe $FF_1$ und je geringer die Neigung der Fuge gegen

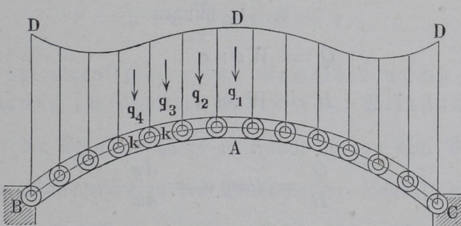
Fig. 67.



die Verticale ist. Diese erwähnte Abweichung wird daher für jedes Gewölbe in der Nähe des Scheitels unmerklich sein, und würde bei einer sehr kleinen Gewölbstärke in allen Punkten verschwinden, und da sie auch für die gewöhnlichen Gewölbe nur unbeträchtlich ausfällt, so hat man, wie schon bemerkt, bei den Rechnungen diese gedachte Linie der Punkte $s$ als Stützlinie des Gewölbes angenommen und es soll dieselbe hier als solche bezeichnet werden. Nach dem im §. 17 über Stützlinien allgemein Gesagten ist es nun ersichtlich, daß die fragliche Linie $s$ mit derjenigen Kettenlinie zusammenfällt, in welche das zur Construction der Stützlinie dienende Seilpolygon bei unendlich kleiner Breite der streifenförmigen Gewölbtheile übergeht, und welche im Vorstehenden mit dem Namen der Drucklinie oder Richtungslinie des Druckes bezeichnet wurde. Es ist auch schon in §. 17 darauf hingewiesen, daß diese beiden Linien zusammenfallen müssen, wenn die Fugen oder Trennungsebenen vertical angenommen werden.

Demgemäß kann man sich nun, wie Schwedler ausführt, dessen Darstellung *) hier im Wesentlichen beibehalten worden ist, das Gewölbe als eine aus einzelnen Gliedern $k$ bestehende Kette, Fig. 68, vorstellen, deren Glieder $k$ so gegen einander und gegen zwei feste Widerlager $B$ und $C$ gestellt sind,

Fig. 68.




daß sie unter Einfluß der auf die einzelnen Glieder wirkenden Belastungen $q_1\, q_2\, q_3 \ldots$ mit einander im Gleichgewichte stehen. Denkt man sich diese Belastungen wieder durch entsprechend hohe Prismen aus der Wölbsteinmasse ersetzt, deren Breite gleich der Horizontalprojection der betreffenden Kettenglieder ist, so bestimmen die oberen Enden dieser Prismen die bekannte Belastungslinie des Gewölbes, für welche zunächst ebenso wie für das Gewölbe selbst eine symmetrische Gestalt zu beiden Seiten des Gewölbscheitels vorausgesetzt werden soll.

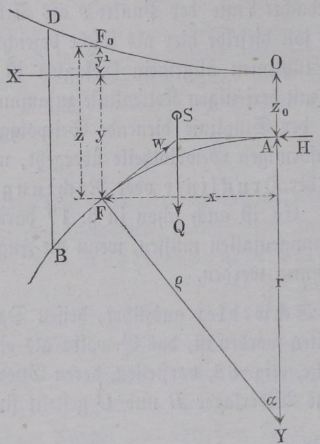
Die Untersuchung geschieht nun ähnlich wie für eine hängende Kette, (s. Thl. I.), in folgender Art. Ist $AFB$, Fig. 69, die besagte Kettenlinie

---

*) S. Theorie der Stützlinie von Schwedler, Zeitschr. für Bauwesen 1859.

für eine Belastungslinie $O F_0 D$, deren Ordinaten über der Kettenlinie im Scheitel $A O = z_0$ und für irgend einen Punkt $F$ durch $F F_0 = z$ ausgedrückt sind, so wähle man $O$ zum Anfangspunkte eines rechtwinkeligen Coordinatensystems mit verticaler, in die Symmetrieebene des Gewölbes fallender $Y$ Axe. Auf das zwischen dem Scheitel $A$ und dem beliebigen Punkte $F$ mit den Coordinaten $x$, $y$ gelegene Kettenstück $AF$ wirken nun die Horizontalkraft $H$ im Scheitel, das Gewicht $Q$ des Belastungsfeldes $O A F F_0$ in seinem Schwerpunkte $S$ und in dem Querschnitte bei $F$ der Widerstand des Gewölbes $W$, welcher, in der Tangente an die Kettenlinie wirkend, mit dem Horizonte den Winkel $\alpha$ bilden möge. Man findet für das Gleichgewicht ohne Weiteres die Beziehungen

Fig. 69.




$$Q = W \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$H = W \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und

$$\frac{Q}{H} = tang\, \alpha = \frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hierin kann man den Voraussetzungen gemäß,

$$Q = \int_{z_0}^{z} z\, d\, x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

setzen, wenn man wieder ein Gewölbe von 1 m Länge in Betracht zieht und das Gewicht von 1 cbm Wölbsteinmaterial als Gewichtseinheit annimmt, so daß aus (3) und (4)

$$H \frac{dy}{dx} = \int_{z_0}^{z} z\, d\, x$$

folgt, woraus man durch Differentiation

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{z}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

erhält.

Bezeichnet man nun mit $\varrho$ den Krümmungshalbmesser der Kettenlinie in $F$, welcher bekanntlich durch

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^2}} = \frac{(1 + tang^2\,\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^3}} = \frac{1}{cos^3\,\alpha\,\frac{d^2 y}{d x^2}} \quad . \quad . \quad (6)$$

ausgedrückt ist, so findet man aus (5) und (6):

$$\varrho = \frac{H}{z\,cos^3\,\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

als allgemeine Gleichung für den Krümmungsradius der Stützlinie in irgend welchem Punkte, in welchem die Tangente mit dem Horizonte, also auch die Krümmungsradius mit der Verticalen den Winkel $\alpha$ bildet. Für den Scheitel erhält man daraus mit $\alpha = 0$ und $z = z_0$, wenn man daselbst den Halbmesser $r$ nennt,

$$r = \varrho = \frac{H}{z_0} \text{ oder } H = r z_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

d. h. der Horizontalschub eines Gewölbes wächst direct mit der Krümmung im Scheitel und mit der Belastung daselbst.

Die Form der Stützlinie hängt wesentlich ab von dem Verhältniß $\frac{r}{z_0}$ des Krümmungshalbmessers zu der Belastung im Scheitel, und man hat, wenn man dieses Verhältniß $\frac{r}{z_0}$, welches auch wohl der Modulus des Gewölbes genannt wird, mit $a$ bezeichnet, nach (8)

$$H = a z_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und erhält damit aus (7)

$$\varrho = \frac{a}{cos^3\,\alpha}\,\frac{z_0^2}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Schreibt man diese letztere Gleichung

$$\varrho = \frac{a}{cos^3\,\alpha}\,\frac{z_0}{z}\,z_0,$$

so erkennt man, daß für denselben Werth des Modulus $a$ der Krümmungshalbmesser $\varrho$ für einen beliebigen Winkel $\alpha$ proportional mit der Scheitelbelastung $z_0$ wächst, sobald auch das Verhältniß $\frac{z_0}{z}$ für diesen Winkel constant bleibt, d. h. sobald die Belastung $z$ überall durch dieselbe Funktion von $\alpha$ ausgedrückt ist, mit anderen Worten, sobald die Art der Lastvertheilung dieselbe bleibt. Unter dieser Voraussetzung sind also alle Stützlinien von gleichem Modul unter einander ähnlich.

Um daher die verschiedenen Stützlinien gleicher Belastungsart zu beurtheilen, genügt es, für verschiedene Werthe des Moduls $a$ je eine Stützlinie herauszugreifen, für welche der Halbmesser $r$ im Scheitel eine bestimmte Größe hat, die man etwa gleich der Einheit annehmen darf, indem diese Stützlinie mit allen übrigen, demselben Modul angehörigen Stützlinien gleicher Belastungsart geometrisch ähnlich ist. Der Modul ist in Wirklichkeit natürlich sehr verschieden, er wird aber selten den Werth 25 übersteigen, in welchem Falle also die Höhe der Scheitelbelastung nur 4 Proc. des Gewölbhalbmessers beträgt; während andererseits bei hohen Belastungen der Werth $a = \frac{r}{z_0}$ bis auf einen kleinen ächten Bruch ($^1/_4$ bis $^1/_{10}$) herabgehen kann.

Setzt man zunächst den für Bauausführungen häufigen Fall voraus, daß die Stützlinie ein Kreisbogen ist, so hat man dafür in den vorstehenden Formeln den Krümmungshalbmesser $\varrho$ an jeder Stelle gleich dem Scheitelhalbmesser $r$ zu setzen, und erhält damit aus (7) und (8):

$$r = \frac{H}{z \cos^3 \alpha} = \frac{H}{z_0},$$

oder

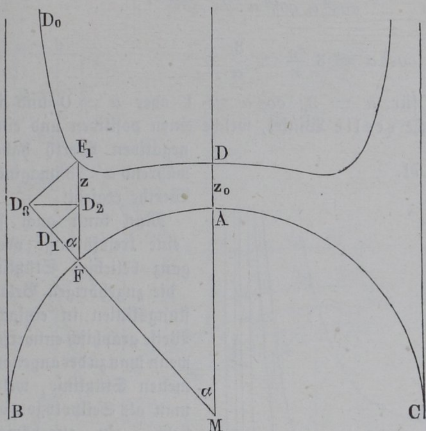
$$z = \frac{z_0}{\cos^3 \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Diese Gleichung gewährt ein einfaches Mittel, für ein gegebenes Kreisgewölbe vom Halbmesser $r$ und für eine gegebene Scheitelbelastung $z_0$ die Größe der einem beliebigen Winkel $\alpha$ entsprechenden Belastungsordinate $z$ durch Rechnung oder Construction zu finden. Zu letzterem Zwecke hat man nur, wenn $AD$, Fig. 70, die Ordinate $z_0$ der Belastung im Scheitel des kreisförmigen Gewölbes $CAB$ ist, für einen Punkt $F$ im Abstande $AMF = \alpha$ vom Scheitel auf dem Radius $MF$ die Strecke $FD_1 = AD$ zu machen, dann $D_1 D_2$ senkrecht zum Radius bis zur Verticalen $FF_1$ durch $F$ zu ziehen, $D_2 D_3$ senkrecht auf $FF_1$ und endlich $D_3 F_1$ wieder senkrecht zu $FD_3$ zu machen, um in

$$FF_1 = \frac{FD_3}{\cos \alpha} = \frac{FD_2}{\cos^2 \alpha} = \frac{FD_1}{\cos^3 \alpha} = \frac{z_0}{\cos^3 \alpha} = z$$

die gesuchte Belastungsordinate für den Winkel $\alpha$ zu erhalten. Wiederholt man diese Construction für genügend viele Winkel $\alpha$, so erhält man als Belastungslinie die Curve $D F_1 D_0$, welche sich beiderseits asymptotisch an die durch $B$ und $C$ gelegten Verticalen anschließt.

Fig. 70.




Wenn man entweder in dieser Weise oder durch Rechnung die Belastungslinien für ein und dasselbe Kreisgewölbe vom Radius $r$, aber für verschiedene Model $a$, d. h. für verschiedene Scheitelbelastungen

$$\frac{r}{a} = z_0$$

zeichnet, so erhält man eine Darstellung, wie Fig. 71 (a. f. S.), in welcher die Belastungslinien für die Werthe von $a = 1, 2, 3, 5, 10$, und 20 eingetragen sind.

Diese Figur zeigt, daß unter diesen Stützlinien die dem Modul $a = 3$ zugehörige, welche für eine Erstreckung von etwa $20^0$ zu jeder Seite vom Scheitel nahezu eine horizontale Gerade wird, in gewissem Sinne eine Grenze bildet zwischen den Formen der Stützlinien mit größerem und denjenigen mit kleinerem Modul. Während nämlich die letzteren ihren tiefsten Punkt im Scheitel haben und durchweg ihre convexe Seite abwärts kehren, sind die übrigen Stützlinien in ihrem mittleren Theile auf einer um so größeren Erstreckung nach unten concav gebogen, ehe sie sich an den Schenkeln wieder erheben, je größer der Modul $a$ ist. Der asymptotische Anschluß aller Stützlinien zeigt, daß es in Wirklichkeit nicht möglich ist, eine Belastung anzugeben, welcher die Form des vollen Halbkreises als Stützlinie zukommt, daß dies dagegen möglich ist für kleinere Mittelpunktswinkel, welche etwa zu $\alpha = 20^0$ für $a = 3$; zu $\alpha = 30^0$ für $a = 5$ u. s. w. aber selbst für $a = 25$ nicht größer als etwa $70^0$ nach jeder Seite vom Scheitel anzunehmen sein dürften.

Daß die gedachte Grenze durch diejenige Stützlinie gegeben ist, welche genau dem Modul $a = 3$ entspricht, läßt sich leicht nachweisen. Bezeichnet man mit $y'$ die verticale Ordinate einer Belastungslinie in Bezug auf ihren im Scheitel gelegenen Punkt als Coordinatenanfang, so hat man nach Fig. 69:

$$y' = z - y = z - z_0 - r\,(1 - \cos\alpha) = \frac{z_0}{\cos^3\alpha} + r\cos\alpha - (z_0 + r).$$

Für das Maximum oder Minimum von $y'$ hat man daher

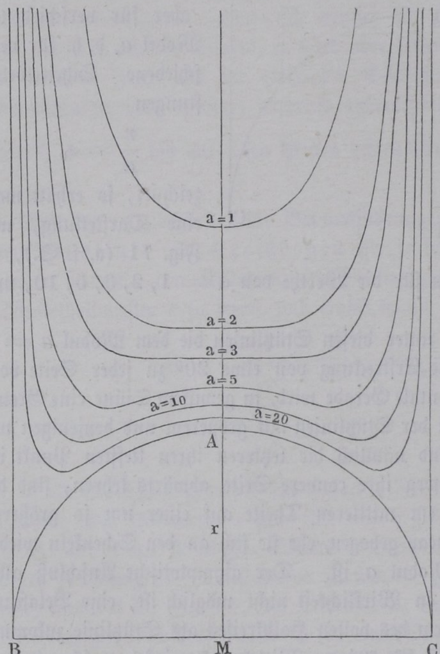
$$0 = \frac{d\,y'}{d\,\alpha} = 3\,\frac{z_0}{\cos^2\alpha}\,\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - r\sin\alpha,$$

woraus

$$\cos^4\alpha = 3\,\frac{z_0}{r} = \frac{3}{a}$$

folgt. Hieraus ergiebt sich für $a = 3$; $\cos\alpha = 1$ oder $\alpha = 0$ und für $a > 3$ erhält man zwei gleiche reelle Winkel, welche einen positiven und einen negativen Werth haben, während $a < 3$ imaginäre Werthe ergiebt.

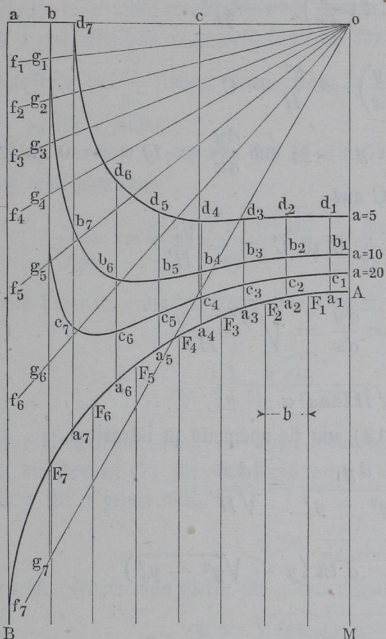
Fig. 71.




Man kann auch für eine kreisförmige oder ganz beliebige Stützlinie die zugehörigen Belastungslinien in einfacher Weise graphisch entwerfen, wenn man zu der angenommenen Stützlinie, welche man als Seilpolygon ansieht, ein zugehöriges Kräftepolygon zeichnet. Diese Construction ist in Fig. 72 für ein Kreisgewölbe $MAB$ dargestellt. Denkt man sich das halbe Gewölbe durch eine möglichst große Anzahl verticaler Theilungsebenen $F_1 F_2 F_3 \ldots$ in einzelne Streifen von gleicher Breite b getheilt, so hat man die Stützkräfte des Bogens in den Theilpunkten $A, F_1, F_2, F_3 \ldots$ in den Richtungen der Tangenten dieser Punkte anzunehmen. Legt man daher durch einen beliebig angenommenen Pol $o$ ein Strahlenbüschel, dessen Strahlen $oa, of_1, of_2 \ldots$ mit den Tangenten in $A, F_1, F_2 \ldots$ parallel sind, so liefert dieses Strahlenbüschel das zugehörige Kräftepolygon, sobald man die Belastung des Gewölbes auf einer Verticallinie in gehöriger Weise einträgt. Zieht man z. B. durch den Punkt $b$ des horizontalen Strahls $oa$ die Verticale $bg_7$, so stellen die einzelnen Strecken $bg_1, g_1g_2, g_2g_3 \ldots$ dieser Verticallinie zwischen den Strahlen die auf die Bogenelemente $AF_1, F_1F_2, F_2F_3 \ldots$ entfallenden Belastungen nach einem gewissen

Kräftemaßstabe dar. Wenn man nun für diesen Kräftemaßstab die Breite $b$ der einzelnen Gewölbstreifen als Basis annimmt, so ergiebt sich die dem Kräftepolygone $o\,b\,g_7$ zugehörige Belastungslinie in der Curve $b_1\,b_2\,b_3 \ldots$, welche man erhält, wenn man in den Mitten $a_1\,a_2\,a_3 \ldots$ der Bogenelemente die verticalen Ordinaten $a_1 b_1 = b\,g_1$, $a_2 b_2 = g_1 g_2$, $a_3 b_3 = g_2 g_3 \ldots$ aufträgt. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction ergiebt sich einfach aus der Bemerkung, daß das angegebene Verfahren im Wesentlichen nur eine Umkehrung des zur Construction der Stützlinie für eine vorgeschriebene Belastungslinie angegebenen ist, und es folgt daraus, daß die Construction gültig bleibt, auch wenn man anstatt des Kreisbogens $MAB$ eine beliebige Curve als Stützlinie voraussetzt. Es läßt sich daher ebensowohl für jede angenommene Stützlinie die Vertheilung der Last ermitteln, wie umgekehrt aus jeder Belastungslinie die zugehörige Stützlinie sich ergiebt. In der Figur ist der Punkt $b$ in solchem Abstande von $o$ gewählt, daß $b\,g_1 = \frac{1}{10}\,MA$ ist, daher wird die Linie $b_1\,b_2\,b_3 \ldots$ einem Modul des Gewölbes $a = 10$ entsprechen. Die Verticale durch $c$, welcher Punkt in der Mitte zwischen $o$ und $b$ angenommen ist, giebt folglich die dem Modul 20 zukommende Belastungslinie $c_1\,c_2\,c_3 \ldots$ während ebenso für die Construction der dem Modul $a = 5$ zukommenden Belastungslinie $d_1\,d_2\,d_3 \ldots$ eine Verticale angenommen wurde, welche vom Pole $o$ einen doppelt so großen Abstand hat, als $b\,g_7$.

Fig. 72.




**Horizontal begrenzte Belastung.** In derselben Weise, wie im vorhergehenden Paragraphen zu einer bestimmt angenommenen Stützlinie die zugehörige Belastungslinie ermittelt worden ist, läßt sich, wie schon bemerkt wurde, auch umgekehrt für eine vorgeschriebene Belastung die zugehörige Stützlinie bestimmen. Es möge der häufige Fall vorausgesetzt werden, daß die Belastungslinie des Gewölbes durch eine horizontale Gerade dargestellt ist, so hat man für diesen Fall einfach in den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen überall $y$ für $z$ zu setzen, und erhält daher zunächst aus (5) §. 23.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Multiplicirt man diese Gleichung beiderseits mit $2\,dy$, so erhält man die zur Integration geeignete Form

$$2\,\frac{dy}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2\,y\,dy}{H},$$

woraus

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2}{H} + C$$

folgt, und da für $x = 0$ hier $y = y_0$ und $\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha = 0$ zu setzen ist, ergiebt sich die Constante $C$ aus

$$0 = \frac{y_0^2}{H} + C \text{ zu } C = -\frac{y_0^2}{H},$$

folglich ist:

$$tang\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2 - y_0^2}{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und hieraus

$$y = \sqrt{H\,tang^2\,\alpha + y_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Schreibt man die Gleichung (13), um sie nochmals zu integriren,

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - y_0^2}} = \frac{dx}{\sqrt{H}},$$

so erhält man, da

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - y_0^2}} = d\,ln\,(y + \sqrt{y^2 - y_0^2})$$

ist,

$$ln\,(y + \sqrt{y^2 - y_0^2}) + C = \frac{x}{\sqrt{H}}.$$

Da hier $x = 0$ und $y = y_0$ zusammengehörige Werthe sind, so folgt $C = -\,ln\,y_0$, folglich erhält man

$$ln\,\frac{y + \sqrt{y^2 - y_0^2}}{y_0} = \frac{x}{\sqrt{H}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

als die Gleichung für die gesuchte Stützlinie.

Diese Gleichung, welche zuerst von Hagen*) aufgestellt worden ist, kann dazu dienen, die Ordinaten $y$ für jeden horizontalen Abstand $x$ vom Scheitel zu bestimmen, wenn die Ordinate $y_0$ der Belastung im Scheitel und der Halbmesser $r$ daselbst, oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Modulus

*) Hagen, Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin, 1862.

$a = \frac{r}{y_0}$ gegeben sind, denn der Horizontalschub $H$ bestimmt sich nach (8) und (9), wenn man $y_0$ anstatt $z_0$ einführt, zu

$$H = r y_0 = a y_0^2.$$

Ebenso kann man, wenn außer der Scheitelbelastung $y_0$ etwa die Spannweite $l$ und Pfeilhöhe $h$ gegeben sind, die Größe $H$, also auch den Scheitelhalbmesser $r = \frac{H}{y_0}$ finden, wenn man in Gleichung (15) $\frac{l}{2}$ für $x$ und $h + y_0$ für $y$ einsetzt.

Führt man den Werth $r y_0$ für $H$ in (15) ein, so kann man diese Gleichung auch schreiben:

$$e^{\frac{x}{\sqrt{r y_0}}} = \frac{y + \sqrt{y^2 - y_0^2}}{y_0} = \frac{y}{y_0} + \sqrt{\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 1},$$

woraus sich nach einfacher Umformung ergiebt

$$\frac{y}{y_0} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{r y_0}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{r y_0}}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Zur Veranschaulichung der dieser Belastungsart zugehörigen Stützlinien kann die Formel (7) für den Krümmungshalbmesser dienen, welche, wenn darin $y$ für $z$ gesetzt wird, in

$$\varrho = \frac{H}{y \cos^3 \alpha}$$

übergeht. Führt man hierin für $y$ den Werth aus (14)

$$y = \sqrt{H \tang^2 \alpha + y_0^2}$$

ein, und setzt

$$H = a y_0^2,$$

so erhält man

$$\varrho = \frac{a y_0^2}{\cos^3 \alpha \sqrt{a y_0^2 \tang^2 \alpha + y_0^2}} = \frac{a y_0}{\cos^3 \alpha \sqrt{a \tang^2 \alpha + 1}} \quad . \quad (17)$$

Schreibt man diese Gleichung

$$\cos^3 \alpha \sqrt{a \tang^2 \alpha + 1} = \frac{a y_0}{\varrho}$$

und differentiirt, so erhält man weiter:

$$\frac{\cos^3 \alpha \, . \, a \tang \alpha}{\cos^2 \alpha \sqrt{a \tang^2 \alpha + 1}} - 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \sqrt{a \tang^2 \alpha + 1} =$$

$$- \frac{a y_0}{\varrho^2} \frac{d\varrho}{d\alpha},$$

oder, hierin nach (17)

$$\sqrt{a \, tang^2 \alpha + 1} = \frac{a y_0}{\varrho \cos^3 \alpha}$$

gesetzt:

$$\frac{\varrho \cos^4 \alpha \, tang \, \alpha}{y_0} - 3 a y_0 \frac{tang \, \alpha}{\varrho} = - \frac{a y_0}{\varrho^2} \frac{d \varrho}{d \alpha},$$

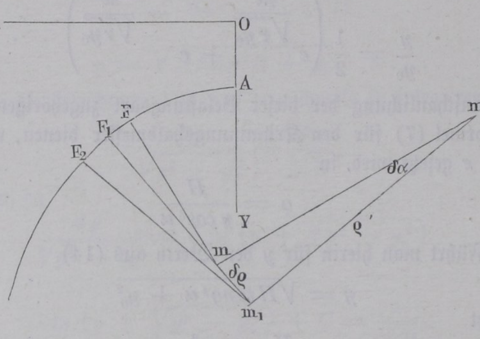
woraus endlich

$$\frac{d \varrho}{d \alpha} = \varrho \, tang \, \alpha \left( 3 - \frac{\varrho^2 \cos^4 \alpha}{a y_0^2} \right) = \varrho' \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

folgt.

Der hier entwickelte Werth $\frac{d \varrho}{d \alpha}$ hat bekanntlich die geometrische Bedeutung, den Krümmungshalbmesser für die Evolute der betrachteten Curve darzustellen, wie man am einfachsten aus Fig. 73 ersieht. Ist hier $F$

Fig. 73.




irgend ein Punkt der betrachteten Stützlinie mit den Coordinaten $x$, $y$ und $F_1$ der unendlich nahe liegende Punkt der Curve mit den Ordinaten $x + dx$ und $y + dy$, also $F F_1$ das Curvenelement $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, so schneiden sich die beiden in $F$ und $F_1$ auf der Curve daselbst errichteten Normalen in dem Krümmungsmittelpunkte $m$ des Elementes $F F_1$, und ebenso ist der Schnittpunkt $m_1$ der Normalen in $F_1$ und $F_2$ der Krümmungsmittelpunkt des Elementes $F_1 F_2$, und man hat daher $Fm = \varrho$, und da $m m_1 = d \varrho$ ist, so stellt $m m_1$ das zugehörige Element der Evolute für die Curve $AF$ vor. Die Normalen zu den Krümmungshalbmessern in $m$ und $m_1$, welche sich in $m'$ schneiden mögen, schließen denselben Winkel $d\alpha$ mit einander ein, wie die Krümmungshalbmesser $Fm$ und $F_1 m_1$ oder die Tangenten der Stützlinie in $F$ und $F_1$. Bezeichnet man daher den

Krümmungshalbmesser $mm' = m_1 m'$ der Evolute in $mm_1$ mit $\varrho'$, so hat man $\varrho' d\alpha = mm_1 = d\varrho$, d. h. $\frac{d\varrho}{d\alpha} = \varrho'$.

Setzt man nun den in (18) für $\frac{d\varrho}{d\alpha}$ gefundenen Werth gleich Null, so erhält man in den zugehörigen Werthen von $\alpha$ diejenigen Winkel, für welche $\varrho$ ein Maximum oder Minimum wird, und offenbar entspricht diesen Punkten der Stützlinie eine Spitze oder ein Rückkehrpunkt der Evolute. Die mit $\frac{d\varrho}{d\alpha} = 0$ aus (18) entstehende Gleichung

$$0 = \varrho \, tang \, \alpha \left(3 - \frac{\varrho^2 \cos^4 \alpha}{a y_0^2}\right)$$

wird nun erfüllt erstens durch $tang \, \alpha_1 = 0$, d. h. für $\alpha_1 = 0$ im Scheitel des Gewölbes, welchem daher stets eine Spitze der Evolute entspricht, und zweitens durch $3 a y_0^2 = \varrho^2 \cos^4 \alpha$. Aus dieser Gleichung und (17) folgt:

$$3 a y_0^2 = \frac{a^2 y_0^2 \cos^4 \alpha}{\cos^6 \alpha \, (a \, tang^2 \alpha + 1)}$$

oder

$$3 = \frac{a}{\cos^2 \alpha \, (a \, tang^2 \alpha + 1)} = \frac{a \, (tang^2 \alpha + 1)}{a \, tang^2 \alpha + 1},$$

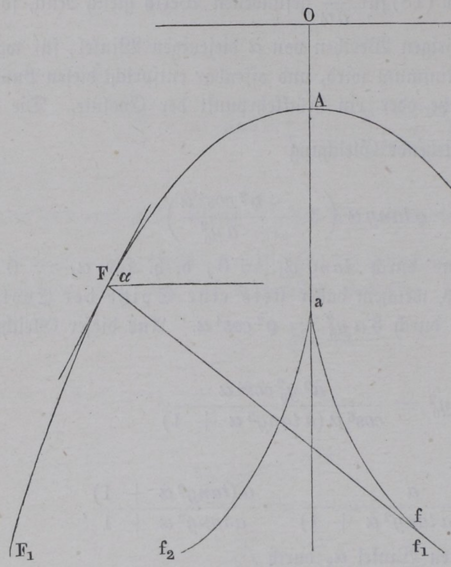
woraus man den gesuchten Winkel $\alpha_2$ durch

$$tang \, \alpha_2 = \sqrt{\frac{a - 3}{2 a}} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

erhält.

Dieser Gleichung gemäß hat man wieder die Stützlinien zu unterscheiden in zwei Arten, je nachdem der Modulus $a$ kleiner oder größer ist als 3. Für $a < 3$ führt die Gleichung (19) zu imaginären Werthen, ein Anzeichen dafür, daß in diesem Falle die Größe $\frac{d\varrho}{d\alpha} = \varrho'$ nur einmal zu Null wird, nämlich für den Scheitel d. h. für $\alpha = 0$, und zwar ist daselbst der Krümmungsradius $\varrho = a y_0 = r$ ein Minimum, indem $\varrho$ nach (17) um so größer ausfällt, je größer man $\alpha$ annimmt. Die Evolute der Stützlinie hat daher hier nur einen Rückkehrpunkt $a$, Fig. 74 (a. f. S.), von welchem aus zwei Curvenzüge $af_1$ und $af_2$ symmetrisch zur Verticalen durch den Scheitel ausgehen, derart, daß der Evolutenzweig $af_1$ die Krümmungsmittelpunkte für die halbe Stützlinie $AF_1$ aufnimmt, z. B. stellt $f$ den Krümmungsmittelpunkt für die Stützlinie in $F$ vor, woselbst die Tangente von der Horizontalen um den Winkel $\alpha$ abweicht. Es ist hieraus ersichtlich, daß alle diese Stützlinien, für welche $a < 3$ ist, eine **überhöhete** oder eiförmige Gestalt zeigen müssen.

Fig. 74.




Setzt man dagegen voraus, daß $a > 3$ sei, so liefert die Gleichung (19) für $\alpha$ zwei gleiche entgegengesetzte Werthe $\alpha_2$, welchen nunmehr ein Minimalwerth von $\varrho_2$ angehört, der sich aus (19) und (17) zu

$$\varrho_2 = \frac{a\, y_0 \sqrt{1 + tang^2\,\alpha}^{\,3}}{\sqrt{a\, tang^2\,\alpha + 1}} = \frac{a\, y_0 \sqrt{1 + \frac{a-3}{2\,a}}^{\,3}}{\sqrt{\frac{a-3}{2} + 1}} = \frac{a\, y_0 \sqrt{\frac{3}{2a}(a-1)}^{\,3}}{\sqrt{\frac{a-1}{2}}}$$

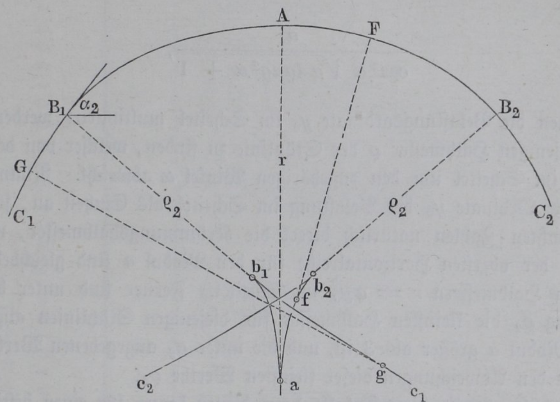
$$= \frac{3}{2}\sqrt{3}\,.\,y_0\,\frac{a-1}{\sqrt{a}} = 2{,}6\, y_0\,\frac{a-1}{\sqrt{a}}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (20)$$

berechnet. Der Werth $\varrho_1 = r$ für $\alpha = 0$ entspricht in diesem Falle einem relativen Maximum des Krümmungshalbmessers, welcher vom Scheitel aus bei allmäliger Zunahme von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_2$ zunächst seinen Werth auf $\varrho_2 = 2{,}6\, y_0\,\frac{a-1}{\sqrt{a}}$ vermindert, um dann bei weiterer Zunahme von

$\alpha$ bis ins Unendliche zu wachsen, so daß die Schenkel der Stützlinie sich verticalen geraden Linien nähern.

Der Verlauf der Stützlinien und ihrer Evoluten für den Fall $\alpha > 3$ ist aus Fig. 75 ersichtlich. Während für den Scheitel $A$ der Stützlinie der

Fig. 75.




Mittelpunkt in der Spitze $a$ der Evolute liegt, wandert bei allmäliger Zunahme von $\alpha$ der Krümmungsmittelpunkt von $a$ nach $b_1$ bezw. $b_2$, und erreicht diese Ecken, sobald in $B$ der Winkel der Stützlinie gegen den Horizont nach (19) den Werth $\alpha_2 = arc\ tang \sqrt{\frac{a-3}{2a}}$ erlangt hat, in welchem Falle der Krümmungshalbmesser von $aA = r$ im Scheitel auf $b_1 B_1 = b_2 B_2 = \varrho_2$ herabgegangen ist. Bei noch weiterer Vergrößerung von $\alpha$ wandert der Krümmungsmittelpunkt der Stützlinie den Zweigen $b_1 c_1$ und $b_2 c_2$ der Evolute entlang bis ins Unendliche, indem nunmehr der Krümmungshalbmesser fortwährend wächst. Für den Punkt $F$ z. B. ist $f$ und für den Punkt $G$ ist $g$ der Krümmungsmittelpunkt. Es ist hieraus ersichtlich, daß die Stützlinien dieser Gruppe (für $a > 3$) gedrückte Gestalt nach Art der Korblinien zeigen werden.

