

allgemeinen Betrachtungen erkennen läßt, daß bei einem eintretenden Zusammenstürzen des Bauwerkes die Bruchfläche eine gekrümmte sein muß. Ferner nahm man in den ersten Theorien an, daß die Bruchfläche mit der Ebene AB der natürlichen Böschung zusammenfalle, worauf später zuerst Coulomb von der ohne Zweifel richtigeren Voraussetzung ausging, daß unter allen möglichen Erdprismen, welche betreffenden Falles zum Abgleiten kommen können, jedenfalls dasjenige am ehesten zum Abbruche gelangt, welches, Fig. 2, den größten Druck P auf die Wand AB ausübt, oder welches, Fig. 3, dem ausgeübten Schube P den kleinsten Widerstand entgegensetzt. Demgemäß spricht man von einem Prisma des größten Druckes und einem solchen des kleinsten Widerstandes.

Diese Annahme ist in den späteren Arbeiten über den Erddruck fast allgemein angenommen worden, und man hat dabei behufs Ermittlung des ausgeübten Druckes oder Widerstandes die betreffenden Gleitflächen AF der ausgesprochenen Bedingung gemäß zu bestimmen, daß die von der Erde ausgeübte Kraft in dem einen Falle, Fig. 2, ein Maximum, in dem anderen, Fig. 3, ein Minimum sei.

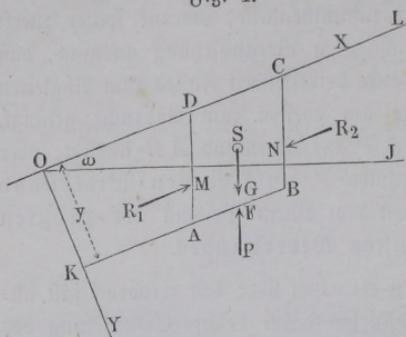
In der letzten Zeit hat man sich ferner bemüht, über die Gesetze, welchen die Druckvertheilung im Innern einer unbegrenzten Erdmasse unterworfen ist, ins Klare zu kommen, und wenn auch die erzielten Resultate dieser Arbeiten noch nicht das Problem als gelöst erscheinen lassen, so sind doch die Ergebnisse für die Beurtheilung der vorliegenden Fragen von entscheidener Bedeutung. Es sollen daher im Folgenden zunächst die Gesetze angeführt werden, welche für die Vertheilung des Druckes im Innern einer unbegrenzten homogenen Erdmasse gelten. Bei dieser Darstellung soll der Einfachheit und Anschaulichkeit wegen im Wesentlichen die graphische Methode befolgt werden, welche in der vorzüglichen Arbeit von Mohr*) angegeben ist.

Druckkräfte im Innern einer Erdmasse. In dem Folgenden §. 3. werde eine Erdmasse von durchaus gleichmäßiger Beschaffenheit vorausgesetzt, welche nur oberhalb durch eine Ebene OL , Fig. 4 (a. f. S.), begrenzt ist. Diese Begrenzung sei gegen den Horizont OJ unter dem Winkel ω geneigt, wobei ω nicht größer als der natürliche Böschungswinkel ϱ , sonst aber beliebig groß sein kann. Die Erdoberfläche selbst sei als die eine Coordinatenebene (xz) und als $Y=Ax$ die in dem beliebigen Punkte O auf der Oberfläche senkrechte Gerade gewählt, so zwar, daß die Z -Axe horizontal und auf der Bildebene in O senkrecht ist. Man denke sich zunächst in einem

*) Zeitschr. d. Hannov. Architekten- u. Ingenieur-Vereins. 1871.

beliebigen Abstände $OK = y$ von der Oberfläche ein zu der letzteren paralleles Flächenstück, etwa ein Rechteck von der Breite $AB = a$ und der zur

Fig. 4.



Bildebene senkrechten Höhe $z=1$, und betrachte dieses Rechteck als die Basis eines verticalen, bis an die Oberfläche reichenden schiefwinkligen Parallelepipeds, $ABCD$. Auf die vier verticalen Seitenflächen wirkt die umgebende Erdmasse mit vier gewissen Kräften, welche allgemein mit R_1, R_2, R_3 und R_4 bezeichnet sein mögen; ferner wird die Grundfläche AB

P der darunter befindlichen Erde ausgesetzt sein, und endlich wirkt das Gewicht G des betrachteten Parallelepipeds in dessen Schwerpunkte S vertical abwärts. Diese sechs Kräfte müssen nun mit einander im Gleichgewichte sein.

Wegen der vorausgesetzten Gleichmäßigkeit der Erdmasse wird der Druck R_1 auf AD mit demjenigen R_2 auf BC nicht nur gleich und entgegengesetzt sein, sondern auch ihre Angriffspunkte M und N müssen dieselbe Lage in den Flächen haben, denn in Bezug auf die beiden Flächen AD und BC sind alle Verhältnisse genau dieselben. Ganz dieselbe Betrachtung läßt sich natürlich in Bezug auf die beiden Kräfte R_3 und R_4 anstellen, welche auf die mit der Bildebene parallelen Flächen des Prismas wirken. Folglich hat man die algebraische Summe der vier Kräfte R gleich Null, da $R_2 = -R_1$ und $R_4 = -R_3$ ist. Daraus folgt weiter, daß auch die beiden anderen Kräfte G und P gleich und entgegengesetzt sein müssen, also $P = -G$ ist. Es ist aber auch deutlich, daß die Kraft P in dem Schwerpunkte F der Bodenfläche, also vertical unter S angreifen muß, da die Massen um die Verticale durch den Schwerpunkt S herum symmetrisch vertheilt sind. Die Kräfte P und G wirken daher in einer und derselben Geraden, und bilden somit kein auf Drehung wirkendes Kräftepaar. Daraus geht aber für die Kräfte R wiederum hervor, daß dieselben parallel zu der Oberfläche OL gerichtet sein müssen, denn wäre dies nicht der Fall, so würden R_1 und R_2 sowie R_3 und R_4 Kräftepaare bilden, also würde der Gleichgewichtszustand nicht möglich sein. Von den vier mit der Oberfläche parallelen Kräften R wirken natürlich diejenigen R_1 und R_2 parallel mit der X -Axe, während die Kräfte R_3 und R_4 mit der horizontalen Z -Axe parallel sind.

