element bereits hervorgebracht hat, und je gröfser die Veränderung ist, welche die Kraft während dieses Zeitelementes von Neuem hervorbringt. Bezeichnen wir mit φ die Veränderung, welche die Kraft bis zu dem in Betracht zu ziehenden Augenblick bereits erzeugt hat, so drückt sich offenbar die Wirkungsgröfse für das nächste Zeitelement und für ein Massenelement aus durch:

$$13)\ dm\,.\,\varphi\, d\varphi,$$

und für eine gewisse Zeit t, für jedes Massenelement durch: $dm\Sigma\varphi d\varphi$, folglich für den ganzen Körper durch:

$$14)\ \Sigma(dm\Sigma\,\varphi\,.\,d\varphi) = \Sigma[dm\,.\,\Sigma(\varphi\,.\,f\,.\,dt)].$$

Ist φ eine Funktion von m und bezeichnen wir die Wirkungsgröfse für ein Zeitelement, oder (wie wir künftig diesen Werth nennen wollen) das Leistungselement (Wirkungselement) mit dL, so ergiebt sich:

$$15)\ dL = dm\int\left(\varphi_m\, d\varphi\right) + \text{Const.},$$

worin das Integral zwischen den Grenzen von m zu nehmen ist, welche der Masse des ganzen Körpers entsprechen.

Ist dagegen φ für jedes Massenelement dasselbe, wobei φ, wie früher, eine Funktion von irgend einem andern Variabeln sein kann, so ergiebt sich das Leistungselement:

$$16)\ dL = m\varphi\, d\varphi.$$

Die Leistung der Kraft auf den ganzen Körper für eine bestimmte Zeit ergiebt sich aus den eben bestimmten Werthen, und zwar aus 15):

$$17)\ L = \int\left(\int\varphi_m\, d\varphi\right) dm + \text{Const.},$$

und aus 16):

$$18)\ L = m\int\varphi\, d\varphi + \text{Const.},$$

worin φ zwischen den Grenzen zu nehmen ist, welche der Zeitdauer entsprechen, für welche man die Wirkungsgröfse bestimmen will. Ist $\varphi = \varphi$ der Werth von φ nach der Zeit t, $\varphi = \varphi'$ dagegen der Werth von φ nach der Zeit t', so hat man die Leistung für die Zeitdauer $t-t'$:

$$19)\ L_{(t-t')} = m\int_{\varphi'}^{\varphi}\varphi\, d\varphi + \text{Const.},$$

$$= \tfrac{1}{2}m(\varphi^2 - \varphi'^2).$$

Setzen wir zufolge der Formel 1) $d\varphi = f dt$, und nehmen wir an, dafs $f = f_t$ eine Funktion von t sei, so folgt zunächst:

$$\varphi = \int f_t \, dt,$$

folglich, wenn wir φ in Bezug auf m konstant nehmen, nach 18):

$$20) \quad L = m\int\left(\int f_t \, dt\right) f_t \, dt + \text{Const.},$$

welches Integral zwischen den Grenzen von t zu nehmen ist, die der Zeitdauer der Beobachtung entsprechen.

Ist endlich f keine Funktion von t, hat man es also mit einer konstant und kontinuirlich wirkenden Kraft zu thun, so ist:

$$21) \quad L_{(t-t')} = \tfrac{1}{2} m f^2 (t^2 - t'^2)$$

und mit Rücksicht auf 7):

$$22) \quad L_{(t-t')} = \tfrac{1}{2} K f (t^2 - t'^2).$$

Wir müssen hier darauf verzichten, noch mehr Formeln für eine Reihe von speziellen Fällen herzuleiten, die aus besondern Werthen hervorgehen würden, welche φ oder f annehmen können. Nur die Bemerkung mag hier schliefslich noch hervorgehoben werden, dafs die eben geführten Untersuchungen für alle Arten von Kräften, die auf Körper einwirken, gelten müssen, ohne Rücksicht auf die Art und Beschaffenheit der von den Kräften hervorzubringenden, oder wirklich hervorgebrachten Veränderungen; dafs ferner die Begriffe von Masse und lebendiger Kraft ganz bestimmte und allgemeine sind, und nicht, wie Poncelet behauptet*), nur uneigentliche, konventionelle Benennungen, die man eingeführt hat, um gewisse mathematische Ausdrücke kurz zu bezeichnen.

B. Von den mechanischen Kräften.

a) Wirkung einer mechanischen Kraft auf ein Massenelement.

Bewegung.

§ 12. Nach Feststellung jener allgemeinen Wahrheiten gehen wir zur Untersuchung derjenigen Kräfte über, welche uns hier besonders beschäftigen.

Unter den zahllosen Veränderungen, welche wir an den Körpern wahrnehmen, spielen eine grofse Rolle die Veränderungen des Ortes, oder derjenigen Stelle im Raum, welche die Körper einnehmen. Diese Ortsveränderungen nennen wir Bewegungen, und

*) Poncelet »Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen«, deutsch herausgegeben von Schnuse I. S. 10 und 11.

schreiben dieselben der Wirkung gewisser Kräfte zu, welche wir mechanische Kräfte nennen. Indem wir uns hier zunächst mit den mechanischen Kräften beschäftigen, wollen wir zuerst die Gesetze der Veränderungen untersuchen, welche diese Kräfte hervorzubringen vermögen, und wirklich hervorbringen, und sodann auf die Bestimmung der Gröfse der Kräfte und ihrer Wirkung eingehen.

Zwar sind alle Körper fortwährend in gemeinschaftlicher Bewegung, insofern sie ihre Stelle im Universum dauernd ändern, allein aufser dieser allgemeinen Bewegung bemerken wir auch, dafs gewisse unter diesen gemeinschaftlich bewegten Körpern ihren Ort im Vergleich zu dem Ort, den die andern Körper während der Bewegung einnehmen, ändern. In diesem Sinne nennen wir solche Körper relativ bewegte, die andern Körper aber ruhende. Betrachten wir nun ein System solcher relativ bewegten Körper, so können einzelne derselben wiederum im Vergleich zu den übrigen Körpern, mit denen sie sich übrigens gemeinschaftlich bewegen, ihre Stellung verändern. Solchen Körpern schreibt man dann wiederum in Bezug auf die andern eine relative Bewegung zu, und pflegt diejenige Bewegung, welche dem ganzen System gemeinschaftlich ist, im Gegensatz zu dieser relativen Bewegung, eine absolute Bewegung zu nennen; es bleibt dabei natürlich nicht ausgeschlossen, dafs diese absolute Bewegung in Vergleich zu der Stellung noch anderer Körper wieder als eine relative erscheint. Relative und absolute Bewegungen erscheinen daher immer nur als Gegensätze und als abgeleitete Begriffe, sie sind nicht Grundbegriffe, wie der Begriff der Bewegung selbst.