Mittelst der Formel (17)

$$\varrho = \frac{a y_0}{cos^3 \alpha \sqrt{a\, tang^2 \alpha + 1}}$$

kann man nun für irgend ein Gewölbe, dessen Modul $\frac{r}{y_0} = a$ gegeben ist, für jeden beliebigen Winkel $\alpha$ den Krümmungshalbmesser $\varrho$ berechnen, und damit die Stützlinie selbst mit beliebig großer Annäherung verzeichnen. Zur Erleichterung dieser Aufgabe soll hier die von Schwedler berechnete Tabelle der Krümmungshalbmesser für Winkel von $5^0$ zu $5^0$ wachsend, angeführt werden. Diese Tabelle enthält für die in der obersten Horizontalreihe angegebenen Modul $a$ zwischen 0,1 und 25 in den Verticalreihen die Coefficienten

$$\frac{a}{\cos^3 \alpha \sqrt{a \tang^2 \alpha + 1}},$$

mit denen die Belastungsordinate $y_0$ im Scheitel multiplicirt werden muß, um denjenigen Halbmesser $\varrho$ der Stützlinie zu finden, welcher von der Verticalen im Scheitel um den zugehörigen Winkel $\alpha$ abweicht. Nimmt man dabei die Ordinate $y_0$ der Belastung im Scheitel als Einheit an, so geben die gedachten Zahlen natürlich direct die Krümmungshalbmesser, und die Werthe der obersten Horizontalreihe für den Modul $a$ sind gleichbedeutend mit den Halbmessern $r = a y_0$ im Scheitel. Ferner sind unter der Bezeichnung $\varrho_2$ die kleinsten Halbmesser für diejenigen Stützlinien angeführt, deren Modul $a$ größer als 3 ist, und die unter $\alpha_2$ angegebenen Werthe entsprechen den Abweichungen dieser kleinsten Werthe $\varrho_2$.

In welcher Weise diese Tabelle dazu dienen kann, für einen bestimmten Fall die Stützlinie zu verzeichnen, ist aus Fig. 76 zu ersehen, welche die dem Modul $a = 25$ zugehörige Stützlinie darstellt. Hier ist auf der durch den Scheitel $A$ gezogenen Verticallinie die Strecke $A a = 25$ Einheiten des zu Grunde gelegten Maßstabes abgetragen, und um $a$ mit dem Halbmesser $a A = r = 25$ ein Bogen $A A_1$ von $2{,}5^0$ nach jeder Seite gezeichnet. Nunmehr ist auf dem Radius $A_1 a$ die Strecke $A_1 a_1$ gleich dem aus der Tabelle für $\alpha = 5^0$ zu entnehmenden Radius $\varrho = 23{,}2$ angetragen und $a_1$ als Mittelpunkt für das Bogenelement $A_1 A_2$ von $5^0$ Erstreckung benutzt. Ebenso ist auf $A_2 a_1$ die Strecke $A_2 a_2 = 19{,}8$ angetragen, entsprechend dem Werthe $\varrho$ für $\alpha = 10^0$, und von $a_2$ der Bogen $A_2 A_3$ gezeichnet u. s. w. Auf diese Weise erhält man in der Aufeinanderfolge der Bogen von je $5^0$ eine Curve, welche sich der wirklichen Stützlinie sehr nahe anschließt, während die einzelnen Mittelpunkte $a\, a_1\, a_2 \ldots$ die Ecken eines Polygons darstellen, welches der Evolute der Stützlinie eingeschrieben ist. Wollte man die Annäherung an die genaue Stützlinie noch weiter treiben, so hätte man nur die obige Tabelle in der Art zu erweitern, daß man die Intervalle des Winkels $\alpha$ kleiner annimmt und die entsprechenden Zwischenwerthe von $\varrho$ noch berechnet. Der damit gezeichnete Zug von Kreisbögen wird sich dann der wirklichen Stützlinie um so mehr nähern, je kleiner man die Intervalle von $\alpha$ annimmt. Diese genauere Construction, welche übrigens keine besonderen Schwierigkeiten darbietet, wird

Tabelle der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{a}{\cos^3\alpha \sqrt{a \tang^2\alpha + 1}}\, y_0$$

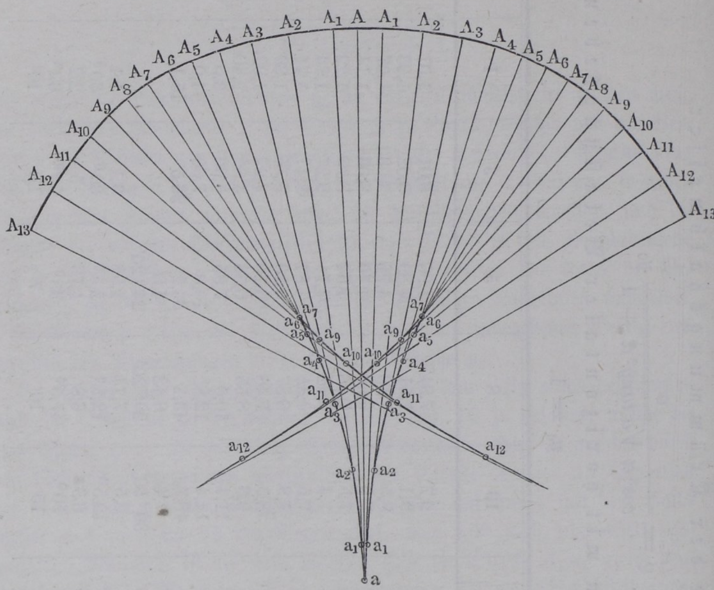
für Stützlinien mit horizontaler Belastungsebene

$y_0 = 1.$

| $a = r =$ | 25 | 20 | 15 | 10 | 8 | 5 | 3 | 1 | 0,5 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha = 5^0$ | 23,2 | 18,7 | 14,3 | 9,7 | 7,84 | 4,96 | 3,01 | 1,01 | 0,51 | 0,10 |
| $10^0$ | 19,8 | 16,6 | 13,1 | 9,1 | 7,51 | 4,89 | 3,02 | 1,03 | 0,52 | 0,10 |
| $15^0$ | 16,7 | 14,4 | 11,6 | 8,5 | 7,10 | 4,78 | 3,03 | 1,07 | 0,55 | 0,11 |
| $20^0$ | 14,6 | 12,6 | 10,5 | 7,9 | 6,68 | 4,70 | 3,06 | 1,14 | 0,58 | 0,12 |
| $25^0$ | 13,4 | 11,6 | 9,7 | 7,5 | 6,48 | 4,64 | 3,13 | 1,22 | 0,64 | 0,13 |
| $30^0$ | 12,5 | 11,1 | 9,4 | 7,4 | 6,42 | 4,7 | 3,27 | 1,34 | 0,71 | 0,15 |
| $35^0$ | 12,5 | 11,1 | 9,4 | 7,5 | 6,55 | 4,84 | 3,47 | 1,41 | 0,82 | 0,18 |
| $40^0$ | 12,8 | 11,4 | 9,8 | 7,8 | 6,87 | 5,19 | 3,75 | 1,69 | 0,96 | 0,21 |
| $45^0$ | 13,8 | 12,2 | 10,5 | 8,5 | 7,48 | 5,70 | 4,22 | 1,99 | 1,15 | 0,27 |
| $50^0$ | 15,5 | 13,8 | 11,9 | 9,3 | 8,55 | 6,56 | 4,89 | 2,40 | 1,43 | 0,35 |
| $55^0$ | 18,4 | 16,2 | 14,1 | 11,4 | 10,0 | 7,85 | 5,90 | 3,0 | 1,85 | 0,48 |
| $60^0$ | 23 | 20,5 | 17,7 | 14,4 | 12,8 | 10,0 | 7,60 | 4,0 | 2,53 | 0,70 |
| $75^0$ | 76,1 | 68,8 | 59,5 | 48,7 | 43,1 | 34,2 | 26,5 | 15,1 | 10,2 | 3,70 |
| $\varrho_2 =$ | 12,5 | 11,1 | 9,4 | 7,4 | 6,42 | 4,6 | | | | |
| $\alpha_2 =$ | $33^0 30'$ | $33^0$ | $32^0 20'$ | $30^0 30'$ | $29^0 20'$ | $24^0 20'$ | | | | |
| $r_1 =$ | 22,2 | 18,1 | 14 | 9,5 | 7,74 | 4,98 | 3,1 | 1,1 | 0,56 | 0,12 |
| $\alpha' =$ | $12,5^0$ | $12,5^0$ | $12,5^0$ | $12,5^0$ | $12,5^0$ | $12,5^0$ | $30^0$ | $30^0$ | $30^0$ | $30^0$ |
| $r_2 =$ | 14,4 | 12,7 | 10,35 | 8,3 | 6,8 | 4,73 | 5 | 2,2 | 1,3 | 0,33 |
| $\alpha'' =$ | $55^0$ | $55^0$ | $50^0$ | $50^0$ | $47,5^0$ | $35^0$ | $60^0$ | $60^0$ | $60^0$ | $60^0$ |
| $r_3 =$ | 23 | 20 | 17 | 15 | 10 | 7 | 17 | 10 | 10 | 3 |

aber nur in den seltensten Fällen nöthig werden; im Gegentheil wird man sich für gewöhnlich einer weiteren Vereinfachung in der Construction der Stützlinie bedienen können, darin bestehend, daß man die Stützlinie durch eine Vereinigung von einigen wenigen Kreisbögen ersetzt, deren Halbmesser

Fig. 76.




und Mittelpunkte so gewählt werden, daß die einzelnen Bögen nicht nur wie bei den bekannten **Korbbögen** ohne Knick in einander übergehen, sondern sich auch in ihrem Verlaufe der exacten Stützlinie möglichst nahe anschließen. Zur Bestimmung der geeignetsten Halbmesser für diese einzelnen Kreisbogensegmente giebt **Schwedler** folgenden Weg an.

Der relativ größte Halbmesser ist unter der Voraussetzung $a > 3$ nach dem Vorhergehenden der Scheitelhalbmesser $r$, in Fig. 76 durch $Aa = 25$ gegeben, während der kleinste Halbmesser der Stützlinie zu $\varrho_2 = 12{,}5$ entsprechend einem Winkel $\alpha = 33^0\ 30'$ aus der Tabelle zu entnehmen ist, und in der Figur einem Punkte zwischen $A_6$ und $A_7$ angehört. Der mittlere Halbmesser zwischen beiden ist also durch $1/2\ (25 + 12{,}5) = 18{,}75$ ausgedrückt, welcher einem Punkte der Stützlinie zwischen $A_2$ und $A_3$ zukommt. Denkt man sich nun von sämmtlichen Krümmungshalbmessern zwischen demjenigen $r$ im Scheitel $A$ und diesem mittleren Werthe $\frac{r + \varrho_2}{2}$ zu beiden Seiten des Scheitels das arithmetische Mittel genommen, welches durch $r_1$ ausgedrückt sein mag, so kann man dieses Mittel als den Halbmesser eines Kreissegmentes annehmen, welches sich auf einen Winkel erstreckt, der gleich ist der Summe aller der Winkel, die den einzelnen Radien zukommen, von denen $r_1$ das arithmetische Mittel ist. So z. B. ergiebt sich im vorliegenden Falle für $a = 25$ nach der Tabelle das arithmetische Mittel aller Radien zu beiden Seiten des Scheitels, die zwischen $r = 25$ und $\frac{1}{2}(r + \varrho_2) = 18{,}75$ gelegen sind, zu:

$$r_1 = \frac{19{,}8 + 23{,}2 + 25 + 23{,}2 + 19{,}8}{5} = 22{,}2,$$

und der Centriwinkel, welcher allen diesen Radien zukommt, zu $5 . 5 = 25^0$. Folglich wird man mit dem Radius $r_1 = 22{,}2$ ein Kreissegment von $25^0$ oder zu jeder Seite des Scheitels von $12{,}5^0$ als angenäherte Form für die Stützlinie anwenden können. In derselben Weise ergiebt sich nun das arithmetische Mittel $r_2$ aller der zwischen dem kleinsten Werthe $\varrho_2 = 12{,}5$ und jenem mittleren Werthe $\frac{1}{2}(r + \varrho_2) = 18{,}75$ gelegenen Radien nach der Tabelle zu:

$$r_2 = \frac{16{,}7 + 14{,}6 + 13{,}4 + 12{,}5 + 12{,}5 + 12{,}8 + 13{,}8 + 15{,}5 + 18{,}4}{9} = 14{,}4,$$

und der zu diesem Radius zugehörige Centriwinkel ist $9 . 5 = 45^0$. Will man die Stützlinie über den Winkel $12{,}5 + 45^0 = 57{,}5^0$ hinaus verlängern, so kann man der Tabelle zufolge den Halbmesser $\varrho = 23$ für $\alpha = 60^0$ anwenden u. s. w. In der Tabelle finden sich in den mit $r_1$, $r_2$, $r_3$ bezeichneten Horizontalreihen diese mittleren Halbmesser und unter $\alpha', \alpha''$ die zugehörigen Winkelabstände vom Scheitel angegeben, so zwar, daß man mit dem Halbmesser $r_1$ einen Bogen vom Scheitel aus zu jeder Seite im Betrage $\alpha'$ zu zeichnen, daran in jeder Gewölbhälfte je einen Bogen mit dem Halbmesser $r''$ vom Winkelbetrage $\alpha'' - \alpha'$ zu schließen hat u. s. w. In ähnlicher Weise würde man die mittleren Halbmesser bestimmen können, wenn man behufs engeren Anschlusses der Korblinie an die wirkliche Stützlinie für die erstere eine größere Anzahl (ungerade) von Bogensegmenten anwenden wollte.

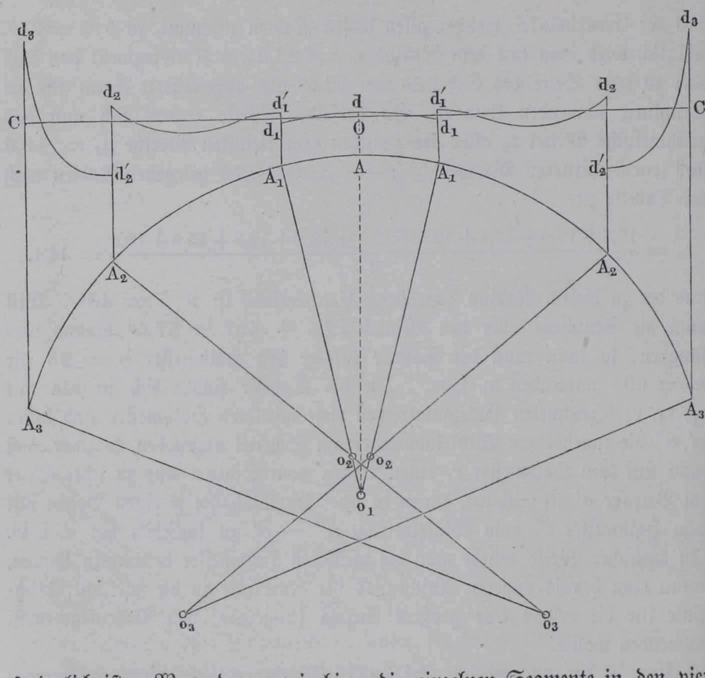
Eine in der vorstehenden Art aus verschiedenen Kreisbögen zusammengesetzte Korblinie kann natürlich nur als angenäherte Form der wirklichen Stützlinie gelten, und man wird bei der Annahme dieser Korblinie gewisse Fehler begehen, von deren Größe man sich leicht in jedem Falle Rechenschaft geben kann. Es sei zu dem Zwecke beispielsweise in Fig. 77 (a. f. S.) die Korblinie aus fünf Mittelpunkten $o_1\, o_2\, o_3$ gezeichnet, welche der obigen Tabelle gemäß der Stützlinie für den Modulus $a = 10$ entspricht, indem die Radien und Bögen

$$r_1 = A o_1 = 9{,}5;\quad \alpha' = A o_1 A_1 = 12{,}5^0,$$
$$r_2 = A_1 o_2 = 8{,}3;\quad \alpha'' = A A_1 A_2 = 50^0,$$
$$r_3 = A_2 o_3 = 15;\quad \alpha''' = A A_1 A_2 A_3 = 60^0$$

gewählt sind.

Man kann sich nun jedes der fünf verschiedenen Kreissegmente als eine exacte Stützlinie vorstellen, wenn man nämlich voraussetzt, daß die Belastung jedes einzelnen Theiles genau so vorgenommen werde, wie es nach dem vorigen Paragraphen für die zugehörige kreisförmige Stützlinie er-

Fig. 77.




forderlich ist. Wenn dann, wie hier, die einzelnen Segmente in den vier Vereinigungspunkten $A_1$ und $A_2$ ohne Knick in einander übergehen, und man ferner die für jede Stützlinie geltende Bedingung eines überall gleichen Horizontalschubes $H$ für alle Segmente stellt, so kann man auch die Vereinigung der fünf Segmente, d. h. die ganze Korblinie als eine exacte Stützlinie ansehen, für welche die Belastung durch die Vereinigung der auf die einzelnen Theile entfallenden Belastungen gegeben ist. Natürlich ist dann diese Belastung nicht mehr durch eine horizontale Ebene, sondern durch fünf verschiedene Belastungsflächen von der Art der in Fig. 71 gezeichneten dargestellt. Der Horizontalschub des Bogens ist nach Gleichung (8) allgemein durch $H = r z_0$ ausgedrückt, unter $r$ den Halbmesser im Scheitel und unter $z_0$ die Belastung daselbst verstanden, folglich hat man für die vorliegende Korblinie die Bedingung

$$H = r_1 z_0' = r_2 z_0'' = r_3 z_0''',$$

wenn $z_0'$, $z_0''$, $z_0'''$ die betreffenden Scheitelbelastungen der einzelnen Kreisgewölbe bedeuten. Dieser Horizontaldruck $H$ ist nun auch gleich demjenigen des Gewölbes mit horizontal abgeglichener Belastung vom Modul $a = 10$ zu setzen, für dessen Stützlinie die Korblinie ein Ersatz sein soll, und da für dieses Gewölbe, wenn $AO = y_0$ gleich der Einheit angenommen wird,

$$H = r y_0 = a y_0{}^2 = 10$$

ist, so findet man ohne Weiteres die Scheitelbelastungen der einzelnen Gewölbtheile zu

$$z_0' = \frac{H}{r_1} = \frac{10}{9{,}5} = 1{,}05 \quad \text{für } A_1 A A_1,$$

$$z_0'' = \frac{H}{r_2} = \frac{10}{8{,}3} = 1{,}205 \quad \text{für } A_1 A_2,$$

$$z_0''' = \frac{H}{r_3} = \frac{10}{15} = 0{,}667 \quad \text{für } A_2 A_3.$$

Mit diesen Scheitelbelastungen findet man nun durch die für Kreisgewölbe im vorigen Paragraphen gefundene Formel (11) $z = \frac{z_0}{\cos^3 \alpha}$ die Belastungshöhen für die Endpunkte $A_1$, $A_2$ und $A_3$ jedes Bogenstückes, wenn man für $\alpha$ die entsprechenden Werthe $\alpha' = 12{,}5^0$, $\alpha'' = 50^0$, $\alpha''' = 66^0$ einführt. Auf diese Weise hat man die Belastungsordinaten für

1) das mittlere Bogenstück $A_1 A_2$ im Scheitel:

$$z_0' = 1{,}05 = Ad,$$

an den Enden $A_1$:

$$z_0' \sec^3 12{,}5^0 = 1{,}13 = A_1 d_1;$$

2) das Gewölbstück $A_1 A_2$ jederseits in $A_1$:

$$z_0'' \sec^3 12{,}5^0 = 1{,}30 = A_1 d_1',$$

in $A_2$:

$$z_0'' \sec^3 50^0 = 4{,}54 = A_2 d_2;$$

3) das Gewölbstück $A_2 A_3$ jederseits in $A_2$:

$$z_0''' \sec^3 50^0 = 2{,}51 = A_2 d_2',$$

in $A_3$:

$$z_0''' \sec^3 66^0 = 9{,}94 = A_3 d_3.$$

Berechnet man auch noch für Zwischenpunkte die Ordinaten $z$, so erhält man als Belastungslinie die gebrochene Curve $d\, d_1\, d_1'\, d_2\, d_2'\, d_3$. Nach dieser Linie müßte folglich die Belastung über dem Gewölbe ausgebreitet sein, wenn die Korblinie eine exacte Stützlinie sein sollte. Soll dagegen die Korblinie nur als angenäherte Stützlinie für ein Gewölbe mit horizontal abgeglichener Belastung gelten, so hat man die Anordnung, d. h. die Halbmesser und Winkel für die Korblinie, so zu wählen, daß die horizontale Belastungslinie $C\,O\,C$ die Belastungscurve jedes einzelnen Gewölbtheiles derart schneidet, daß die Flächentheile oberhalb der Geraden gleich denjenigen unterhalb werden. In welcher Weise man, falls dies nicht der Fall sein sollte, eine entsprechende Correctur der Korblinie vornehmen kann, ist leicht zu erkennen, denn wenn man z. B. den Halbmesser $r_2 = A_1\, o_2$ entweder kleiner oder größer wählt, so wird dadurch das Curvenstück $d_1'\, d_2$ im ersten Falle gehoben, im zweiten gesenkt.

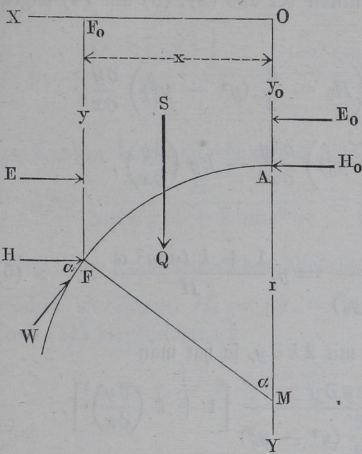
Aus dem Vorstehenden dürfte wohl von selbst hervorgehen, in welcher Weise man zu verfahren haben wird, um die Belastungsvertheilung zu ermitteln, vermöge deren eine bestimmt vorliegende Gewölbeform zur Stützlinie wird. In der Ausführung hat man dann in geeigneter Weise, z. B. bei Brückengewölben, durch Herstellung von Hohlräumen, Zwischengewölben, Mauerkörpern &c. dafür zu sorgen, daß die wirkliche Belastung des Gewölbes der gefundenen entspricht. Wo eine derartige Freiheit in der Belastung indessen nicht möglich ist, die letztere vielmehr von vornherein nahezu feststeht, wird man durch entsprechende Wahl der Gewölbeform diese zu einer Stützlinie machen können.

Es mag hier noch bemerkt werden, daß in der Praxis meistens nicht der Modulus oder der Halbmesser im Scheitel, sondern in der Regel die Spannweite $l$ und die Pfeilhöhe, d. h. die Höhe $h$ des Scheitels über den Kämpfern, sowie auch die Belastung im Scheitel $y_0$ gegeben ist. In diesem Falle hat man nur nöthig, in der Formel (15) für $x$ den Werth $\frac{l}{2}$ und für $y$ die Summe $y_0 + h$ einzuführen, um daraus die horizontale Schubkraft $H$ und folglich auch den Scheitelhalbmesser $r = \frac{H}{y_0}$ und den Modulus $a = \frac{r}{y_0} = \frac{H}{y_0^2}$ zu erhalten.

§. 24. **Die Stützlinie für Erddruck.** Wenn die Belastung des Gewölbes durch Sand, Erde oder überhaupt lockere Massen dargestellt wird, wie dies z. B. bei den Durchlässen unter Dammschüttungen der Fall ist, so hat man außer dem Gewichte dieser Massen auch deren Horizontalschub gegen das

Gewölbe zu berücksichtigen. Es sei $A$, Fig. 78, wieder der Scheitel des Gewölbes, über welchem die aus Erde vom specifischen Gewichte $\gamma$ zu denkende, oben horizontal abgeglichene Belastung die Höhe $AO = y_0$ habe, und sei das Eigengewicht des Gewölbes selbst gegen die darauf ruhende Erdmasse zuvörderst unberücksichtigt, was bei den gewöhnlich bedeutenden Ueberschüttungen nur einen unbeträchtlichen Fehler verursachen wird. Ein Stück des Gewölbes zwischen den Verticalebenen $AO$ durch den Scheitel und $FF_0$ durch den Punkt $F$, dessen Coordinaten $x$, $y$ sind, ist jetzt im Gleichgewichte unter Einfluß des Horizontalschubes $H_0$ im Scheitel, des Gewichtes $Q$ der betrachteten Masse $OF$, des Bogenwiderstandes $W$ in $F$, der unter dem Winkel $\alpha$ gegen den Horizont wirkt, und der beiden horizontalen Druckkräfte $E_0$ und $E$, mit welchen die verticalen Flächen $AO$ und $FF_0$ von der umgebenden Erdmasse gedrückt werden.

Fig. 78.




Setzt man den Erddruck gegen eine verticale Fläche von der Breite 1 und der beliebigen Tiefe $y$ nach den Ergebnissen des ersten Capitels (s. §. 8) gleich $\frac{k}{2}\gamma y^2$, unter $k$ einen von der Beschaffenheit der Erde abhängigen Coefficienten verstanden, so hat man, wenn man noch das Gewicht $\gamma$ eines Cubikmeters Erde als Kräfteeinheit wählt:

$$E_0 = \frac{k}{2} y_0^2 \text{ und } E = \frac{k}{2} y^2$$

zu setzen, und man hat daher, wenn hier unter $H = W \cos \alpha$ die horizontale Componente des Bogenwiderstandes $W$ verstanden wird, ähnlich wie in §. 22 die Gleichungen:

$$Q = W \sin \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$H = H_0 - \frac{k}{2}(y^2 - y_0^2), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\frac{Q}{H} = tang\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und

$$Q = \int_{y_0}^{y} y \,\partial x \,.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (4)$$

Man erhält daher durch Differentiiren der aus (2), (3) und (4) folgenden Gleichung

$$\int_{y_0}^{y} y \,\partial x = H \, tang \, \alpha = \left(H_0 - \frac{k}{2}\,(y^2 - y_0^2)\right) \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$y = \left(H_0 - \frac{k}{2}\,(y^2 - y_0^2)\right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - k y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,$$

woraus

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y . \frac{1 + k\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{H_0 - \frac{k}{2}\,(y^2 - y_0^2)} = y\, \frac{1 + k \, tang^2 \, \alpha}{H} \ .\ .\ . \quad (5)$$

folgt. Multiplicirt man beiderseits mit $2 k \,\partial y$, so hat man

$$2 k \frac{\partial y}{\partial x}\, \partial \frac{\partial y}{\partial x} = 2\, \frac{k y \,\partial y}{H_0 - \frac{k}{2}\,(y^2 - y_0^2)} \left[1 + k \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right],$$

woraus durch Integration

$$ln \left[1 + k \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] = -\, 2\, ln \left(H_0 - \frac{k}{2}\,(y^2 - y_0^2)\right) + Const \quad (6)$$

folgt. Da für $x = 0$, $y = y_0$ und $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ ist, so folgt die Constante aus $0 = -\, 2\, ln\, H_0 + C$, und Gleichung (6) geht damit über in

$$ln \left[1 + k \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] = 2\, ln\, \frac{H_0}{H_0 - \frac{k}{2}\,(y^2 - y_0^2)} = 2\, ln\, \frac{H_0}{H} \ .\ . \quad (7)$$

Diese Gleichung schreibt sich auch:

$$1 + k \, tang^2 \, \alpha = \left(\frac{H_0}{H_0 - \frac{k}{2}\,(y^2 - y_0^2)}\right)^2,$$

oder

$$H_0 - \frac{k}{2}\,(y^2 - y_0^2) = H = \frac{H_0}{\sqrt{1 + k \, tang^2 \, \alpha}} \ .\ .\ . \quad (8)$$

woraus weiter

$$y = \sqrt{y_0^2 + \frac{2 H_0}{k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k \, tang^2 \, \alpha}}\right)} \ .\ .\ .\ . \quad (9)$$

sich ergiebt, welche Gleichung die Ordinate $y$ für irgend welchen Neigungswinkel $\alpha$ der Stützlinie bestimmt.

Um auch die Krümmungsverhältnisse der Stützlinie zu ermitteln, hat man wieder den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{(1+tang^2\,\alpha)^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{1}{cos^3\,\alpha\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad . \; . \; . \; (10)$$

zu benutzen, welche Gleichung mit Rücksicht auf (5) und (8) übergeht in:

$$\varrho = \frac{H}{cos^3\,\alpha\, y\,(1+k\,tang^2\,\alpha)} = \frac{H_0}{y\,cos^3\,\alpha\,(1+k\,tang^2\,\alpha)^{3/2}} \quad . \; . \; (11)$$

Setzt man ferner wieder den Modulus des Gewölbes $\frac{r}{y_0} = a$, und den Schub im Scheitel $H_0 = r y_0 = a y_0^2$, so erhält man hiermit aus (9) und (11) die Gleichungen:

$$y = y_0 \sqrt{1 + \frac{2a}{k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+k\,tang^2\,\alpha}}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; (12)$$

und

$$\varrho = \frac{a\,y_0}{cos^3\,\alpha \sqrt{(1+k\,tang^2\,\alpha)^3\left[1+\frac{2a}{k}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+k\,tang^2\,\alpha}}\right)\right]}} \quad (13)$$

Kennt man den von der Beschaffenheit der Erdmasse abhängigen Coefficienten $k$, so lassen sich mit Hülfe dieser letzteren Formel die Krümmungshalbmesser der Stützlinie für beliebig viele Punkte berechnen, sobald man noch über den Modulus $a = \frac{r}{y_0}$ eine Annahme macht. Dieser Modul wird bei den hier in Betracht kommenden Tunnelgewölben wegen der meist hohen Scheitelbelastung $y_0$ immer nur einen kleinen Werth haben. Nach dem in §. 8 über den Erddruck Gesagten kann man

$$k = tang^2\,\frac{90^0 - \varrho}{2}$$

annehmen, und erhält für mittlere Erde, deren Reibungswinkel $\varrho = 36^0\,40'$ ist

$$k = tang^2\,\frac{90^0 - 36^0\,40'}{2} = tang^2\,26^0\,40' = 1/4.$$

Für diesen Werth von $k$ hat Schwedler folgende Tabelle der Krümmungshalbmesser für die Werthe des Moduls $a = 3,\ 1,\ 0{,}5$ und $0{,}1$ berechnet, in welcher wiederum die Ordinate $y_0$ der Scheitelbelastung als Einheit angenommen ist.

Tabelle
der Krümmungshalbmesser $\varrho$ für Stützlinien
mit Erddruck.

$$\varrho = \frac{a\,y_0}{\cos^3\alpha\sqrt{(1+k\,tang^2\alpha)^3\left[1+\frac{2\,a}{k}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+k\,tang^2\alpha}}\right)\right]}},$$

$$y_0 = 1,\ k = {}^1/_4.$$

| $\alpha =$ | $10^0$ | $20^0$ | $30^0$ | $40^0$ | $50^0$ | $60^0$ | $90^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = 3$ | 2,99 | 2,90 | 2,94 | 3,04 | 3,4 | 4 | 4,8 |
| $a = 1$ | 1,02 | 1,07 | 1,19 | 1,34 | 1,62 | 2 | 2,7 |
| $a = 0,5$ | 0,51 | 0,55 | 0,64 | 0,75 | 0,95 | 1,25 | 1,8 |
| $a = 0,1$ | 0,103 | 0,113 | 0,134 | 0,168 | 0,225 | 0,317 | 0,6 |

Den Werthen dieser Tabelle entsprechend ist in Fig. 79 die Stützlinie für den Modul $a = 0,5$ in der Weise gezeichnet, wie früher gelegentlich der Fig. 76 angegeben wurde. Zur einfacheren Construction einer angenäherten Form schlägt Schwedler vor, eine aus mehreren Kreisbögen zusammengesetzte Korblinie zu wählen, und zwar soll man für die vorliegende, dem Modul $a = 0,5$ entsprechende Stützlinie, dem Scheitelradius $\mathfrak{r}_1$ eine Größe gleich $0,5\ y_0$ geben, die Halbmesser $\mathfrak{r}_1 = o_1 A_1$, $\mathfrak{r}_2 = o_2 A_2$ und $\mathfrak{r}_3 = o_3 A_3$ in dem Verhältnisse wie $1 : 1,5 : 2,5$ annehmen, und jedem der drei Bögen $A A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ einen Centriwinkel von $30^0$ geben. Unter dieser Voraussetzung würde die Spannweite $A_3 A_3$, die sich allgemein durch

$$l = 2\,[\mathfrak{r}_1 \sin\alpha' + \mathfrak{r}_2 (\sin\alpha'' - \sin\alpha') + \mathfrak{r}_3 (\sin\alpha''' - \sin\alpha'')]$$

ausdrückt, zu

$$l = 2,77\ \mathfrak{r}_1$$

sich ergeben, oder man hätte

$$\mathfrak{r}_1 = 0,361\ l,$$

folglich

$$\mathfrak{r}_2 = 1,5\ \mathfrak{r}_1 = 0,542\ l$$

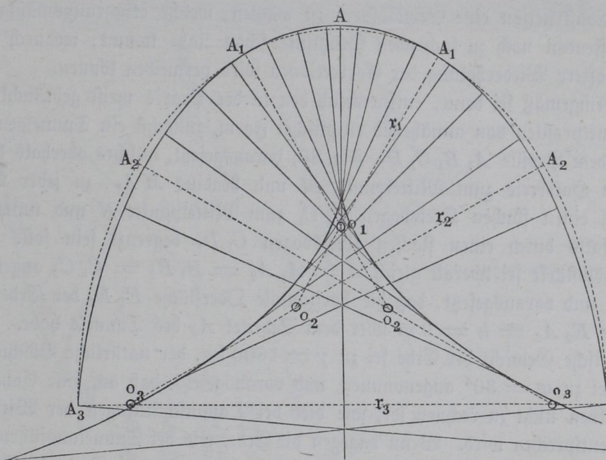
und

$$\mathfrak{r}_3 = 2,5\ \mathfrak{r}_1 = 0,903\ l.$$

Die Halbmesser und die angenäherte Korblinie sind in der Figur durch punktirte Linien angegeben.