Aus den vorstehenden Betrachtungen folgt daher, daß in einer homogenen und unbegrenzten Erdmasse der Druck auf ein verticales Flächen-

element parallel zu der Erdoberfläche gerichtet ist, während ein der Oberfläche paralleles Flächenstück einen verticalen Druck empfängt, welcher, in dem Schwerpunkte der Fläche angreifend, gleich dem Gewichte des über dem Flächenstücke befindlichen Erdprismas ist.

Bezeichnet man mit F die Größe der betrachteten Bodenfläche AB , so ist das Gewicht des besagten Erdprismas $ABCD$ durch $G = \gamma Fy = P$ ausgedrückt, wenn γ das Gewicht einer Cubikeinheit Erde bedeutet. Der spezifische Druck auf die Bodenfläche, d. h. der Druck pro Flächeneinheit derselben ist daher durch

$$p = \frac{P}{F} = \gamma y$$

gegeben, welcher Druck eine zur Fläche normale Pressung

$$n = p \cos \omega$$

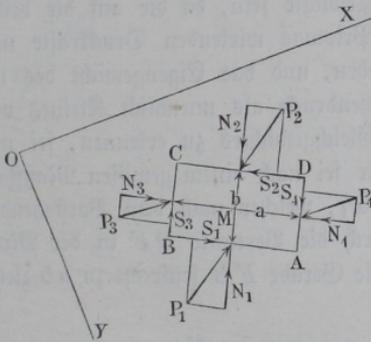
und eine tangentiale oder Schubspannung

$$s = p \sin \omega$$

hervorruft.

In Betreff der Schubspannungen läßt sich noch ein wichtiges Gesetz angeben. Denkt man sich nämlich im Innern einer unendlichen Erdmasse ein unendlich kleines rechtwinkeliges Parallelepipedium $ABCD$, Fig. 5, dessen

Fig. 5.



Seiten in der Bildebene $AB = a$ und $AD = b$ sein mögen, während die dazu senkrechte der Z -Axe parallele Abmessung gleich 1 gesetzt werden mag, so wirken auf die vier Flächen AB , CD , BC und AD irgendwie vier Kräfte P_1 , P_2 , P_3 und P_4 , von denen jede in ihre betreffende Normalcomponente N und Tangentialkraft S zerlegt werde. Die vier Normalkräfte gehen sämtlich durch den Mittelpunkt M des unendlich kleinen Parallelepipediums, in welchem auch das Gewicht des letz-

teren angreifend zu denken ist, welches übrigens gegen die Kräfte N und S als unendlich Kleines höherer Ordnung vernachlässigt werden kann. Bezeichnet man die spezifischen Spannungen mit n und s , so ist zunächst ersichtlich, daß $s_1 = s_2$ und $s_3 = s_4$ zu setzen ist, da die Unterschiede $s_2 - s_1$ und $s_4 - s_3$ ebenfalls nur unendlich klein sind, während die spezifischen Spannungen s endliche Größen darstellen. Man hat daher,

wenn man $S_1 = S_2 = a s_1$ und $S_3 = S_4 = b s_3$ setzt und den Mittelpunkt M als Momentenmittelpunkt wählt, für das Gleichgewicht die Bedingung:

$$a s_1 \cdot b = b s_3 \cdot a,$$

woraus

$$s_1 = s_3 = s_2 = s_4$$

folgt.

Hieraus schließt man, daß je zwei in einem beliebigen Punkte zu einander senkrechte Flächen gleich großen Schubspannungen pro Flächeneinheit ausgesetzt sind.

- §. 4. Um nun den Druck auf irgend welches Flächenelement im Innern einer unbegrenzten Erdmasse zu ermitteln, sei abc , Fig. 6, die Grundfläche eines unendlich kleinen, der Z -Axe parallelen dreiseitigen Prismas, dessen untere Fläche ab parallel zu der gegen den Horizont unter dem beliebigen Winkel ω geneigten Oberfläche der Erdmasse, und dessen Fläche bc senkrecht auf der Grundfläche ab steht, während die dritte Fläche ac unter dem beliebigen Winkel α gegen ab geneigt sein soll. Die Länge des Prismas in der Richtung der Z -Axe möge gleich der Einheit angenommen werden. Auf diese drei Flächen wirken drei Kräfte P_1 auf ab , P_2 auf bc und P auf ac . Bezeichnet man mit p_1 , p_2 und p die entsprechenden specifischen Druckkräfte dieser Flächen, so hat man, wenn man auch ab gleich der Einheit annimmt, $P_1 = p_1$, $P_2 = p_2 \tan \alpha$ und $P = p \sec \alpha$. Diese drei Kräfte müssen mit einander im Gleichgewichte sein, da die auf die beiden dreieckigen verticalen Endflächen des Prismas wirkenden Druckkräfte nach dem Vorstehenden sich gegenseitig aufheben, und das Eigengewicht des unendlich kleinen Prismas gegen die Flächendrucke als unendlich Kleines verschwindet. Um die Bedingungen des Gleichgewichtes zu erkennen, sei nun das Kräftepolygon gezeichnet, und zwar sei nach einem gewissen Maßstabe der auf die Fläche ab wirkende Druck P_1 , welcher nach dem Vorstehenden vertical gerichtet und gleich γy ist, durch die Verticale DF in der Mitte D von ab ausgedrückt. Wenn man die Gerade FB senkrecht zu ab zieht, so erhält man offenbar in

$$FB = P_1 \cos \omega = \gamma y \cos \omega = N_1$$

den Normaldruck und in

$$DB = P_1 \sin \omega = \gamma y \sin \omega = S_1$$

die Schubkraft der Fläche ab . Der Druck P auf ac ist vorläufig unbekannt, und von der Druckkraft P_2 auf die Fläche bc weiß man nur, daß nach dem Vorhergehenden die specifische Schubspannung s_2 gleich derjenigen s_1 der Fläche ab ist, folglich hat die auf bc wirkende Schubspannung die Größe:

die Schubkraft S_2 der Fläche bc . Die drei Kräfte S_2 , S_1 und N_1 sind daher durch den Linienzug $EDBF$ dargestellt.