Wirkt eine mechanische Kraft auf ein Massenelement ein, so hat sie das Bestreben, dasselbe in gerader Linie fortzubewegen.

Die Lage dieser geraden Linie, in Vergleich zu andern Linien, nennt man die Richtung der Kraft.

Erfolgt wirklich eine Bewegung des Massenelementes, so bleibt dieselbe in Folge des Beharrungsvermögens (S. 6) bestehen, bis sie durch die Einwirkung einer andern Kraft geändert wird. Das Massenelement bewegt sich in gerader Linie fort; die Lage dieser geraden Linie heifst die Richtung der Bewegung. Kein Massenelement kann die Richtung seiner Bewegung ändern, oder die Bewegung ganz oder theilweise verlieren, wenn nicht als Ursache dieser Veränderung die Wirkung einer andern Kraft eintritt.

Bewegung eines Punktes, Bahn, Weg.

§ 13. Die Masse eines Körpers erfüllt den Raum, welchen der Körper einnimmt. Ein Massenelement können wir uns als die Masse denken, welche ein Raumelement erfüllt; als Raumelement gilt aber der körperliche Punkt. Ein Massenelement ist also die Masse, welche ein Punkt des Körpers besitzt. Man pflegt daher, anstatt der Bezeichnung Massenelement eines Körpers, häufig auch die Benennung „materieller Punkt" oder kurz die Bezeichnung „Punkt" zu brauchen, und wir wollen uns diesem Gebrauch anschliefsen, indem wir künftig unter Punkt, sobald nicht eine andere Bedeutung ausdrücklich hervorgehoben wird, überhaupt ein Massenelement verstehen.

Die Linie, welche ein Punkt bei seiner Bewegung beschreibt, nennen wir die Bahn des Punktes.

Die Bahn eines Punkts ist geradlinig, wenn der Punkt nur der Einwirkung einer einzigen Kraft, oder auch mehrer Kräfte, welche in derselben Richtung wirken, folgt. Eine krummlinige Bahn setzt immer die Einwirkung mehrer (wenigstens zweier) Kräfte voraus, deren Richtung nicht dieselbe ist.

Die absolute Länge der Bahn, welche ein Punkt in einer bestimmten Zeit zurücklegt, nennt man den Weg des Punktes für diese Zeit. Der Weg eines Punktes in einem Zeitelement heifst das Wegelement des Punkts. Wir bezeichnen dasselbe in der Folge mit ds.

Gleichförmige Bewegung.

§ 14. Das Wegelement eines Punktes ist entweder in jedem Zeitelement gleich grofs, oder es unterliegt einer Aenderung. Wenn das Wegelement in jedem Zeitelement denselben Werth hat, so sagen wir, die Bewegung sei gleichförmig. Nach dem Frühern können wir uns eine gleichförmige Bewegung nur als möglich denken, wenn auf einen bewegten Punkt entweder gar keine mechanische Kräfte einwirken, oder wenn die auf denselben einwirkenden Kräfte sich im Zustande des Gleichgewichtes befinden, denn, wenn mechanische Kräfte auf den Punkt einwirken, und dieselben sind nicht im Zustande des Gleichgewichts, so müssen sie nothwendiger Weise eine Aenderung im Beharrungszustande des Punktes erzeugen, und da die Aenderungen, welche mechanische Kräfte erzeugen, Ortsveränderungen sind, die Ortsveränderungen aber durch die Wege gemessen werden, so mufs unter der zuletzt gemachten Annahme nothwendiger Weise in jedem Zeitelement eine Wegänderung stattfinden.

Die gleichförmige Bewegung können wir uns entstanden denken, entweder:

a) dadurch, dafs Kräfte, die eine Zeit lang auf einen Punkt einwirkten, aber nicht im Zustand des Gleichgewichts waren, plötzlich zu wirken aufhören, oder plötzlich in den Zustand des Gleichgewichts gelangen; in diesem Fall wird die Bewegung, die sie dem Punkte ertheilt haben, bestehen bleiben, aber keine Aenderung weiter erleiden; oder

b) dadurch, dafs mechanische Kräfte auf einen Punkt, der nicht in Bewegung war, momentan einwirkten; in diesem Falle wird der Punkt Bewegung erhalten, aber die Bewegung wird nach § 10 in jedem folgenden Zeittheil ungeändert bleiben.

Die momentane Einwirkung mechanischer Kräfte auf einen materiellen Punkt nennen wir Stofs, und die gleichförmige Bewegung pflegt man daher auch wohl Stofsbewegung zu nennen.

Geschwindigkeit.

§ 15. Das Verhältnifs $\frac{ds}{dt}$, d. h. das Verhältnifs zwischen dem Wegelement zu der Dauer eines Zeitelementes nennt man die Geschwindigkeit, bezeichnen wir dieselbe mit c, so hat man:

$$23)\quad \frac{ds}{dt} = c.$$

$$24)\quad ds = c\,dt.$$

Diese Ausdrücke sind nicht zu verwechseln mit den sehr ähnlichen für das Aenderungselement und für das Aenderungsmaafs einer Kraft (S. 10. No. 1 und 2), welche wir gleich brauchen werden. Da wir dt als absolut konstant ansehen, so wird bei einer gleichförmigen Bewegung, in welcher also auch ds für jedes Zeitelement konstant ist, $\frac{ds}{dt} = c$ ebenfalls konstant sein. Es läfst sich also eine gleichförmige Bewegung auch so definiren, dafs es eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit sei. Für die gleichförmige Bewegung folgt aus 24) durch Integriren:

$$25)\quad \begin{cases} s = ct \\ c = \frac{s}{t} \\ t = \frac{s}{c} \end{cases}.$$

Wenn s der Weg in der Zeit t ist, so ist offenbar bei einer gleichförmigen Bewegung $\frac{s}{t}$ der Weg in einer Zeiteinheit; da aber (zufolge 25) $\frac{s}{t} = c$ ist, so kann man allgemein die Geschwindigkeit auch definiren als den Weg, welchen ein Punkt in einer Zeiteinheit zurücklegen würde, falls er von irgend einem Augenblick ab sich gleichförmig bewegte.