Für einen größeren Modul, wie etwa für $a = 1$ bis zu $a = 3$, genügen danach zwei Kreisbogen für jede Gewölbhälfte, von denen jeder einem

Fig. 79.




Centriwinkel von 45° entspricht (s. die Abhandlung von Schwedler an vorgedachter Stelle).

Bei der vorstehenden Untersuchung ist, wie bereits bemerkt worden, das Eigengewicht des Gewölbes nicht berücksichtigt worden. Ebenso ist dabei angenommen, daß die horizontale Componente $E$ des Erddruckes auf ein beliebiges Element der Wölbfläche proportional mit dessen Verticalprojection und unabhängig von der Neigung dieses Elementes gegen den Horizont ist. Letztere Annahme wird nun mit dem im Cap. I über den Erddruck Gesagten sich nicht vereinbaren lassen, da hiernach sowohl die Richtung wie die Größe des Erddruckes gegen eine Fläche mit deren Neigung veränderlich ist. Die Durchführung einer Rechnung, welche diese Abhängigkeit des Erddruckes auf die verschiedenen Gewölbtheile von deren Neigung berücksichtigt, würde kaum möglich sein, wogegen eine graphische Behandlung des vorliegenden Falles keinerlei Schwierigkeiten darbietet. Es soll daher im Folgenden auf graphischem Wege die Aufgabe gelöst werden, für ein Tunnelgewölbe die Stützlinie oder diejenige Form des Gewölbes zu ermitteln, bei welcher die Mittellinie zu einer Stützlinie wird, und soll dabei nicht nur die erwähnte Abhängigkeit des Erddruckes von der Neigung der Gewölbflächentheile, sondern auch das Eigengewicht des Gewölbes berücksichtigt werden.

$g_{10}$ unter sich gleiche Größe haben, wirken in den Schwerpunkten $s_1$, $s_2 \ldots s_{10}$ der einzelnen Gewölbsectoren, welche in bekannter Weise leicht zu bestimmen sind, wenn man die Profile der einzelnen Gewölbtheile als Trapeze ansieht.

Um nun die Größe und Richtung des Erddruckes für jeden der einzelnen Gewölbtheile zu ermitteln, kann man sich am besten der aus der Mohr'schen Theorie des Erddruckes (s. §. 4) gefolgerten Regeln bedienen. Zu dem Ende sei eine Verticallinie $EF$ durch irgend einen Punkt $E$ der Erdoberfläche gezogen und darauf eine beliebige Strecke $EF$ (in der Figur 4 m), abgetragen. Werden dann ferner an $EF$ unter dem Reibungswinkel $\varphi = 30^0$ die beiden Geraden $ET_1$ und $ET_2$ gelegt, so erhält man bekanntlich in dem diese Geraden berührenden und durch $F$ gehenden Kreise $K$ ein Mittel zur Bestimmung des specifischen Erddruckes für irgend ein Flächenelement in $F$, d. h. in einer Tiefe $EF$ unter der Oberfläche. Danach ergiebt sich nun leicht folgende Construction:

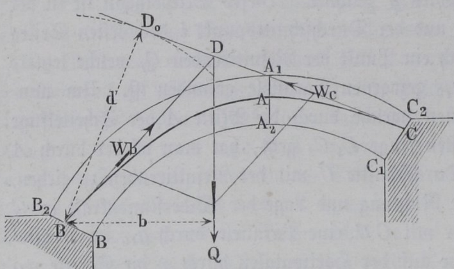
Um für irgend einen Gewölbtheil, z. B. den zwischen $a_4$ und $a_5$ gelegenen, den Erddruck zu bestimmen, kann man die Fläche $a_4 a_5$ genügend genau als eine Ebene betrachten. Zieht man daher durch $F$ eine Parallele $FF_5$ mit $a_4 a_5$, so erhält man nach §. 4 in der Strecke $EF_5$ das Maß für die specifische Spannung eines in der Tiefe $EF$ unter der Erdoberfläche gelegenen Flächenelementes, das mit $a_4 a_5$ parallel ist. Da nun der specifische Druck proportional mit der Tiefe wächst, so hat man, um die Pressung für $a_4 a_5$ zu erhalten, auf der Horizontalen durch $F$ nur die Strecke $EF_5$ gleich $f\,5$ anzutragen, durch die Mitte $b_5$ zwischen $a_4$ und $a_5$ eine Horizontale $b_5 f_5$ zu ziehen, auf welcher die durch $E_0$ und 5 gezogene Gerade das Stück $f_5 f_5'$ abschneidet, welches die mittlere specifische Pressung des Erddruckes auf das Element $a_4 a_5$ darstellt. Daher ist der Erddruck auf diese Fläche $a_4 a_5$ gegeben durch das Gewicht eines Erdprismas von der Höhe $f_5 f_5'$ und einer Basis, deren Breite gleich $a_4 a_5$, und deren Länge senkrecht zur Figur 1 m ist. Die Reduction dieses Prismas auf die gemeinsame Basis 5 qm liefert die Strecke für den gesuchten Erddruck. Die Richtung dieses Druckes ist ebenfalls durch den Kreis $K$ festgestellt, denn nach §. 4 giebt $FEF_5$ den Winkel $\delta$ an, unter welchem der Erddruck gegen die Normale zur Fläche $a_4 a_5$ geneigt ist, so daß der Erddruck in der Richtung $e_5 b_5$ angetragen werden kann.

In derselben Weise ist nun für jeden Gewölbtheil der Erddruck bestimmt und seine Richtung in den Mitten der gedrückten Flächen angetragen ($e_1, e_2, e_3 \ldots e_{10}$). Um alsdann den Erddruck $e$ jedes Elementes mit dem Gewichte $g$ desselben zu vereinigen, ist nun das Kräftepolygon $p\, e_1\, g_1\, e_2\, g_2 \ldots e_{10}\, g_{10}$ gezeichnet, indem die einzelnen Kräfte $e$ und $g$ ihrer Aufeinanderfolge gemäß von einem beliebigen Punkte $p$ aus aneinander gefügt sind. Man ersieht hieraus zunächst, daß die Eigengewichte $g$ der einzelnen Gewölbsegmente gegen den Erddruck derselben nur sehr gering sind. Um nun die Mittelkraft aus $e$ und $g$ für irgend ein Element, z. B. $a_4 a_5$ zu finden, hat man nur im Kräftepolygon die Punkte $g_4$ und $g_5$ zu verbinden, so erhält man in der Strecke $g_4 g_5$ der Richtung und Größe nach die Mittelkraft $q_5$ aus dem Eigengewichte $g_5$ und dem Erddrucke $e_5$ des Elementes $a_4 a_5$, und zwar hat man sich den Durchschnittspunkt dieser beiden Kräfte als den Angriffspunkt der Mittelkraft $q_5$ zu denken. Ist diese Construction von $q_1, q_2, q_3 \ldots$ für sämmtliche Theile des Gewölbes durchgeführt, so ist es leicht, die resultirende Kraft $Q$ aller dieser Kräfte $q_1 q_2 \ldots q_{10}$ zu bestimmen. Die Größe und Richtung derselben ist schon aus dem Kräfteplane durch die Strecke $p g_{10}$ gegeben, und um auch die Lage von $Q$ festzustellen, kann in bekannter Weise ein Seilpolygon dienen, welches man mit Hülfe eines willkürlich angenommenen Poles $p'$ zeichnet. Dieses Seilpolygon ist in der Figur punktirt angedeutet, und der Durchschnittspunkt $i$ des ersten Seiles mit dem letzten ist bekanntlich ein Punkt der Resultirenden $Q$, welche letztere also in der durch $i$ zu $p g_{10}$ gezogenen Parallele gefunden ist. Um nunmehr die Stützlinie zu zeichnen, welche durch die Mitte $A$ der Scheitelfuge und die Mitte $C$ der untersten Fuge $C_1 C_2$ geht, hat man wieder durch $A$ eine Horizontale bis zum Durchschnitte $U$ mit der Resultirenden zu ziehen, um in der Geraden $CU$ die Richtung und Lage der Widerstandskraft in $C$ zu finden. Zieht man daher mit $CU$ eine Parallele durch $g_{10}$ im Kräftepolygone, so schneidet dieselbe auf der Horizontalen durch $p$ die Strecke $p\,o$ ab, welche den Horizontalschub $H$ im Scheitel darstellt. Die Zeichnung des Seilpolygons für den gefundenen Horizontalschub $H$ oder Pol $o$ macht nun keine Schwierigkeiten, und wenn man die Schnittpunkte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$, in welchen die Fugen von den entsprechenden Seiten des Seilpolygons getroffen werden, mit einander durch eine stetige Curve $A \sigma_1 \sigma_2 \ldots C$ verbindet, so stellt diese die gesuchte Stützlinie des Gewölbes vor.

Wie aus der Figur zu ersehen ist, fällt diese Stützlinie zwar überall in die Gewölbstärke hinein, doch hat sie mit der Mittellinie des Gewölbes außer den Punkten $A$ im Scheitel und $C$ im Kämpfer keinen Punkt gemein. Am meisten nähert sich die Stützlinie der inneren Leibung zwischen den Punkten $\sigma_4$ und $\sigma_5$. Wenn nun die Aufgabe gestellt ist, die Gewölbform so zu entwerfen, daß die Mittellinie eine Stützlinie wird, so hat man nur nöthig, zu beiden Seiten dieser Stützlinie $A \sigma_1 \sigma_2 \ldots C$ zwei parallele Curven $A_1 S_1 C_1$ und $A_2 S_2 C_2$ zu ziehen, von welchen jede von der Stützlinie $A \sigma C$ um die halbe Gewölbdicke entfernt ist, und dann sind diese beiden Curven als die Profile für die innere und äußere Leibung anzusehen. Allerdings wird durch die so vorgenommene Veränderung der Gewölbform auch eine Aenderung in der Druckvertheilung herbeigeführt werden, so daß die nunmehr dem Gewölbe zugehörige Stützlinie nicht mehr genau mit $A\,\sigma_1\,\sigma_2\,\ldots\,C$ zusammenfällt. Zeichnet man daher in der vorgedachten Weise durch Wiederholung des angegebenen Verfahrens die neue Stützlinie, und betrachtet diese letztere als Mittellinie, so wird nunmehr die damit verbundene Abänderung so gering ausfallen, daß man die gefundene Form als die der Aufgabe entsprechende ansehen darf.

§. 25. **Unsymmetrische Gewölbe.** Bisher wurde immer eine gegen den Scheitel des Gewölbes symmetrische Form und Belastung desselben vorausgesetzt, in Folge dessen es genügte, eine Hälfte des Gewölbes zu betrachten, indem unter dieser Voraussetzung die Stützkraft $H$ im Scheitel sowie die Tangente der Stützlinie daselbst die horizontale Richtung haben, und auch die Stützlinie zu beiden Seiten symmetrisch ausfallen muß. Wenn dagegen hinsichtlich der Form, oder der Belastungsart oder in Bezug auf beide Elemente zu beiden Seiten des Scheitels eine Verschiedenheit vorhanden ist, so wird auch die Stützlinie nicht mehr symmetrisch sein. Es wird in dem Scheitel, d. h. an der höchsten Stelle $A_1 A_2$, Fig. 81, des Gewölbes im Allgemeinen weder die Stützlinie noch die Stützkraft horizontal sein, vielmehr wird dies an einer anderen Stelle stattfinden, deren Lage von der Form und Lastvertheilung des Gewölbes abhängt. Es ist daher nöthig, diesen allgemeinen Fall noch einer besonderen Behandlung zu unterziehen, welche mit Rücksicht auf das Vorhergegangene besondere Schwierigkeiten nicht darbietet.

Fig. 81.




Während es nach dem Vorhergehenden (s. §. 18) für ein symmetrisches Gewölbe, dessen Lastvertheilung gegeben ist, zur Construction der Stützlinie genügt, irgend zwei verschieden hoch gelegene Punkte derselben zu kennen, reicht diese Bedingung für ein unsymmetrisches Gewölbe nicht mehr aus, wie sich leicht übersehen läßt. Denn nimmt man z. B. für das Gewölbe $BAC$, Fig. 81, dessen resultirende Gesammtbelastung $Q$ in die Richtung $DQ$ fallen möge, irgend zwei Punkte $B$ und $C$ an, durch welche die Stützlinie hindurchgehen soll, so läßt sich das Gleichgewicht zwischen der Belastung $Q$ und zwei von $B$ und $C$ geäußerten Stützreactionen $W_b$ und $W_c$ in unendlich verschiedener Art herstellen. Man kann nämlich irgend welchen Punkt $D$ in der Richtung von $Q$ mit $B$ und $C$ verbinden, und erhält durch die Zerlegung von $Q$ nach den beiden Richtungen $DB$ und $DC$ die gesuchten Stützreactionen $W_b$ und $W_c$. Zur Beseitigung dieser Unbestimmtheit ist daher noch die Kenntniß eines dritten Elementes erforderlich, sei dies die Richtung oder die Größe einer der Stützreactionen, oder sei es ein dritter Punkt, durch welchen die Stützlinie ebenfalls hindurchgeht.

Ist z. B. außer $B$ und $C$ die Richtung der Reaction $W_b$ gegeben, so ist damit auch der Schnittpunkt $D$ unzweifelhaft festgestellt. Ebenso ist dies der Fall, wenn eine der Stützkräfte, z. B. $W_c$ in $C$ nur ihrer Größe nach, nicht aber ihrer Richtung nach bekannt ist, denn in diesem Falle erfordert das Gleichgewicht in Bezug auf den anderen Stützpunkt $B$, daß die Gleichung erfüllt sei:

$$Qb = W_c d,$$

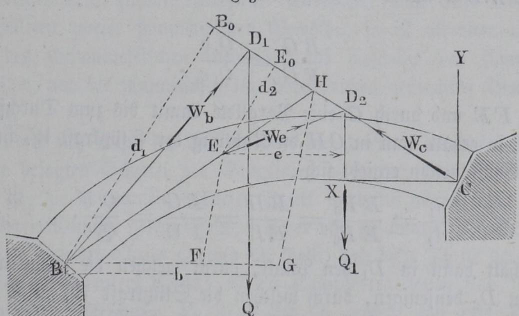
wenn $b$ und $d$ die betreffenden Hebelarme bedeuten. Zeichnet man daher mit dem aus obiger Gleichung zu berechnenden Hebelarme

$$d = \frac{Qb}{W_c}$$

als Radius einen Kreis um $B$, so giebt die von $C$ an diesen Kreis gezogene Tangente $CD_0$ die Richtung von $W_c$ und in $D$ den Schnittpunkt mit $Q$, durch welchen auch die andere Reaction $W_b$ hindurchgeht.

Wenn von der Stützlinie drei beliebige Punkte $B$, $C$ und $E$, Fig. 82 gegeben sind, so läßt sich die Stützlinie ebenfalls leicht folgendermaßen be-

Fig. 82.




stimmen. Ist wieder mit $W_c$ die der Richtung und Größe nach unbekannte Reaction in $C$ bezeichnet, deren verticale und horizontale Componenten bezw. $V_c$ und $H_c$ sein mögen, und denkt man $C$ als Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems mit horizontaler X Axe, in welchem

$x_e$, $y_e$, $x_b$ und $y_b$ die Coordinaten von $E$ und $B$ sind, so hat man wieder, unter $Q$ und $Q_1$ die Gewichte von $CB$ und $CE$ und unter $b$ und $e$ deren Hebelarme für $B$ und $E$ verstanden, die Gleichungen

$$Q\,b = H_c y_b + V_c x_b \text{ für } B$$

und

$$Q_1 e = H_c y_e + V_c x_e \text{ für } E.$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind in jedem Falle die Componenten $V_c$ und $H_c$ der Stützreaction in $C$ zu bestimmen, wodurch diese selbst ihrer Größe und Richtung nach festgestellt ist.

Man kann diese Reaction $W_c$ aber auch graphisch leicht finden. Bezeichnet man nämlich mit $d_1$ und $d_2$ die Abstände der vorläufig noch unbekannten Richtung $W_c$ von $B$ und $E$, so hat man:

$$W_c d_1 = Q b \text{ für } B$$

und

$$W_c d_2 = Q_1 e \text{ für } E,$$

daher

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{Q\,b}{Q_1 e}.$$

Nun ist aber nach der Figur, wenn man $BE$ zieht, auch

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{BH}{EH} = \frac{Q\,b}{Q_1 e},$$

woraus die Construction unmittelbar folgt: Man trage auf einer beliebig durch $B$ gezogenen Geraden $BG$ in einem ebenfalls beliebigen Maßstabe die Strecken $BG$ und $FG$ proportional den Momenten $Qb$ und $Q_1 e$ auf so daß

$$\frac{BG}{FG} = \frac{Q\,b}{Q_1 e}$$

ist, ziehe $FE$ und durch $G$ eine Parallele damit bis zum Durchschnitte $H$ mit $BE$, so erhält man in $CH$ die Richtung der Stützkraft $W_c$ in $C$, denn aus der Construction ergiebt sich

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{B B_0}{E E_0} = \frac{B H}{E H} = \frac{B G}{F G} = \frac{Q\,b}{Q_1 e}.$$

Man erhält dann in $D_1$ den Punkt, durch welchen die Stützkraft $W_b$ in $B$ und in $D_2$ denjenigen, durch welchen die Stützkraft $W_e$ in $E$ hindurchgehen muß u. s. w. Ueberhaupt kann nunmehr die Construction der Stützlinie in ihrem ganzen Verlaufe mit Hülfe des zugehörigen Kräftepolygons in der mehrfach besprochenen Weise vorgenommen werden.

Die für symmetrische Gewölbe gefundene Eigenschaft, wonach die Horizontalkraft für alle Punkte der Stützlinie denselben Betrag $H$ hat, gilt allgemein auch für ein unsymmetrisch geformtes Gewölbe, welches durch verticale Kräfte in ganz beliebiger Weise belastet ist, und ebenso hat man für die verticalen Componenten $V_b$ und $V_c$ der Stützkräfte $W_b$ und $W_c$ zweier beliebigen Punkte $B$ und $C$ der Stützlinie die Beziehung

$$V_b + V_c = Q,$$

wenn $Q$ die gesammte zwischen $B$ und $C$ auf das Gewölbe wirkende Belastung bedeutet. Bezeichnet allgemein $V$ die verticale Componente in irgend einem Punkte der Stützlinie, so gilt für den Neigungswinkel $\alpha$ der Stützkraft gegen den Horizont in diesem Punkte ebenfalls die Gleichung

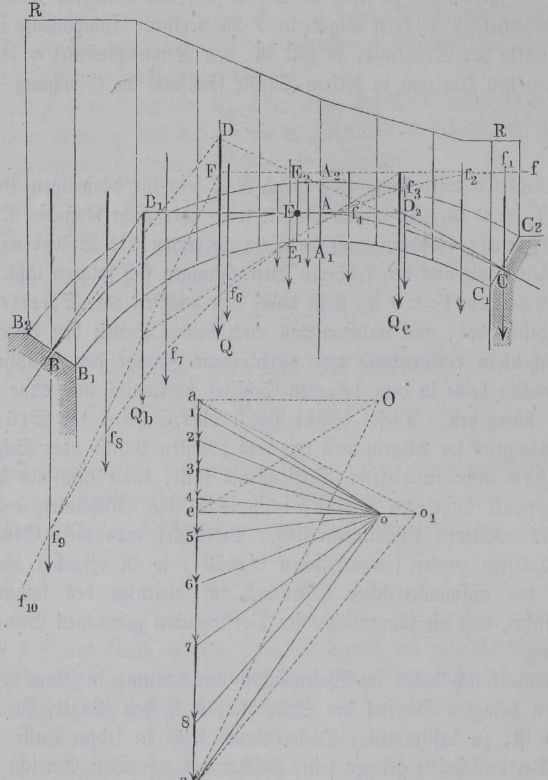
$$tang\ \alpha = \frac{V}{H}.$$

Dieser Winkel $\alpha$ wird demgemäß gleich Null sein für denjenigen Punkt, für welchen $V = 0$ ist. In diesem Punkte wird aber nicht bloß die Richtung der Stützkraft, sondern auch die Tangente an die Stützlinie horizontal sein, wie aus den früheren Betrachtungen sich folgern läßt. Dieser Punkt, in welchem $V = 0$ ist, stellt daher den höchsten oder Scheitelpunkt der Stützlinie dar, von welchem aus nach beiden Seiten den beiderseitigen Gewölbschenkeln entsprechend zwei verschiedene Zweige der Stützlinie ausgehen, welche beide in dem besagten Scheitel horizontal und ohne Knick in einander übergehen. Dieser höchste Punkt oder Scheitel der Stützlinie, welcher übrigens im Allgemeinen mit dem höchsten Punkte oder Scheitel des Gewölbes nicht in dieselbe Verticallinie fällt, kann nun als der Vereinigungspunkt angesehen werden, in welchem die Stützlinien der beiderseitigen Gewölbtheile zusammentreffen. Betrachtet man diese Gewölbtheile als die Hälften zweier symmetrischen Gewölbe, so ist offenbar die Untersuchung des unsymmetrischen Gewölbes auf diejenige des symmetrischen zurückgeführt, und die sämmtlichen im Vorstehenden gemachten Bemerkungen sind gültig.

Es handelt sich daher im Wesentlichen nur darum, in jedem besonderen Falle den besagten Scheitel der Stützlinie, d. h. den Punkt, für welchen $V = 0$ ist, zu bestimmen. Dieser Punkt wird in jedem Falle in demjenigen Verticalschnitte gelegen sein, welcher das gesammte Gewicht des Gewölbes $Q$ so in zwei Theile $Q_b$ und $Q_c$ theilt, daß diese Theile gerade gleich den Verticalcomponenten $V_b$ und $V_c$ der Kämpferreactionen sind, denn aus der allgemeinen Gleichung $V_b + V = Q_b$ ergiebt sich mit $V_b = Q_b$ offenbar $V = 0$, d. h. die Bedingung für den Scheitel. Eine Ermittelung dieses Querschnittes wird in jedem besonderen Falle durch Rechnung oder Construction geschehen können, dagegen wird die Aufstellung allgemeiner Formeln nicht möglich sein, wenn Form und Belastungsart des Gewölbes ganz willkürlich angenommen werden. Am einfachsten wird man die Bestimmung des Gewölbscheitels und der beiden Stützlinienzweige durch Construction bewirken, und zwar kann dies etwa folgenderart geschehen.

Es sei $BAC$, Fig. 83, der Querschnitt irgend eines Gewölbes, dessen Kämpferfugen durch $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ dargestellt sind, und dessen Scheitel

Fig. 83.




in der Verticalebene durch $A$ gelegen ist. Die ganz beliebig vertheilte Belastung sei auf das specifische Gewicht des Gewölbmaterials reducirt und die Belastungslinie durch $RR$ dargestellt. Es mögen zunächst die beliebigen Punkte $B$ und $C$ in den Kämpferfugen als Punkte der Stützlinie vorausgesetzt und es soll der noch zu suchende Scheitel der Stützlinie in der Mitte der Gewölbstärke liegend angenommen werden. Zunächst sucht man die Schwerlinie $DQ$ des ganzen Gewölbes nebst Belastung, was am einfachsten mit

Hülfe des Kräfteplans $a\,1\,2\,\ldots\,9$ geschieht, welcher in den einzelnen Strecken $a\,1$, $1\,2$, $2\,3\,\ldots\,8\,9$ die Gewichte der einzelnen Streifen darstellt, in welche das Gewölbe durch eine Anzahl verticaler Ebenen zerlegt wird. Nimmt man ganz beliebig irgendwo einen Pol $O$ an, und construirt mit Hülfe desselben das in der Figur punktirte Seilpolygon $f f_1 f_2 \ldots$, so erhält man bekanntlich in dem Schnittpunkte $F$ der Endseile einen Punkt, durch welchen die Schwerlinie des ganzen Gewölbes hindurchgeht, dessen Gewicht nach dem gewählten Kräftemaßstabe durch die Strecke $a\,9$ dargestellt ist. Zieht man nun durch irgend einen Punkt $D$ dieser Schwerlinie Strahlen nach $B$ und $C$, und damit im Kräfteplane durch $a$ und 9 Parallelen, welche sich in $o_1$ treffen, so erhält man in $a\,o_1$ und $o_1\,9$ die Stützkräfte $W_c$ und $W_b$ gegen die Kämpfer in $C$ und $B$, daher ist, wenn noch $o_1\,e$ horizontal gezogen wird,

$$a e = V_c \text{ und } e\,9 = V_b.$$

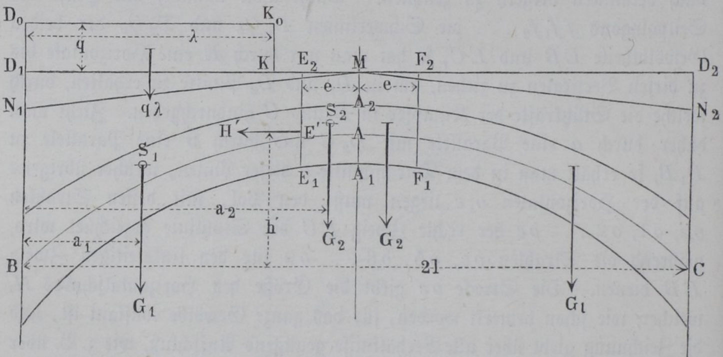
Der Punkt $e$ im Kräftepolygone entspricht dem Verticalschnitte $E_1\,E_2$ im Gewölbe, und folglich muß in dieser Verticalebene der gesuchte Scheitel der Stützlinie liegen. Wählt man der Bedingung gemäß die Mitte $E$ zwischen $E_1$ und $E_2$ als diesen Punkt der Stützlinie, so ist die letztere nunmehr leicht nach bekannten Regeln zu zeichnen. Sucht man nämlich mit Hülfe des Seilpolygons $f f_1 f_2 \ldots$ die Schwerlinien $D_1\,Q_b$ und $D_2\,Q_c$ der beiden Gewölbtheile $EB$ und $EC$, so hat man nur durch $E$ eine Horizontale bis zu diesen Verticalen zu ziehen, um in $D_1$ und $D_2$ Punkte zu erhalten, durch welche die Stützkräfte der Kämpfer in $B$ und $C$ hindurchgehen. Zieht man daher durch $a$ eine Parallele mit $D_2\,C$ und durch 9 eine Parallele zu $D_1\,B$, so erhält man in dem Durchschnitte $o$ dieser Linien, welcher übrigens auf der Horizontalen $o_1\,e$ liegen muß, den Pol, mit dessen Strahlen $oa$, $o\,1$, $o\,2\,\ldots\,oe$ der rechte Zweig $EC$ der Stützlinie gezeichnet wird, während die Strahlen $oe$, $o\,5$, $o\,6\,\ldots\,o\,9$ für den linksseitigen Zweig $EB$ dienen. Die Strecke $oe$ giebt die Größe des Horizontalschubes $H$, welcher, wie schon bemerkt worden, für das ganze Gewölbe constant ist, und die Zeichnung giebt über alle Verhältnisse genügend Aufschluß, wie z. B. über die Richtung der Stützkräfte durch die Neigung der Polstrahlen u. s. w.

Für jeden der beiden Zweige der Stützlinie gelten nunmehr die in den vorhergehenden Paragraphen für symmetrische Gewölbe angeführten Bemerkungen, und man kann beispielsweise die Form des Gewölbes derart verändern, daß die gefundene Stützlinie eine Mittellinie des Gewölbes wird. Mit dieser Veränderung ist dann zwar auch eine geringe Abänderung der Lastvertheilung verbunden, doch wird die Abweichung der nunmehrigen Stützlinie in den meisten Fällen so unbeträchtlich sein, daß eine Wiederholung derselben Construction für die neue Gewölbform nur ausnahmsweise nöthig werden wird.

**§. 26. Bewegliche Belastung.** In derselben Weise, wie vorstehend die Stabilitätsverhältnisse eines unsymmetrischen und beliebig belasteten Gewölbes geprüft worden sind, läßt sich die Untersuchung auch für ein symmetrisches Gewölbe führen, dessen beide Hälften in ungleicher Weise belastet werden. Dieser Fall gewährt deswegen ein besonderes Interesse, weil er bei allen Brückengewölben vorkommt, sobald eine bewegliche Last, z. B. ein Eisenbahnzug oder ein Frachtwagen über die Brücke fährt. Von dem Augenblicke an, in welchem diese bewegliche Last einen Kämpfer des Gewölbes überschreitet, wird die vorher im Gewölbe vorhandene symmetrische Stützlinie sich fortwährend verändern, indem der Scheitel der Stützlinie sich gleichzeitig mit der Last verschiebt, und es handelt sich daher noch darum, zu untersuchen, ob durch diese Verschiebung die Stabilität des Gewölbes nicht in bedenklicher Weise gefährdet wird. In dieser Beziehung kann man folgende Bemerkungen machen.

Es sei $BAC$, Fig. 84, ein zu $MA$ symmetrisches Brückengewölbe, dessen Eigengewicht incl. der Fahrbahn, auf das Gewölbmaterial reducirt, durch

Fig. 84.




die Belastungslinie $N_1 M N_2$ dargestellt sein soll, während $D_1 M D_2$ die horizontale Fahrbahn sein möge. Für den unbelasteten Zustand wird die Stützlinie in der Mitte $MA_1$ eine horizontale Tangente haben, und es möge etwa angenommen werden, daß für diesen Zustand die Stützlinie durch die Mitten $B$ und $C$ der Kämpferfugen und $A$ der Scheitelfuge gehe. Denkt man sich nun von links her eine bewegliche Last, etwa einen Eisenbahnzug ankommend, welcher bis zu einem beliebigen Punkte $K$ um die Länge $D_1 K = \lambda$ sich bewege. Drückt man auch diese als gleichmäßig auf die Länge $D_1 K$ vertheilt anzunehmende bewegliche Last $Q$ durch das Gewicht eines Prismas von Gewölbmaterial aus, dessen Höhe zu $q = D_1 D_0 = K K_0$ ermittelt sein soll, so ist die Verkehrslast durch das Rechteck $D_1 K K_0 D_0$ vom Inhalte $q \lambda$ gegeben. Durch diese einseitige Belastung des Gewölbes wird der Scheitel der Stützlinie aus der Mittelebene $MA$ um eine gewisse Größe nach links gerückt, und es möge etwa die Ebene $E_1 E_2$ im Abstande $e$ von $M$ nunmehr den Punkt der Stützlinie enthalten, in welchem ihre Tangente horizontal ist. Es sei ferner etwa $E'$ dieser Punkt und $H'$ die daselbst wirkende Horizontalkraft, sowie $h'$ die verticale Höhe von $E'$ über der Horizontalen $BC$. Die Ebene $E_1 E_2$ theilt die linke Gewölbhälfte $BA$ in zwei Theile $BE'$ und $E'A$, deren Gewichte, ohne Einschluß der beweglichen Last, bezw. durch $G_1$ und $G_2$ bezeichnet werden sollen, während $a_1$ und $a_2$ die Abstände dieser Gewichte vom Kämpfer $B$, also $G_1 a_1$ und $G_2 a_2$ die betreffenden Momente sind. Wenn man nun auch die rechte Gewölbhälfte $AC$ durch eine Ebene $F_1 F_2$, ebenfalls im Abstande $e$ von $M$, in zwei eben solche Theile von den Gewichten $G_1$ und $G_2$ und den Momenten $G_1 a_1$ und $G_2 a_2$ in Bezug auf $C$ getheilt denkt, so kann man, unter $2l = BC$ die horizontale Entfernung der Kämpferstützen verstanden, für die beiden im Scheitel $E'$ der Stützlinie zusammenstoßenden Gewölbtheile $BE'$ und $CE'$ die beiden Gleichgewichtsbedingungen schreiben:

$$H' h' = G_1 a_1 + q \lambda \frac{\lambda}{2} \text{ für } BE'$$

und

$$H' h' = G_1 a_1 + G_2 a_2 + G_2 (2l - a_2) = G_1 a + G_2 \, 2l \text{ für } CE',$$

daher erhält man durch Subtraction:

$$q \frac{\lambda^2}{2} = G_2 \, 2l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Aus dieser einfachen Gleichung läßt sich jederzeit für eine bestimmte einseitige Belastung die Verschiebung $e$ des Scheitels der Stützlinie aus der Gewölbmitte dadurch bestimmen, daß man der jeweiligen Form und Construction der Brücke entsprechend dasjenige Stück des Gewölbes $AE'$ ermittelt, dessen Gewicht

$$G_2 = \frac{q \lambda^2}{4 l}$$

gegeben ist, und man ersieht auch, daß die Rechnung dieselbe bleibt, wenn die bewegliche Last $Q$ nicht gleichmäßig vertheilt, sondern in einem oder mehreren Punkten concentrirt angenommen werden müßte, in welchem Falle man anstatt $q \frac{\lambda^2}{2}$ nur das Moment dieser concentrirten Belastung für den Punkt $B$ in die Rechnung einzuführen hätte. In den meisten Fällen der

Wirklichkeit wird man indessen, wie hier geschehen, eine gleichmäßige Vertheilung der Last annehmen dürfen, da auch concentrirte Lasten, wie die Drucke der Wagenräder durch die Erdschüttung und das Pflaster, bezw. durch die Schienen und Schwellen und deren Bettung sich auf eine größere Fläche des eigentlichen Gewölbes übertragen.