Um die Größe zu finden, welche die vorläufig noch ganz unbestimmte Normalkraft N_2 der Fläche bc möglicher Weise haben kann, sei N_2 zunächst beliebig groß angenommen und gleich FG_1 parallel mit der Basis ab oder der Terrainfläche angetragen. Unter dieser Voraussetzung giebt die Schlußlinie G_1E des Kräftepolygons $EDBFG_1$ bekanntlich der Größe und Richtung nach die Kraft P auf die dritte Prismenfläche ac . Zieht man von G_1 die Linie G_1J senkrecht zu dieser Fläche ac , so giebt $EG_1J = \delta$ den Winkel, unter welchem die Kraft P gegen die Normale der Fläche ac geneigt ist, und man hat daher in

$$G_1J = P \cos \delta = N$$

die Normalkraft, und in

$$JE = P \sin \delta = S$$

die Schubkraft der besagten Fläche.

Es ist nun aus der Figur ersichtlich, daß die Punkte A , B und J mit dem Durchschnittspunkte H der beiden Geraden G_1J und FB auf der Peripherie eines Kreises liegen müssen, für welchen AH ein Durchmesser ist, da die betreffenden Winkel bei B und J Rechte sind. Zeichnet man diesen Kreis, und zieht durch seinen Mittelpunkt M_1 die Gerade M_1O senkrecht zu der Terrainfläche bis zum Durchschnitte O mit der Verlängerung von FG_1 , und ebenso JQ parallel zu M_1O , so erkennt man leicht, daß

$$QO = JE \cdot \cos \alpha = S \cos \alpha$$

und

$$QJ = G_1J \cdot \cos \alpha = N \cos \alpha$$

ist, da offenbar die Linie JE mit der Oberfläche, sowie die Normalen G_1J und QJ mit einander den Winkel α bilden. Diese Größen QO und QJ stellen daher auch die specifischen Spannungen s und n der Fläche ac vor, denn da man

$$S = ac \cdot s = \frac{s}{\cos \alpha}$$

und

$$N = ac \cdot n = \frac{n}{\cos \alpha}$$

hat, so ist

$$QO = S \cos \alpha = s$$

und

$$QJ = N \cos \alpha = n.$$

Verbindet man daher noch O mit J , so erhält man in OJ nicht nur die specifische Druckkraft der Fläche ac :

$$p = \sqrt{s^2 + n^2},$$

sondern auch in $M_1 O J = \delta$ den Winkel, welchen diese Druckkraft mit der Normalen zur Fläche ac bildet. Daß der Winkel $M_1 O J = EG_1 J = \delta$ ist, erkennt man daraus, daß

$$\text{tang } EG_1 J = \frac{JE}{G_1 J} = \frac{S}{N} = \frac{s}{n} = \frac{QO}{QJ} = \text{tang } EOJ$$

ist.

Diese Beziehung giebt in sehr einfacher Art ein anschauliches Bild von der Vertheilung der Druckkräfte im Innern der Erdmasse. Da nämlich, wie man leicht erkennt, die gegenseitige Lage von A , B und O zu einander bei einer gewissen Tiefe y , also auch einem bestimmten OA von vornherein feststeht und nicht von der Neigung α der Ebene ac abhängig ist, und da auch H gegeben ist, sobald über die Größe von n_2 , also von $FG_1 = N_2$ eine Annahme gemacht wird, so wird der durch A , B und H gelegte Kreis durch eine solche Annahme von n_2 unzweifelhaft festgestellt. Daher giebt dieser Kreis, immer unter der gemachten Voraussetzung über die Größe von n_2 , ein Mittel an die Hand, um für jede beliebige Ebene die Größe der specifischen Druckkraft p und deren Abweichung von der Normalen zur Fläche zu finden. So erhält man z. B. für die beliebige Ebene ac' , wenn man AJ' dazu parallel zieht, in der Strecke OJ' nach dem gewählten Kräftemaßstabe die specifische Druckspannung p' und in $M_1 O J'$ deren Neigung δ' gegen die Normale zu ac' .

Denkt man sich die Ebene ac um a im Kreise herumgedreht, so daß sie alle denkbaren Neigungen annimmt, so wandert bei gleichzeitiger Drehung der Sehne AJ der Punkt J auf dem Umfange des Kreises herum, und man erhält in besagter Weise in den von O ausgehenden Fahrstrahlen OJ nach dem Endpunkte J der Sehne die specifischen Spannungen p für alle entsprechenden Lagen der Ebene ac . Diese Druckspannungen nehmen offenbar für die Richtung AK_1 ihren kleinsten Werth $p_{min} = OK_1$, und für die dazu senkrechte Lage AL_1 der Fläche ihren größten Werth $p_{max} = OL_1$ an. Für beide Flächen ist der Abweichungswinkel δ zwischen Druckkraft und Normale gleich Null, d. h. diese Druckspannungen sind senkrecht zu den Flächen, also für die Ebene AK_1 in AL_1 und für die Ebene AL_1 in AK_1 fallend. Schubspannungen treten in diesen Ebenen also nicht auf. Die größte Abweichung der Druckkraft von der Flächennormale findet für diejenigen beiden Ebenen statt, deren Richtungen durch die Sehnen AU_1 und AV_1 nach den Berührungspunkten der Tangenten OU_1 und OV_1 gehen.