Geschwindigkeits-Aenderung; Veränderte Bewegung, Acceleration.

§ 16. Wir haben oben gesehen, dafs, wenn auf einen Punkt eine Kraft allein einwirkt, oder, wenn mehre Kräfte, welche nicht im Zustande des Gleichgewichts sich befinden, auf den Punkt einwirken, eine gleichförmige Bewegung nicht stattfinden kann. Es wird vielmehr in diesem Falle das Wegelement ds in jedem Zeitelement ein anderes sein. Die Bewegung eines Punktes unter diesen Umständen nennen wir eine ungleichförmige oder eine veränderte. Da zufolge der Gleichung 24) ds sich ausdrückt durch:

$$ds = c.dt,$$

so mufs, da dt absolut konstant ist, die Veränderung, welche durch den Einflufs jener mechanischen Kräfte erzeugt wird, sich auf den Werth c beziehen. Das heifst: die Veränderungen, welche mechanische Kräfte in dem Beharrungszustande eines Körpers hervorbringen, lassen sich als Geschwindigkeitsänderungen ansehen. Das Aenderungselement $d\varphi$ einer mechanischen Kraft ist hiernach nichts anders, als die Geschwindigkeitsänderung, welche die Kraft einem Massenelement in einem Zeitelement zu ertheilen vermag. Nennen wir dieselbe dc, so ist $d\varphi = dc$ und nach S. 10 No. 1):

$$d\varphi = dc = f.dt;$$

es ist folglich die Geschwindigkeit c nach Verlauf einer gewissen Zeit t, oder die Endgeschwindigkeit für die Zeit t:

$$26)\quad c = \Sigma f.dt.$$

Das veränderliche Wegelement ds drückt sich hiernach aus (24) durch:

$$27)\quad ds = (\Sigma f.dt)dt.$$

Ist f eine Funktion von t, so ist:

$$28)\quad c = \int f_t dt$$

$$29)\quad ds = \left(\int f_t dt\right)dt,$$

und es ändern sich folglich die in den einzelnen Zeitelementen stattfindenden Geschwindigkeiten nach dem Gesetze des Werthes $\int f_t dt$.

Wenn man dagegen eine konstant wirkende Kraft betrachtet (S. 10), so findet man:

$$30)\quad c = ft.$$

$$31)\quad ds = c \, . \, dt = ft \, . \, dt,$$

d. h. bei konstant wirkenden mechanischen Kräften ändern sich die Geschwindigkeiten wie die Zeiten. Erfolgt die Bewegung nach diesem Gesetz, so nennen wir sie eine gleichmäſsig veränderte Bewegung, und zwar eine gleichmäſsig beschleunigte, wenn die Geschwindigkeiten wachsen, und eine gleichmäſsig verzögerte, wenn die Geschwindigkeiten fortwährend abnehmen. Erfolgt eine veränderte Bewegung nach einem andern Gesetze, so nennen wir sie eine ungleichmäſsig veränderte, und zwar bei fortwährendem Wachsthum der Geschwindigkeiten eine ungleichmäſsig beschleunigte, bei fortwährender Abnahme der Geschwindigkeiten eine ungleichmäſsig verzögerte. Das Aenderungsmaaſs f nennt man bei mechanischen Kräften auch wohl die Acceleration oder die Beschleunigung, beziehlich Verzögerung.

Aus den Gleichungen 24), 29) und 31) ergiebt sich der Gesammtweg s für eine bestimmte Zeit t:

für den allgemeinsten Fall:

$$32)\quad s = \Sigma(c \, . \, dt),$$

d. h. man hat jedes Zeitelement mit der Geschwindigkeit, welche während desselben stattgefunden, zu multipliziren, und die Produkte zu summiren.

Ist $c = \int f_t dt$ (28), so folgt aus 29):

$$33)\quad s = \int \left(\int f_t dt \right) dt.$$

und endlich für eine konstant wirkende Kraft, also für die gleichmäſsig veränderte Bewegung:

$$34)\quad s = \int_{t'}^{t} ft \, . \, dt = \tfrac{1}{2} f(t^2 - t'^2),$$

worin s den Weg bezeichnet, welcher während der Zeitdauer $(t - t')$ zurückgelegt wird.

Gleichmäſsig veränderte Bewegung.

§ 17. Die gleichmäſsig veränderte Bewegung ist in der Mechanik von besonderer Wichtigkeit. Es mögen daher die eben gefundenen Resultate nebst einigen leicht herzuleitenden hier zusammengestellt werden.

Es bezeichne:

t die Zeit, während welcher eine konstant wirkende Kraft frei gewirkt hat,

s den Weg in dieser Zeit,

c die Geschwindigkeit nach Verlauf der Zeit t (Endgeschwindigkeit),

f das Aenderungsmaafs,

so ist:

$$35) \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} f t^2 = \frac{1}{2} \frac{c^2}{f} = \frac{1}{2} c t \\ c = f t = \sqrt{2 f s} = \frac{2 s}{t} \\ f = \frac{c}{t} = \frac{2 s}{t^2} = \frac{c^2}{2 s} \\ t = \frac{c}{f} = \frac{2 s}{c} = \sqrt{\frac{2 s}{f}} \end{array} \right.$$

Für $t = 1$, also für die Zeiteinheit folgt hieraus:

$$f = c = 2 s,$$

d. h. das Aenderungsmaafs einer konstant wirkenden Kraft ist gleich der Geschwindigkeit, welche die Kraft einem Massenelement nach Verlauf der ersten Zeiteinheit (Sekunde) ertheilt hat, oder gleich dem doppelten Wege, welchen das Massenelement vermöge der Einwirkung der Kraft in der ersten Sekunde zurückgelegt hat.

Schwerkraft.