Die gefundene Beziehung $G_2 = \frac{q\,\lambda^2}{4\,l}$ zeigt, daß mit zunehmendem Momente $q\,\frac{\lambda^2}{2}$ der einseitigen Last $Q$ auch das Gewicht $G_2$ des zwischen $A$ und $E'$ gelegenen Gewölbtheiles, und folglich auch die Größe $ME' = e$ zunimmt. Dieses Verhalten gilt aber nur so lange, als die von $D_1$ aus vorrückende Last den veränderlichen Scheitel $E'$ der Stützlinie noch nicht überschreitet, da von dem Augenblicke an, wo letzteres geschieht, die thatsächlichen Verhältnisse sich anders gestalten, als bei vorstehender Entwickelung vorausgesetzt wurde. Man findet leicht, daß der stattfindende Vorgang sich folgendermaßen darstellen läßt.

Wenn eine bewegliche Last über die Brücke geführt wird, so bewegt sich der Scheitel der Stützlinie aus seiner mittleren Lage in der Ebene $MA$ der Last $Q$ so lange entgegen, also von rechts nach links, wenn die Last bei $D_1$ ankommt, bis die Last und der Scheitel der Stützlinie sich in einem Abstande $e$ vom Scheitel begegnen, welcher durch die Gleichung

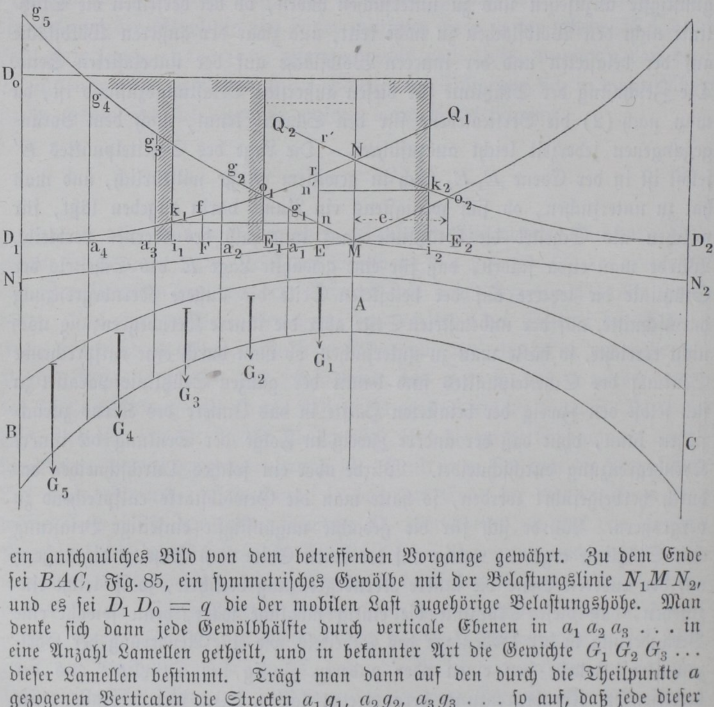
$$q\,\frac{(l - e)^2}{2} = G_2\,2\,l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

gegeben ist, die man aus der oben gefundenen allgemeinen Gleichung (1) erhält, sobald man darin für $\lambda$ den Werth $l - e$ und für $G_2$ das Gewicht des Gewölbstückes zwischen dem Scheitel und dem Begegnungspunkte einführt. Bei einer weiteren Bewegung der Last kehrt der Scheitel der Stützlinie, wie leicht zu erkennen ist, seine Bewegung um, indem er nunmehr in gleicher Richtung wie die Last sich bewegt, und zwar so, daß er wieder nach der Mitte $M$ gelangt, sobald die Last $q$ bis zu dem rechten Kämpfer $D_2$ vorgeschritten ist, also die Brücke gleichmäßig über die ganze Spannweite einer specifischen Belastung $q$ unterworfen ist. Denkt man sich nun die bewegliche Last von beschränkter Erstreckung, so daß das Ende der Last in einem gewissen Augenblicke den linken Kämpfer $D_1$ überschreitet, so setzt von diesem Augenblicke an der Scheitel der Stützlinie seine Bewegung nach rechts fort, und zwar ebenfalls bis zu einem Punkte in demselben Abstande $e$ wie vorher vom Scheitel. Diese äußerste Verschiebung der Stützlinie findet in demjenigen Augenblicke statt, in welchem auch das Ende der beweglichen Last bis zu diesem Punkte vorgeschritten ist, daher die Brücke nunmehr in der rechten Hälfte einer Belastung auf die Länge $l - e$ vom Kämpfer $D_2$ aus unterworfen ist. Bei weiterer Ueberführung der Last kehrt dann der Scheitel der Stützlinie wieder nach der Mitte $M$ zurück, welche er erreicht, sobald die Last in dem Punkte $D_2$ angekommen ist, die Brücke also nur noch ihrem Eigengewichte ausgesetzt ist, wie zu Anfang des betrachteten Vorganges. Ein analoges Verhalten muß natürlich eintreten, wenn die Last die Brücke in der entgegengesetzten Richtung überschreitet; in jedem Falle wird ein einfaches Ueberführen der Last den Scheitel der Stützlinie zu einer Doppelschwingung aus der Mitte $M$ des Gewölbes nach der einen Seite um die Länge $e$, dann zurück durch die Mitte nach der anderen Seite um $e$ und wieder zurück nach der Mitte veranlassen. Es ist danach klar, daß bei einer Belastung von einer Hälfte des Gewölbes der Scheitel der Stützlinie von der Gewölbmitte einen Abstand nach der belasteten Hälfte hin hat, welcher kleiner als der gedachte Werth $e$ ist.

Die größte Verschiebung $e$ des Scheitels der Stützlinie wird daher durch Gleichung (2) gegeben sein, und man wird die derselben entsprechende einseitige Belastung als die für den Gleichgewichtszustand der Brücke ungünstigste anzusehen und zu untersuchen haben, ob bei derselben die Stützlinie nicht den Wölbflächen zu nahe tritt, und zwar der äußeren Wölbfläche auf der belasteten und der inneren Wölbfläche auf der unbelasteten Seite. Die Zeichnung der Stützlinie für diesen äußersten Belastungszustand ist, da man nach (2) die Verticalebene für den Scheitel kennt, nach dem Vorangegangenen jederzeit leicht auszuführen. Die Lage des Scheitelpunktes $E'$ selbst ist in der Ebene $E_1 E_2$ noch in gewissem Maße willkürlich, und man hat zu untersuchen, ob sich wenigstens ein Punkt darin angeben läßt, für welchen als Scheitel die Stützlinie ganz innerhalb des Kernes verbleibt. Würde man etwa finden, daß für eine gewählte Lage $E$ des Scheitels der Stützlinie die letztere auf der belasteten Seite die äußere Kernbegrenzung durchschnitte, auf der unbelasteten Seite aber die innere Kernbegrenzung noch nicht erreichte, so hätte man zu untersuchen, ob man durch eine entsprechende Senkung des Scheitelpunktes und damit der ganzen Stützlinie parallel zu sich selbst den Zweig der belasteten Hälfte in das Innere des Kerns zurückziehen kann, ohne daß der andere Zweig in Folge der Senkung die innere Kernbegrenzung durchschneidet. Würde aber ein solches Durchschneiden dadurch herbeigeführt werden, so hätte man die Gewölbstärke entsprechend zu vergrößern. Würde sich für die gedachte ungünstigste einseitige Belastung eine Stützlinie ergeben, welche auf der einen Seite vom Scheitel die äußere, auf der anderen Seite die innere Kernbegrenzung berührte, so ist leicht einzusehen, daß diese Stützlinie die einzig mögliche wäre, denn sowohl eine Veränderung in der Höhenlage des Scheitels wie eine Aenderung der Horizontalkraft würde den einen oder anderen Zweig der Stützlinie aus der betreffenden Kernbegrenzung heraustreten lassen. In diesem Falle wäre das Gewölbe für den betrachteten Zustand der einseitigen Belastung im labilen Gleichgewichte, während dabei jedoch nicht ausgeschlossen ist, daß das Gewölbe für symmetrische Belastung eine gewisse Stabilität besitzen kann, d. h. daß es für diesen Zustand verschiedene Stützlinien giebt, für welche das Gleichgewicht möglich ist. Es ist zwar die bewegliche Last in den meisten Fällen, besonders bei kleinen Spannweiten, gegen das beträchtliche Eigengewicht der Brücken nur von untergeordneter Bedeutung, doch kann in besonderen Fällen, namentlich bei größeren Spannweiten, die seitliche Verschiebung des Scheitels erheblich genug werden, um eine besondere Prüfung der Stabilität mit Rücksicht auf die beweglichen Lasten nöthig zu machen.

Die Größe $e$ der seitlichen Verschiebung des Scheitels der Stützlinie aus der Mitte des Gewölbes ist zwar mit Hülfe der Gleichungen (1) oder (2) für jedes Gewölbe und jede einseitige Belastung einfach zu berechnen, doch läßt sich die betreffende Ermittelung auch aus einer Zeichnung entnehmen, welche zugleich

Fig. 85.




ein anschauliches Bild von dem betreffenden Vorgange gewährt. Zu dem Ende sei $BAC$, Fig. 85, ein symmetrisches Gewölbe mit der Belastungslinie $N_1 M N_2$, und es sei $D_1 D_0 = q$ die der mobilen Last zugehörige Belastungshöhe. Man denke sich dann jede Gewölbhälfte durch verticale Ebenen in $a_1\, a_2\, a_3$ . . . in eine Anzahl Lamellen getheilt, und in bekannter Art die Gewichte $G_1\, G_2\, G_3$ . . . dieser Lamellen bestimmt. Trägt man dann auf den durch die Theilpunkte $a$ gezogenen Verticalen die Strecken $a_1 g_1$, $a_2 g_2$, $a_3 g_3$ . . . so auf, daß jede dieser

Ordinaten nach einem gewählten Kräftemaßstabe das Gewicht des zwischen dieser Ordinate und der Gewölbmitte $M$ gelegenen Gewölbtheils darstellt, daß also

$$a_1 g_1 = G_1;\ a_2 g_2 = G_1 + G_2;\ a_3 g_3 = G_1 + G_2 + G_3$$

u. s. w. ist, so erhält man durch die Endpunkte $g_1 g_2 g_3 \ldots$ eine gewisse Curve $M g_1 g_2 g_3 \ldots$ auf jeder Seite der Gewölbmitte. Die Ordinate dieser Curve in irgend einem Punkte wie z. B. $En$ in $E$ kann nun auch als das Maß für das in der Gleichung (1) vorkommende Moment $G_2 . 2l$ angesehen werden, vorausgesetzt, daß man den Hebelsarm $2l$ d. h. die Spannweite $BC$ des Gewölbes als Einheit des Hebelsarmes zu Grunde legt.

In derselben Weise kann man nun auch für das Gewölbe eine Curve $D_1 o_1 N$ zeichnen, deren Ordinate $Ff$ in jedem Punkte $F$ im Abstande $D_1 F = \lambda$ vom Kämpfer das Maß für das Moment $q \frac{\lambda^2}{2}$ der beweglichen Last bedeutet, die bis zu diesem Punkte $F$ vorgerückt ist, wobei natürlich derselbe Kräftemaßstab wie für die Gewichte $g_1 g_2 \ldots$ und auch die Länge $2l$ als Einheit für den Hebelsarm zu Grunde zu legen ist. Diese Curve ist offenbar eine Parabel mit dem Scheitel in $D_1$ und deren Ordinate in der Mitte oder für $\lambda = l$

$$MN = q \frac{l^2}{2} \frac{1}{2l} = q \frac{l}{4}$$

ist. Hat man also diese Größe, d. h. die Strecke für die Belastung einer Länge $\frac{l}{4}$ bestimmt und gleich $MN$ aufgetragen, so ist die Zeichnung der Parabel $D_1 o_1 N$ leicht ausgeführt. Eine symmetrische Parabel $D_2 o_2 N$ mit dem Scheitel in $D_2$ giebt in derselben Weise in ihren Ordinaten das Maß für die Momente der von $D_2$ aus aufgefahrenen Belastung in Bezug auf den Punkt $D_2$. So ist z. B. $i_2 k_2$ das Moment der von $D_2$ bis $i_2$ aufgefahrenen Belastung und $Er'$ dasjenige der Last, wenn dieselbe die Strecke $D_2 E$ bedeckt, folglich erhält man auch in $n'r' = Er' - i_2 k_2$ das Moment einer die Strecke $E i_2$ bedeckenden Last $q$ in Bezug auf den Punkt $D_2$. Hieraus folgt nun ohne Weiteres, daß die beiden symmetrisch zur Mitte $M$ im Abstande $e$ von derselben gelegenen Schnittpunkte $o_1$ und $o_2$ die Schwingungsweite für die vorstehend gedachte Verschiebung des Scheitels der Stützlinie ergeben, indem dieser Scheitel in die Verticalebene durch $o_1$ oder $o_2$ fällt, je nachdem die bewegliche Last entweder von $D_1$ bis $E_1$ oder von $D_2$ bis $E_2$ vorgerückt ist. Will man die Belastung finden, welcher die Brücke ausgesetzt sein muß, damit die Stützlinie in irgend einem zwischenliegenden Verticalschnitte z. B. dem durch $E$ geführten ihre horizontale Tangente hat, so giebt die Zeichnung hierüber ebenfalls Aufschluß. Zieht man nämlich zu dem Ende durch den Schnitt $n$ der betreffenden Verticalebene mit der Eigengewichtscurve $g_1 g_2 g_3 \ldots$ eine Horizontale bis zum Schnitte $k_1$ mit der Belastungscurve $D_1 N Q_1$, so erhält man in $k_1$ den Punkt, bis zu welchem die Last von $D_1$ vorgerückt sein muß, wenn die Stützlinie ihren Scheitel in der Verticalebene $E$ haben soll. Das Letztere findet aber noch bei einer zweiten Belastung statt, welche man, wie sich leicht ergiebt, findet, sobald man die Strecke $nr$ von der Belastungslinie $D_2 N Q_2$ abwärts gleich $r'n'$ abträgt und durch $n'$ eine Horizontale zieht, welche in $k_2$ den Punkt liefert, bis zu welchem die bewegliche Last von $D_1$ aus vorgerückt sein muß, um wieder den Scheitel der Stützlinie in die Verticalebene durch $E$ zu verschieben. Dies ergiebt sich mit Rücksicht darauf, daß nach der

Construction die beiden in $E$ zusammenstoßenden Gewölbtheile $EB$ und $EC$ gleiche Momente in Bezug auf $B$ und $C$ haben, denn es ist nach der Construction $Er = En + n'r'$, und nach dem Vorbemerkten ist $n'r'$ gleich dem Momente der über $Ei_2$ befindlichen Last, in Bezug auf $D_2$ oder $C$. Bezeichnet daher wieder $G_1 a_1$ das Moment des Gewölbstückes $BE$ in Bezug auf $B$, und ist $G_2$ das Gewicht des Stückes $ME$, so hat man das Moment des Theils $BE$ in Bezug auf $B$, gleich $M_1 = G_1 a_1 + Er$, und dasjenige von $EC$ in Bezug auf $C$ gleich

$$M_2 = G_1 a_1 + 2 G_2 . l + n'r' = G_1 a_1 + En + nr = M_1.$$

§. 27. **Gewölbstärke.** Wenn für ein Gewölbe in der vorstehend angegebenen Weise für eine bestimmte Belastung die Form des Bogens, oder für eine gegebene Bogenform die Vertheilung der Last so bestimmt ist, daß sich eine ganz im Innern des Gewölbes, resp. des Kerns verbleibende Stützlinie einzeichnen läßt, so ist das Gewölbe hinsichtlich seiner Stabilität gegen Drehung als gesichert zu betrachten. Wenn ferner die Fugenstellung so gewählt wird, daß die Richtung der Stützkraft nirgend um den Reibungswinkel von der Normalen zur Fuge abweicht, so kann auch kein Gleiten der einzelnen Wölbsteine stattfinden. Diese letztere Bedingung wird immer leicht zu erfüllen sein, denn wenn man, wie dies wohl allgemein geschieht, die Fugen überall normal zur Mittellinie oder auch wohl zur inneren Bogenfläche anordnet, so wird man im Allgemeinen fast immer finden, daß der gedachte Abweichungswinkel der Stützkraft von der Fugennormalen für die verschiedenen möglichen Stützlinien wesentlich unter dem Reibungswinkel für die Steine bleibt, und daß man nicht genöthigt ist, auf eine besondere Cohäsion oder Scheerfestigkeit des Mörtels zu rücksichtigen. Das Gewölbe ist aber außer auf seine Stabilität auch in Hinsicht seiner Festigkeit zu prüfen, und dazu ist es erforderlich, daß die einzelnen Wölbsteine mit hinreichend großen Flächen sich gegen einander stützen, um nicht durch den auf sie wirkenden Druck zermalmt zu werden. Bezeichnet man allgemein mit $W$ den Normaldruck zwischen zwei beliebigen Wölbsteinen, und ist $p$ die Druckspannung pro Flächeneinheit, welche man für das Wölbmaterial als zulässig erachtet, so ist zur Aufnahme dieses Druckes eine Fläche $F = \frac{W}{p}$ erforderlich. Dieser Werth würde in dem Falle gleich der ganzen Fugenfläche zu setzen sein, wenn der Druck $W$ in der Mitte der Fuge wirkte, weil in diesem Falle eine gleichmäßige Vertheilung des Druckes angenommen werden kann. Wenn jedoch der Angriffspunkt der Druckkraft außerhalb der Mitte gelegen ist, etwa in einem Abstande $e$ von derselben, so findet eine ungleiche Vertheilung der Pressung statt, und es gelten hierfür die gleichen Betrachtungen, welche in §. 14 in Bezug auf die Futtermauern angeführt worden sind. Insbesondere wird die Pressung an der einen

Kante der Fuge gleich Null, sobald der besagte Abstand $e$ den Werth $\frac{d}{6}$ erreicht, unter $d$ die Stärke des Gewölbes an der betrachteten Stelle verstanden. Deswegen hat man auch, wie schon im §. 19 angeführt worden ist, das innere Drittel des Gewölbes häufig als den Kern vorausgesetzt, aus welchem die Stützlinie nicht heraustreten soll. Was die zulässige Pressung $p$ des Wölbmaterials anbetrifft, so pflegt man dieselbe ebenso wie die Belastungen meist durch die Höhe eines Prismas von gleichem specifischen Gewichte mit dem Wölbmateriale auszudrücken, so daß, unter $k$ diese Höhe und unter $\gamma$ dieses specifische Gewicht verstanden, die specifische Pressung durch $p = k\gamma$ gegeben ist. Für die rückwirkende Festigkeit, d. h. diejenige Belastungshöhe $K$ durch deren Einfluß das Material zerdrückt wird, sind in der nachfolgenden kleinen Tabelle die mittleren Werthe angegeben, welche nach Bauschinger's Versuchen den für Gewölbe meist angewendeten Baumaterialien zukommen. In der Tabelle ist gleichzeitig das specifische Gewicht und die Festigkeit in Kilogrammen pro 1 qcm eingeführt.

Tabelle für die rückwirkende Festigkeit der Gewölbematerialien.

| | Specif. Gewicht $\gamma$ | Zerdrückungshöhe $K$ | Zerdrückungskraft |
|---|---|---|---|
| Syenit . . . . . . . . . | 2800 kg | 4890 m | 1370 kg |
| Granit . . . . . . . . . | 2600 „ | 4150 „ | 1080 „ |
| Kalkstein . . . . . . . | 2400 „ | 2920 „ | 700 „ |
| Sandstein . . . . . . . | 2400 „ | 1500 „ | 360 „ |
| Ziegel . . . . . . . . . | 1800 „ | 940 „ | 170 „ |
| Cementmörtel . . . . . | — | — | 180 „ |
| Beton . . . . . . . . . | 2300 „ | — | 60 „ |

Die mit Sicherheit zulässige Belastungshöhe $k$ ist jedoch aus verschiedenen Gründen bei den Ausführungen nur zu einem kleinen Bruchtheile von $K$ anzunehmen. Zunächst ist, wie aus dem Vorstehenden sich ergiebt, keineswegs vorauszusetzen, daß die Druckkraft überall die Mitte der Fuge trifft, denn selbst in den Fällen, in welchen das Gewölbe so entworfen ist, daß die Mittellinie eine mögliche Stützlinie ist, kann durch verschiedene Umstände, wie z. B. das Setzen des Gewölbes beim Ausrüsten, durch die Ausdehnung bei Temperaturveränderungen, ferner durch bewegliche Belastung u. s. w. die Stützlinie an einzelnen Stellen aus der Mitte gedrängt werden, in Folge dessen der Druck sich ungleichförmig über die Lagerfugen vertheilt und einzelne Theile besonders stark gedrückt werden. Hierzu kommt die ungleichförmige Beschaffenheit des Baumaterials, welches nicht als durchaus homogen vorausgesetzt werden kann. Auch ist es nicht möglich, die einzelnen Wölbsteine so genau zu bearbeiten und zu versetzen, daß die Berührung gleichmäßig in der ganzen Fugenfläche stattfindet, vielmehr wird die Berührnng immer nur auf einzelne Stellen sich beschränken, in welchen der Druck sich derartig concentrirt, daß daselbst ein theilweises Zermalmen des Materials und Zerstören des ganzen Wölbsteins herbeigeführt werden kann. Gerade zur Vermeidung dieses letzteren Uebelstandes ist die Verwendung des Mörtels zwischen den Steinen erforderlich, welcher gewissermaßen als Füllmaterial die Ungleichmäßigkeiten ausgleichen soll. Da aber das gehörige gleichmäßige Vertheilen des Mörtels, besonders in der Nähe des Scheitels, mit großen Schwierigkeiten verbunden zu sein pflegt, und auch der noch nicht gehörig erhärtete Mörtel bei übermäßigem Drucke leicht aus den Fugen herausgedrückt wird, so muß man aus allen diesen Gründen nur eine verhältnißmäßig geringe Pressung zwischen den Wölbsteinen zulassen.

Um für diese Pressung einen Anhalt zu finden, bleibt bei der bislang ungenügenden Kenntniß der erwähnten Umstände nichts anderes übrig, als aus den Dimensionen und Belastungen bewährter Ausführungen die Größe der Pressung zu ermitteln, welche in diesen Ausführungen stattfindet. In dieser Weise hat z. B. Scheffler*) eine große Anzahl von verschiedenen gut bewährten und renommirten Brücken derartig untersucht, daß er aus den bekannten Dimensionen und Belastungen die Stützlinie des kleinsten Horizontalschubes ermittelte, und dann diesen Schub $H$ selbst durch die Beziehung (s. §. 18) $H = \frac{Qc}{h}$ berechnete, unter $Qc$ das Moment des halben Gewölbes in Bezug auf den Kämpfer und unter $h$ dessen Abstand von der Schubkraft im Scheitel verstanden. Wurde nun die gefundene Größe $H$ durch die Gewölbstärke $d$ im Scheitel dividirt, so ergab sich die specifische Pressung daselbst zu $p = \frac{H}{d}$ oder die Pressungshöhe zu $k = \frac{p}{\gamma}$. Ebenso wurde der Normaldruck $W$ auf die unter dem Winkel $\alpha$ gegen die Verticale geneigte Kämpferfuge zu

$$W = H \cos\alpha + Q \sin\alpha$$

bestimmt, und die Pressung des Kämpfers, dessen Dicke $d_1$ ist, zu

$$p_1 = \frac{W}{d_1} \text{ bezw. } k_1 = \frac{p_1}{\gamma}$$

ermittelt.

*) Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. eisernen Brücken.

Diese Untersuchung ergab, daß die Pressungshöhe $k$ im Scheitel für die verschiedenen Spannweiten oder Horizontalschübe sehr verschieden ist, indem diese Höhe bei ganz kleinen Brücken nicht mehr als etwa 3 m betrug, und sich dagegen bei den größten Spannweiten bis über 60 m erhob. Ebenso schwankte die Pressungshöhe in den Kämpferfugen, woselbst sie immer wesentlich größer als im Scheitel sich herausstellte, und in einzelnen Fällen den 3- bis 4 fachen Werth der Scheitelpressung mit gegen 250 m erreichte. Mit Rücksicht hierauf giebt Scheffler an, man solle die specifische Pressung mit der absoluten Größe des Horizontalschubes $H$ wachsend, die größte Pressungshöhe im Scheitel aber nicht über 200′ oder 63 m annehmen, während man die Pressung für die Kämpfer gleich der anderthalbfachen Scheitelpressung, also die Belastungshöhe daselbst ebenfalls nicht größer als 300′ oder 95 m anzunehmen habe. Für die Wahl des in jedem Falle anzuwendenden Betrags ist an dem gedachten Orte eine Tabelle mitgetheilt, welche für verschiedene Werthe des Horizontalschubes $H$ die specifischen Pressungen, also auch die Gewölbstärken ergiebt.

Auch auf Grund der in §. 22 ermittelten Beziehungen hat man mit Rücksicht auf ausgeführte stabile Brücken, deren Krümmungshalbmesser, Belastungshöhe und Gewölbstärke im Scheitel bekannt sind, die specifischen Pressungen des Materials bestimmt, und es ist in dieser Weise von Heinzerling*) eine Tabelle angegeben, welche im Auszuge hier angeführt werden soll. Die hierfür geltenden Beziehungen lassen sich im Wesentlichen folgendermaßen wiedergeben.

Nach §. 22, Gleichung (8), welche zu

$$H = r z_0 \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gefunden wurde, ist für jede Stützlinie der Horizontalschub $H$ eines 1 m breiten Gewölbstreifens gleich dem Gewichte eines Steinprismas von der Höhe $z_0$, der Länge $r$ und der Breite gleich 1 m. Denkt man sich nun ein Gewölbe nach dem Vorhergegangenen so construirt, daß die Stützlinie durch die Mitte der Scheitelfuge geht, und dessen innere Leibung überall parallel zur Stützlinie ist, d. h. denkt man sich die innere Wölblinie durch Abtragen der halben Scheitelstärke $\frac{d}{2}$ in allen Punkten der Stützlinie erhalten, so findet zwischen dem Halbmesser $r_1$ der inneren Wölblinie im Scheitel und demjenigen $r$ der Stützlinie daselbst die Beziehung statt:

$$r = r_1 + \frac{d}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Bezeichnet man nun noch mit $h_0$ die auf das specifische Gewicht $\gamma$ des Gewölbmaterials reducirte Belastungshöhe, welche die Uebermauerung, Fahr-

*) S. Heinzerling. Die Brücken der Gegenwart, II. Abtheilung, sowie dessen Aufsatz in der Zeitschrift für Bauwesen, 1869 u. 1872.

bahn und Verkehrslast repräsentirt, so hat man die Scheitelbelastungshöhe

$$z_0 = d + h_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zu setzen. Kennt man nun für irgend ein Gewölbe den Scheitelhalbmesser $r_1$ der inneren Wölbung und die Größen $d$ und $h_0$, so findet man nach obiger Gleichung (1) den Horizontalschub für einen 1 m breiten Gewölbstreifen zu

$$H = \left(r_1 + \frac{d}{2}\right)(d + h_0)\,\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und wenn man die specifische Pressung in der Scheitelfuge gleich $p$, also

$$H = p\,d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

setzt, so erhält man aus (4) und (5)

$$p = \left(r_1 + \frac{d}{2}\right)\left(1 + \frac{h_0}{d}\right)\gamma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und

$$\frac{d^2}{2} + d\left(r_1 + \frac{h_0}{2}\right) + r_1 h_0 = \frac{p}{\gamma}\,d,$$

oder

$$d^2 - 2\,d\left(\frac{p}{\gamma} - r_1 - \frac{h_0}{2}\right) + 2\,r_1 h_0 = 0.$$

Hieraus findet man, wenn $p$ gegeben ist, die erforderliche Gewölbstärke zu

$$d = \frac{p}{\gamma} - r_1 - \frac{h_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{\gamma} - r_1 - \frac{h_0}{2}\right)^2 - 2\,r_1 h_0} \quad . \quad (7)$$

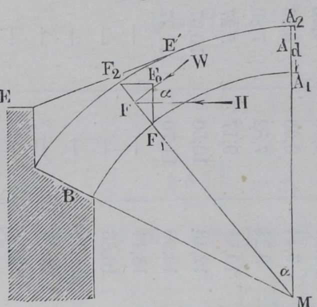
Mittelst der Gleichung (6) sind nun aus stabilen Ausführungen die in der Tabelle unter der Bezeichnung $\frac{p}{10\,000}$ angegebenen specifischen Pressungen in Kilogrammen pro Quadratcentimeter für Straßen und Eisenbahnbrücken aus Haustein ($\gamma = 2500$), Backstein ($\gamma = 2000$) und Bruchstein ($\gamma = 2200$) ermittelt, wobei zu bemerken ist, daß die Scheitelbelastung $h_0\,\gamma$ pro Quadratmeter für Straßenbrücken zu 1800 kg und für Eisenbahnbrücken zu 2800 kg angenommen worden ist.

Tabelle der Pressungen in den Schlußsteinen der Brückengewölbe.

| Scheitelhalbmesser $r_1$ der inneren Wölbfläche Meter | Gewölbstärke $d$ im Scheitel | | | Pressung pro Quadratcentimeter $\frac{p}{10\,000}$ in Kilogrammen | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Straßenbrücken $h_0 \gamma = 1800$ kg | | | Eisenbahnbrücken $h_0 \gamma = 2800$ kg | | |
| | Haustein $\gamma = 2500$ | Backstein $\gamma = 2000$ | Bruchstein $\gamma = 2200$ | Haustein | Backstein | Bruchstein | Haustein | Backstein | Bruchstein |
| 5 | 0,52 | 0,58 | 0,64 | 3,14 | 2,70 | 2,70 | 4,15 | 3,61 | 3,50 |
| 10 | 0,64 | 0,71 | 0,79 | 5,48 | 4,70 | 4,65 | 7,10 | 6,15 | 5,97 |
| 15 | 0,77 | 0,85 | 0,95 | 7,44 | 6,35 | 6,33 | 9,44 | 8,16 | 7,96 |
| 20 | 0,89 | 0,99 | 1,10 | 9,24 | 7,82 | 7,89 | 11,54 | 9,89 | 9,75 |
| 25 | 1,02 | 1,13 | 1,26 | 10,88 | 9,17 | 9,27 | 13,38 | 11,43 | 11,30 |
| 30 | 1,14 | 1,26 | 1,41 | 12,43 | 10,50 | 10,67 | 15,10 | 12,93 | 12,85 |
| 35 | 1,27 | 1,41 | 1,57 | 13,96 | 11,70 | 11,97 | 16,76 | 14,23 | 14,25 |
| 40 | 1,39 | — | — | 15,44 | — | — | 18,37 | — | — |
| 45 | 1,52 | — | — | 16,86 | — | — | 19,87 | — | — |
| 50 | 1,64 | — | — | 18,28 | — | — | 21,38 | — | — |
| 55 | 1,77 | — | — | 19,65 | — | — | 22,81 | — | — |
| 60 | 1,89 | — | — | 21,04 | — | — | 24,26 | — | — |

Mit Hülfe der aus dieser Tabelle in jedem bestimmt vorliegenden Falle zu entnehmenden Pressung $p$ kann man durch die Gleichung (7) die Stärke $d$ des Gewölbes im Scheitel ermitteln. Wenn man diese Stärke auch für alle übrigen Punkte des Gewölbes beibehalten wollte, so würde offenbar die specifische Pressung des Materials von dem Scheitel nach den Kämpfern hin in derselben Weise wachsen wie der Stützdruck zunimmt. Um eine möglichst gleichmäßige Anstrengung des Materials zu erreichen, ist es daher gerathen, die Stärke des Gewölbes nach den Widerlagern hin entsprechend zu vergrößern. Das Gesetz für diese Verstärkung ist leicht zu erkennen. Es sei $AFB$, Fig. 86, die Hälfte eines symmetrischen Gewölbes, welches mit Rücksicht auf den Horizontaldruck $H$ eine Scheitelstärke $A_1 A_2 = d$ erhalten hat, und $F_1 F_2$ sei irgend eine Gewölbfuge, welche in $F$ senkrecht zu dem daselbst wirksamen resultirenden Drucke $W$ angeordnet ist, also mit der Verticalen denselben Winkel $\alpha = AMF$ bildet, unter welchem die Stützkraft $W$ gegen den Horizont geneigt ist. Wegen des überall gleichen Horizontalschubes hat man dann

Fig. 86.




$$W \cos\alpha = H$$

oder

$$W = \frac{H}{\cos\alpha},$$

und daher hätte man die Stärke $F_1 F_2$ des Gewölbes in $F$ ebenfalls zu

$$d_1 = \frac{d}{\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

zu wählen, wenn die specifische Pressung in $F$ denselben Werth $\frac{H}{d} = p$ wie im Scheitel haben soll. Da diese Betrachtung für jede Fuge $F$ gilt, so folgt hieraus das Gesetz, daß man behufs gleichmäßiger Pressung des Gewölbematerials die Gewölbstärke derartig vom Scheitel nach den Kämpfern hin vergrößern muß, daß sämmtliche Lagerfugen wie $F_1 F_2$ dieselbe mit der Scheitelfuge $A_1 A_2 = d$ gleiche Verticalprojection $F_1 F_0 = d_1 \cos\alpha = d$ haben, entsprechend dem für alle Fugen gleichen Horizontaldrucke. In dieser Weise pflegt man vielfach die Verstärkung des Gewölbes vom Scheitel nach den Widerlagern hin vorzunehmen, doch ist leicht einzusehen, daß dies nur bis zu einer gewissen Größe von $\alpha$ praktisch ausführbar sein wird, denn schon für $\alpha = 60^0$ erhält man

$$d_1 = \frac{d}{1/2} = 2\,d,$$

und bei weiterer Zunahme von $\alpha$ würde $d_1$ sehr schnell wachsen. Man wird aber sowohl aus Schönheitsrücksichten, wie aus Gründen der Ausführung die Stärke $d_1$ an den Widerlagern niemals größer als höchstens $2\,d$ machen, und pflegt dann wohl, um das Material des Gewölbbogens daselbst nicht zu sehr anzustrengen, die in den Bogenzwickeln aufgeführte Hintermauerung $BEE'$ durch geeignete Anordnung der Fugen zur Aufnahme eines Theils des Gewölbdruckes zu befähigen.