Wie im Obigen wiederholt bemerkt worden, gilt der betreffende Kreis zum Mittelpunkte M_1 nur unter der gemachten Voraussetzung, daß $N_2 = n_2 \text{ tang } \alpha$ die Größe FG_1 habe, d. h. also, wenn hinsichtlich der normalen specifischen Spannung n_2 auf eine zur Terrainoberfläche senkrechte

und zur Z -Axe parallele Ebene, wie bc , eine bestimmte Annahme gemacht wird. Eine andere Annahme in dieser Hinsicht liefert auch einen anderen Kreis, und es ist aus der Figur ersichtlich, wie bei einer Vergrößerung von FG_1 der Schnittpunkt H tiefer rückt, so daß der Kreis kleiner wird, und umgekehrt, wie eine Verringerung von n_2 den Kreis vergrößert.

Um nun die in der Wirklichkeit stattfindenden Verhältnisse zu ermitteln, genügt es, den Reibungscoefficienten der betrachteten Erdmasse zu kennen. Ist derselbe wieder durch φ , der Reibungswinkel ρ also durch $\varphi = \tan \rho$ gegeben, so muß man bemerken, daß der Gleichgewichtszustand der Erdmasse an die Bedingung geknüpft ist, daß nirgendwo die Druckrichtung auf ein Flächenelement von der Normalen derselben um einen größeren Betrag abweiche, als der Reibungswinkel angiebt. Diese Abweichung kann sowohl nach der einen wie nach der anderen Seite, oder allgemeiner innerhalb desjenigen Regelmantels stattfinden, welcher um die Normale als Axe gedacht wird, und dessen halber Spitzenwinkel gleich ρ ist (Reibungskegel). Innerhalb dieser Grenzen giebt es natürlich unendlich viele Zustände, für welche das Gleichgewicht bestehen kann. Für den vorliegenden Zweck kommen indessen besonders diejenigen beiden Grenzzustände in Betracht, in denen das Gleichgewicht bei der geringsten Veränderung gestört wird, d. h. in welchen entweder eine zu stützende Erdmasse abgleitet, wenn die stützende Mauer dem activen Erddrucke nicht zu widerstehen vermag, oder in welchen durch eine überwiegende Schubkraft der passive Erdwiderstand überwunden wird.

Nach diesen Bemerkungen ist es nun deutlich, daß ein solcher Kreis, für welchen die Tangenten OU_1 und OV_1 mit der Centrallinie OM_1 einen Winkel $M_1OU_1 = M_1OV_1$ gleich dem Reibungswinkel ρ der Erdmasse bilden, einem der besagten Grenzzustände entsprechen muß. Solcher Kreise giebt es nun offenbar zwei, welche durch die Punkte A und B gehen, und die unter dem Reibungswinkel ρ gegen die Centrale geneigten Geraden OU_2 und OV_2 in U_1 und V_1 bezw. U_2 und V_2 berühren.

Die vorstehende Untersuchung zeigt, daß der Kreis M_1 unter der Annahme eines bestimmten specifischen Normaldruckes n_2 auf das zur Terrainfläche senkrechte Flächenelement bc gilt, so zwar, daß die Strecke FG_1 den Normaldruck $n_2 \tan \alpha$ auf das Flächenelement bc darstellt, also

$$n_2 = \frac{FG_1}{\tan \alpha}$$

angenommen werden muß. Würde man n_2 , also auch FG_1 kleiner annehmen, so würde, da H emporrückt, der Kreis M_1 größer werden und das Gleichgewicht gestört sein, weil der Winkel der von O an diesen Kreis gezogenen Tangenten mit der Centrallinie OM_1 größer als der Reibungswinkel ρ wäre. Hiernach würde es in der Erdmasse Flächen geben, für welche der Druck um einen größeren Betrag, als der Reibungswinkel ist, von

der Normalen abweicht. Hieraus geht hervor, daß der Kreis M_1 einem solchen Grenzzustande entspricht, in welchem die geringste Verkleinerung des Druckes n_2 eine Bewegung zur Folge haben müßte, und zwar würde alsdann eine Bewegung der Erdmasse auf den Flächen AU_1 und AV_1 eintreten, für welche die Abweichung der Druckkraft von der Normalen den Reibungswinkel erreicht. Diese beiden Flächen treten demnach als Gleitflächen auf, und es entspricht offenbar der Kreis M_1 demjenigen Gleichgewichtszustande, welcher für die Beurtheilung der von Stützmauern auszuhaltenden Druckkraft in Betracht kommt, da ein Abgleiten des zwischen den beiden Gleitflächen AU_1 und AV_1 befindlichen Erdprismas erfolgen muß, sobald die betreffende Stützmauer ausweicht, d. h. nur einen Druck gegen die Erdmasse auszuüben vermag, welcher geringer ist als derjenige, welcher aus dem angenommenen Drucke

$$n_2 = \frac{FG_1}{\tan \alpha}$$

sich ergibt. Mohr nennt diesen Gleichgewichtszustand den unteren Grenzzustand, zum Unterschiede von dem oberen, welcher durch den Kreis zum Mittelpunkte M_2 dargestellt wird, und welcher, wie leicht zu ersehen ist, sich dadurch charakterisirt, daß die geringste Vergrößerung des Druckes n_2 eine Störung des Gleichgewichts zur Folge hat. Denkt man sich nämlich die Größe n_2 von dem Werthe des unteren Grenzzustandes

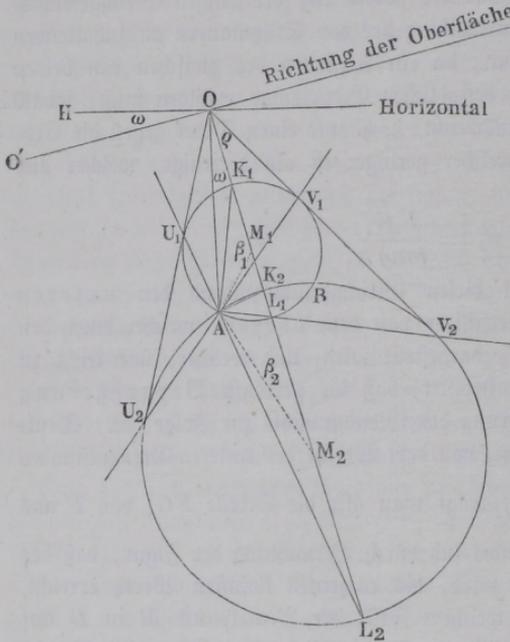
$\frac{FG_1}{\tan \alpha}$ allmählig zunehmend, trägt man also die Strecke FG_1 von F aus