§ 18. Unter der grofsen Menge von mechanischen Kräften, welche in der Natur wirksam sind, nimmt eine besonders hervorragende Bedeutung die Schwerkraft in Anspruch. Die Schwerkraft ist eine mechanische Kraft, deren Einwirkung alle Körper im ganzen Universum unterworfen sind, und welche man gewöhnlich als eine Anziehung darzustellen pflegt, welche sämmtliche Massenelemente im ganzen Weltall gegeneinander ausüben, und derzufolge jedes Massenelement sich nach jedem andern hin zu bewegen strebt. Die Gröfse dieser Anziehungskraft zwischen je zwei Massenelementen ist nach Newtons Entdeckungen umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung derselben. Es ist hier nicht der Ort, in allgemeine Untersuchungen dieser interessanten und bedeutungsvollen Kraft einzugehen, welche als ein grofses Gesetz durch das Weltall wirkt, und jedem unendlich kleinen Theil desselben eine Bedeutung beilegt, indem sie ihn mit jedem andern und mit dem grofsen Ganzen in Beziehung bringt: wir haben hier der

Schwerkraft nur Erwähnung gethan, um die Wirkung zu bezeichnen, welche sie zwischen dem Erdkörper und jedem Körper, welcher demselben unmittelbar angehört, ausübt. Jeder auf der Erde befindliche Körper wird von jedem Element des Erdkörpers angezogen, und das Resultat dieser verschiedenen Anziehungen ist, dafs jedes Massenelement eines Körpers das Bestreben hat, sich nach dem Mittelpunkt der Erde zu bewegen. Dies führen wir hier vorläufig nur als Thatsache an; der Beweis, dafs diese Thatsache eine nothwendige Folge allgemeiner Gesetze für die Wirkung mechanischer Kräfte ist, läfst sich hier noch nicht führen. Hiernach ist die Richtung der Erdschwerkraft überall die Richtung des Erd-Radius, und folglich für verschiedene Punkte eines Körpers verschieden. Die sehr geringe Abweichung der Radien des Erdkörpers für benachbarte Punkte berechtigt aber zu der Annahme, dafs man selbst für gröfsere Entfernungen die Richtungen der Erdschwerkraft als parallel ansehen kann. Wird die Wirkung der Schwerkraft auf einen Körper nicht durch eine Gegenkraft aufgehoben, so erfolgt Bewegung in der Richtung der Kraft, also in der Richtung des Erdradius; die Bewegung, welche die Schwerkraft in Körpern erzeugt, welche dem System des Erdkörpers angehören, nennen wir den Fall der Körper. Die Körper fallen. Da die Gröfse der Kraft, welche das Fallen bewirkt, nach dem oben angeführten Newtonschen Gesetz sich umgekehrt mit dem Quadrat der Entfernung vom Erdmittelpunkt ändert, folglich in verschiedenen Entfernungen eine verschiedene ist, und da andrerseits die Thatsache feststeht, dafs die Erde keine vollkommene Kugel, sondern an den Polen abgeplattet ist, so folgt daraus, dafs die Gröfse der Schwerkraft an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche verschieden grofs sein mufs, je nachdem der Erdradius einen verschiedenen Werth hat. Die Wirkung der Schwerkraft ist hiernach an den Polen gröfser, als am Aequator. Aber auch an ein und demselben Ort der Erde mufs die Wirkung der Schwerkraft mit der Entfernung von der Erdoberfläche abnehmen. In dieser letzten Beziehung ist aber zu bemerken, dafs die Entfernungen von der Erdoberfläche, mit welchen man es gewöhnlich zu thun hat, gegen den Erdradius so verschwindend klein sind, dafs man sie für einen gegebenen Ort der Erde für die gewöhnlich vorkommenden Fälle vollkommen vernachlässigen kann, und folglich die Schwerkraft der Erde für einen bestimmten Ort als Beispiel einer konstant wirkenden Kraft betrachten kann, welche also, wenn sie frei wirkt, eine gleichmäfsig veränderte Bewegung erzeugen mufs.

Das Aenderungsmaafs der Schwerkraft ist für unsere Gegenden durchschnittlich

$$f = 31{,}25 \text{ preufsische Fufs.}$$

Wir bezeichnen dies Aenderungsmaafs künftig überall mit g.

g bedeutet also künftig überall das Aenderungsmaafs (die Acceleration) der Schwerkraft an einem bestimmten Orte. Für unsere Gegenden ist hiernach:

$$36)\left\{\begin{array}{l} g = 31{,}25 \text{ preufs. Fufs,} \\ g = 9{,}81 \text{ Mètres,} \\ g = 30{,}20 \text{ pariser Fufs,} \\ g = 32{,}20 \text{ englische Fufs,} \\ g = 31{,}03 \text{ wiener Fufs *).} \end{array}\right.$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe nehmen die Formeln (S. 20) für die durch die Schwerkraft gleichmäfsig veränderte Bewegung folgende Gestalt an, wenn die Bedeutung der Buchstaben dieselbe bleibt, wie auf S. 20.

$$37)\left\{\begin{array}{ll} \text{für } g = 31{,}25 \text{ preufs. Fufs:} & \text{für } g = 9{,}81 \text{ Mètres:} \\ s = 15{,}625\,t^2 = 0{,}016\,c^2 = \tfrac{1}{2}ct, & s = 4{,}905\,t^2 = 0{,}0510\,c^2 = \tfrac{1}{2}ct, \\ c = 31{,}25\,t = 7{,}906\sqrt{s} = \dfrac{2s}{t}, & c = 9{,}81\,t = 4{,}429\sqrt{s} = \dfrac{2s}{t}, \\ g = \dfrac{c}{t} = \dfrac{2s}{t^2} = \dfrac{c^2}{2s}, & g = \dfrac{c}{t} = \dfrac{2s}{t^2} = \dfrac{c^2}{2s}, \\ t = 0{,}032\,c = 0{,}253\sqrt{s} = \dfrac{2s}{c}, & t = 0{,}1019\,c = 0{,}4514\sqrt{s} = \dfrac{2s}{c}. \end{array}\right.$$

Druck; Gewicht.

§ 19. Nachdem wir in Vorstehendem die Veränderungen, welche mechanische Kräfte hervorbringen, im Allgemeinen untersucht haben, schreiten wir nun zur Bestimmung der Gröfse der mechanischen Kräfte.