Ueber die für Gewölbe zu wählende Stärke sind auch vielfach empirische, durch die Erfahrung bewährte Regeln, wie z. B. von der Form

$$d = \alpha + \beta r$$

angegeben, worin $r$ der Halbmesser, und $\alpha$ und $\beta$ gewisse, von dem Materiale und der Belastung der Gewölbe abhängige Constante sind. Auch ist es deutlich, daß bei der Verwendung von Ziegelsteinen zu Gewölben in Gebäuden die Stärken mit Rücksicht auf das übliche Ziegelformat gewählt werden müssen, und daß man dabei mit der Stärke nie unter ein gewisses Maß, etwa die Breite eines Ziegels, herabgehen darf. Hinsichtlich derartiger Vorschriften muß auf die betreffenden Bauhandbücher verwiesen werden.

Beispiel. Wie groß hat man die Gewölbstärke einer Eisenbahnbrücke aus Haustein zu machen, deren innere Wölbung nach einem Kreissegment von $h = 6$ m Pfeilhöhe und $2\,l = 25$ m Spannweite ausgeführt ist, wenn das specifische Gewicht des Gewölbematerials $\gamma = 2400$ kg ist, und die durch die Fahrbahn und Verkehrslast dargestellte Scheitelbelastung einer Höhe von $h_0 = 1{,}5$ m entspricht.

Man findet hier den Halbmesser $r_1$ der inneren Wölbung aus

$$l^2 = h\,(2\,r_1 - h)$$

zu

$$r_1 = \frac{l^2 + h^2}{2\,h} = \frac{12{,}5^2 + 36}{2\,.\,6} = 16{,}02 \text{ m}$$

und kann demnach der obigen Tabelle zufolge

$$\frac{p}{10\,000} = 9{,}44 + \frac{1{,}02}{5}\,(11{,}54 - 9{,}44) = 9{,}87,$$

also $p = 98\,700$ kg pro Quadratmeter annehmen; demnach hat man

$$\frac{p}{\gamma} - r_1 - \frac{h_0}{2} = \frac{98\,700}{2\,400} - 16{,}02 - 0{,}75 = 24{,}35$$

und nach (7) die Scheitelstärke

$$d = 24{,}35 - \sqrt{24{,}35^2 - 2\,.\,16{,}02\,.\,1{,}5} = 24{,}35 - 23{,}34 = 1 \text{ m}.$$

Die Fuge am Kämpfer ist gegen die Verticale unter einem Winkel $\alpha$ geneigt, für welchen

$$\cos\alpha = \frac{r-h}{r} = \frac{16{,}02 - 6}{16{,}02} = 0{,}667$$

ist, woraus $\alpha = 48^0\,10'$ folgt. Soll daher die specifische Pressung in dieser Fuge gleich der im Scheitel sein, so hat man daselbst die Gewölbdicke gleich

$$d_1 = \frac{d}{\cos\alpha} = \frac{d}{0{,}667} = 1{,}5 = 1{,}5\,\mathrm{m}$$

zu machen.

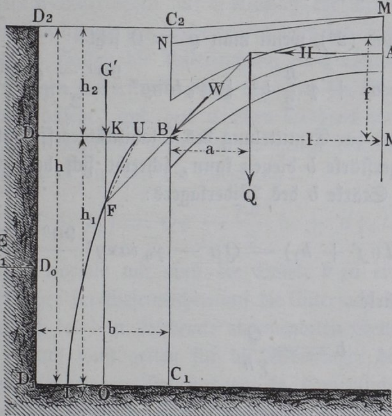
§. 28. **Die Widerlager.** Das in den vorhergehenden Paraprahen besprochene Verhalten der Gewölbe findet nur dann statt, wenn die Gewölbe mit ihren Anfängen sich beiderseits gegen feste, nicht nachgiebige Widerlager stemmen, welche unter dem Einfluße der in den Kämpfern zur Wirkung kommenden Druckkräfte nicht zur Seite gedrängt werden. Nur in seltenen Fällen werden solche Festpunkte, wie etwa durch Felsen gebildet, von vornherein gegeben sein, im Allgemeinen wird man die Widerlager durch Ausführung hinreichend massiger Mauerkörper herstellen müssen. Die Stabilität eines solchen Widerlagskörpers ist nur durch ein genügend großes Eigengewicht desselben zu erzielen, welches, mit dem Gewölbschube $W$ gegen die Kämpferfuge zusammen eine Mittelkraft giebt, die nirgends aus dem Widerlager heraustritt, und welche für keine Lagerfuge von deren Normalen um einen Winkel abweicht, der den Betrag des zugehörigen Reibungswinkels daselbst erreicht. Es gelten somit für die Stabilität der Widerlager dieselben Regeln, welche im ersten Capitel für Futtermauern aufgestellt sind, von welchen letzteren hinsichtlich der Wirkung der Kräfte die Widerlager sich nur insofern unterscheiden, als der auf dieselben seitwärts ausgeübte Gewölbeschub in der Kämpferfuge concentrirt ist, während die Futtermauern durch den auf eine größere Fläche vertheilten Erddruck seitlich angegriffen werden. Nach dem über die Futtermauern Gesagten ist daher die Prüfung der Widerstandsfähigkeit der Widerlager unschwer zu bewirken, und es muß bei ihnen wie bei den Futtermauern nicht nur eine genügende Sicherheit gegen das Umkanten sowie gegen das Verschieben vorhanden sein, sondern das Material darf auch nicht über einen gewissen Betrag auf Druck beansprucht werden.

Um die Stabilität eines Widerlagers durch Rechnung zu prüfen, bezw. seine Dimensionen zu ermitteln, sei $AB$, Fig. 87, die Stützlinie eines halben Tonnengewölbes von der halben Spannweite $BM_0 = l$, dessen Belastungslinie durch $MN$ gegeben sei. Die Pfeilhöhe $M_0A$ der Stützlinie sei durch $f$ bezeichnet, und der Angriffspunkt $B$ im Kämpfer liege um $BC_1 = h_1$ über der als unwandelbar anzunehmenden Grundfläche $D_1C_1$ des Widerlagers, welches als ein parallelepipedischer Mauerklotz von der Breite $DB = b$ bis zu einer Höhe $BC_2 = h_2$ über dem Kämpferangriffe $B$ aufgeführt sein soll. Das specifische Gewicht des Widerlagers, welches meist gleich demjenigen des Gewölbmaterials angenommen werden kann, sei wieder mit $\gamma$ bezeichnet, und es soll wie bisher ein Streifen des Widerlagers und Gewölbes von einer Breite gleich 1 m der Betrachtung unterzogen werden. Auf das Widerlager wirkt nun außer seinem in der verticalen Mittellinie anzunehmenden Eigengewichte

$$G = \gamma b (h_1 + h_2) = \gamma b h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die von dem Gewölbe in $B$ ausgeübte resultirende Kraft $W$, deren horizontale Componente $H$ gleich dem Schub des halben Gewölbes $AB$ sammt seiner Belastung ist. Außerdem wird gegen die hintere Mauerfläche $D_1 D_2$ die Hinterfüllungserde mit einem unter dem Reibungswinkel $\varrho_1$ gegen den Horizont gerichteten Drucke $E$ wirken, dessen Angriffspunkt $D_0$ nach dem vorhergehenden Capitel in $\frac{h}{3}$ über dem Fußpunkte $D_1$ anzunehmen ist. Die Größe dieses Erddruckes kann man nach §. 8 allgemein zu

Fig. 87.




$$E = \gamma_0 k \frac{h^2}{2} \quad . \quad . \quad (2)$$

setzen, wenn $\gamma_0$ das specifische Gewicht der Hinterfüllungserde und $k$ einen von deren Böschungswinkel $\varrho$ und der Oberfläche abhängigen Coefficienten bedeutet. Dieser Coefficient kann, wenn eine horizontale Oberfläche vorausgesetzt und von der Reibung der Erde an der Wandfläche $D$ abgesehen wird, nach §. 8 zu $tang^2 \dfrac{90^0 - \varrho}{2}$ angenommen werden, also ist für diesen Fall $E$ horizontal und

$$E = \gamma_0 \frac{h^2}{2} tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2^a)$$

Sollte nun unter Einfluß dieser Kräfte das Widerlager gerade noch stabil sein, so müßte die Resultirende sämmtlicher Kräfte durch die Kante $D_1$ gehen, d. h. die Momentensumme aller Kräfte in Bezug auf $D_1$ müßte gleich Null sein, in welchem Falle das Widerlager an der Grenze der Stabilität sich befinden würde. Da man jedoch eine gewisse Sicherheit oder einen Ueberschuß an Stabilität verlangen muß, so kann man entweder die

Bedingung stellen, daß die Resultirende durch einen mehr nach dem Innern der Mauer etwa in $J$ gelegenen Punkt hindurchgehe, oder, was auf dasselbe Resultat hinauskommt, daß erst die $\sigma$ fache Schubkraft $H$ des Gewölbes im Stande sein soll, den Grenzzustand der Stabilität herbeizuführen. Die Zahl $\sigma$ ist dann wieder der Stabilitätscoefficient, für welchen man meistens einen zwischen 2 und 3 liegenden Werth anzunehmen pflegt*). Mit Rücksicht hierauf lautet nun die betreffende Gleichgewichtsgleichung, wenn noch mit $a$ der Abstand des Punktes $B$ von der Schwerlinie des Gewichtes $Q$ der Brückenhälfte bezeichnet wird:

$$\sigma H (f + h_1) = Q (a + b) + G \frac{b}{2} + E \cos \varrho_1 \frac{h}{3} \quad . \; . \; (3)$$

oder mit Rücksicht auf (1) und ($2^a$), wenn man $\varrho = 0$ setzt:

$$\sigma H (f + h_1) = Q (a + b) + \gamma \frac{h}{2} b^2 + \gamma_0 \, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} \frac{h^3}{6} \quad (3^a)$$

Diese Gleichung, welche direct zur Ermittelung des Stabilitätscoefficienten $\sigma$ für eine gegebene Widerlagerstärke $b$ dienen kann, schreibt sich behufs Bestimmung der erforderlichen Stärke $b$ des Widerlagers:

$$b^2 + 2 \frac{Q}{\gamma h} b = \frac{2}{\gamma h} \left[ \sigma H (f + h_1) - Q a - \gamma_0 \, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} \frac{h^3}{6} \right]$$

woraus die erforderliche Stärke

$$b = - \frac{Q}{\gamma h}$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\gamma h} \left[ \sigma H (f + h_1) - Q a - \gamma_0 \, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} \frac{h^3}{6} \right] + \frac{Q^2}{\gamma^2 h^2}} \quad . \; (4)$$

folgt. Es läßt sich hierbei bemerken, daß mit zunehmender Belastung $Q$ die Stärke $b$ des Widerlagers nur bis zu einem gewissen Maximalwerthe zunimmt, von welchem aus bei weiterer Vergrößerung der Belastung $b$ wieder abnimmt. Dies ist aus Gleichung (3) ersichtlich, denn wenn auch durch eine größere Belastung $Q$ der Horizontalschub $H$ und also das umstürzende Moment $H (f + h_1)$ gleichfalls vergrößert auftritt, so wird doch auch das Moment $Q (a + b)$ auf der rechten Seite der Gleichung (3) damit vergrößert, und es giebt in jedem Falle eine gewisse Belastung $Q$ des Gewölbes, welcher die größte Widerlagsstärke $b_{max}$ entspricht, ein Umstand, der insbesondere bei hohen Belastungen der Gewölbe in Betracht kommt. Wollte

*) Scheffler findet auf Grund der Untersuchung einer großen Anzahl ausgeführter Brücken, daß für Straßenbahnen genüge, $\sigma = 2{,}5$ anzunehmen, dagegen für Eisenbahnbrücken die Annahme von $\sigma = 3$ rathsam erscheint.

man diesen Grenzfall rechnerisch feststellen, so könnte man in (4) den Horizontalschub $H$ durch $Q$ ausdrücken, indem man $H = Q \frac{a}{f}$ setzt, und denjenigen Werth von $Q$ ermitteln, welcher der Gleichung

$$\frac{db}{dQ} = 0$$

entspricht, eine Rechnung, die hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

Wie aus der Figur ersichtlich ist, hat der Erddruck einen für die Stabilität des Widerlagers günstigen Einfluß, so daß durch denselben, wie auch Gleichung (4) zeigt, die erforderliche Stärke $b$ verringert wird. Es kann sogar bei hohen Widerlagern dieser Einfluß des Erddruckes überwiegend sein, so daß ein Umkippen des Widerlagers nach innen zu befürchten ist. Man hat in solchen Fällen die Untersuchung ganz ähnlich, wie oben zu führen, mit dem einzigen Unterschiede, daß man für die Innenkante $C_1$ die Momentengleichung ansetzt, und den $\sigma$ fachen Erddruck voraussetzt, wenn auch hier ein Stabilitätscoefficient $\sigma$ zu Grunde gelegt werden soll. Man würde demgemäß für diesen Fall die Gleichung

$$H(f + h_1) = Qa - \frac{\gamma h^2}{2} b + \sigma \gamma_0 \, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} \frac{h^3}{6} \quad . \; (3^a)$$

erhalten, woraus wie oben die Stärke $b$ zu ermitteln wäre. Dieser Fall kommt daher im Wesentlichen auf die Untersuchung einer Futtermauer hinaus, welche auf der dem Erddrucke abgewendeten Seite durch Strebebögen gestützt wird. Auch sonst gelten für die Widerlager die im Capitel I für Futtermauern gefundenen Beziehungen, so namentlich hinsichtlich der Pressungen, welchen das Material in den Lagerfugen ausgesetzt ist. Für diese Pressungen ist bekanntlich der Abstand $y = OJ$ maßgebend, um welchen der Angriffspunkt $J$ der Resultirenden aller Kräfte von der Mitte $O$ der betreffenden Lagerfuge absteht. Man findet diesen Abstand $y$, wenn man $\sigma = 1$ setzt, und die Momentengleichung für den Punkt $J$ ansetzt, also durch:

$$H(f + h_1) = Q\left(a + \frac{b}{2} + y\right) + \gamma b h y + \gamma_0 \, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} \frac{h^3}{6} \quad . \; (3^b)$$

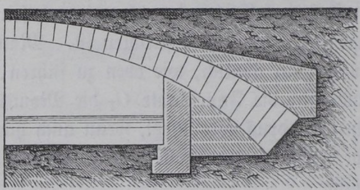
woraus bei einer gewählten Stärke $b$, wie sie unter Zugrundelegung eines bestimmten Stabilitätscoefficienten $\sigma$ festgesetzt worden ist

$$y = \frac{H(f + h_1) - Q\left(a + \frac{b}{2}\right) - \gamma_0 \, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} \frac{h^3}{6}}{Q + \gamma b h} \text{ folgt } \quad . \; . \; (5)$$

Hinsichtlich der einem bestimmten Werthe von $y$ entsprechenden Vertheilung der Pressungen gelten ausnahmslos die im §. 14 angeführten Bemerkungen.

Damit ein Ausweichen des Widerlagers durch Gleiten nicht möglich sei, darf die Resultirende für irgend eine Lagerfuge von deren Normalrichtung an keiner Stelle um den Reibungswinkel der Steine daselbst auf einander abweichen, und man erhält hiervon ein deutliches Bild durch die Zeichnung der Stützlinie bezw. der Richtungslinie des Druckes. Man hat es durch geeignete Stellung der Lagerfugen in dem Widerlager immer in der Hand, einem Gleiten wirksam zu begegnen, und man hat zu dem Zwecke vielfach das Widerlager mit solchem Fugenschnitte ausgeführt, daß es, Fig. 88, gewissermaßen eine Fortsetzung des Gewölbes bildet. Diese Ausführung wird aber nur in den seltensten Fällen nöthig sein, vielmehr wird auch bei horizontalen Fugen des Widerlagers die gedachte Abweichung der Resultirenden von der Verticalen kleiner sein als der Reibungswinkel $\varrho$ des Mauerwerks, welchen Winkel man wegen Ausführung des Mauerwerks im regelrechten Verbande zu $\varrho = 45^0$ annehmen kann, so daß $\varphi = tang\, \varrho = 1$ zu setzen ist.

Fig. 88.



Die größte Gefahr des Gleitens findet, wie sich leicht ergiebt, in dem Horizontalschnitte $BD$ statt, welcher durch den Anfang $B$ der Stützlinie, Fig. 87, gedacht wird, da für jede tiefere Fuge die Richtung der Resultirenden steiler ausfällt, indem bei gleichbleibender Horizontalkraft $H$ die Verticalkraft mit der Tiefe zunimmt. Um für diesen Querschnitt $DB$ die Stabilitätsverhältnisse in Bezug auf das Gleiten zu bestimmen, denkt man sich den in $B$ wirkenden Gewölbeschub $W$, dessen verticale und horizontale Componenten bezw. $Q$ und $H$ sind, mit dem in der Mitte $K$ wirkend zu denkenden Gewichte $G' = \gamma b h_2$ des oberhalb $BD$ gelegenen Mauerkörpers $DD_2\, C_2\, B$ zusammengesetzt. Man erhält dadurch die durch $F$ gehende Richtung $FU$ der Stützkraft in $BD$, welche gegen die Verticale unter dem Winkel $KFU = \beta$ geneigt ist, der sich bestimmt aus

$$tang\, \beta = \frac{KU}{KF} = \frac{H}{Q + G'} = \frac{H}{Q + \gamma b h_2} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Setzt man nun eine $\sigma'$ fache Stabilität in Bezug auf das Gleiten voraus, d. h. nimmt man an, daß erst in Folge einer Horizontalkraft $\sigma' H$ der Winkel $\beta$ den Reibungswinkel $\varrho$ erreichen soll, so findet man

$$tang\, \varrho = \frac{\sigma' H}{Q + \gamma b h_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

woraus bei gegebener Widerlagsstärke $b$ die Stabilität zu

$$\sigma' = \frac{Q + \gamma b h_2}{H} \, tang \, \varrho, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

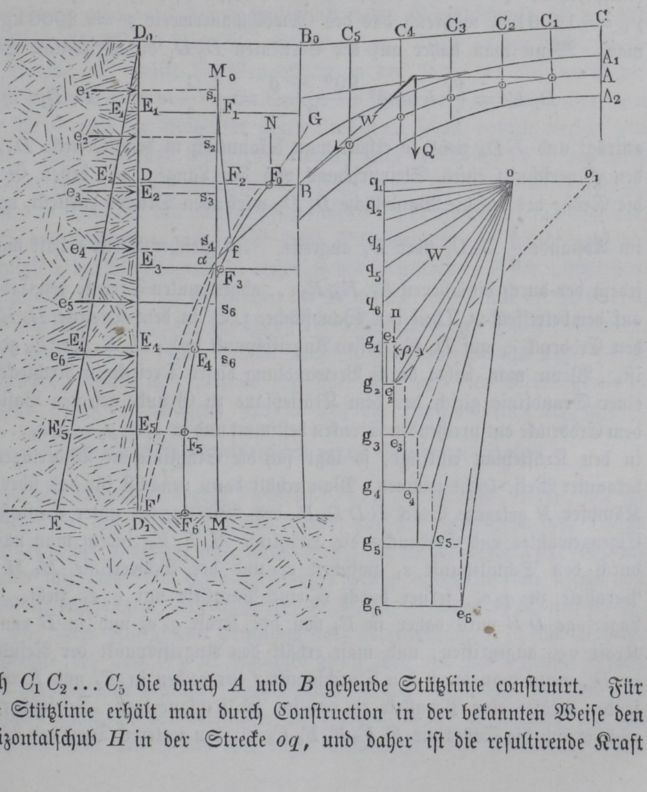
oder für einen gewünschten Stabilitätscoefficienten $\sigma'$ die erforderliche Stärke

$$b = \frac{1}{\gamma h_2} \left( \frac{\sigma' H}{tang \, \varrho} - Q \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

folgt u. s. w. Als Stabilitätscoefficienten $\sigma'$ gegen Gleiten kann man passend denselben Werth $\sigma$ gleich 2 bis 3, wie für Umstürzen annehmen.

In Fig. 89 ist die Stützlinie eines Widerlagers $BD$ gezeichnet, gegen welches in $B$ ein Gewölbe $AB$ sich stemmt, während die Rückseite $D_0 D_1$ dem Drucke der Hinterfüllungserde ausgesetzt ist. Es sei das Gewicht $Q$ der Gewölbhälfte $A_1 A_2 B$, deren Belastungslinie $B_0 C$ sein mag, durch $q q_6$ im Kräfteplane dargestellt und mit Hülfe der verticalen Theilungsebenen

Fig. 89.




durch $C_1 C_2 \ldots C_5$ die durch $A$ und $B$ gehende Stützlinie construirt. Für diese Stützlinie erhält man durch Construction in der bekannten Weise den Horizontalschub $H$ in der Strecke $oq$, und daher ist die resultirende Kraft

$W$, mit welcher das Gewölbe in $B$ auf das Widerlager wirkt, durch $o q_6$ der Größe und Richtung nach gegeben. Man denkt sich ferner das Widerlager durch horizontale Ebenen $E_1, E_2, E_3 \ldots E_5$ in eine beliebige Anzahl Stücke getheilt, und trägt von $q_6$ aus die Strecken $q_6 g_1; q_6 g_2, q_6 g_3 \ldots$ an, welche dem gewählten Kräftemaßstabe entsprechend die Gewichte der Widerlagskörper zwischen der oberen Begrenzung $D_0 B_0$ und der betreffenden jedesmaligen Theilebene vorstellen. Um noch den Erddruck $E$ gegen die verticale Wandfläche $D_0 D_1$ von der Höhe $h$ zu bestimmen, wähle man die Gleichung

$$E = \gamma_1 \frac{h^2}{2} tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2}$$

und setze für mittlere Erde

$$tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} = \frac{1}{4},$$

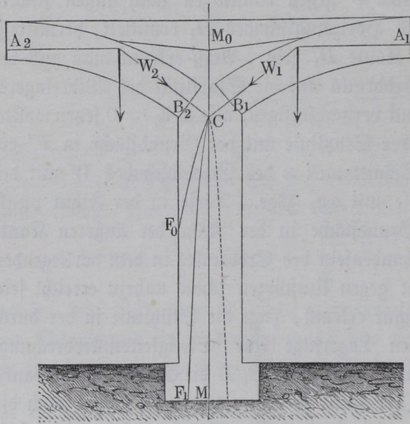
(entsprechend $\varrho = 36^0\,40'$), und das specifische Gewicht der Erde $\gamma_1 = 1600\,\mathrm{kg}$, während das des Gewölbmauerwerks $\gamma = 2000\,\mathrm{kg}$ sein mag. Wenn man daher auf der Verticalen $D_0 D_1$ die horizontale Strecke

$$D_1 E = \frac{\gamma_1}{\gamma} h\, tang^2 \frac{90^0 - \varrho}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} h = \frac{1}{5} D_0 D_1$$

anträgt und $E D_0$ zieht, so erhält man bekanntlich in dem Dreiecke $D_0 D_1 E$ den Querschnitt eines Steinprismas von der Länge 1 m, dessen Gewicht die Größe des auf die Wandfläche $D_0 D_1$ wirkenden Druckes darstellt, welcher im Abstande $\frac{1}{3} D_0 D_1$ über $D_1$ angreift. In gleicher Weise erhält man in jedem der durch die Ebenen $E_1, E_2, E_3 \ldots$ abgetrennten Dreiecke den Erddruck auf den betreffenden Theil der Wandfläche, z. B. in dem Dreiecke $D_0 E_4 E_4'$ den Erddruck $e_4$ auf $D_0 E_4$, dessen Angriffspunkt in $1/3\, D_0 E_4$ über $E_4$ gelegen ist. Wenn man daher durch Verwandlung dieser Dreiecke in Rechtecke von einer Grundlinie gleich der dem Kräfteplane zu Grunde gelegten Basis die dem Erddrucke entsprechenden Strecken bestimmt und in $g_1 e_1, g_2 e_2, g_3 e_3 \ldots g_6 e_6$ in den Kräfteplan einträgt, so läßt sich die Stützlinie des Widerlagers in bekannter Weise leicht zeichnen. Man erhält dann zunächst für das über dem Kämpfer $B$ gelegene Stück $B D D_0 B_0$ des Widerlagers unter Einfluß des Eigengewichtes und Erddruckes die Stützlinie $M_0 F_1 F_2$, indem man nämlich durch den Schnittpunkt $s_1$ zwischen $e_1$ und der Schwerlinie $M_0 M$ eine Parallele zu $q_6 e_1$, ferner durch $s_2$ eine Parallele mit $q_6 e_2$ zieht. Die Lagerfuge $D B$ wird daher in $F_2$ von der Kraft $q_6 e_2$ und in $B$ von der Kraft $o q_6$ angegriffen, und man erhält den Angriffspunkt der Resultante in $F_0$, wenn man durch den Durchschnitt $f$ der beiden in $F_2$ und $B$ angreifenden Kräfte eine Parallele zu $o e_2$ im Kräfteplane legt. In solcher Art zeichnet sich die Stützlinie $F_0 F_3 F_4 F_5 F_6$ für den unteren Theil des Widerlagers, indem man z. B., um den Punkt $F_5$ der Lagerfuge $E_5$ zu erhalten, durch den Durchschnitt $s_5$ des Erddrucks $e_5$ mit der Schwerlinie $M_0 M$ eine Parallele zu $q_6 e_5$ und von dem Schnittpunkte dieser Parallelen mit der Richtung $Bf$ des Gewölbschubes $W$ eine Parallele mit der Resultirenden $oe_5$ zieht, welche die Fuge $E_5$ in dem Punkte $F_5$ der Stützlinie trifft. Die Stützlinie schneidet die Grundfläche $B_3 D_3$ in einem Abstande $MF_6 = y$ von der Mitte, und aus diesem Werthe läßt sich, wie bei den Futtermauern gezeigt, die Vertheilung der Pressung bestimmen. Ebenso würde man die Größe des Stabilitätscoefficienten $\sigma$ gegen Umstürzen nach außen finden, wenn man diejenige Größe des Horizontalschubes $H_1$ ermittelt, vermittelst deren die Stützlinie durch die Kante $D_1$ geht. Auch erkennt man aus der Figur leicht den Einfluß des Erddrucks auf die Stabilität des Widerlagers. Wenn man nämlich den Erddruck vernachlässigen, also $g_6 e_6 = 0$ setzen wollte, würde man den Schnittpunkt der Stützlinie mit der Grundfläche in $F'$ erhalten, wenn man durch den Schnittpunkt $\alpha$ des Gewölbschubes $W$ mit der Mittellinie $M_0 M$ eine Parallele mit $og_6$ zöge. Diese in der Figur punktirte Gerade $\alpha F'$ trifft die Grundfläche in der Nähe der äußeren Kante $D_1$, so daß also ohne das Vorhandensein des Erddruckes in dem vorliegenden Falle die Grenze der Stabilität gegen Umstürzen schon nahezu erreicht sein würde. Wie man aus der Figur erkennt, zeigt die Stützlinie in der durch den Kämpferpunkt $B$ gehenden Lagerfuge eine Stetigkeitsunterbrechung, welche dem Gewichte des oberen Pfeilerstückes $B_0 D$ die Entstehung verdankt. Würde das Widerlager erst in der Höhe $BD$ beginnen, so würde auch die Stützlinie $F$ des Widerlagers an diejenige des Gewölbes in $B$ sich anschließen. Der Winkel $GF_0 N = \beta$, welchen die Mittelkraft in $F_0$ mit der Normalen $F_0 N$ zur Fuge bildet, läßt das Maß der Stabilität gegen Gleiten erkennen. Hierzu hat man, da dieser Winkel auch im Kräftepolygon als $ne_2 o = \beta$ wiederkehrt, sobald $e_2 n$ vertical gezeichnet ist, nur den Reibungswinkel $\varrho$ gleich $ne_2 o_1$ anzutragen, um in $qo_1$ die Horizontalkraft $H_1$, also in $\frac{qo_1}{qo} = \sigma_1$ den Stabilitätscoefficienten gegen Gleiten zu erhalten.

Von den Widerlagern oder Landpfeilern der Brücken, welche, wie im Vorstehenden immer angenommen wurde, nur auf einer Seite dem Drucke eines Gewölbes ausgesetzt sind, unterscheiden sich die Zwischenpfeiler der Brücken mit mehr als einer Oeffnung, welche beiderseits den Druck von Gewölben empfangen. Wenn hierbei die beiden Gewölbe $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, Fig. 90, ihrer Form und Belastung nach übereinstimmen, so sind auch die Stützkräfte $W_1$ und $W_2$ der Kämpfer gleich groß und um denselben Winkel gegen die Verticale geneigt. Daher schneiden sich diese Kräfte $W_1$ und $W_2$ in einem Punkte $C$ der verticalen Mittellinie $M_0 M$ des Pfeilers und die Stützlinie fällt von $C$ aus mit dieser Mittellinie $CM$ zusammen. Für diesen Fall ist daher weder ein Bestreben, den Pfeiler umzustürzeu, noch ihn zu verschieben, vorhanden. Nur wenn die Gewölbe zu beiden Seiten ungleich belastet sind, wird die Stützlinie des Pfeilers aus dessen Mittellinie heraustreten, und zwar um so mehr, je größer die Verschiedenheit der Belastungen beiderseits ist. Der ungünstigste Umstand wird nun dann stattfinden, wenn das eine Gewölbe, etwa $A_2 B_2$, außer durch sein Eigengewicht gar nicht belastet ist, während das andere Gewölbe $A_1 B_1$ über seine ganze Erstreckung der größten zufälligen Belastung unterworfen wird. Für diesen Zustand würde die Stützlinie im Pfeiler etwa durch $CF_1$ dargestellt sein. Auch diese ungünstigste einseitige Belastung wird jedoch nur eine geringe Stärke des Pfeilers erfordern, insofern die zufällige oder Verkehrsbelastung $Q$ bei steinernen Brücken immer nur gering ist im Vergleiche mit dem Eigengewichte der Gewölbconstruction, und weil bei einem Zwischenpfeiler auf jeder Seite das Gewicht eines halben Tonnengewölbes lastet, wodurch die Stabilität bedeutend erhöht wird. Aus diesen Gründen kann man die Zwischenpfeiler der Brücken beträchtlich schwächer ausführen, als die Endwiderlager. Denkt man sich aber den Druck von einem der beiden Gewölbe, z. B. $A_2 B_2$, beseitigt, sei es, daß dasselbe einstürze oder wegen einer Reparatur abgebrochen werden müsse, so erkennt man sofort, daß die Stützlinie, welche nunmehr etwa durch $B_1 C F_0$ dargestellt sein mag, nicht mehr im Innern des schwachen Pfeilers verbleibt, und daß der letztere dann jedenfalls durch den Schub des rechtseitigen Gewölbes $A_1 B_1$ um die Kante $F_0$ umgestürzt werden muß. Besteht nun die ganze Brücke aus einer größeren Anzahl von solchen Bögen, wie $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, deren Zwischenpfeiler sämmtlich nur so stark ausgeführt sind, daß sie wie $B_1 B_2 M$ nur unter der Voraussetzung beiderseitigen Druckes stabil sind, so erkennt man aus der obigen Betrachtung, daß der Bruch eines einzigen Bogens den Zusammensturz der Brücke zur Folge haben muß. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, ist es bei langen Thalüberbrückungen, wie

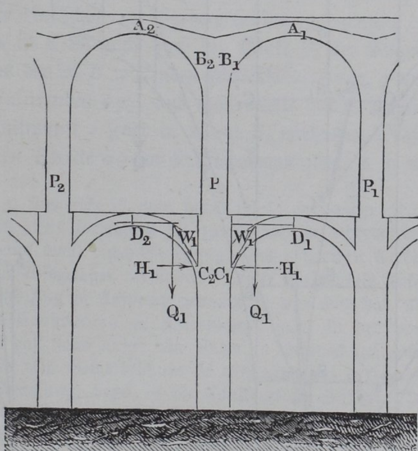
Fig. 90.



sie bei Viaducten vorkommen, und wobei eine oft beträchtliche Anzahl von Bögen angeordnet wird, üblich, einzelne Zwischenpfeiler so stark auszuführen, daß sie, ebenso wie die Landpfeiler oder Widerlager einem einseitigen Gewölbdrucke zu widerstehen vermögen. Diese stärkeren Pfeiler heißen Gruppenpfeiler, da sie die ganze Brücke derart in gewisse Abtheilungen oder Bogengruppen theilen, daß bei einem etwaigen Einsturz eines Bogens das Zusammenbrechen auf die Gruppe beschränkt bleibt, welcher dieser Bogen angehört. Ueber die Anzahl solcher Gruppenpfeiler wird in jedem besonderen Falle die Entscheidung durch lokale Verhältnisse und die Rücksichten auf eine ökonomische Herstellung bedingt werden.

Wenn die Pfeiler einer Brücke sehr bedeutende Höhen (über 30 m etwa) annehmen, wie dies bei den Wegüberführungen über tiefe Thäler vorkommt, so pflegt man die Pfeiler unter sich außer in dem eigentlichen Gewölbe der Brückenbahn, noch durch tiefer liegende Zwischengewölbe ein= oder mehrmal zu verspannen. Hierbei werden zuweilen auch diese Zwischengewölbe zur Herstellung der Communication zwischen beiden Ufern verwendet, indem man

Fig. 91.