größer und größer an, so findet sich durch Betrachtung der Figur, daß der Kreis M_1 kleiner und kleiner wird, bis er seinen kleinsten Werth erreicht, wenn G_1 nach O trifft, in welchem Falle der Mittelpunkt M in D auf AB fällt, der Kreis also die Gerade BF in B berührt, indem der Durchschnittspunkt H in B hineinfällt. Eine weitere Vergrößerung von n_2 , bei welcher der Endpunkt G der Strecke FG über O hinaus fällt, läßt den Durchmesser des Kreises wieder zunehmen, und man erhält für den zweiten die Geraden OU_2 und OV_2 berührenden Kreis M_2 den Normaldruck $n_2 \tan \alpha$ auf die Fläche bc in der Strecke FG_2 , wenn man durch den Durchschnittspunkt H_2 dieses Kreises mit FB eine zu ac senkrechte Gerade H_2G_2 zieht. Hierdurch ist der erwähnte obere Grenzzustand dargestellt, denn es ist deutlich, daß die geringste fernere Vergrößerung von n_2 oder FG_2 eine Störung des Gleichgewichtes herbeiführen muß, wobei ein Gleiten der Erdmasse in den Gleitflächen AU_2 und AV_2 stattfindet, in welchen die Druckkraft um den Reibungswinkel ϱ von der Normalen abweicht.

Durch die vorstehende Betrachtung hat sich nun ergeben, daß der anfänglich ganz unbekannt Normaldruck N_2 auf das Flächenelement bc nur zwischen den beiden Werthen FG_1 und FG_2 gelegen sein, dazwischen aber

jeden beliebigen Werth haben kann, so daß also für die Erdmasse unendlich viele verschiedene Gleichgewichtszustände möglich sind. Für irgend einen dieser möglichen Gleichgewichtszustände ist der spezifische Druck p nach verschiedenen Richtungen seiner Größe nach verschieden, und es giebt zwei zu einander senkrechte Richtungen, von denen die eine dem maximalen, die andere dem minimalen

Fig. 7.



Drucke entspricht. Von diesen unendlich vielen Zuständen interessieren hier nur die beiden Grenzzustände, für welche die spezifischen Drucke auf irgend ein Flächenelement mit p_1 für den unteren, mit p_2 für den oberen Grenzzustand bezeichnet werden sollen.

Der Uebersichtlichkeit wegen sind die Kreise für die beiden Gleichgewichtszustände in Fig. 7 besonders dargestellt. Man ersieht hieraus, daß AU_1 und AV_1 die Gleitflächen des unteren, sowie AU_2 und AV_2 diejenigen des oberen Grenzzustandes darstellen. Ferner hat man

- $p_{1 \max} = OL_1$ in der Richtung AK_1 wirkend,
- $p_{1 \min} = OK_1$ " " " AL_1 "
- $p_{2 \max} = OL_2$ " " " AK_2 "
- $p_{2 \min} = OK_2$ " " " AL_2 "

Aus der Figur ist auch ohne Weiteres zu erkennen, daß wegen der Gleichheit der Kreisbögen $KU = KV$ die Richtung von $p_{1 \max}$ den Winkel der Gleitflächen für den unteren Grenzzustand halbirt, während für den oberen Grenzzustand $p_{2 \min}$ den Winkel der Gleitflächen in zwei gleiche Theile theilt. Für die Winkel der Gleitflächen zu einander hat man, da

$$UMK = VMK = 90^\circ - \varrho \quad \text{ist:}$$

$$U_1AV_1 = 90^\circ - \varrho \quad \dots \dots \dots (1)$$

und

$$U_2AV_2 = 90^\circ + \varrho \quad \dots \dots \dots (2)$$

Denkt man sich von dem unteren Grenzzustande aus den Druck n_2 größer und größer werdend, so verändert die größte Druckkraft allmählig ihre Richtung aus AK_1 in AK_2 , während die zu p_{max} senkrechte Kraft p_{min} um den gleichen Winkel L_1AL_2 gedreht wird.

Um die Größe der Druckkräfte p_{max} und p_{min} zu bestimmen, seien unter r_1 und r_2 die Halbmesser M_1U_1 und M_2U_2 gleich $\frac{p_{max} - p_{min}}{2}$ und unter m_1 und m_2 die Abstände OM_1 und OM_2 gleich $\frac{p_{max} + p_{min}}{2}$ verstanden, dann hat man:

$$\sin \varrho = \frac{UM}{OM} = \frac{r_1}{m_1} = \frac{r_2}{m_2} = \frac{p_{max} - p_{min}}{p_{max} + p_{min}} \quad \dots \quad (3)$$

Hieraus folgt für beide Grenzzustände:

$$p_{max} (1 - \sin \varrho) = p_{min} (1 + \sin \varrho) \quad \dots \quad (4)$$

also:

$$\begin{aligned} \frac{p_{1min}}{p_{1max}} &= \frac{p_{2min}}{p_{2max}} = \frac{1 - \sin \varrho}{1 + \sin \varrho} = \frac{1 - \cos(90^\circ - \varrho)}{1 + \cos(90^\circ - \varrho)} \\ &= \operatorname{tang}^2 \frac{90^\circ - \varrho}{2} \quad \dots \quad (5) \end{aligned}$$

Ferner hat man, unter β_1 und β_2 die Centriwinkel OM_1A und OM_2A , und unter ω wieder den Neigungswinkel $HO O'$ der Oberfläche gegen den Horizont, also auch den Winkel AOM verstanden, aus den Dreiecken AOM_1 und AOM_2 :

$$\frac{AM_1}{OM_1} = \frac{r_1}{m_1} = \frac{\sin \omega}{\sin(\beta_1 + \omega)} = \sin \varrho \quad (\text{nach } 3) \quad \dots \quad (6)$$

und

$$\frac{AM_2}{OM_2} = \frac{r_2}{m_2} = \frac{\sin \omega}{\sin(\beta_2 + \omega)} = \sin \varrho \quad \dots \quad (7)$$