Wir haben oben gesehen, dafs Kräfte im Zustande des Gleichgewichts sich im Allgemeinen der Wahrnehmung durch unsere Sinne entziehen. Die mechanischen Kräfte machen in gewisser Beziehung eine Ausnahme. Wirkt eine mechanische Kraft auf unsern Körper ein, und sind wir veranlafst, dieselbe durch unsern Körper im Gleichgewicht zu halten, so erregt sie unser sinnliches Gefühl in einer Weise, welche wir im Allgemeinen Druck nennen. Der Druck ist also vorläufig das Gefühl, welches in uns durch die Ausübung der Gegenkraft hervorgerufen wird. Wir gehen von

*) Weisbachs Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. II. Aufl. I. S. 54.

dieser, zunächst durch unsere Sinne gewonnenen Vorstellung weiter, und bezeichnen allgemein mit der Benennung Druck den Einfluſs, welchen eine nach Bewegung strebende, aber im Zustande des Gleichgewichts sich befindende mechanische Kraft auf einen Körper ausübt; den Einfluſs der Gegenkraft, durch welchen die zuerst gedachte Kraft im Gleichgewicht erhalten wird, nennen wir den Gegendruck. Hiernach sind Druck und Gegendruck zwei ganz unzertrennliche Vorstellungen. Sobald eine mechanische Kraft im Gleichgewicht gehalten wird, also einen Druck ausübt, müssen wir uns schon nach dem Frühern stets eine Gegenkraft denken, welche die Wirkung der ersten aufhebt, und welche folglich einen Gegendruck auf den Körper ausübt.

Es ist hiernach die Bezeichnung Druck zwar nichts anders, als was wir auf S. 9 ganz allgemein Gröſse einer Kraft genannt haben, nur daſs wir überhaupt unter Druck die Gröſse einer mechanischen Kraft verstehen; allein vermöge jener sinnlichen Anschauung, welche wir durch unsern Körper von dem Druck gewinnen, sind wir im Stande einen neuen Ausdruck für das Maaſs der Gröſse einer mechanischen Kraft herzuleiten. Wir brauchen nämlich nur die Gröſse einer mechanischen Kraft, welche auf einen Körper einwirkt (ihren Druck), nach dem Gegendruck zu beurtheilen, welchen unser Körper ausüben muſs, um jene Kraft im Gleichgewicht zu halten, indem wir einen bestimmten Gegendruck als Einheit annehmen.

Den Gegendruck, welchen wir ausüben müssen, um einen Körper, welcher durch die Schwere in Anspruch genommen ist, im Gleichgewicht zu halten, nennen wir das Gewicht des Körpers. Von dieser Vorstellung ausgehend, verstehen wir unter dem Gewicht eines Körpers allgemeiner den Gegendruck, welcher erforderlich ist, um einen durch die Schwere in Anspruch genommenen Körper im Gleichgewicht zu halten.

Wenn wir nun zur Bestimmung des Druckes, welchen mechanische Kräfte ausüben, irgend einen Gegendruck als Einheit annehmen sollen, so liegt es nahe, dazu einen Gegendruck zu wählen, welcher durch eine so allgemein verbreitete Kraft, wie die Schwerkraft ist, hervorgerufen wird. Wir werden dann den Druck, welchen alle anderen mechanischen Kräfte erzeugen, mit dieser bestimmten Einheit vergleichen. Der absolute Werth der Einheit ist vorläufig beliebig festzustellen, und man hat ihn in der That in verschiedenen Ländern verschieden groſs angenommen.

In Preufsen hat man als Einheit für den Druck mechanischer Kräfte, denjenigen Gegendruck festgestellt, welcher erforderlich ist, um den sechs und sechzigsten Theil eines Kubikfufses destillirten Wassers bei einer Temperatur von 15 Grad Réaumur im luftleeren Raum im Gleichgewicht zu halten, wenn derselbe nur durch die Schwerkraft in Anspruch genommen wird. Diese Einheit heifst ein Pfund. Kürzer gesagt:

> die Einheit des Druckes ist ein Pfund, oder das Gewicht von $\frac{1}{66}$ Kubikfufs destillirten Wassers bei 15 Grad Réaumur im luftleeren Raum.

In Frankreich ist die Einheit des Druckes das Gewicht eines Centimètre cube destillirten Wassers bei $+3{,}5^0$ R. und heifst diese Einheit ein Gramme.

Bestimmung des Druckes einer mechanischen Kraft; Maafs für die Masse.

§ 20. Wir haben nun zwei Mittel gefunden, die Gröfse einer mechanischen Kraft zu messen, nämlich 1) durch die Formeln S. 4 bis 8 und 2) durch den Druck, welchen sie ausübt. Die absoluten Zahlen, welche das Maafs für die Gröfse der Kraft geben, sind in beiden Fällen abhängig von dem Werth der Einheit; sie können verschieden sein; sie können aber unter Umständen auch gleich grofs sein. Da wir den Werth der Einheit für den Druck schon bestimmt haben, so wird es nur von dem Werthe der Einheit in der Formel 5)

$$K = \Sigma(dm\,.f)$$

abhängen, ob beide Methoden die Gröfse einer mechanischen Kraft zu bestimmen gleiche Zahlen liefern oder nicht. Die Einheit für das Aenderungsmaafs ist die Längeneinheit, es ist aber die Einheit für die Masse noch nicht definitiv festgesetzt, und diese Einheit können wir daher noch beliebig wählen.

Es hat sich als zweckmäfsig herausgestellt, bei der Untersuchung mechanischer Kräfte die Masseneinheit so zu wählen, dafs, wenn man die Gröfse der Schwerkraft, welche auf einen Körper wirkt, einmal nach der Gewichtseinheit, und dann nach dem Ausdruck $\Sigma(dm.f)$ mifst, beide Bestimmungen dieselbe Zahl liefern. Da die Schwerkraft für jedes Massenelement erfahrungsmäfsig denselben Aenderungswerth g hat, so folgt aus der eben gemachten Annahme, und wenn wir das Maafs für die Gröfse der auf einen Körper einwirkenden Schwerkraft durch das Gewicht gemessen mit G bezeichnen, für die Gröfse der Kraft einmal

$$K = G,$$

und mit Anwendung der Formel 7) auf S. 11 auch:

$$K = mg,$$

und da beide Werthe von K dieselbe Zahl liefern sollen, so hat man:

$$38)\quad \begin{cases} G = mg \\ m = \dfrac{G}{g} \\ g = \dfrac{G}{m}. \end{cases}$$

Als Resultat dieser Untersuchungen ergiebt sich zunächst, daſs man die Gröſse jeder mechanischen Kraft überhaupt nach Pfunden bestimmen könne, und dann, daſs sich dieselbe durch die Formeln auf S. No. 4 bis 7 ausdrücken lasse, indem nun für die Masseneinheit ein bestimmter Werth festgestellt worden ist.