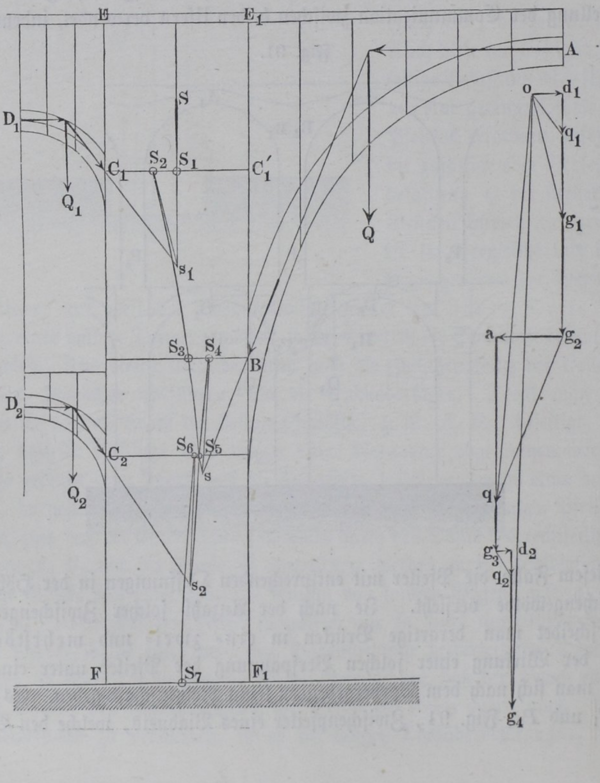



in diesem Falle die Pfeiler mit entsprechenden Oeffnungen in der Höhe der Zwischengewölbe versieht. Je nach der Anzahl solcher Zwischengewölbe unterscheidet man derartige Brücken in ein= zwei= und mehrstöckige. Von der Wirkung einer solchen Verspannung der Pfeiler unter einander kann man sich nach dem Vorhergehenden leicht Rechenschaft geben. Es seien $P, P_1$ und $P_2$, Fig. 91, Zwischenpfeiler eines Viaducts, welche den Bögen

$AB$ der Brückenbahn als Widerlager dienen. Wenn nun in den gleich hoch gelegenen Punkten $C_1$ und $C_2$ des Pfeilers $P$ sich die Spanngewölbe $C_1 D_1$ und $C_2 D_2$ anschließen, deren Hälften je das Gewicht $Q_1$ haben, und deren Horizontalschub $H_1$ sein möge, so vereinigen sich die in $C_1$ und $C_2$ angreifenden Stützkräfte $W_1$ der Spanngewölbe zu einer in der Pfeilermitte wirkenden Verticalkraft $2\,Q_1$, indem die beiden Horizontalschübe $H_1$ sich aufheben. Es ist also für die Stabilität des Pfeilers $P$ durch die Spanngewölbe dasselbe Resultat erzielt, welches durch eine Beschwerung des Pfeilers in seiner Axe mit dem Gewichte zweier Hälften der Spanngewölbe $CD$ erreicht werden würde.

In welcher Weise die Pfeiler in Anspruch genommen werden, welche in dieser oder ähnlicher Art mehreren Gewölben zum Widerlager dienen, wird man immer am schnellsten und sichersten durch die Verzeichnung der Stütz-

Fig. 92.



linie erkennen, deren Construction mit Hülfe des zugehörigen Kräfteplanes nach dem Vorhergegangenen keine Schwierigkeiten bieten dürfte. Als Beispiel hierzu ist noch in Fig. 92 die Stützlinie für den oberen Theil eines mittleren Zwischenpfeilers entworfen, wie derselbe bei dem Göltzschthalviaducte (s. §. 16) zur Ausführung gekommen ist. Hier ist $AB$ die Hälfte des mittleren Gewölbes von 30,87 m Spannweite und mehr als 70 m Höhe des Scheitels über der Thalsohle. An den Pfeiler, von welchem hier nur der Theil $FE$ zwischen der zweiten und vierten Etage gezeichnet wurde, schließen sich bei $C_1$ und $C_2$ die halbkreisförmigen Bogen $D_1 C_1$ und $D_2 C_2$ an. Zeichnet man in bekannter Weise die Stützlinien mit Hülfe der Kräftepläne $o d_1 q_1$ für $D_1 C_1$, $g_2 a q$ für den Hauptbogen $AB$ und $g_3 d_2 q_2$ für $D_2 C_2$, und stellt man das Gewicht des Pfeilerstückes $E E_1 C'_1 C_1$ durch $q_1 g_1$, dasjenige von $C_1 B$ durch $g_1 g_2$, ferner das von $B C_2$ durch $q g_3$ und des unteren Stückes $C_2 F_1$ durch $q_2 g_4$ dar, so erhält man in $o d_1 q_1 g_1 g_2 a q g_3 d_2 q_2 g_4$ das Kräftepolygon, welches in der mehrbesprochenen Art die Stützlinie des Pfeilers $S S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 S_7$ liefert. Daß diese Stützlinie in jeder Lagerfuge durch einen der Kämpfer $C_1$, $B$ und $C_2$ eine Stetigkeitsunterbrechung zeigen muß, wurde schon im Vorhergehenden gelegentlich der Fig. 89 besprochen. So ist z. B. auch hier der Punkt $S_4$ der Angriffspunkt für die Mittelkraft aus der in $B$ wirkenden Gewölbreaction $g_2 q$ und der in $S_3$ angreifenden Resultirenden $o g_2$, und man erhält diesen Punkt $S_4$, wenn man durch den Schnittpunkt $s$ jener in $B$ und $S_3$ wirkenden Kräfte eine Parallele zur resultirenden Strecke $o q$ im Kräftepolygon zieht, u. s. w.

Anmerkung. Zuweilen ist man durch lokale oder andere Rücksichten gehindert, den Widerlagern eines Gewölbes die zur Stabilität erforderliche Dicke zu geben und hilft sich dann wohl durch Einlegung eines eisernen Ankers, wodurch man die beiderseitigen Widerlager verbindet. Dieser horizontale Anker wird durch den Gewölbeschub auf Zug in Anspruch genommen, und man hat, um die Stabilitätsverhältnisse der Construction zu untersuchen, ganz in der vorstehenden Art zu verfahren, nur daß man außer den bisher in Betracht gezogenen Kräften $Q$, $G$ und $H$ noch die dem Gewölbeschube $H$ entgegengesetzt gerichtete Zugkraft $Z$ des Ankers in die Rechnung, bezw. in die Construction einführt. Ist nun die Dicke, welche man dem Widerlager geben kann, bekannt, so findet man für einen gleichfalls anzunehmenden Stabilitätscoefficienten $\sigma$ die Größe der von dem Anker auszuübenden Zugkraft $Z$ und hieraus nach den aus dem folgenden Capitel sich ergebenden Regeln den Querschnitt des eisernen Ankers.

**Kreuz- und Klostergewölbe.** Denkt man sich einen im Grundrisse rechteckigen Raum $ABCD$, Fig. 93 (a. f. S.), dessen Seiten $a$ und $b$ sein mögen, durch ein Tonnengewölbe von der Spannweite $AB = b$ und der Pfeilhöhe $ME = f$ überspannt, und schneidet dieses Gewölbe durch zwei Verticalebenen nach den Diagonalen $AC$ und $BD$, so erhält man vier cylindrische §. 29.

Stücke $K$ und $L$, von denen je zwei gegenüberliegende wie $K_1$ und $K_2$ oder $L_1$ und $L_2$ zu einander symmetrisch sind. Man denke sich ferner von diesen zwei Paaren $K$ und $L$ das eine, etwa $L$, entfernt und nach Fig. 94 ersetzt durch zwei andere cylindrische Stücke $K_3$ und $K_4$, welche dadurch entstanden gedacht werden können, daß man eine horizontale, mit $AB$ parallele Erzeugungsgerade so bewegt, daß sie mit jeder der beiden elliptischen Schnittlinien $AC$ und $BD$ einen Punkt gemein hat und dabei stets mit $AB$ parallel bleibt. Auf diese Weise entsteht über dem Raume $AC$ eine Decke, die durch zwei sich rechtwinkelig durchschneidende horizontale Tonnengewölbe gebildet wird, welche gleiche Pfeilhöhe $f$ und gleich hoch gelegene Kämpferfugen haben, und deren Spannweiten bezw. $a$ und $b$ sind.

Fig. 93.

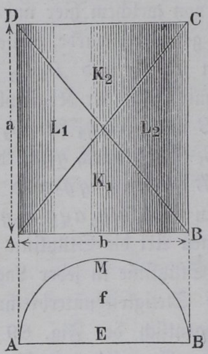
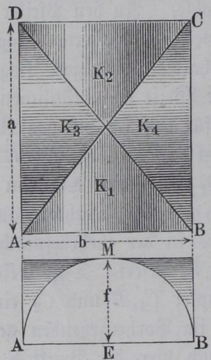


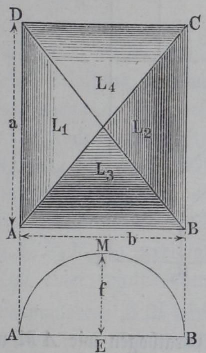

Fig. 94.




Es ist leicht zu erkennen, daß, wenn das eine Gewölbe $K_1 K_2$ nach einem Kreisbogen, etwa nach einem Halbkreise $AMB$ gebildet ist, das andere Gewölbe $K_3 K_4$ in dem Falle durch denselben Kreisbogen begrenzt sein wird, in welchem $a = b$, d. h. wenn der überdeckte Raum quadratisch ist. Ist dagegen $b$ von anderer Größe als $a$, so muß der Querschnitt des Gewölbes $K_3 K_4$ durch einen Ellipsenbogen von der Sehne $b$ und Pfeilhöhe $f$ dargestellt werden, welcher in eine Halbellipse übergeht, sobald $AMB$ ein Halbkreis ist. Ein solches Gewölbe nennt man ein Kreuzgewölbe, die vier einzelnen Stücke $K$ heißen Kappen und die diagonalen Vereinigungslinien $AC$ und $BD$ nennt man die Grate, man spricht daher von Gratbögen, wenn nach der Richtung dieser Schnittlinien besondere Bögen ausgeführt worden sind, gegen welche sich die Kappen lehnen. Oft läßt man die Gratbögen aber auch fort, indem alsdann die Kappen sich direct gegen einander stemmen. Es ist aus dem Vorstehenden sogleich zu erkennen, daß, während das Tonnengewölbe, Fig. 93, sich gegen zwei Seitenmauern $AD$ und $BC$ als Widerlager stützt, bei dem Kreuzgewölbe, Fig. 94, die Stützkräfte lediglich durch die vier Ecken $ABC$ und $D$ ausgeübt werden müssen, in welchen Ecken daher entsprechend starke Pfeiler aufzuführen sind. Man hat sich diese Pfeiler als die Widerlager der beiden Gratbögen vorzustellen, auf welchen letzteren die Kappen gewissermaßen lasten. Aus diesem Grunde wendet man Kreuzgewölbe hauptsächlich da an, wo es sich darum handelt, die Last der Decke auf einzelne Säulen oder Pfeiler zu übertragen, z. B. in Kirchen, Kellern ꝛc.

Anstatt in dem Tonnengewölbe Fig. 93, die beiden Stücke $L_1$ und $L_2$, welche die Kämpferfugen in sich aufnehmen, durch andere zu ersetzen, kann man aber auch die Stücke $K_1$ und $K_2$, welche die Gewölbstirnen enthalten, beseitigen, und durch solche cylindrische Stücke $L_3$ und $L_4$, Fig. 95, ersetzt denken, welche in derselben schon angegebenen Weise durch Bewegung einer mit $AB$ parallel bleibenden erzeugenden Geraden entstehen, die auf den beiden Gratlinien $AC$ und $BD$ entlang geführt wird. Auf diese Weise erhält man über dem Raume eine Decke, welche gleichfalls aus zwei sich rechtwinklig kreuzenden Tonnengewölben von der gemeinsamen Pfeilhöhe $f$ und den Spannweiten $a$ bezw. $b$ sich zusammensetzt. Man ersieht aus der Figur, daß bei diesem Gewölbe, welches den Namen **Klostergewölbe** führt, sämmtliche vier Umfassungsmauern als Widerlager auftreten, weshalb derartige Gewölbe hauptsächlich zum Ueberdecken einzelner von allen Seiten abgeschlossener Räume sich eignen.

Fig. 95.



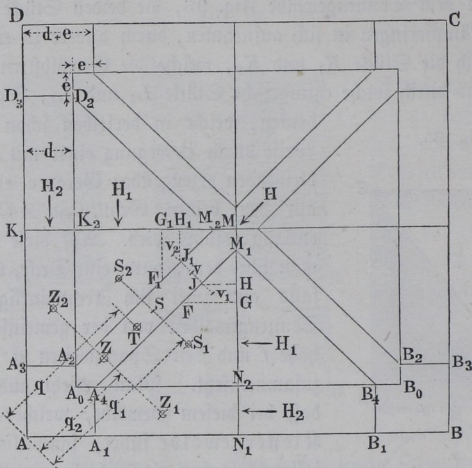

Aus dem Vorstehenden ist auch ersichtlich, daß die Untersuchung der Stabilitätsverhältnisse der Kreuz- und Klostergewölbe sich ebenfalls auf diejenige der Tonnengewölbe zurückführen läßt, aus welchem sie bestehen. Es sei $ABCD$, Fig. 96 (a. f. S.), ein der Einfachheit wegen quadratisch vorausgesetzter Grundriß eines Kreuzgewölbes, für welches besondere Gratbögen $AC$ und $BD$ ausgeführt sein sollen. Ebenso werde vorausgesetzt, daß zwischen die Pfeiler in den umfassenden Verticalebenen die Gurtbögen $AB$, $BC$, $CD$ und $DA$ von der Breite $d$ gespannt seien.

Bezeichnet zunächst $Q$ das Gewicht eines halben Gratbogens $AM$ sammt der **direct** auf dem Gratbogen ruhenden Belastung, und ist $a$ der Abstand dieses Gewichtes, welches im Schwerpunkte $T$ wirken möge, von der Innenkante $A_0$ des Pfeilers, so hat man den Horizontalschub $H$ jedes Gratbogens gegen einen Pfeiler wie bei einem Tonnengewölbe zu

$$H = \frac{Qa}{f},$$

wenn $f$ die Höhe bedeutet, um welche der Scheitel der Stützlinie in $M$ über deren Kämpfer in $A_0$ gelegen ist. Dieser Horizontalschub $H$ wirkt in der Diagonalebene $AM$, und zwar in einer Höhe $h + f$ über dem Fuße des Pfeilers $A$, wenn der letztere unter dem Kämpferpunkte die Höhe $h$ hat.

Fig. 96.




Außer durch sein Eigengewicht ist nun jeder halbe Gratbogen wie $AM$ noch durch zwei halbe Kappengewölbe $A_4 M_1 N_2$ und $A_2 M_2 K_2$ belastet. Diese Belastung kann man folgenderart bestimmen.

Denkt man sich eine halbe Kappe z. B. $A_4 M_1 N_2$ durch verticale Ebenen parallel $AB$ in einzelne Gewölbstreifen wie z. B. $FGHJ$ zerlegt, so entsprechen diese Streifen ebenso vielen halben Tonnengewölben, deren Spannweite um so geringer ist, je näher die Schnittebenen der Mitte $M$ gelegen sind. Die Spannweite dieser Gewölbstreifen hat ihren größten Werth in $A_4 B_4$, und man hat dem Kappengewölbe die dieser Spannweite und der entsprechenden Belastung zukommende Gewölbstärke zu geben. Irgend ein solcher Streifen der halben Kappe habe ein Eigengewicht $\varDelta Q$, und es sei mit $\varDelta H$ der Horizontalschub desselben verstanden. Zu jedem solchen Streifen wie $FGHJ$ der halben Kappe $A_4 M_1 N_2$ giebt es einen symmetrisch zum Grat $AM$ gelegenen Streifen wie $F_1 G_1 H_1 J_1$ der Kappe $A_2 M_2 K_2$, und es ist deutlich, daß je zwei solcher Streifen wie $FH$ und $F_1 H_1$ in ihrer vereinigten Wirkung auf den Gratbogen $AM$ eine Verticalkraft gleich $2 \varDelta Q$ und einen Horizontalschub in der Ebene der Diagonale $AM$ von der Größe $\varDelta H \sqrt{2}$ ausüben. Dieser letztere Horizontalschub ist in der Höhe des Scheitels $M$, also in der Höhe $h + f$ über dem Fuße des Pfeilers angreifend zu denken, während die Richtungslinie der verticalen Kraft $2 \varDelta Q$ durch die Durchschnittslinie $v$ gegeben ist, in welcher die Diagonalebene $AM$ von der gemeinschaftlichen Schwerebene $v_1 v_2$ der beiden Streifengewichte $\varDelta Q$ geschnitten wird. Bezeichnet man nun mit $Q_1$ das Gewicht jeder der beiden halben Kappen $A_4 M_1 N_2$ und $A_2 M_2 K_2$, und mit $H_1$ den Horizontaldruck derselben, so erkennt man, daß der halbe Gratbogen $AM$ durch die besagten beiden halben Kappen einem weiteren Horizontaldrucke im Scheitel von der Größe $H_1 \sqrt{2}$ in der Diagonalebene $AM$ und einer ferneren Belastung durch das Gewicht $2\,Q_1$ ausgesetzt ist. Diese verticale Belastung $2\,Q_1$ hat man sich ebenfalls in der Diagonalebene $AM$ und zwar so vertheilt vorzustellen, wie oben angegeben wurde, so nämlich, daß der Schwerpunkt dieser Belastung in $S$ erhalten wird, wenn man die Schwerpunkte $S_1$ und $S_2$ der beiden halben Kappen $A_4 M_1 N_2$ und $A_2 M_2 K_2$ durch eine Gerade $S_1 S_2$ verbindet. Aus dieser Belastung hat man nun nach dem Vorhergehenden die Stärke des Gratbogens $AM$ zu bestimmen.

Um auch die Stabilität der Pfeiler zu untersuchen, hat man noch zu berücksichtigen, daß jeder Pfeiler, wie $A$, noch durch zwei Gurtbögen wie $A_1 B_1$ und $A_3 D_3$ gedrückt wird. Bezeichnet man mit $H_2$ den Horizontalschub jedes dieser Bögen und mit $Q_2$ das Gewicht einer Bogenhälfte wie $A_1 A_4 N_2 N_1$, so vereinigt sich die Wirkung der beiden Gurte auf den Pfeiler $A$ zu einer resultirenden ebenfalls in der Scheitelhöhe $h + f$ und in der Diagonalebene $AM$ wirkenden Horizontalkraft $H_2 \sqrt{2}$ und zu einer resultirenden verticalen Belastung $2\,Q_2$, deren Angriffspunkt in $Z$ erhalten wird, wenn man die Schwerpunkte $Z_1$ und $Z_2$ der beiden Gurtbogenhälften durch eine Gerade verbindet. Unter Berücksichtigung dieser Kräfte läßt sich nun in der mehrfach besprochenen Art die Gleichung für die Widerstandsfähigkeit des Pfeilers $A$ angeben. Derselbe wird durch die in der Diagonalebene $AM$ in der Höhe $h + f$ über dem Fuße angreifenden Kräfte

$$H + (H_1 + H_2) \sqrt{2}$$

auf Umkippen um die Kante $A$ angegriffen, und widersteht dem Umkanten außer durch sein Eigengewicht $G$ noch durch das Moment der Belastungen $Q$ des halben Gratbogens, $2\,Q_1$ der beiden Kappenhälften und $2\,Q_2$ der beiden halben Gurtbögen. Bezeichnet man mit

$$F = (d + e)^2 - e^2 = d^2 + 2de$$

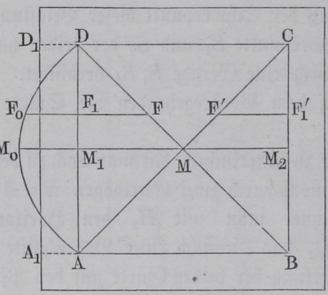
den Querschnitt des Pfeilers, dessen Schwerpunkt von der Kante $A$ den leicht zu ermittelnden Abstand $s$ haben möge, und sind unter $q, q_1$ und $q_2$ die Abstände der Verticalkräfte $Q$, $2\,Q_1$ und $2\,Q_2$ ebenfalls von der Kante $A$ verstanden, so findet man für einen geforderten Stabilitätscoefficienten $\sigma$ die Gleichung

$$\sigma \left[H + (H_1 + H_2) \sqrt{2}\right] (h + f) = F h \gamma s + Q q + 2\,Q_1 q_1 + 2\,Q_2 q_2,$$

woraus man nach Feststellung der Verhältnisse der Bogen und Kappen die Größe des Querschnitts $F$ d. h. die Stärken $d$ und $e$ ermitteln kann. Eine weitere Ausführung der betreffenden Rechnung soll hier unterbleiben, dieselbe dürfte in jedem speciellen Falle ohne besondere Schwierigkeiten durchführbar sein.

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Untersuchung des Klostergewölbes über dem rechteckigen Raume $ABCD$, Fig. 97, auf diejenige der Tonnengewölbe zurückführen. Denkt man sich auch hier die einzelnen Kappen in Streifen durch verticale Ebenen wie $M_1 M M_2$, und $F_1 F$ zerlegt, so erkennt man, daß der mittlere Gewölbstreifen $M_1 M M_2$ mit einem Tonnengewölbe von der Spannweite $AB$ und der Pfeilhöhe $f$ übereinstimmt, daher auch für diesen Streifen die Gewölbestärke nach den oben für Tonnengewölbe angegebenen Regeln zu bestimmen ist. Diese Gewölbstärke pflegt man meistens für die Kappen in allen übrigen Punkten beizubehalten. Irgend ein Streifen einer Kappe wie $F_1 F$ stützt sich in $F_1$ mit seiner Stützkraft

Fig. 97.




$$W = \sqrt{Q^2 + H^2}$$

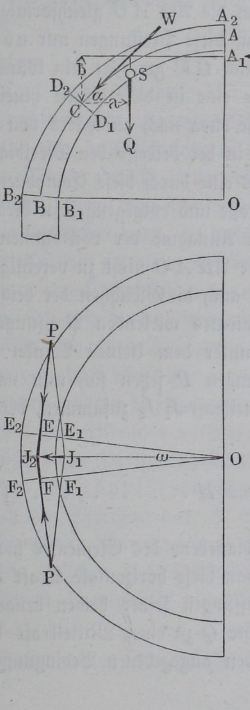
auf die Widerlagsmauer, der Grat $MD$ dagegen erhält in $F$ keine Belastung durch den Streifen $F_1 F$, da dessen Wirkung sich durch die Kappe $DMC$ auf den gegenüberliegenden Streifen $F' F_1'$ der Kappe $CMB$ fortsetzt, und daher die Horizontalschübe von $FF_1$ und $F' F_1'$ sich aufheben. Daher pflegt man bei den Klostergewölben auch in der Regel das Einwölben besonderer Gratbögen zu unterlassen.

Als Widerlager treten, wie schon oben angeführt wurde, bei den Klostergewölben alle vier Umfassungsmauern auf. Um deren Stärke zu bestimmen, denke man sich für jeden Gewölbstreifen wie z. B. $FF_1$ entsprechend dessen Spannweite und Belastung die erforderliche Dicke $F_1 F_0$ des Widerlagers ermittelt. Offenbar erhält man alsdann in der Mitte $M$, wo die Spannweite $M_1 M_1'$ den größten Werth hat, auch die größte Stärke $M_1 M_0$ der Widerlagsmauer, während diese Stärke aus der Rechnung für die Ecken $A$ und $D$ gleich Null hervorgeht. Die Theorie würde daher eine Widerlagsmauer von der segmentförmigen Grundrißgestalt $AM_0 D$ ergeben. In der Ausführung wählt man hierfür meistens eine Mauer von dem rechteckigen

Querschnitte $ADD_1A_1$ und solcher Dicke, daß das Stabilitätsmoment für beide Mauern in Bezug auf $AD$ als Drehkante gleich groß ist. Auch kann man, wenn man sich mit dieser Annäherung nicht begnügen will, das resultirende Umsturzmoment aller einzelnen Streifen wie $FF_1$ von $A$ bis $D$ bilden und danach die Querdimensionen der Mauer bestimmen.

**Kuppelgewölbe.** Die zur Ueberdeckung von Räumen kreisförmigen Grundrisses dienenden Kuppelgewölbe sind dadurch gekennzeichnet, daß die beiden Leibungen durch zwei Rotationsflächen dargestellt sind, deren gemeinsame Axe im Mittelpunkte des kreisförmigen Grundrisses senkrecht steht. Die Erzeugungs- oder Meridianlinien dieser Rotationsflächen sind häufig Kreisbögen, so daß die Wölbflächen kugelförmig ausfallen, doch kommen auch anders gestaltete Meridianlinien vor. Ein solches Kuppelgewölbe ist entweder ein geschlossenes, d. h. bis zum Scheitelpunkte fortgesetztes, oder ein offenes im Scheitel durch eine kreisförmige Oeffnung unterbrochenes. Die letztere Anordnung findet sich häufig aus dem Grunde, um die centrale Oeffnung behufs der Beleuchtung als Oberlicht (Laterne) wirken zu lassen. §. 30.

Fig. 98.




Die Belastung der Kuppeln besteht fast immer nur in ihrem Eigengewichte, bezw. ihrer Bekleidung, und zwar ist diese Belastung in allen Fällen als ganz gleichförmig um die Axe herum vertheilt anzunehmen, wenigstens soll auf eine einseitige Belastung, wie sie z. B. durch Schneedruck herbeigeführt werden kann, im Folgenden nicht Rücksicht genommen werden. Um die Stabilitätsverhältnisse dieser Gewölbe zu prüfen, denke man sich durch Fig. 98 ein halbes Kuppelgewölbe dargestellt, für welches $AO$ die Axe und $ACB$ die Mittellinie der Meridianfläche sein mag. Denkt man sich aus diesem Gewölbe durch zwei verticale Axenebenen $OE$ und $OF$, welche unter einem kleinen Winkel $EOF = \omega$ gegen einander geneigt sind, ein streifenförmiges Element herausgeschnitten, dessen Mittelebene durch $A_1A_2B_2B_1$ dargestellt ist, so kann man in Bezug auf dieses Element ganz ähnliche Betrachtungen anstellen, wie bei den Tonnengewölben. Zieht man nämlich in dem Meridianschnitte $AB$ durch einen beliebigen Punkt $C$ der Mittellinie $ACB$ eine auf der letzteren senkrechte Gerade $D_1 D_2$, so kann man den Kegelmantel, dessen Axe $AO$ ist, und dessen Seite durch diese Gerade $D_1 D_2$ gebildet wird, als die Lagerfuge für alle die unendlich vielen elementaren Streifen ansehen, in welche sich der oberhalb $D_1 D_2$ befindliche Theil der Kuppel zerlegen läßt. Für jedes derartige Element, wie $A_1 A_2 D_2 D_1$, gilt nun wieder die allgemeine Bedingung, daß das Gleichgewicht nur möglich ist, wenn die Resultirende aller auf das Element wirkenden äußeren Kräfte die Lagerfuge innerhalb des Gewölbmaterials $D_1 D_2$ trifft und von der Normalen zu $D_1 D_2$ um weniger als den betreffenden Reibungswinkel abweicht. Als äußere, auf das Element wirkende Kraft hat man zunächst das Gewicht $Q$ des Elementes und seiner etwaigen Belastung anzusehen, welches in dem bezüglichen Schwerpunkte $S$ wirksam zu denken ist. Außerdem wirken noch auf die beiden verticalen Seitenflächen des Elementes, welche in den Meridianebenen $OE$ und $OF$ enthalten sind, gewisse Reactionen oder Pressungen $P$, die von den benachbarten Elementen ausgeübt werden. Aus der vorausgesetzten in Bezug auf die Axe $AO$ gleichförmigen Gestalt und Belastung ergiebt sich sogleich, daß diese Pressungen nur normal zu den verticalen Meridianebenen $OE$ und $OF$ gerichtet sein können, denn würde die Pressung einer solchen Ebene eine in diese Ebene hineinfallende tangentiale Componente haben, welche etwa nach auswärts von $O$ nach $E$ gerichtet wäre, so würde von den beiden in der betreffenden Meridianebene zusammenstoßenden Gewölbelementen das eine durch diese Componente nach außen und das andere durch die gleich große und entgegengesetzte Reaction nach innen gedrückt werden, was mit der Annahme der vollkommenen Gleichmäßigkeit aller Verhältnisse rings um die Axe $AO$ nicht zu vereinigen wäre. Aus dieser Gleichförmigkeit folgt ebenso auch die Gleichheit der beiden auf die Seitenebenen $OE$ und $OF$ des Elementes wirkenden Pressungen, welche jede mit $P$ bezeichnet werde. Diese unter dem kleinen Winkel $\omega$ gegen einander wirkenden horizontalen Pressungen $P$ setzen sich nun nach dem Parallelogramm der Kräfte zu einer Mittelkraft $J_1 J_2$ zusammen, deren Größe wegen der Kleinheit von $\omega$ durch

$$J_1 J_2 = 2 P \sin \frac{\omega}{2} = P \omega = H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gegeben ist, und welche in der mittleren Meridianebene des Elementes horizontal von innen nach außen wirkt. Setzt man diese horizontale Kraft $H$, welcher das betrachtete Element durch die Pressungen seiner beiden benachbarten Elemente ausgesetzt ist, mit dem Gewichte $Q$ zu einer Mittelkraft $W$ zusammen, so muß diese Resultirende den oben angegebenen Bedingungen entsprechen, gerade so wie die Stützkraft $W$ bei den bisher betrachteten Tonnengewölben. Die Analogie mit den letzteren fällt überhaupt ins Auge, und der wesentliche Unterschied besteht nur darin, daß, während bei den Tonnengewölben der Horizontalschub $H$ in der Scheitelfuge durch die Reaction der benachbarten Gewölbhälfte ausgeübt wird, bei dem Kuppelgewölbe dieser Horizontalschub $H$ unterhalb des Scheitels gelegen ist. Dies geht daraus hervor, daß hier der Horizontalschub als die Resultirende aus den Wirkungen angesehen werden muß, welche die beiderseits benachbarten Gewölbtheile auf die Meridianflächen ausüben, in denen sie mit dem betrachteten Elemente in Berührung sind. Wenn nun die durch Zusammensetzung von $Q$ und $H$ sich ergebende Stützkraft $W$ durch irgend einen Punkt etwa $C$ der Lagerfuge $D_1 D_2$ geht, so hat man für diesen Punkt $C$ als Mittelpunkt der Momente die Gleichung

$$Qa = Hb \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

unter $a$ und $b$ die Abstände des Stützpunktes $C$ von dem Gewichte $Q$, bezw. von der Horizontalkraft $H$ verstanden. Ebenso ist die Stützkraft in $C$ wie bei den Tonnengewölben durch

$$W = \sqrt{Q^2 + H^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

gegeben.

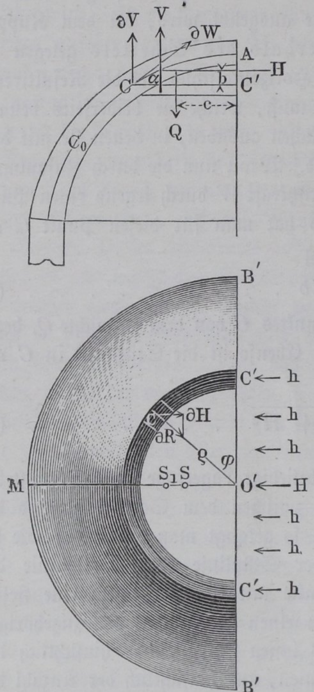
Denkt man sich diese hier für die beliebige Lagerfuge $D_1 D_2$ angestellte Betrachtung für alle möglichen Fugen zwischen dem Scheitel $A$ und der Basis oder dem Kämpfer $B$ angestellt, so gelangt man auch hier, wie bei dem Tonnengewölbe, zum Begriffe der Stützlinie oder Mittellinie des Druckes, wenn man alle diejenigen Punkte mit einander durch eine stetige Linie verbunden denkt, in welcher die einzelnen Fugen von den zugehörigen Mittelkräften getroffen werden, und es lassen sich offenbar hinsichtlich der allgemeinen Eigenschaften dieser Stützlinien, und hinsichtlich der Anzahl der möglichen und der Unbestimmtheit der wirklichen Stützlinien die für Tonnengewölbe gemachten Bemerkungen leicht auf Kuppelgewölbe übertragen. Die Horizontalkraft $H$ ist hier nicht wie bei den Tonnengewölben für alle Fugen constant, sondern dieselbe nimmt, da sie aus den Reactionen auf die Seitenflächen des Streifens entsteht, allmälig nach unten hin zu. Um für die Größe dieses Horizontaldruckes $H$ einen allgemeinen Ausdruck zu erhalten, sei der von Föppl*) eingeschlagene Weg befolgt, indem zunächst die Kuppel durch eine Meridianebene $B' O' B'$, Fig. 99 (a. f. S.), in zwei gleiche Theile zerlegt wird. Betrachtet man von einer solchen Hälfte diejenige halbe Calotte, welche zwischen dem Scheitel $A$ und der kegelförmigen Fuge $C' C C'$ enthalten ist, so wirkt auf dieses Stück außer dessen Eigengewicht $Q$ die Summe

---

*) A. Föppl, Theorie der Gewölbe. Leipzig 1880.

aller in dem Halbkreise $C'CC'$ gleichmäßig vertheilten Stützkräfte $w$ und außerdem die Summe aller der nach dem Vorstehenden horizontalen Reactionen $h$, mit welchen die weggeschnitten gedachte Hälfte gegen den Meridianschnitt $C'O'C'$ wirkt. Diese letzteren Reactionen liefern eine horizontale Mittelkraft $H$, welche in der $C'C'$ senkrechten Symmetrieebene $O'M$ des Kuppelstückes wirkt, und zwar in einer noch unbekannten Höhe $b$ über dem mittleren Kreise $CC'$ der Lagerfuge.

Fig. 99.