Hieraus folgt auch $\sin(\beta_1 + \omega) = \sin(\beta_2 + \omega)$, d. h.:

$$\beta_1 + \beta_2 = 180^\circ - 2\omega \quad \dots \quad (8)$$

Man kann daher allgemein schreiben:

$$\sin(\beta + \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varrho} \quad \dots \quad (9)$$

und hieraus folgt durch einige goniometrische Umformungen:

$$\sin \beta = \frac{\sin \omega}{\sin \varrho} (\cos \omega \pm \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho})^* \quad \dots \quad (10)$$

*) Man erhält diesen Ausdruck durch

$$\sin(\beta + \omega) = \sin \beta \cos \omega + \cos \beta \sin \omega = \sin \beta \cos \omega + \sqrt{1 - \sin^2 \beta} \cdot \sin \omega = \frac{\sin \omega}{\sin \varrho},$$

worin das obere Zeichen dem Winkel β_1 , das untere dem Winkel β_2 zukommt.

Nun hat man ferner, wenn man für AO den Werth γy setzt:

$$AM = r = AO \frac{\sin \omega}{\sin \beta} = \gamma y \frac{\sin \omega}{\sin \beta} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (11)$$

und

$$OM = m = AO \frac{\sin(\omega + \beta)}{\sin \beta} = \gamma y \frac{\sin(\omega + \beta)}{\sin \beta} \quad (12)$$

Setzt man hierin aus (9) und (10) die Werthe für $\sin(\omega + \beta)$ und $\sin \beta$ ein, so erhält man:

$$AM_1 = r_1 = \gamma y \frac{\sin \varrho}{\cos \omega + \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} \cdot \cdot \quad (13)$$

$$AM_2 = r_2 = \gamma y \frac{\sin \varrho}{\cos \omega - \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} \cdot \cdot \quad (14)$$

$$OM_1 = m_1 = \gamma y \frac{1}{\cos \omega + \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} \cdot \cdot \quad (15)$$

$$OM_2 = m_2 = \gamma y \frac{1}{\cos \omega - \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} \cdot \cdot \quad (16)$$

Daraus folgt endlich:

$$OK_1 = m_1 - r_1 = \gamma y \frac{1 - \sin \varrho}{\cos \omega + \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} = p_{1 \min} \quad (17)$$

$$OL_1 = m_1 + r_1 = \gamma y \frac{1 + \sin \varrho}{\cos \omega + \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} = p_{1 \max} \quad (18)$$

$$OK_2 = m_2 - r_2 = \gamma y \frac{1 - \sin \varrho}{\cos \omega - \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} = p_{2 \min} \quad (19)$$

$$OL_2 = m_2 + r_2 = \gamma y \frac{1 + \sin \varrho}{\cos \omega - \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} = p_{2 \max} \quad (20)$$

oder:

$$1 - \sin^2 \beta = \left(\frac{1}{\sin \varrho} - \sin \beta \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \right)^2,$$

welche Gleichung nach $\sin \beta$ geordnet:

$$\sin^2 \beta \left(1 + \frac{\cos^2 \omega}{\sin^2 \omega} \right) - 2 \frac{\cos \omega}{\sin \omega \sin \varrho} \sin \beta = 1 - \frac{1}{\sin^2 \varrho} = - \frac{\cos^2 \varrho}{\sin^2 \varrho}$$

gibt. Hieraus folgt:

$$\sin \beta = \frac{\sin \omega}{\sin \varrho} (\cos \omega \pm \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$p_{1 \min} p_{2 \max} = p_{1 \max} p_{2 \min} = (\gamma y)^2 \cdot \dots \quad (21)$$

Für den Druck p in den Gleitflächen hat man nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises:

$$OU^2 = OK \cdot OL,$$

also:

$$p = \sqrt{p_{\min} \cdot p_{\max}} = \gamma y \frac{\cos \varrho}{\cos \omega \pm \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} \quad (22)$$

Es kann bemerkt werden, daß diese Gleichungen unmögliche Werthe ergeben würden, wenn man den Neigungswinkel ω der Masse gegen den Horizont größer als den natürlichen Böschungswinkel ϱ voraussetzen wollte.

Die gefundene Gleichung (5)

$$\frac{p_{\min}}{p_{\max}} = \tan^2 \frac{90^\circ - \varrho}{2}$$

lehrt, daß das Verhältniß der größten und kleinsten Druckspannung nicht von der Tiefe y des betrachteten Punktes unter der Oberfläche, auch nicht von deren Neigung ω , sondern lediglich von dem Reibungswinkel ϱ abhängt, daß also dieses Verhältniß in allen Punkten einer homogenen unbegrenzten Erdmasse denselben constanten Werth hat. Andererseits erkennt man aus den Gleichungen (17) bis (20), daß die absoluten Größen von p_{\max} und p_{\min} für alle Punkte von gleicher Tiefe y , d. h. für alle Punkte einer mit der Oberfläche parallelen Ebene gleich groß sein müssen. Man ersieht auch aus (22), daß diese Gleichheit nicht nur für die Hauptdrücke p_{\max} und p_{\min} gilt, sondern es sind auch die Druckkräfte p auf alle mit einander parallel gelegten Ebenen in den Punkten gleicher Tiefe (y) von einer und derselben Größe.

Wenn man die in einem beliebigen Punkte A der Erdmasse nach allen möglichen Richtungen stattfindenden specifischen Druckkräfte ihrer Richtung und Größe nach durch eine von dem Punkte A ausgehende Strecke darstellt, so liegen, wie Winkler*) gezeigt hat, die Endpunkte dieser Strecken in einem Ellipsoid, dessen Axen durch die Hauptdruckkräfte p_{\max} und p_{\min} dargestellt sind, wie man sich in folgender Art überzeugen kann.