Führen wir die eben bestimmten Werthe in jene allgemeinen Formeln (4 bis 7 S. 11) ein, so ergiebt sich als allgemeiner Ausdruck:

$$39)\quad K = \Sigma(dm\,.\,f) = \frac{1}{g}\Sigma(dG\,.\,f).$$

Ist f eine Funktion von m, so findet man:

$$40)\quad K = \int f_m\,dm + \text{Const.} = \int f_{\left(\frac{G}{g}\right)}\,.\,d\frac{G}{g} + \text{Const.}$$

Ist dagegen f für jedes Massenelement dasselbe, so folgt:

$$41)\quad K = mf = \frac{f}{g}\,G.$$

$$42)\quad f = \frac{K}{m} = g\,\frac{K}{G}.$$

Bestimmung der Wirkungsgröſse einer mechanischen Kraft durch die Geschwindigkeits-Aenderung.

§ 21. Nach diesen Vorausbestimmungen kann es nicht schwer fallen, die Wirkungsgröſse der mechanischen Kräfte, wenn sie frei wirken zu bestimmen, sei es, daſs sie nur momentan, oder daſs sie kontinuirlich wirken. Wir benutzen dazu die früher ganz allgemein hergeleiteten Formeln.

Da die Aenderungen mechanischer Kräfte nach dem Frühern überhaupt Geschwindigkeits-Aenderungen sind, so wird, wenn wir die Geschwindigkeit in irgend einem Augenblick mit c bezeichnen, überall in den allgemeinen Formeln anstatt φ der Werth c gesetzt werden müssen.

Es ergiebt sich sodann für momentan wirkende Kräfte allgemein das Leistungselement für ein Zeitelement (S. 12):

$$43)\ dW_{dt} = dm \, . \, dc,$$

und für eine kontinuirlich wirkende Kraft nach S. 13 (No. 13).

$$44)\ dL_{dt} = dm \, . \, c \, . \, dc,$$

folglich das Leistungselement für eine bestimmte Zeitdauer:

für eine momentan wirkende Kraft:

$$45)\ dW_{(t-t')} = dm\int_{c'}^{c} dc = dm(c - c'),$$

und für eine kontinuirlich wirkende Kraft:

$$46)\ dL_{(t-t')} = dm\int_{c'}^{c} c \, . \, dc = \tfrac{1}{2}dm(c^2 - c'^2),$$

worin c' die Geschwindigkeit zu Anfange, c diejenige zu Ende der Beobachtung bezeichnet, wenn t' die Zeit bedeutet, welche von dem Augenblick der freien Einwirkung der Kraft bis zu dem Augenblicke, in welchem die Beobachtung beginnt, verflossen ist, und t diejenige, welche bis zur Vollendung der Beobachtung verflossen ist.

Die Leistung der Kraft für den ganzen Körper läfst sich aus diesem Leistungselement in bekannter Weise, sei es durch direktes Summiren, sei es durch Integriren, bestimmen.

Die beiden Gleichungen enthalten folgende Gesetze:

1) Die Leistung einer lebendigen Kraft, welche auf ein Massenelement momentan wirkt, drückt sich für eine bestimmte Zeit aus durch das Produkt aus dem Massenelement in die Differenz der Geschwindigkeiten, welche das Massenelement zu Anfange und zu Ende der Beobachtung besitzt.

2) Die Leistung der lebendigen Kraft, welche auf ein Massenelement kontinuirlich, gleichviel ob konstant oder veränderlich wirkt, drückt sich aus für eine bestimmte Zeit durch das halbe Produkt aus dem Massenelement in die Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten, welche das Massenelement am Anfang und am Ende der Beobachtung besitzt.

Einen Ausdruck von der Form $dm.c$ nennt man auch wohl die Quantität oder Gröfse der Bewegung des Massenelementes, den Ausdruck $\frac{1}{2}dm \, . \, c^2$ aber kurzweg die lebendige Kraft des Massenelements und den Ausdruck von der Form $\frac{1}{2}dm(c^2 - c'^2)$ den Gewinn des Massenelementes an lebendiger Kraft.

Bestimmung der Wirkungsgröfse einer mechanischen Kraft durch den Druck und den Weg.

§ 22. Da sich nach den Gesetzen für die Bewegung ausdrückt ganz allgemein (S. 17 und 18)

$$c = \frac{ds}{dt}; \quad dc = f dt,$$

so läfst sich für eine kontinuirlich wirkende Kraft das Leistungselement für ein Zeitelement auch schreiben:

$$dL_{dt} = dm \,.\, c \,.\, dc = dm \frac{ds}{dt} \,.\, f dt.$$
$$= dmf \,.\, ds,$$

worin ds das Wegelement ist, welches das Massenelement in einem Zeitelement zurückgelegt hat. Es ist aber $dm.f. = dK$ (S. 11. No. 4), folglich:

47) $dL_{dt} = dK ds = dm \,.\, c \,.\, dc = dm \,.\, f \,.\, ds.$

In dieser Gleichung liegt das wichtige Gesetz:

> die Leistung einer mechanischen Kraft, welche kontinuirlich, gleichviel ob konstant oder veränderlich auf ein Massenelement wirkt, ist in jedem Zeitelement gleich dem Produkt aus dem Druck der Kraft in den Weg, welchen das Massenelement durch die Kraft bewegt, zurücklegt.

Ist die Kraft für die Zeitdauer $(t - t')$ konstant, so ist auch $f.dm = dK$ konstant, und bezeichnet s den Weg während der Zeit $(t - t')$, welchen das Massenelement, durch die Kraft bewegt, zurücklegt, so hat man:

48) $\boldsymbol{dL_{(t-t')} = dm \,.\, f \,.\, s = dK \,.\, s = \tfrac{1}{2} dm (c^2 - c'^2)}.$

Ist endlich für den ganzen Körper, sowohl der Druck auf jedes Massenelement, als auch der Weg konstant, so folgt:

49) $\boldsymbol{L = K \,.\, s = \tfrac{1}{2} m (c^2 - c'^2)}.$

Fufspfund, Pferdekraft.