Wegen der symmetrischen Form und Belastung der Kuppel wird die Stützreaction $w$ der Lagerfuge in derselben nach allen Meridianebenen gleichförmig vertheilt sein, und es ist aus demselben Grunde auch klar, daß diese Reaction für irgend welchen Punkt der Lagerfuge in der Meridianebene desselben liegen, und für alle Punkte unter demselben Winkel $\alpha$ gegen den Horizont geneigt sein muß. Wenn also diese Reaction $w$ in irgend einem Meridianschnitte in dem Punkte $C$ vom Halbmesser $O'C = \varrho$ angreift, so kann man sich den gesammten Widerstand der Lagerfuge in der Kreislinie $C'CC'$ vom Halbmesser $O'C = \varrho$ wirksam denken. Bezeichnet man daher mit $w$ den mittleren Stützdruck auf die Längeneinheit dieser Kreislinie, so erhält man für irgend ein Element $\partial L$ derselben den Stützdruck

$$\partial W = w \partial L.$$

Zerlegt man den elementaren Stützdruck $\partial W$ in irgend welchem Punkte $C$ in seine verticale Componente $\partial V$ und die horizontale, also radial gerichtete Componente $\partial R$, so hat man

$$\partial V = \partial W \sin\alpha = w \sin\alpha\, \partial L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Offenbar ist die Summe aller verticalen Componenten gleich dem Gewichte $Q$ des betrachteten Kuppelstückes, so daß man hat

$$V = Q = w \sin\alpha\, L = w \sin\alpha\, \pi\, \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die radiale Componente dagegen findet man zu

$$\partial R = \partial W \cos\alpha = w \cos\alpha \, \partial L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wenn man dieselbe wiederum zerlegt in eine Componente senkrecht und eine parallel zur Begrenzungsebene $C' O' C'$ des betrachteten Kuppelstückes, so erhält man die erstere zu

$$\partial H = \partial R \sin\varphi = w \cos\alpha \, \partial L \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wenn $\varphi$ den Winkel $C O' C'$ bedeutet, welchen die Meridianebene von $C$ mit der Grenzebene $C' O' C'$ bildet. Summirt man auch diese Componenten für alle Werthe von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$, so erhält man, da $\partial L \sin\varphi$ gleich der Projection des Kreisbogenelementes $\partial L$ auf den Durchmesser $C' C'$ ist, die gesammte Horizontalkraft

$$H = w \cos\alpha \, 2\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und durch Division in (5):

$$\tan\alpha = \frac{2}{\pi} \frac{Q}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Die andere Componente von $\partial R$, welche parallel mit der Begrenzungsebene $C' C'$ und durch

$$\partial R \cos\varphi$$

gegeben ist, liefert bei der Summirung ein Resultat gleich Null, da diese Componenten für je zwei zu $O' M$ symmetrisch gelegene Elemente gleich und entgegengesetzt sind.

Die verticale Resultirende $V$ hat man sich in dem Schwerpunkte $S_1$ der als materiell gedachten halben Kreislinie $C' C C'$ angreifend zu denken, welcher Schwerpunkt von der Ebene $C' C'$ bekanntlich den Abstand $O S_1 = \frac{2}{\pi} \varrho$ hat, während die Schwerkraft $Q$ der halben Kuppelschale in dem Schwerpunkte $S$ wirkt, dessen Abstand von $C' O' C'$ durch $c$ ausgedrückt sein mag. Bezeichnet man noch den verticalen Abstand der Horizontalkraft $H$ von dem Kreise $C' C$ mit $b$, so hat man zur Bestimmung von $b$ die Momentengleichung

$$Q \, . \, S S_1 = Q \left( \frac{2}{\pi} \varrho - c \right) = H b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

welche, wenn man darin aus (9)

$$H = \frac{2\,Q}{\pi \tan\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

einführt,

$$b = \left( \varrho - \frac{\pi}{2} c \right) \tan\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

liefert.

Aus der Gleichung (11):

$$H = \frac{2}{\pi} \, Q \, cotg \, \alpha$$

erkennt man leicht, daß der Horizontalschub $H$ des Kuppelgewölbes für einen gewissen Winkel $\alpha$, d. h. für eine gewisse Stelle der Kuppel einen größten Werth annimmt. Man findet hierfür die Bedingung durch

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0,$$

welche, mit Rücksicht darauf, daß das Gewicht $Q$ von $\alpha$ abhängt, die Gleichung liefert:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \frac{2}{\pi} \left( cotg \, \alpha \, \frac{\partial Q}{\partial \alpha} - \frac{Q}{sin^2 \, \alpha} \right) = 0,$$

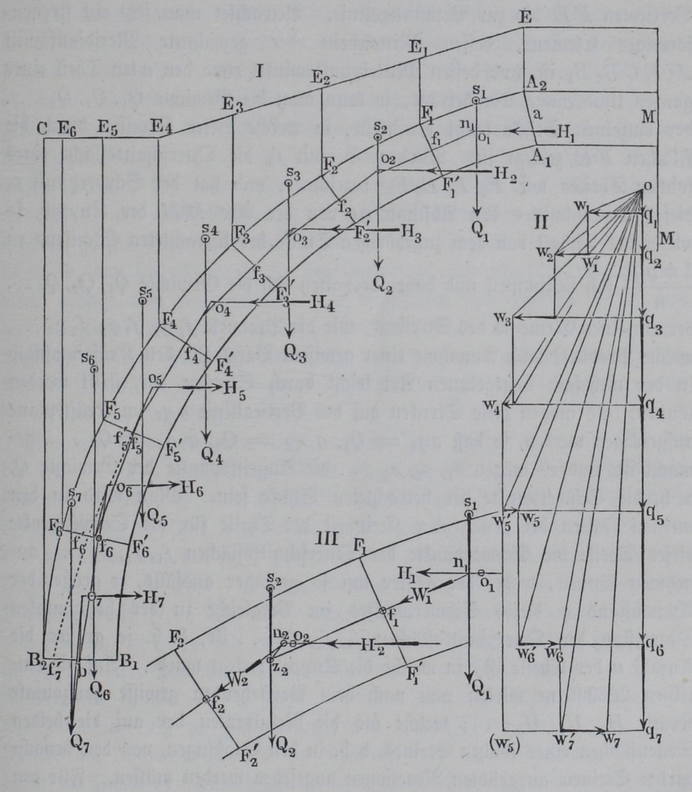
oder

$$\frac{\partial Q}{Q} = 2 \, \frac{\partial \alpha}{sin \, 2 \, \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Sei etwa $C_0$ der Punkt des Meridianschnittes, für welchen diese Bedingung (13) erfüllt ist, für welchen also der Horizontalschub $H$ den größten Werth annimmt, so wird für alle tiefer liegenden Punkte der Kuppel der Horizontalschub $H$, d. h. also die Pressung in dem Meridianschnitte $B' O' B'$ kleiner. Dies könnte nur dadurch möglich werden, daß in dem Meridianschnitte unterhalb dieses Punktes $C_0$ nicht mehr rückwirkende Pressungen, sondern absolute Spannungen stattfänden. Da man aber annehmen muß, daß der Mörtel in den Fugen Zugspannungen nicht zu übertragen vermag, so wird unterhalb des gedachten Punktes $C_0$ in den Meridianschnitten überhaupt keine Reactionswirkung ausgeübt werden, indem man sich zu denken hat, daß sämmtliche verticale Stoßfugen von dem durch $C_0$ gelegten Horizontalschnitte aus nach unten hin sich öffnen. Der Horizontalschub hat daher für alle Punkte des Kuppelgewölbes unterhalb $C_0$ einen constanten Werth gleich dem dem Punkte $C_0$ zukommenden Maximum von $H$. Es ist daraus auch ersichtlich, daß unterhalb dieses Punktes $C_0$ die Stützlinie zufolge des Horizontaldruckes $H_{max}$ mehr nach außen gedrängt wird, als es der Fall sein würde, wenn der Mörtel in den einzelnen Steinkränzen Zugspannungen auszuüben vermöchte, weil in Folge einer solchen Eigenschaft der Horizontalschub um so mehr sich verringern müßte, je mehr das betreffende Kuppelstück unterhalb des durch $C_0$ gedachten Ringes herabreicht.

In der That hat man vielfach bei Kuppeln den einzelnen Steinkränzen im unteren Theile die Fähigkeit, Zugspannungen aufzunehmen, dadurch ertheilt, daß man die Kuppeln direct über dem Auflager mit eisernen Ringen umgürtete, wie dies z. B. bei der berühmten Kuppel der St. Peterskirche in Rom nachträglich geschehen ist. In welcher Weise die Anordnung eines solchen Ringes, der durch seine Zugspannung den Horizontalschub für den unteren Theil der Kuppel von dem größten Werthe $H_{max}$ wieder herabzieht, und dadurch die Stützlinie entsprechend nach innen drängt, zu treffen, und wie der Einfluß desselben auf die Stabilität des Kuppelgewölbes und ins-

Fig. 100.




besondere der Widerlagsmauer zu beurtheilen ist, dürfte nach dem Vorhergegangenen deutlich sein.

Auch bei den Kuppelgewölben wird man sich am bequemsten einer graphischen Methode zur Ermittelung des Horizontaldruckes und der Pressung in jedem Querschnitte bedienen, um danach die erforderliche Stärke des Gewölbes und Widerlagers zu bestimmen. Dies kann in folgender Weise geschehen. Es sei $A_1 A_2 B_2 B_1$, Fig. 100, der Meridianschnitt eines Kuppelgewölbes, welches in der Mitte mit einer Lichtöffnung $M A_1 A_2$ versehen sein mag, und dessen Belastung in bekannter Weise durch die Belastungslinie $CE$ dargestellt sein soll. Man theile dann den Gewölbequerschnitt durch Ebenen wie $F_1 F_1'$, $F_2 F_2'$ . . . nach der Richtung der Lagerfugen in eine beliebige Anzahl von Theilen, welche als Gewölbsteine aufgefaßt werden können, und ziehe durch die oberen Kanten $F_1 F_2$ . . . dieser Fugen die Verticalen $FE$ bis zur Belastungslinie. Betrachtet man jetzt ein streifenförmiges Element, dessen Mittelebene der gezeichnete Meridianschnitt $A_1 E C B_2 B_1$ ist, und dessen Mittelpunktswinkel etwa den $n$ten Theil einer ganzen Umdrehung $2\pi$ beträgt, so kann man die Gewichte $Q_1, Q_2, Q_3$ . . . der einzelnen Stücke leicht ermitteln, in welche dieser Streifen durch die Flächen $FE$ zerlegt ist. Wird z. B. mit $f_3$ die Querschnittsfläche eines solchen Theiles wie $F_2' E_2 E_3 F_3'$ bezeichnet, und hat der Schwerpunkt $s_3$ dieses Querschnittes den Abstand $\varrho_3$ von der Axe $MM$ der Kuppel, so würde der Inhalt von dem zugehörigen Stücke des betrachteten Streifens zu $\frac{2\pi\varrho f_3}{n}$ sich bestimmen und daher verhalten sich die Gewichte $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ der einzelnen Elemente des Streifens, wie die Producte $f_1 \varrho_1, f_2 \varrho_2, f_3 \varrho_3 \dots$, welche Producte nach Annahme einer gewissen Basis für den Kräftemaßstab in der mehrfach angegebenen Art leicht durch Strecken dargestellt werden können. Es mögen diese Strecken auf der Verticallinie $o q_7$ im Kräfteplane aufgetragen werden, so daß $o q_1 = Q_1$, $q_1 q_2 = Q_2$, $q_2 q_3 = Q_3$ . . . gemacht ist, und es mögen $s_1, s_2, s_3$ . . . die Angriffspunkte der Gewichte $Q$, d. h. die Schwerpunkte der betrachteten Stücke sein. Man wird in den meisten Fällen bei genügender Kleinheit der Theile für die Schwerpunkte dieser Theile die Schwerpunkte der Querschnittsflächen $f_1, f_2, f_3$ . . . annehmen können, wobei der Fehler um so geringer ausfällt, je größer der Axenabstand $\varrho$ dieses Schwerpunktes im Vergleiche zu der horizontalen Dimension der Querschnittsflächen $f_1, f_2, f_3$ . . . ist, d. h. je größer die Anzahl $n$ der Theile ist, in welche die Kuppel zerlegt wurde. Auf die einzelnen Wölbsteine wirken nun nach dem Vorstehenden gewisse horizontale Kräfte $H_1, H_2, H_3$ . . ., welche als die Resultanten der auf die beiden Seitenflächen eines solchen Steines, d. h. in den Stoßfugen, von den benachbarten Steinen ausgeübten Reactionen angesehen werden müssen. Für den Angriffspunkt dieser Horizontalkräfte nimmt Scheffler entsprechend dem Princip des kleinsten Widerstandes die oberste Kante jedes Wölbsteines an, also $A_2$ für die Horizontalkraft $H_1$ des obersten Steines $A_2 F_1'$, $F_1$ für die Horizontalkraft $H_2$ des folgenden Steines $F_1 F_2'$ u. s. w., wogegen Andere *) den Schwerpunkt der Querschnittsfläche eines Wölbsteines als Angriffspunkt

*) S. Föppl, Theorie der Gewölbe.

der Horizontalkraft annehmen. Diese letztere Annahme soll auch hier gemacht und daher vorausgesetzt werden, daß $H_1$ im Schwerpunkte $o_1$ von $A_2 F_1'$, $H_2$ im Schwerpunkte $o_2$ von $F_1 F_2'$ angreife u. s. f.

Um nun die Horizontalkräfte selbst zu bestimmen, muß in Bezug der zugehörigen Stützlinie eine entsprechende Annahme gemacht werden. Es ist nämlich hier wie bei den Tonnengewölben leicht ersichtlich, daß es in einem stabilen Kuppelgewölbe eine unendlich große Anzahl von möglichen Stützlinien geben wird, welche sich von einander durch die Größe des Horizontalschubes unterscheiden. Welche von diesen möglichen Stützlinien die wirkliche ist, wird, wie schon bei den Tonnengewölben angeführt wurde, sich nur angeben lassen, wenn die Elasticitätsverhältnisse der Gewölbe genügend untersucht sein werden. Man wird daher auch hier die Untersuchung derartig führen können, daß man prüft, ob innerhalb des **Kerns** eine Stützlinie möglich ist, und wird ebenso, wie bei den Tonnengewölben gezeigt wurde, die möglich größte Sicherheit erlangen, wenn das Gewölbe so geformt und belastet ist, daß die **Mittellinie** des Gewölbes eine **mögliche Stützlinie** wird, womit auch hier wiederum von vornherein noch nicht gesagt ist, daß diese mögliche Stützlinie auch unter allen Umständen die wirkliche sei. Mit Rücksicht hierauf soll denn untersucht werden, unter welchen Verhältnissen diejenige Linie $a f_1 f_2 f_3 \ldots b$ zu einer Stützlinie des Gewölbes wird, welche die Mitten der Lagerfugen enthält.

Nunmehr ist die Aufgabe leicht zu lösen, denn da die Stützkraft $W_1$ für die Fuge $F_1 F_1'$ durch deren Mitte $f_1$ gehen soll, und die beiden Componenten derselben $Q_1$ und $H_1$ sich in $n_1$ schneiden, so giebt $n_1 f_1$ die Richtung von $W_1$ an, und man erhält im Kräftepolygone, wenn man durch $o$ eine Parallele $o w_1$ mit $n_1 f_1$ zieht, in $o w_1$ die Stützkraft $W_1$ für die erste Fuge $F_1$ und in $q_1 w_1$ die den obersten Stein $A_1 F_1$ in $o_1$ ergreifende Horizontalkraft $H_1$. Die in $f_1$ angreifende Stützkraft $W_1 = o w_1$ muß nun mit $Q_2 = q_1 q_2$ und der noch unbekannten Horizontalkraft $H_2$, welche in $o_2$ angreift, zusammen eine Resultirende ergeben, welche durch den Mittelpunkt $f_2$ von $F_2 F_2'$ geht. Um aus dieser Bedingung die gesuchte Horizontalkraft $H_2$ zu finden, setzt man zunächst $W_1$ mit $Q_2$ zu einer Mittelkraft zusammen, welche die Richtung $o w_1'$ im Kräfteplane hat, und durch den Punkt $z_2$ hindurchgeht, in welchem die Kraft $Q_2$ von der Richtung $n_1 f_1$ der Stützkraft $W_1$ geschnitten wird (s. auch die in größerem Maßstabe gezeichnete Figur III). Legt man daher durch diesen Schnittpunkt $z_2$ eine Parallele zu $o w_1'$, so erhält man in deren Schnittpunkte $n_2$ mit der Richtung von $H_2$ einen Punkt, durch welchen die Stützkraft $W_2$ geht, welche die Fuge $F_2$ in deren Mitte $f_2$ treffen soll. Man hat daher nur noch $n_2 f_2$ zu ziehen und damit eine Parallele durch $o$ im Kräfteplane zu zeichnen, welche in $o w_2$ die Stützkraft $W_2$ und in $q_2 w_2$ die Summe $H_1 + H_2$, also in

$w_1' w_2$ die Horizontalkraft $H_2$ liefert. Fährt man in dieser Weise in der Construction fort, indem man jede gefundene Stützkraft $W$ zunächst mit dem Gewichte $Q$ des folgenden Gewölbsteines zu einer Mittelkraft und diese mit der Horizontalkraft dieses Steines zu einer Resultirenden zusammensetzt, welche die Mitte der nächsten Fuge trifft, so erhält man, der Stützlinie $a f_1 f_2 f_3 \ldots b$ entsprechend, den Kräfteplan $o w_1 w_2 w_3 \ldots w_7 q_7$, in welchem die von $o$ aus nach den Eckpunkten $w$ gezogenen Strahlen die betreffenden Stützkräfte für die Fugen der Richtung und Größe nach darstellen. Desgleichen giebt der horizontale Abstand $w q$ irgend eines Punktes $w$ von der durch $o$ gehenden Verticallinie die gesammte Horizontalkraft $H$ an, welche auf den oberhalb der zugehörigen Fuge gelegenen Theil des Gewölbes wirkt. Man ersieht hieraus, daß die Horizontalkraft für den Punkt $w_4$ entsprechend der Fuge $F_4$ ein Maximum ist, und daß daher, wenn die Stützlinie den hier vorausgesetzten Verlauf $f_4 f_5 f_6 b$ wirklich annehmen soll, auf die unterhalb $F_4 F_4'$ gelegenen Gewölbtheile negative, d. h. nach innen gerichtete Horizontalkräfte wirken müssen. Hiernach müßte auf den Gewölbtheil $F_4 F_5'$ eine Kraft $H_5 = w_5' w_5$, auf den Theil $F_5 F_6'$ eine Kraft $H_6 = w_6' w_6$ und auf den untersten Theil $F_6 B_1$ eine Kraft $H_7 = w_7' w_7$ wirksam sein. Dieses Verhalten stimmt mit dem oben durch die Rechnung gefundenen überein, und man erkennt, daß, um die Stützlinie wirklich auch unterhalb $f_4$ in die Mittellinie zu bringen, die betreffenden negativen Pressungen $H_5$, $H_6$, $H_7$ durch die Zugspannungen eines eisernen Ringes oder mehrerer solcher erzeugt werden müßten. Bezeichnet man diese gesammte negative Horizontalkraft $H_5 + H_6 + H_7 = (w_5)\, w_7$ mit $H_0$, so ergiebt sich die absolute Spannung $P$ im Umfange des Ringes nach Gleichung (1) durch

$$P = \frac{H_0}{\omega},$$

wenn $\omega = \frac{2\pi}{n}$ den kleinen Mittelpunktswinkel des der Construction zu Grunde gelegten Gewölbstreifens bedeutet. Aus $P$ würde man den erforderlichen Querschnitt $F$ dieses Ringes einfach durch $F = \frac{P}{s}$ erhalten, wenn $s$ die zulässige Materialspannung des Schmiedeeisens pro Quadrateinheit bedeutet.

Wenn die Anwendung eines eisernen Ringes nicht stattfinden soll, so muß man, da der Mörtel Zugspannungen nicht aufnehmen kann, voraussetzen, daß der Horizontaldruck von der Fuge $F_4$, in welcher $H$ seinen größten Werth $q_4 w_4$ erreicht, diesen größten Werth auch unterhalb $F_4$ überall beibehält, indem die Stoßfugen unterhalb $F_4$ sich öffnen. Man erhält dann mit Hülfe des Kräfteplans $o w_1 w_2 w_3 w_4 (w_5)$ die Stützlinie $a f_1 f_2 f_3 f_4 f_5' f_6' f_7'$, welche sich bei $f_4$ von der Mittellinie nach außen entfernt, und man hat zu prüfen, ob dieser Zweig der Stützlinie überall noch innerhalb des Kerns verbleibt. Sollte dies nicht der Fall sein, die Stützlinie vielmehr über $B_2$ die äußere Kerngrenze des Gewölbes durchsetzen, so könnte man eine neue Stützlinie zeichnen, indem man den Angriffspunkt in der obersten Fuge $F_1$ so tief senkt, daß daselbst die Stützlinie bis in die innere Kerngrenze hineinrückt. Dieser neuen Stützlinie entspricht, wie aus der dann steileren Richtung von $n_1 f_1$ ersichtlich ist, ein geringerer Horizontalschub, demzufolge der untere Theil der Stützlinie bei $B_2$ mehr nach innen gerückt wird. Sollte daselbst die Stützlinie trotzdem noch die äußere Kerngrenze schneiden, so gäbe es überhaupt für die Kuppel keine Stabilität und man hätte die Form und Gewölbstärke bezw. die Belastung zu ändern.

Was die Prüfung der Kuppel gegen Gleiten anbetrifft, so hat man nur zu bemerken, daß die Strahlen $ow$ des Kräfteplans die Richtungen der resultirenden Stützkräfte angeben, so daß man sich in einfacher Art überzeugen kann, wie groß die Winkel dieser Strahlen gegen die Normalen der Fugen sind, und man würde nöthigenfalls durch geänderte Fugenrichtung einem zu befürchtenden Gleiten vorbeugen können.

Die Strahlen $ow$ geben durch ihre Längen, welche die Größe der Stützkräfte darstellen, ebenfalls für jede Lagerfuge $FF'$ ein Maß für die Pressung, wenn man die Kraft $W$ durch den Flächeninhalt der bezüglichen Lagerfuge dividirt. Hierbei muß aber noch bemerkt werden, daß, während in den unterhalb $F_4$ gelegenen Fugen die aus der Stützkraft $W$ hervorgehende Pressung die einzige Anstrengung des Materials ist, in den darüber gelegenen Gewölbtheilen noch die zu den Stoßfugen normale Pressung $P$ hinzukommt. Diese Pressung wird besonders nach dem Scheitel der Kuppel hin groß ausfallen und hat z. B. für den Wölbstein $A_1 A_2 F_1 F_1'$ nach Gleichung (1) für jede Seitenfläche den Werth

$$P_1 = \frac{H_1}{\omega},$$

worin $H_1 = q_1 w_1$ den Horizontaldruck dieses Steines und $\omega = \frac{2\pi}{n}$ den Mittelpunktswinkel desselben bedeutet. Bei der Bestimmung der mit Rücksicht auf die Festigkeit erforderlichen Gewölbstärke ist hierauf besondere Rücksicht zu nehmen.

In welcher Weise der weitere Verlauf der Stützlinie unterhalb der Kämpferfuge $B_1 B_2$ im Widerlager bestimmt werden kann, ist aus dem Früheren deutlich und bedarf hier keiner Wiederholung.

**Schiefe Gewölbe.** Bei den bisher betrachteten cylindrischen oder Tonnengewölben war immer stillschweigend vorausgesetzt, daß die Stirn- §. 31.

flächen senkrecht zu der Axe und den mit der Axe parallelen Widerlagern des Gewölbes stehen, und daß die Axe selbst eine horizontale Lage habe. Solche Gewölbe heißen gerade oder senkrechte Gewölbe. Es kommen nun in der Ausführung zuweilen Abweichungen hiervon vor, sei es nämlich, daß die Gewölbaxe und die Widerlager gegen den Horizont geneigt sind, wie dies z. B. bei den Unterwölbungen von Treppen und bei den Decken von ansteigenden Rauchcanälen der Fall ist, oder sei es, daß die Axe zwar horizontal aber gegen die Gewölbstirnen schräg gerichtet ist. Der letztere Fall ist von besonderer Wichtigkeit für die Eisenbahnbrücken, bei denen gar häufig die Richtung der Bahn unter schiefen Winkeln die Richtung eines Flußlaufes oder einer anderen darunter befindlichen Bahn oder Straße kreuzen muß. Die hierzu dienenden Gewölbe nennt man schiefe Gewölbe. Es ist zunächst ersichtlich, daß es in Betreff der in einem Gewölbe vorkommenden Kräfte einen Unterschied nicht begründet, ob das Gewölbe ein gerades oder schiefes ist. Insbesondere erkennt man, daß bei jedem Gewölbe die Stützlinie für irgend welche Stelle immer in einer verticalen Ebene liegen muß, welche Ebene bei den bisher betrachteten geraden Gewölben zur Axe senkrecht steht, während sie gegen die Axe schiefer Gewölbe geneigt ist. Für diese Stützlinien schiefer Gewölbe müssen auch genau dieselben Bemerkungen gelten, welche im Vorstehenden hinsichtlich der geraden Tonnengewölbe gemacht werden konnten. Der Unterschied zwischen beiden Gewölbarten beruht vielmehr nur in der Ausführung bezw. in der Form, welche man den einzelnen Wölbsteinen zu geben hat, damit dieselben die auf sie wirkenden Kräfte in geeigneter Art aufnehmen können. Um diesen Unterschied klar zu machen, seien, Fig. 101 und Fig. 102, $AA_1$ die horizontalen Axen, sowie $BB_1$ und $CC_1$ die gleichfalls horizontalen Widerlager zweier Tonnen-

Fig. 101.

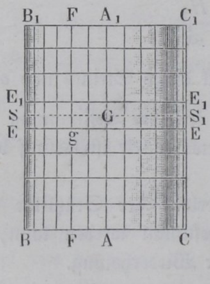
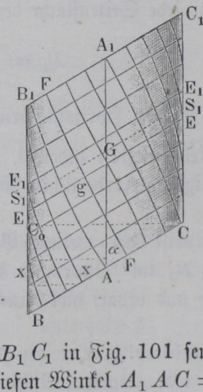



Fig. 102.




gewölbe, deren Stirnflächen $BC$ und $B_1C_1$ in Fig. 101 senkrecht zur Axe, dagegen in Fig. 102 unter einem schiefen Winkel $A_1AC = \alpha$ gegen die

Axe geneigt sein sollen. Denkt man sich für jedes der beiden Gewölbe durch irgend einen Punkt $G$ des Scheitels eine Stützlinie gezeichnet, so liegt dieselbe in einer durch $G$ gelegten Verticalebene $S S_1$, welche mit den Stirnflächen parallel ist, also die Axe $A A_1$ in Fig. 101 ebenfalls senkrecht, dagegen in Fig. 102 unter dem Winkel $\alpha$ schneidet. Wenn daher das Gewölbe, wie es in der Praxis immer geschieht, aus einzelnen Bögen wie $E E_1$ gebildet wird, so werden die Trennungsflächen $EE$ und $E_1 E_1$ dieser Bögen oder die sogenannten Stoßfugenflächen ebenfalls den Stirnen parallel sein müssen, denn es ist leicht zu erkennen, daß man in Fig. 102 die einzelnen Bögen nicht senkrecht zu den Widerlagern $B B_1$ und $C C_1$ anordnen kann, da alsdann die in $B C_0$ sich ansetzenden Bögen wie $xx$ auf der anderen Seite $C$ kein Widerlager finden würden.

Die einzelnen Steine eines jeden solchen bogenförmigen Gewölbtheiles wie $E E_1$ hat man nun mit solchen Flächen, den sogenannten Lagerflächen gegen einander zu stützen, daß sie den Druckkräften in geeigneter Weise widerstehen, und es ist in dem Vorstehenden mehrfach darauf hingewiesen, daß diese Flächen von der Richtung der auf sie wirkenden Mittelkraft an keiner Stelle um den Reibungswinkel abweichen dürfen. Am vortheilhaftesten wäre es für die Uebertragung der Druckkräfte, wenn die Lagerflächen überall senkrecht auf der Richtung der Stützkräfte stehen könnten. Mit Rücksicht auf die bequemere Darstellung der Gewölbe pflegt man aber die Wölbsteine thunlichst mit rechtwinkeligen Kanten zu versehen. Zu dem Ende führt man die Lagerflächen der Steine, d. h. diejenigen Flächen, welche den Stützdruck $W$ aufzunehmen haben, so aus, daß sie überall senkrecht auf denjenigen Linien stehen, in welchen die innere Wölbfläche von den verticalen Ebenen der Stützlinien geschnitten wird. Denkt man sich dementsprechend sämmtliche Stoßfugen $EE$ des Gewölbes, d. h. die Schnittlinien, in welchen die innere Wölbfläche von den Begrenzungsflächen der einzelnen Gewölbringe getroffen wird, und zeichnet zu diesen Stoßfugen ein System von ebenfalls in der inneren Wölbfläche liegenden Transversalen $FF$, welche die Stoßfugen überall rechtwinkelig schneiden (sogenannte orthogonale Trajectorien), so bilden diese Linien $FF$ die Lagerfugen des Gewölbes, d. h. die Schnittlinien, in welchen die Lagerflächen der einzelnen Wölbsteine die innere Leibung treffen. Um die Lagerflächen selbst und damit die Form der Wölbsteine zu bestimmen, kann man sich etwa vorstellen, jede Lagerfläche werde erzeugt durch solche Bewegung einer geraden Erzeugenden, entlang einer der gedachten Lagerfugen $FF$, daß sie überall nicht nur auf diesen, sondern auch in jedem Punkte wie $g$ auf der durch $g$ gedachten Stoßfuge $E$ senkrecht steht. Die so gedachten Lagerflächen werden zwar im Allgemeinen nicht genau senkrecht auf den einzelnen Stützlinien des Gewölbes stehen, doch wird die Abweichung von der zu letzteren senkrechten Richtung immer nur unerheblich sein, da nach dem Vorhergehenden die Stützlinie und auch die mit dieser nahe übereinstimmende Richtung der Stützkraft von der inneren Gewölbbegrenzung nur unwesentlich abweichen wird. Jedenfalls wird die Abweichung der beiden Richtungen immer weit unter dem Reibungswinkel zwischen den Wölbsteinen verbleiben.

Es ist nun leicht ersichtlich, daß unter dieser vorgedachten Voraussetzung die Lagerfugen $F$ bei einem geraden Gewölbe, Fig. 101, horizontale und zur Axe parallele gerade Linien werden müssen, wenn sie auf allen Stoßfugen $EE$ senkrecht sein sollen, während bei dem schiefen Gewölbe, Fig. 102, die Stoßfugen $FF$ gekrümmte, in der Wölbfläche, also nicht in einer Horizontalebene, liegende Curven sind.

Diese Eigenschaft pflegt man daher auch wohl als das unterscheidende Merkmal zwischen geraden und schiefen Gewölben*) anzuführen, indem man alle diejenigen Gewölbe zu den geraden rechnet, deren Lagerfugen horizontale gerade oder gekrümmte Linien sind, während alle Gewölbe schiefe genannt werden, welche sich mit horizontalen Lagerfugen nicht ausführen lassen. Danach hat man nicht nur alle Tonnengewölbe mit horizontaler Axe und dazu senkrechten Stirnen, sondern auch alle als Umdrehungskörper mit verticaler Axe (Kuppelgewölbe) ausgeführten Gewölbe zu den geraden zu rechnen, da bei den letzteren die zu den Stoßfugen oder Meridianschnitten senkrechten Lagerfugen durch horizontale Kreise gegeben sind. Zu den schiefen Gewölben gehören hiernach insbesondere alle Tonnengewölbe, deren Stirnen nicht senkrecht zu der Gewölbaxe stehen, also nicht nur die in Fig. 102 dargestellten horizontalen, sondern auch alle steigenden Gewölbe, denn auch bei den letzteren ist, wie leicht zu ersehen ist, keine horizontale Lagerfuge denkbar, welche überall auf den Stoßfugen, d. h. den Schnitten des Gewölbes mit verticalen Querebenen senkrecht ist.

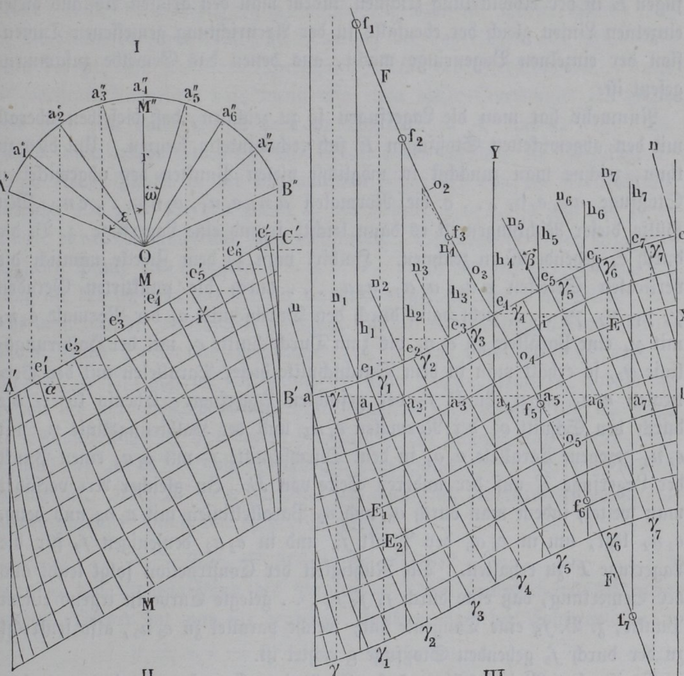
Es kann hier bemerkt werden, daß die Stoßfugen gerader Gewölbe zu den aus der Geometrie bekannten sogenannten Linien des größten Falles gehören, welche sich in der Gewölbfläche angeben lassen, da beide Arten von Linien die Eigenschaft gemein haben, in jedem ihrer Punkte senkrecht auf der durch denselben Punkt gehenden horizontalen Tangente der Wölbfläche zu stehen. Mit Rücksicht hierauf kann man auch den Satz aussprechen, daß nur solche Wölbflächen sich zur Herstellung gerader Gewölbe eignen, für welche die Curven größten Falles in verticalen Ebenen liegen.