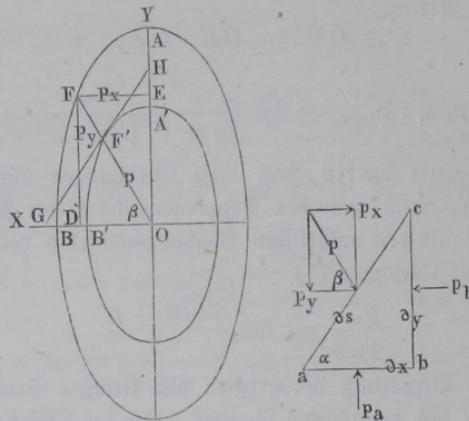
Es seien die Coordinatenaxen OY und OX , Fig. 8 (a. f. S.), parallel mit den Richtungen AK_1 und AL_1 in Fig. 7 von p_{\max} und p_{\min} angenommen, und es bedeute abc ein unendlich kleines dreieitiges Prisma, dessen Flächen $ab = dx$ und $bc = dy$ parallel mit den Coordinatenebenen ZOX und ZOY sind; die Z -Axe werde wieder in O senkrecht zur Zeichnung angenommen. Die dritte Fläche $ac = ds$ bilde mit der X -Axe den Winkel α , und auf diese Fläche

*) Dr. G. Winkler, Neue Theorie des Erddruckes. Wien 1872.

Weisbach-Herrmann, Lehrbuch der Mechanik. II. 1.

wirke der spezifische Druck p in einer Richtung, welche mit der X -Axe den Winkel β bilden möge. Man hat dann, unter p_a und p_b den größten resp.

Fig. 8.



fleinsten spezifischen Druck auf die Flächen ab und bc , und unter p_x und p_y die den Axen parallelen Componenten des Druckes p auf die Fläche ac verstanden, für das Gleichgewicht:

$$p_a \partial x = p_y \partial s,$$

$$p_b \partial y = p_x \partial s;$$

hieraus folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \alpha = \frac{p_y}{p_a},$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \sin \alpha = \frac{p_x}{p_b},$$

und also:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 = \frac{p_y^2}{p_a^2} + \frac{p_x^2}{p_b^2}.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ellipse, deren Axen $OA = p_a$ und $OB = p_b$ sind.

Macht man daher für eine unter dem Winkel $\alpha = cab$ gegen die X -Axe geneigte Ebene ca die Coordinaten

$$FD = p_y = p_a \cos \alpha = OA \cos \alpha$$

und

$$FE = p_x = p_b \sin \alpha = OB \sin \alpha,$$

so erhält man in

$$OF = \sqrt{p_a^2 \cos^2 \alpha + p_b^2 \sin^2 \alpha} = p$$

der Größe und Richtung nach den spezifischen Druck auf die Fläche ac .

Winkler nennt diese Ellipse die Druckellipse, zum Unterschiede von einer anderen, der sogenannten Stellungsellipse, welche man erhält, wenn man bei denselben Azenrichtungen die Größe der Halbachsen

$$OA' = \sqrt{OA} = \sqrt{p_a} \quad \text{und} \quad OB' = \sqrt{OB} = \sqrt{p_b}$$

annimmt. Es ist nämlich leicht zu erweisen, daß diese Ellipse in ihrer Tangente GH an den Durchschnittspunkt F' mit irgend einer Druckrichtung OF die Richtung derjenigen Fläche angeht, welche von dem Drucke OF afficirt wird. Die Gleichung dieser Ellipse ist nämlich unter der gemachten Voraussetzung in Betreff der Größe der Halbachsen:

$$\frac{y^2}{p_a} + \frac{x^2}{p_b} = 1,$$

und man erhält daher durch Differentiation:

$$\frac{y \, \delta y}{p_a} + \frac{x \, \delta x}{p_b} = 0,$$

oder:

$$\frac{p_a}{p_b} \frac{x}{y} = - \frac{\delta y}{\delta x} = \text{tang } HGO \dots \dots \dots (23)$$

oder, da $\frac{x}{y} = \text{cotg } \beta$ ist, hat man:

$$\text{tang } HGO = \frac{p_a}{p_b} \text{cotg } \beta.$$

Nun hat man aber auch:

$$p_y = p \sin \beta = p_a \cos \alpha,$$

$$p_x = p \cos \beta = p_b \sin \alpha;$$

daher ist auch:

$$\text{tang } \alpha = \frac{p_a}{p_b} \text{cotg } \beta \dots \dots \dots (24)$$

Aus dieser Gleichung und (23) folgt daher $HGO = \alpha$, d. h. die Richtung einer beliebigen Fläche ac oder GH und die für dieselbe geltende Druckrichtung OF sind zwei conjugirte Durchmesser der Stellungsellipse. Die Tangente GH der Stellungsellipse in F' giebt sonach die Richtung der Ebene an, für welche der Druck durch OF der Größe und Richtung nach dargestellt ist.

Wenn die Oberfläche der Erdmasse horizontal, also $\omega = 0$ ist, so fallen die beiden Punkte A und B in Fig. 6 zusammen, und man erhält aus den Gleichungen (17) bis (20):

$$p_{1\max} = p_{2\min} = \gamma y;$$

$$p_{1\min} = \gamma y \frac{1 - \sin \varrho}{1 + \sin \varrho} = \gamma y \text{tang}^2 \frac{90^\circ - \varrho}{2}$$

und

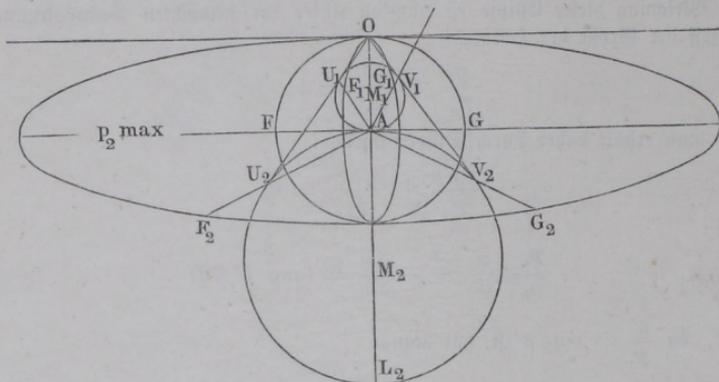
$$p_{2\max} = \gamma y \frac{1 + \sin \varrho}{1 - \sin \varrho} = \gamma y \text{tang}^2 \frac{90^\circ + \varrho}{2}.$$