§ 23. Das Produkt $K.s$ ist gebildet aus dem Maafs für den Druck K, welcher nach Gewichtseinheiten (Pfunden) gemessen ist, und aus dem Maafs für den Weg s, welcher nach Längeneinheiten (Fufsen) gemessen wird.

Die Einheit für Ks ist also weder ein Pfund noch ein Fufs, sondern eine ganz neue Einheit, nämlich die Leistungseinheit für eine Kraft. Naturgemäfs nimmt man für diese Einheit eine solche Leistung an, welche in der Bewegung einer Druckeinheit (eines Pfundes) um eine Längeneinheit (einen Fufs) besteht, und nennt diese Einheit, der Zusammensetzung entsprechend, ein Fufspfund. Drückt man also die Leistung einer Kraft durch das Produkt Ks aus, so sagt man, sie betrage in einer bestimmten Zeit Ks Fufspfund und schreibt der Ausdruck häufig:

$$L = Ks^{(fpf)}.$$

Die Franzosen nehmen als Leistungseinheit die Bewegung eines Drucks von 1 Kilogramme um 1 Mètre an, und bezeichnen dieselbe als Kilogrammemètre, geschrieben:

$$L = Ks^{km} \quad \text{oder} \quad L = Ks^{k \times m}.$$

Es ist:

$$50) \begin{cases} 1^{fpf} = 0{,}1468^{km} \\ 1^{km} = 6{,}8121^{fpf}. \end{cases}$$

Ist die Leistung während der Zeitdauer, in welcher sie hervorgebracht wurde, konstant, und bezeichnet man diese Zeitdauer mit t, so ist die Leistung in der Zeiteinheit:

$$51) \quad \frac{L}{t} = \frac{Ks}{t} = K\frac{s}{t}.$$

Wenn nun die Leistung dadurch konstant ist, dafs sowohl die in einzelnen Zeitelementen wirkenden Drucke, als auch die Wege dieser Drucke konstant sind, so folgt, dafs die Bewegung selbst eine gleichförmige ist. In diesem Fall hat man $\frac{s}{t} = c$, wenn c die konstante Geschwindigkeit bezeichnet, und es folgt die Leistung in der Zeiteinheit:

$$52) \quad \frac{L}{t} = K.c.$$

Die Leistung in einer Zeiteinheit nennen wir die Intensität der Kraft, und es ergiebt sich für eine Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Intensität gleich dem Produkt aus dem Druck in die Geschwindigkeit.

Eine Kraft, deren Intensität 510 Fufspfund oder 75 Kilogrammètres in der Sekunde beträgt, nennt man eine Pferdekraft. Man mifst die Intensität einer Kraft häufig, indem man eine Pferdekraft als Einheit nimmt. Bezeichnet:

N die Anzahl der Pferdekräfte, so folgt:

$$53) \begin{cases} \frac{L}{t} = Kc = N.510 \text{ Fufspfund} = N.75^{km} \\ N = \frac{Kc^{fpf}}{510} = \frac{Kc^{km}}{75} \\ K = \left(\frac{N.510}{c \text{ Fufs}}\right) \text{Pfund} = \left(\frac{N.75}{c \text{ Mètres}}\right) \text{Kilogrm.} \\ c = \left(\frac{N.510}{K \text{ Pfund}}\right) \text{Fufs} = \left(\frac{N.75}{K \text{ Kilogr.}}\right) \text{Mètres.} \end{cases}$$

Ist die Leistung während der Zeitdauer, in welcher sie hervorgebracht ist, nicht konstant, so kann man dafür einen gewissen mittlen Werth einführen, insofern man unter dem mittlen Werth einer veränderlichen Gröfse einen solchen konstanten Werth versteht, welcher in irgend einer Beziehung dasselbe Resultat erzeugt, wie der veränderliche Werth. Die obigen Formeln 51 bis 53 geben zugleich die mittlen Werthe für K, $c\frac{L}{t}$ u. s. w., wenn diese Gröfsen während der Zeit t veränderlich waren.

b) Wirkung mehrer mechanischen Kräfte auf ein Massenelement.

Grundsätze für die Wirkung mehrer Kräfte auf ein Massenelement — Zusammensetzen, Zerlegen der Kräfte. Allgemeine Bedingungen des Gleichgewichts.

§ 24. In den vorhergehenden Untersuchungen haben wir überall nur eine Kraft auf ein Massenelement wirkend gedacht. Zwar haben wir bei der Bestimmung des Druckes den Zustand des Gleichgewichts und somit nach den früheren Betrachtungen stillschweigend zwei Kräfte, deren Wirkungen sich aufheben, vorausgesetzt, allein wir haben den Gleichgewichtszustand immer nur als einen gegebenen und möglichen Fall betrachtet, ohne zu untersuchen, unter welchen Bedingungen dieser Fall eintreten kann. Gegenwärtig schreiten wir zur Untersuchung der Verhältnisse, welche eintreten, wenn zwei oder mehre Kräfte auf ein Massenelement wirken. Wir stellen zu diesem Zweck zunächst einige Grundsätze auf, die wir künftig mehrfach brauchen werden.

1) Wenn mehre Kräfte gleichzeitig auf ein Massenelement wirken, so ist das Resultat ihrer Gesammtwirkung während eines Zeitelementes dasselbe, welches auch erreicht worden wäre, wenn dieselben Kräfte während desselben Zeitelementes in einer beliebigen Reihenfolge gewirkt hätten, so dafs das Massenelement während eines Theils des Zeitelementes zuerst der Wirkung und der Richtung der einen Kraft, dann der Wirkung und der Richtung einer folgenden etc. gefolgt wäre.

2) Diese Vorstellung hindert nicht, dafs wir uns, anstatt der mehren Kräfte, welche gleichzeitig auf ein Massenelement wirken, eine einzige Kraft denken können, welche so beschaffen ist, dafs sie, wenn sie allein wirkte, während desselben Zeitelementes in dem Massenelement dieselbe Wirkung erzeugen würde, welche die verschiedenen einzelnen Kräfte zusammen erzeugen. Diese Kraft nennt man die

resultirende Kraft, die Resultante, die Mittelkraft; die andern Kräfte nennt man in Bezug auf die Resultante, deren Seitenkräfte, Komponenten. Denkt man die Mittelkraft verschiedener Seitenkräfte, so sagt man, dafs man die Seitenkräfte zusammensetze.