Um nun für ein gegebenes schiefes Gewölbe die Lagerflächen festzustellen, hat man auf der abgewickelten inneren Wölbleibung die Lagerfugen zu entwerfen, welche alsdann die Form der Lagerflächen zweifellos feststellen, da

*) S. Heider, Theorie der schiefen Gewölbe. Wien 1846.

letztere nach dem Vorhergehenden durch Bewegung einer zur inneren Wölbfläche senkrechten Geraden auf diesen Lagerfugen entstanden gedacht werden können. Um die Lagerfugen zu zeichnen, sei $A''B''$, Fig. 103, der zur Axe $MM$ senkrechte Durchschnitt der inneren Leibung eines schiefen Tonnen-

Fig. 103.




gewölbes, dessen Stirnfläche $A'C'$ mit dem zur Axe $MM$ senkrechten Querschnitte $A'B'$ den Winkel $\alpha$ bilden möge. Um zunächst die innere cylindrische Wölbfläche abzuwickeln, hat man nur nöthig, die krumme Schnittlinie $A''M''B''$ durch $a_1''a_2''a_3''$ ... in eine nicht zu kleine Anzahl gleicher oder ungleicher Theile zu theilen, deren Bogenlängen man auf $ab$ (in III.) zu bezw. $aa_1$, $a_1a_2$, $a_2a_3$ ... abträgt, so daß $ab$ gleich der gerade gestreckten Profillinie $A''M''B''$ wird. Zieht man nun durch die Theilpunkte $a_1''a_2''a_3''$ ... die Verticalen bis zum Durchschnitte mit der Projection

$A' C'$ der Stirnfläche und durch die so erhaltenen Schnittpunkte $e_1' e_2' e_3' \ldots$ horizontale Gerade, so erhält man in bekannter Art in den Durchschnitten der letzteren mit den Verticalen durch $a_1 a_2 a_3 \ldots$ eine Anzahl von Punkten $a, e_1, e_2 \ldots c$, durch welche die Form der abgewickelten Stoßfugen gegeben ist. Man kann daher leicht mit dieser Linie parallel die einzelnen Stoßfugen $E$ in der Abwickelung zeichnen, indem man den axialen Abstand dieser einzelnen Linien gleich der ebenfalls in der Axenrichtung gemessenen Dimension der einzelnen Bogenringe macht, aus denen das Gewölbe zusammengesetzt ist.

Nunmehr hat man die Lagerfugen so zu zeichnen, daß dieselben überall mit den abgewickelten Stoßfugen $E$ sich rechtwinkelig kreuzen. Um dies zu thun, zeichne man zunächst in möglichst vielen Punkten der abgewickelten Stoßfuge $a e_1 e_2 e_3 \ldots c$ die Normalen $a n$, $e_1 n_1$, $e_2 n_2 \ldots c n$. Mit Hülfe dieser Richtungen ist es dann leicht, irgend eine Lagerfuge, z. B. die durch $e_4$ gehende $F$ zu zeichnen. Halbirt man zu dem Zwecke nämlich die verticalen Streifen $a a_1$, $a_1 a_2$, $a_2 a_3 \ldots$ durch die punktirten Geraden $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$, zieht dann durch den Durchschnitt $o_4$ der Normale $e_4 n_4$ mit $\gamma_4$ eine Parallele zu $e_5 n_5$ bis zum Durchschnitte $o_5$ mit der Halbirungslinie $\gamma_5$, so erhält man in dem Durchschnitte dieser Parallelen mit der Verticalen $e_5 a_5$ einen Punkt $f_5$ der gesuchten Lagerfuge. Ebenso liefert die durch den Schnitt $o_3$ der Normalen $e_4 n_4$ und der Halbirungslinie $\gamma_3$ mit $e_3 n_3$ gezogene Parallele $o_3 o_2$ in dem Durchschnitte $f_3$ mit $e_3 a_3$ einen Punkt der Lagerfuge $F$ auf der anderen Seite von $E$. In gleicher Art verfährt man weiter, indem man durch $o_5$ und $o_2$ Parallellinien mit $e_6 n_6$ und bezw. $e_2 n_2$ legt, um in $e_6 a_6$ den Punkt $f_6$ und in $e_2 a_2$ denjenigen $f_2$ für die Lagerfuge $F$ zu erhalten. Die Richtigkeit der Construction folgt leicht aus der Bemerkung, daß eine durch $f_1 f_2 f_3 \ldots$ gelegte Curve in irgend einem Punkte, z. B. $f_5$ eine Tangente hat, welche parallel zu $e_5 n_5$, also senkrecht zu der durch $f_5$ gehenden Stoßfuge gerichtet ist.

Es ist ohne Weiteres klar, daß alle übrigen Lagerfugen mit der gezeichneten $f_1 f_2 f_3 \ldots$ übereinstimmen und für beliebige Punkte wie $e_1 e_2 e_3 \ldots$ gezeichnet werden können, auch ist eine Uebertragung der Lagerfugen in den Grundriß II leicht nach den bekannten Regeln der beschreibenden Geometrie ausführbar. Der abgewickelten Zeichnung in III kann man sich bedienen, um für die einzelnen Wölbsteine die richtige Form festzustellen. Man erkennt aus der Figur, daß die verschiedenen zwischen zwei Stoßfugen wie $E_1 E_2$ gelegenen Wölbsteine sämmtlich in ihrer Form von einander abweichen, während alle in gleicher Höhe liegenden Wölbsteine mit einander übereinstimmen.

Wie sich aus der Figur III ergiebt, bilden die in den einzelnen Punkten $e_1 e_2 e_3 \ldots$ auf der Stoßfuge $E$ senkrechten Richtungen $e n$ mit den Horizontalen $eh$ durch diese Punkte verschieden große Winkel $\beta$. Während im Scheitel $e_4$ die Lagerfuge denselben Winkel $n_4 e_4 h_4 = \alpha$ mit der Horizontalen $e_4 h_4$ bildet, unter welchem die Stirnfläche $A' C'$ des Gewölbes gegen dessen senkrechten Querschnitt $A' B'$ gerichtet ist, so wird der Winkel der Lagerfugen gegen die horizontale Axenrichtung um so kleiner, je näher der Punkt $e$ nach den Widerlagern $a$ und $c$ hin gelegen ist. Dieser Winkel fällt für die Kämpfer gleich Null, die Richtung der Lagerfugen also axial aus, wenn der zur Axe senkrechte Querschnitt $A'' B''$ des Gewölbes bei $A''$ und $B''$ verticale Tangenten hat, wenn also etwa dieser Querschnitt ein Halbkreis oder eine halbe Ellipse mit den Scheiteln in $A''$ und $B''$ ist. Bezeichnet man allgemein mit $\beta$ den Winkel, um welchen die Lagerfuge in irgend einem Punkte in der abgewickelten Figur III von der Axenrichtung abweicht, also z. B. für den Punkt $e_5$ den Winkel $n_5 e_5 h_5$, so läßt sich dieser Winkel durch Rechnung wie folgt bestimmen. Offenbar ist dieser Winkel $\beta$ für jeden Punkt der Stoßfuge $a e_1 e_2 \ldots c$ gleich dem Winkel, welchen die Tangente der letzteren mit der zur Axenrichtung Senkrechten $ab$ bildet. Bezieht man nun die abgewickelte Stoßfuge auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen $Y$-Axe die Gewölbaxe $e_4 h_4$ ist, und dessen Anfangspunkt $e_4$ sein soll, so läßt sich die Gleichung der Linie $a e_4 c$ bestimmen, sobald die Gestalt des normalen Gewölbquerschnittes $A'' M'' B''$ bekannt ist. Es möge der Einfachheit halber hier der in der Praxis sehr häufige Fall vorausgesetzt werden, daß $A'' M'' B''$ ein Kreisbogen vom Halbmesser $r$ und dem halben Centriwinkel $M'' O B'' = \varepsilon$ sei, dann hat man nach der Construction in III für irgend einen Punkt wie $e_5$ der Stoßfuge

$$x = a_4 a_5 = arc\ a_4'' a_5'' = r\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

unter $\omega$ den Bogenabstand des Punktes $a_5''$ von dem Scheitel $M''$ verstanden. Ferner hat man für denselben Punkt $e_5$ nach der Construction:

$$y = e_5 i = e_5' i_1' = r \sin\omega \tan\alpha . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt durch Differentiation

$$\partial x = r \partial \omega$$

und

$$\partial y = r \tan\alpha \cos\omega \, \partial \omega,$$

und daher durch Division

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan\alpha \cos\omega .$$

Da nun aber $\frac{\partial y}{\partial x}$ die Tangente des Neigungswinkels der Curve in $e_5$ gegen die $X$-Axe ist, und dieser Neigungswinkel nach dem oben Gesagten gleich dem Winkel $\beta$ sein muß, so hat man auch

$$\tan\beta = \tan\alpha \cos\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichung kann dazu dienen, die Richtung der Curvennormale für jeden Punkt der abgewickelten Stoßfuge $a\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots c$ zu berechnen, wenn die graphische Ermittelung aus der Zeichnung nicht genügende Schärfe ergeben sollte. Die Gleichung (3) zeigt übrigens entsprechend dem oben Angeführten, daß für den Scheitel, also für $\omega = 0$, $\beta = \alpha$ wird, während für die Kämpfer halbkreisförmig geformter Gewölbe oder für $\omega = 90^0$, $\beta = 0$ wird, d. h. die Lagerfugen laufen daselbst horizontal.

Wenn der normale Querschnitt $A''\, M''\, B''$ des Gewölbes nicht nach einem Kreisbogen, sondern nach dem Bogen einer Ellipse von der horizontalen Halbaxe $a$ und der verticalen Halbaxe $b$ gebildet wäre, so würde die Rechnung in ganz ähnlicher Weise wie oben zu der Gleichung führen

$$tang\, \beta = tang\, \alpha \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2\, tang^2\, \omega}} \quad \ldots \ldots \quad (3^a)$$

Wegen der praktischen Schwierigkeiten, welche die Bearbeitung der einzelnen Wölbsteine genau nach der hier ermittelten Form darbietet, pflegt man oft in der Ausführung sich mit einer Annäherung zu begnügen, derart nämlich, daß man die Lagerfugen nicht unter variabelen Neigungswinkeln, sondern sämmtlich unter einem constanten Neigungswinkel $\beta_0$ gegen die Axe annimmt. Für diesen Winkel $\beta_0$ pflegt man dann einen mittleren Werth zwischen der Abweichung $\beta = \alpha$ im Scheitel und der Abweichung in den Kämpfern zu wählen. Hierbei ist indessen darauf zu achten, daß die hiermit verbundene Abweichung der Stützkraft von der Normalen zur Lagerfläche in keinem Punkte einen mit der Stabilität gegen Gleiten unverträglich hohen Werth annehme. Nach Heider soll man diese Abweichung nicht größer als $5^0$ nach jeder Seite annehmen, und erforderlichenfalls bei sehr großer Veränderlichkeit von $\beta$, d. h. bei einem großen Centriwinkel $2\,\varepsilon$ des Gewölbes,

Fig. 104.

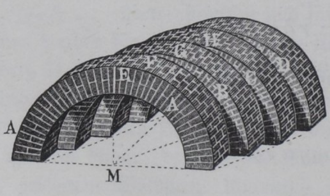
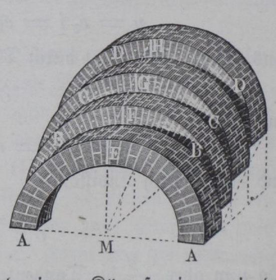


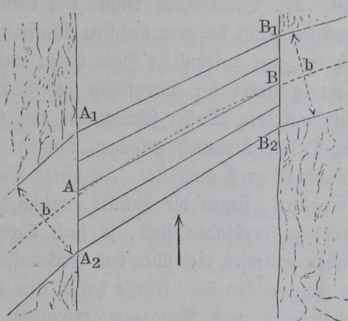

Fig. 105.




jede Gewölbehälfte zwischen dem Scheitel und einem Kämpfer in zwei oder mehrere Sectionen zerlegen, von denen jede einzelne mit ihrem besonderen mittleren Abweichungswinkel $\beta$ für die in diesem Theile constante Fugenrichtung ausgeführt wird.

In Fällen, wo es nicht wesentlich darauf ankommt, daß die Wölbleibungen stetig fortlaufende Flächen seien, kann man schiefe Gewölbe auch aus einer größeren Anzahl von geraden Bögen zusammensetzen, welche derartig gegen einander horizontal, Fig. 104, oder vertical, Fig. 105, versetzt sind, daß die ganze Construction ein horizontales schräges (Fig. 104) oder ein ansteigendes (Fig. 105) Gewölbe ersetzt. Die Ausführung ist dann von derjenigen der gewöhnlichen geraden Gewölbe nicht verschieden. Wenn man ferner zuweilen ansteigende, z. B. die sogenannten Kellerhalsgewölbe oder die unter Treppen befindlichen, so ausführt, daß die einzelnen das Gewölbe zusammensetzenden Ringe senkrecht zur geneigten Axe, also nicht durch verticale Stoßfugenflächen begrenzt sind, so muß man, wie leicht ersichtlich ist, den unter solchen Umständen auftretenden Schub nach der Richtung der Axe durch kräftige Gurt- oder Stirnbögen aufnehmen.

Fig. 106.




Wenn, wie dies zuweilen bei Eisenbahnüberführungen wohl vorkommt, eine schiefe Brücke $A_1 B_1 B_2 A_2$, Fig. 106, in einer Curve der Bahnlinie $AB$ angeordnet werden muß, so werden die parallelen Widerlager $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ bei constanter Normalbreite $b$ der Bahn verschiedene Länge erhalten, und daher die einzelnen Verticalebenen für die Stützlinien oder Stoßfugen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $AB$ ... nicht mehr parallel bleiben. Ein weiteres Eingehen auf diese und ähnliche Fälle würde hier zu weit führen und muß dieserhalb auf die Lehrbücher über Brückenbau und Bauconstructionslehre verwiesen werden.

**Gewölbte Brücken.** Die Gewölbe finden ihre vornehmste Anwendung zur Herstellung der Brücken, d. h. zur Ueberführung von Straßen, Eisenbahnen oder Canälen über Flüsse oder andere Straßen. Alle diese Brücken werden in der Regel aus Bögen von der Form der Tonnengewölbe gebildet. Die Spannweite der Bögen ist selbstverständlich je nach den Verhältnissen sehr verschieden. Während die sogenannten Durchlässe unter Eisenbahnen, ihrem Zwecke der Abführung von atmosphärischen Niederschlägen entsprechend, oft nur Spannweiten unter 1 m erhalten, richtet sich die Spannweite der Gewölbe bei den Unter- und Ueberführungen von §. 32.

Wegen beim Eisenbahnbau nach der Breite der zu überbrückenden Straße oder Eisenbahn. Bei den Brücken über Flüsse und Ströme sind außer der zu überbrückenden Länge besonders noch die dem Wasserlaufe eigenthümlichen Verhältnisse zu berücksichtigen. Hat das Wasser eine große Geschwindigkeit und ist es starken Anschwellungen unterworfen, so wendet man Bögen mit großer Spannweite an, um das Wasserbett möglichst wenig zu verengen und dadurch das Austreten des Hochwassers aus dem Bette einzuschränken, sowie die zerstörenden Wirkungen des Hochwassers und der von demselben zugeführten Körper, z. B. Eisschollen, auf die Brückenpfeiler zu schwächen. Fließt hingegen der Fluß langsam und hat derselbe keine bedeutenden Hochwasser, so kann man die Brücke über demselben aus einer größeren Anzahl engerer Bögen zusammensetzen. Die Spannweite der gewöhnlichen Brückenbögen beträgt 15 bis 50 m; am größten ist sie bei der Cabin-John-Brücke bei Washington, wo sie 69,5 m und bei der Grosvenor-Brücke über den Dee bei Chester, wo sie 61 m mißt. Die Brückenhöhe richtet sich ebenfalls nach dem Hochwasser; jedenfalls müssen selbst bei dem höchsten Wasserstande die Scheitel der Brückenbögen noch um eine ansehnliche Höhe über, und die Seiten derselben nicht oder nur wenig unter der Oberfläche des Wassers stehen, damit fremde Körper, welche auf dem Wasser schwimmen, wie z. B. Eisschollen, ungehindert durch die Brücke hindurch gelangen können, und auch die Stauung des Wassers nicht zu groß ausfällt. In vielen Fällen, namentlich bei Eisenbahnen und Canälen, liegen die Punkte, welche durch eine Brücke (Viaduct, Aquaduct) zu verbinden sind, so hoch über der Thalsohle, daß die Brückenbögen schon ohnedies viel über das Hochwasser zu stehen kommen. Die gewöhnlichen Fahrbrücken über Flüsse haben eine Höhe von 10 bis 30 m; die Eisenbahnbrücken und Aquaducte erreichen aber Höhen von 50 m und mehr. So hat z. B. die Göltzschthalbrücke bei der sächsisch-bayerischen Eisenbahn in vier über einander stehenden Bogenreihen eine Höhe von 80,4 m, und der römische Aquaduct zu Nismes in Frankreich (Pont du Gard) hat bei drei über einander stehenden Bogenreihen eine Höhe von 48,8 m. Die Bogenhöhe der Brücke richtet sich natürlich nach der Spannweite und Höhe der Brücke überhaupt; bei den gewöhnlichen Fahrbrücken beträgt diese Höhe $^1/_9$ bis $^1/_3$ der Spannweite; bei hohen Eisenbahnbrücken und Wasserleitungen nimmt man diese Höhe $^1/_2$ oder gar $^5/_8$ der Spannweite. Was die Breite der Brücken anlangt, so beträgt dieselbe bei gewöhnlichen Fahrbrücken 6 bis 12 m; die neue Brücke über die Elbe bei Dresden, welche für Fuhrwerke, Fußgänger und eine Eisenbahn zugleich dient, besitzt sogar eine Breite von nahezu 18 m.

Die Pfeiler und die Widerlager der Brücken müssen nicht nur auf einem ganz festen Grunde stehen, sondern auch eine hinreichende Dicke haben, um dem Drucke der darauf ruhenden Bögen sammt ihrer Belastung widerstehen zu können. Der Grund besteht entweder aus festem Felsen, oder aus unzusammendrückbarem Sand, oder aus zusammendrückbarer Erde. Um auf Felsen zu gründen, ist nicht allein die Herstellung ebener Flächen zur Aufnahme des Druckes, sondern auch die Entfernung alles verwitterten und losen Gesteines nöthig. Die Gründung auf Sand, Thon und Erde erfordert hingegen die Herstellung eines Rostes oder eines Bettes aus Beton. Der aus einer Reihe Längenschwellen und einer Reihe aufgekämmter Querschwellen zusammengesetzte Rost ruht entweder unmittelbar auf dem Stein- oder Sandbette, oder er wird von eingerammten Pfählen getragen, und heißt im ersten Falle ein Schwellen-, im letzteren aber ein Pfahlrost. Bei der Gründung im Wasser ist es nöthig, die Baustelle der Pfeiler durch einen Fangdamm vor dem Eindringen des Wassers zu sichern. Ist die Tiefe des Wassers über 1,2 m, so sind sogenannte Kastendämme nöthig, welche aus zwei Reihen Bohlen oder Spundwänden und zwischengestampftem Letten zusammengesetzt werden.

Die Fundamente der Pfeiler werden aus gehauenen Steinen treppenförmig aufgemauert, so daß die untere Breite derselben dem sechsten bis neunten Theile der Spannweite gleichkommt. Um die Brückenpfeiler gegen den Stoß des Eises und anderer schwimmenden Körper zu schützen, und um die auf das Flußbett nachtheilig wirkende wirbelnde Bewegung des Wassers möglichst zu verhindern, werden die Pfeiler stromauf- und stromabwärts mit prismatischen Ansätzen, den sogenannten Pfeilerköpfen versehen, welchen eine halbkreisförmige oder halbelliptische Basis und eine kegelförmige oder sphäroidische Haube zu geben ist. Die Landfesten oder Widerlagspfeiler sind in der Regel noch mit Flügelmauern versehen, welche zur Unterstützung der Auffahrt dienen. Die Stärke der Pfeiler und Widerlager ist nach der vorausgeschickten Theorie unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß diese Stützmauern nicht allein den constanten Gewölbschub, sondern auch die zufällige und bewegliche Belastung aufzunehmen haben.

Diese zufällige Belastung ist gegen das Eigengewicht der gewölbten Brücken bei einer nicht zu geringen Spannweite nur klein. Man kann dafür etwa folgende Angaben hier anführen. Nach Winkler kann man für dichte Ansammlung von Menschen 5 bis 6 Personen à 70 kg Gewicht, also 350 bis 420 kg auf jeden Quadratmeter Grundfläche rechnen. Ferner ist für Straßenbrücken das Gewicht der größten stark beladenen Frachtwagen von 2,5 m Breite und 3,5 m Axenabstand zu 12 Tonnen, also der Druck eines Rades zu 3 Tonnen anzunehmen, doch kann unter Umständen für sehr schwere Gegenstände (wie z. B. Dampfkessel, Maschinen ꝛc.) der Druck eines Rades auf 5 Tonnen steigen. Für Eisenbahnbrücken kann man den Druck eines Rades für

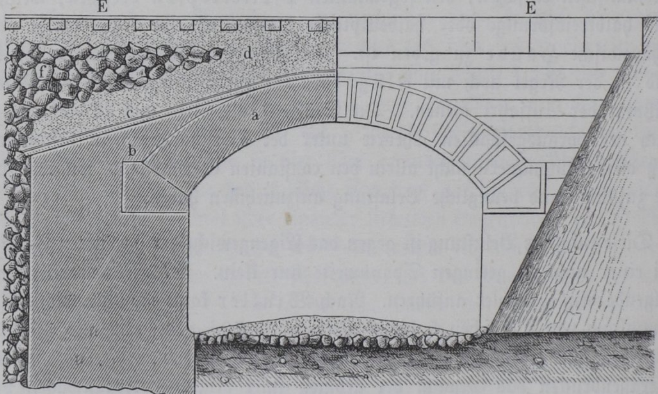
Locomotiven zu 6,5 Tonnen
Tender „ 4,5 „
Güterwagen „ 4 „

in Rechnung bringen, und als ungünstigste Belastung einen Zug von lauter Locomotiven voraussetzen.

Bei Canalbrücken besteht die ganze Belastung immer aus dem Eigengewichte der Construction und des in dem Canale befindlichen Wassers, und es kann an dieser gleichförmigen Vertheilung der Belastung nichts durch die Ueberführung eines Schiffsgefäßes geändert werden, da dasselbe überall ein seinem Gewichte genau gleiches Gewicht Wasser verdrängt. Eine Belastung durch Schnee wird bei gewölbten Brücken gegen die sonstigen Belastungen verschwinden. Die Erschütterungen und Stöße, denen eine Brücke durch passirendes Fuhrwerk ausgesetzt ist, lassen sich nicht gut durch Rechnung feststellen; bei den Ausführungen pflegt man diesen Erschütterungen dadurch Rechnung zu tragen, daß man die zulässige Pressung für das Material des Bauwerkes den jeweiligen Verhältnissen entsprechend geringer annimmt.

In Fig. 107 ist, zur Hälfte im Querschnitt, zur Hälfte in der Ansicht, eine Wegeunterführung von $5\frac{2}{3}$ m Spannweite dargestellt, wie sie bei der Bremer Bahn zur Ausführung gekommen ist. Das Kreisbogengewölbe $a$ ist hier mit der Hintermauerung $b$ versehen, welche mit einer Ziegel- und Asphalt-

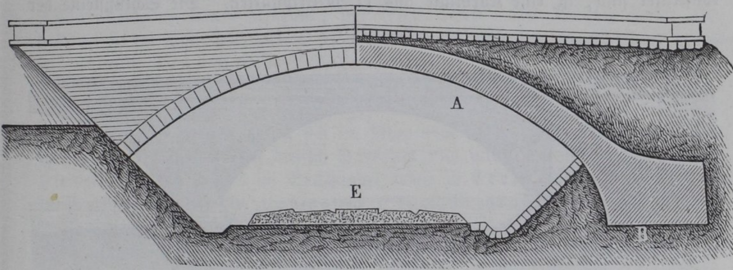
Fig. 107.




schicht $c$ abgedeckt ist. Zum Schutze der letzteren dient zunächst die Kiesschicht $d$, auf welcher die Steinpackung $f$ ruht. Die Breite der Brücke beträgt, der zweigeleisigen Eisenbahn $EE$ entsprechend, 8,1 m.

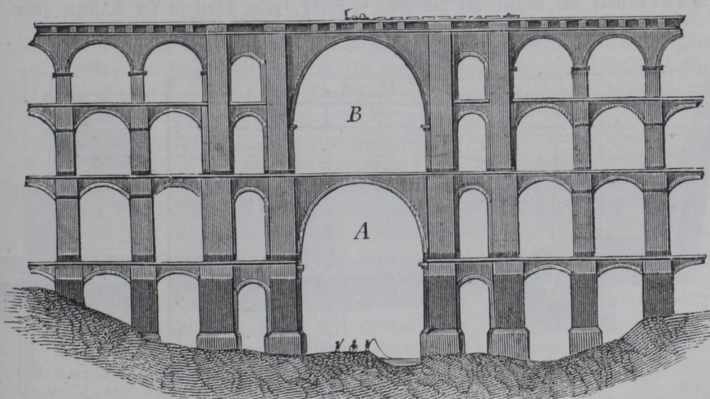
Gleichfalls im Querschnitt und in der Ansicht zeigt Fig. 108 eine auf französischen Bahnen zur Ausführung gelangte Wegeüberführung über eine zweigeleisige Eisenbahn $E$. Eine Eigenthümlichkeit hierbei besteht hauptsächlich in der Fortsetzung des Gewölbes $A$ bis in das Fundament $B$, welches das Widerlager bildet. Eine besondere Hintermauerung hat das nach den Kämpfern hin verstärkte Gewölbe nicht erhalten.

Fig. 108.




In Fig. 109 ist das Mittelstück der Göltzschthalbrücke abgebildet. Die Länge dieser Brücke beträgt 574 m, die obere Breite 10 m und die untere 22,6 m, die Höhe von der Bachsohle bis zur Schienenoberkante 77,6 m. Von den mittleren großen Bögen hat $A$ eine Spannweite von 28,6 m und eine Höhe von 16,2 m, $B$ aber eine Spannweite von 30,8 m und eine Höhe von 19,8 m.

Fig. 109.




Nimmt man die Höhe eines Ziegelpfeilers $h = 75$ m und das Gewicht eines Cubikmeters Ziegelmauerwerk gleich 1800 kg an, so erhält man den größten Druck dieses Pfeilers pro Quadratcentimeter, abgesehen von der zufälligen Belastung und von der Belastung durch die Gewölbbögen,

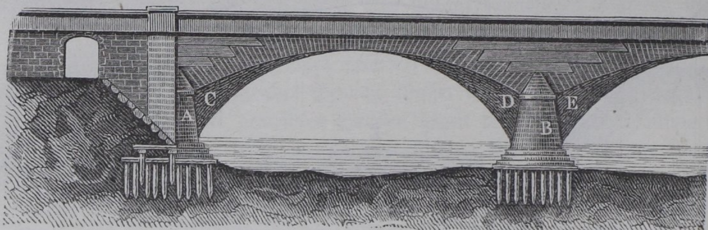
$$p = 75 \,.\, 0{,}18 = 13{,}5 \text{ kg}.$$

Wäre der Festigkeitsmodul der Ziegel gleich 170 kg anzunehmen, so hätte man für die Pfeiler einen Sicherheitscoefficienten von

$$\frac{170}{13,5} = 12,6.$$

Als ein Beispiel für eine Strombrücke sei in Fig. 110 ein Theil der berühmten von Perronet erbauten Seinebrücke bei Neuilly dargestellt. Dieselbe besteht aus fünf Bögen von 39 m Weite und 13 m Höhe. Die Curve, wonach die Bögen construirt sind, ist eine Korblinie aus 11 Mittelpunkten. Die Schlußsteine der

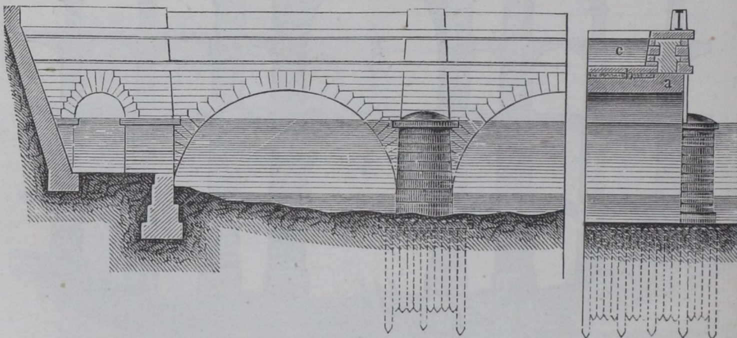
Fig. 110.




Bögen haben hier eine Stärke von 1,62 m erhalten. Die Pfeilerköpfe ($A$ und $B$) sind halbkreisförmig abgerundet, und die Kanten zwischen den Stirn- und den inneren Wölbflächen der Bögen sind durch krumme Flächen $C, D, E$, sogenannte Kuhhörner abgestumpft.

In Fig. 111 ist endlich noch die Canalbrücke, welche den Rhein-Marne-Canal über die Mosel bei Liverdun*) führt, zum Theil in der Ansicht, zum

Fig. 111.




Theil im Querschnitte gezeichnet. Die Länge der Brücke zwischen den Widerlagern beträgt 157,7 m. Von den vorhandenen 12 halbkreisförmig überwölbten Oeffnungen haben die 10 mittleren je 13 m und die beiden äußeren je 3 m. Das aus Quadern 1 m stark ausgeführte Gewölbe $a$ trägt auf einer mit Asphalt überzogenen Betonschicht $b$ das Canalbett $c$ von 2 m Tiefe, 6,5 m oberer und 6 m unterer lichter Weite.

*) S. Heinzerling, Brücken der Gegenw. Abth. II, Heft 2, Thl. 5.

Anmerkung. Ueber die Gewölbe ist die Literatur sehr ausgedehnt, jedoch sind die in verschiedenen Schriften abgehandelten Theorien nicht immer richtig, oder wenigstens nicht immer praktisch genug, weil ihnen nicht die der Praxis entsprechenden Voraussetzungen zu Grunde gelegt sind. Es mögen daher hier nur die vorzüglichsten Schriften angeführt werden. Coulomb legte zuerst den Grund zur Theorie, wie sie im Wesentlichen hier vorgetragen wurde. Man sehe: Théorie de machines simples, par Coulomb. Die Theorie weiter ausgebildet findet man in Navier: Résumé des Leçons sur l'application de la mécanique, T. I. Eine deutsche Bearbeitung ist hiervon erschienen, unter dem Titel: Die Mechanik der Baukunst, von Westphal. Ebenso: Cours de Stabilité des Constructions etc. par Persy. Abhandlungen von Audoy, Garidel, Poncelet und Petit finden sich im Mémorial de l'officier du génie. Die Petit'sche Abhandlung ist deutsch bearbeitet und unter dem Titel „Theorie der Kreisgewölbe" besonders im Buchhandel sowie in Crelle's Journal der Baukunst erschienen, von W. Lahmeyer. Tabellen zur Berechnung des Gewölbschubes giebt die Schrift: Tables des poussées des voûtes en plein ceintre, par Garidel, Paris 1837 u. 1842. Uebrigens findet man die Gewölbe abgehandelt in den Werken über Mechanik von Bossut, Prony, Robinson (Mechanical Philosophy), Whewell, Moseley, Eytelwein, Gerstner u. s. w. Besondere Abhandlungen über Gewölbe sind von Maillard (Mechanik der Gewölbe, Pesth 1817), von Knochenhauer (Statik der Gewölbe, Berlin 1842), Hagen (über Form und Stärke gewölbter Bogen, Berlin 1844), u. s. w. erschienen. Hieran schließt sich die Schrift Ligowski's: „Die Bestimmung der Form und Stärke gewölbter Bögen mit Hülfe der hyperbol. Functionen, aus der Zeitschrift für Bauwesen, 1854". Ferner über schiefe Gewölbe: Heider, Theorie der schiefen Gewölbe, Wien 1846. Hart, Construction schiefer Gewölbe, in Romberg's Zeitschrift 1847. Sowie Francis Bashforth, Praktische Anweisung zur Construction schiefer Gewölbe, deutsch von Härtel. Ueber steinerne Brücken ist noch zu lesen: Gauthey, Traité de la construction des ponts, und Perronet's Werke, die Beschreibung der Entwürfe und der Bauarten der Brücken bei Neuilly, Mantes u. s. w., aus dem Französischen von Dietlein, Halle 1820. Von neueren Werken sind zu empfehlen: Scheffler, „Zur Theorie der Gewölbe", in Crelle's Journal für die Baukunst, Band 29 und 30, sowie dessen mehrerwähntes Werk: Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. eisernen Brücken, Braunschweig 1857, I. Tellkampf, „Beiträge zur Gewölbtheorie, frei bearbeitet nach Carvallo, Hannover 1855". Yvon Villarceau, „Sur l'établissement des Arches de Pont, envisagé au point de vue de la plus grande stabilité. Paris 1853". Siehe auch „Examen historique et critique des principales théories concernant l'équilibre des voûtes, par Poncelet, Paris 1852". Ferner ist zum Studium zu empfehlen: Rankine's Manual of applied Mechanics, sowie dessen Manual of Civil-Engineering. Holzhey, Vorträge über Baumechanik. Heinzerling, Die Brücken der Gegenwart, 2. Abth. Der Arbeiten von Schwedler und des Werkes von Föppl ist bereits im Texte gedacht worden.