In Fig. 9 (a. f. S.) sind die den beiden Grenzzuständen entsprechenden Druckellipsen OF_1G_1 und OF_2G_2 dargestellt. Die Gleitflächen sind für den unteren

Grenzzustand durch AF_1 und AG_1 gegeben, welche Flächen von der Verticalen AO nach jeder Seite um den Winkel $\frac{90^\circ - \varrho}{2}$ abweichen, und die auf diese Gleitflächen wirkende spezifische Druckspannung beträgt nach (22):

$$OU_1 = AF_1 = AG_1 = p_{f_1} = \gamma y \tan \frac{90^\circ - \varrho}{2},$$

Fig. 9.



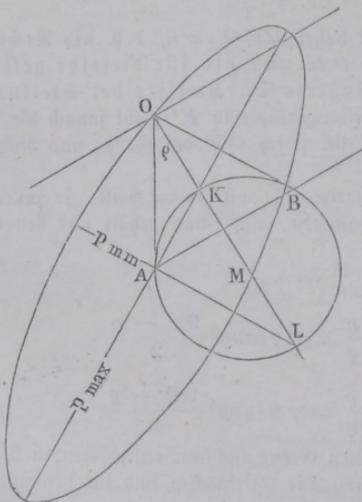
während der Druck auf die Gleitflächen AF_2 und AG_2 für den oberen Grenzzustand durch

$$OU_2 = AF_2 = AG_2 = p_{f_2} = \gamma y \tan \frac{90^\circ + \varrho}{2}$$

ausgedrückt ist.

Wenn man, wie vorstehend erwähnt, durch Vergrößerung des Normaldruckes

Fig. 10.



n_2 auf eine zur Z -Axe parallele verticale Ebene den unteren Grenzzustand in den oberen überführt, so wird der Kreis $U_1 V_1$ kleiner und kleiner, bis er in einem gewissen Augenblicke, wenn $n_2 = \gamma y$ geworden ist, in den Punkt A zusammenschrumpft. Die Druckellipse hat während dieser Zeit unter Beibehaltung ihrer großen Axe $2AO = 2\gamma y$ ihre kleine Axe mehr und mehr vergrößert und ist in dem erwähnten Augenblicke in den Kreis FG übergegangen. Der Zustand der Erdmasse entspricht in diesem Augenblicke demjenigen einer vollkommenen Flüssigkeit ohne Reibungswiderstände und ohne Schubspannungen; der spezifische Druck ist auf jede irgendwie gelegene Ebene senkrecht gerichtet und gleich γy . Bei

noch weiterer Vergrößerung des Druckes n_2 wächst der horizontale Druck unter steter Beibehaltung der constanten Größe γy für den verticalen Druck, welcher nunmehr als $p_{2\min}$ auftritt.

Setzt man eine Neigung der Erdoberfläche unter der natürlichen Böschung voraus, so fällt bei der Ausföhrung der Construction in Fig. 6 die Tangente OU mit der Verticalen OA zusammen, und man erhält in diesem Falle nur einen einzigen Berührungskreis, Fig. 10; es giebt daher hier auch nur einen Grenzzustand. Die beiden Gleitflächen AO und AB sind hier vertical und parallel zur Oberfläche gerichtet, und der Druck auf dieselben ist:

$$p_f = AO = BO = \gamma y.$$

Ferner ergibt sich aus (17) und (19):

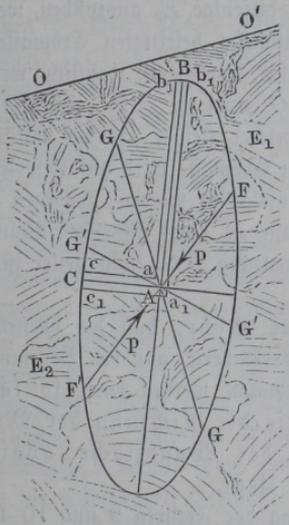
$$p_{\min} = OK = \gamma y \frac{1 - \sin \varrho}{\cos \varrho} = \gamma y \tan \frac{90^\circ - \varrho}{2}$$

und aus (18) und (20):

$$p_{\max} = OL = \gamma y \frac{1 + \sin \varrho}{\cos \varrho} = \gamma y \tan \frac{90^\circ + \varrho}{2}.$$

Druck der Erde gegen Stützmauern. Um nunmehr der vor- §. 5. stehenden Theorie gemäß den Erddruck gegen stützende Wände oder Futtermauern zu ermitteln, kann man folgende Betrachtung anstellen. Es sei CBF , Fig. 11, die Druckellipse für irgend einen Punkt A einer Erdmasse, deren Oberfläche OO' sei, so daß also für den vorauszusetzenden unteren Grenzzustand BA der Größe und Richtung nach den Druck p_{\max} und CA den Druck p_{\min} darstellt. Denkt man sich in den Richtungen BA und CA

Fig. 11.



durch je zwei unendlich nahe liegende Ebenen, wie ba, ca , zwei röhrenförmige oder prismatische Räume begrenzt, so wirkt innerhalb derselben auf die Begrenzungsflächen ba, ca dieser Räume der Druck überall normal, also etwa so, als ob diese Räume mit Flüssigkeiten von bestimmter Dichte gefüllt sein würden. Während indessen bei einer Flüssigkeit der Druck nach allen Richtungen von gleicher Größe ist, so verursacht bei der Erdmasse die zwischen den Theilchen auftretende Reibung, daß in der Richtung CA schon der kleinere Druck p_{\min} ausreicht, um zusammen mit der Reibung dem eine Bewegung anstrebenden Drucke p_{\max} das Gleichgewicht zu halten. Man hat sich daher vorzustellen, daß die Druckkraft p_{\max} als eine active,