3) Die Wirkung jeder Kraft läfst sich auffassen als das Resultat mehrer anderer gleichzeitig wirkender Kräfte, oder mit andern Worten, jede Kraft läfst sich als Resultante verschiedener Seitenkräfte ansehen. Bestimmt man die Seitenkräfte, als deren Resultante man die gegebene Kraft ansehen will, so sagt man, man zerlege die Kraft in Seitenkräfte.

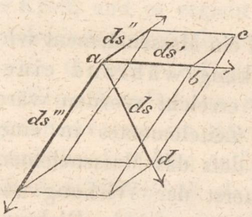
4) Aus dem Begriff des Gleichgewichts (S. 5) folgt, dafs mehre Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht sind, wenn die Wirkungsgröfse ihrer Mittelkraft gleich Null ist.

5) Auch folgt aus dem Vorgetragenen leicht, dafs mehre auf ein Massenelement wirkende Kräfte im Gleichgewicht sind, wenn die Wirkungsgröfsen ihrer sämmtlichen Seitenkräfte gleich Null sind, und umgekehrt.

Prinzip des Parallelepipedums der Kräfte.

§ 25. Denken wir uns drei Kräfte, deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement wirken. Die Elemente dieser Kräfte seien:

$$dK' = dmf',$$
$$dK'' = dmf'',$$
$$dK''' = dmf''',$$



und die Wegelemente derselben mögen bezeichnet werden mit $ds' = c'dt$, $ds'' = cdt$, $ds''' = c'''dt$.

Wir können uns nun nach dem ersten Grundsatz in § 24 den Fall auch so denken, dafs während eines bestimmten Zeitelementes die Wirkungen nach einander erfolgt wären, so, dafs zuerst das Massenelement vermöge der Kraft $dK'ds'$ den Weg ds' zurückgelegt hätte, also von a nach b gelangt sei, dann in einem folgenden Theil desselben Zeitelements in der Richtung von ds'' vermöge der Kraft $dK''ds''$ den Weg $bc = ds''$ und endlich in einem dritten Theil des Zeitelementes vermöge der Kraft $dK'''ds'''$ den Weg $cd = ds'''$ in der Richtung von ds''' zurückgelegt habe. Es wird dann nach Vollendung des Zeitelements das Massenelement sich in d befinden. Dasselbe würde stattfinden, wenn vermöge einer einzigen Kraft dK, welche in der Richtung ad wirksam ist, das Massenelement in dem Zeitelement den Weg $ds = ad$ zurückgelegt hätte. Es läfst sich also die Wirkung der drei Kräfte durch eine einzige ersetzen, deren Leistung sich ausdrückt durch $dKds$, und diese Kraft $dKds$ ist die Resultante aus den drei Kräften $dK'ds'$, $dK''ds''$, $dK'''ds'''$.

Es folgt hieraus das Gesetz:

Wenn drei Kräfte, deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement wirken, so erfolgt die gemeinschaftliche Wirkung nach der Diagonale des Parallelepipedums, welches durch die Gröfse und Richtung der Wegelemente der drei Kräfte gegeben ist, auch ist das Wegelement der Mittelkraft gleich der Länge dieser Diagonale. Dies Gesetz nennt man das Prinzip des Parallelepipedums der Kräfte.

Parallelepipedum der Geschwindigkeiten.

§ 26. Zufolge des Ausdrucks $ds = c.dt$ verhalten sich die Wegelemente in einem bestimmten Zeitelemente, wie die in diesem Zeitelemente stattfindenden Geschwindigkeiten. Trägt man auf den Richtungslinien der Kräfte anstatt der Wegelemente die in dem betrachteten Zeitelemente stattfindenden Geschwindigkeiten ab, so folgt, dafs die Diagonale des Parallelepipedums der Geschwindigkeiten sowohl der Gröfse als der Richtung nach gleich der Geschwindigkeit der Mittelkraft sein müsse.

Das Leistungselement, die Mittelkraft, aber drückt sich aus durch:

$$dKds = dm \,.\, c \,.\, dc.$$

Sind nun die Seitenkräfte ihrer Geschwindigkeit und Richtung nach gegeben, so ist auch die Geschwindigkeit und Richtung der Mittelkraft, und dadurch ihr Leistungselement entweder durch einfache geometrische, oder durch analytische Betrachtung zu finden.

Prinzip der virtuellen Leistungen.

§ 27. Für den Fall, dafs die Richtungen der Seitenkräfte mit einander rechte Winkel machen, ist offenbar zufolge des Parallelepipedums der Geschwindigkeiten (Figur umstehend):

$$c^2 = c'^2 + c''^2 + c'''^2,$$

folglich:

$$cdc = c'dc' + c''dc'' + c'''dc''',$$

und:

$$54)\quad dm.cdc = dm.c'dc' + dm.c''dc'' + dm.c'''dc''',$$

oder (nach 47):

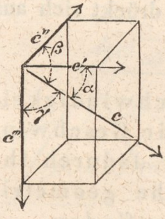
$$55)\quad dK.ds = dK'.ds' + dK''.ds'' + dK'''.ds'''.$$

Darin liegt der Satz:

das Leistungselement der Mittelkraft dreier Kräfte, deren Richtungen zu einander normal sind, und welche in verschiedenen Ebenen liegen, ist gleich der Summe der Leistungselemente der einzelnen Kräfte; und umgekehrt jedes Leistungselement läſst sich durch die Summe dreier anderer Leistungselemente ersetzen, deren Geschwindigkeits-Richtungen zu einander normal und in verschiedenen Ebenen liegen.

Nennen wir α, β, γ die Winkel, welche die Richtungslinie der Mittelkraft mit den einzelnen zu einander normalen Seitenkräften bildet, so folgt:

$$56)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{c'}{c} = \frac{c'}{\sqrt{(c'^2 + c''^2 + c'''^2)}} = \frac{ds'}{ds} \\ \cos\beta &= \frac{c''}{c} = \frac{c''}{\sqrt{(c'^2 + c''^2 + c'''^2)}} = \frac{ds''}{ds} \\ \cos\gamma &= \frac{c'''}{c} = \frac{c'''}{\sqrt{(c'^2 + c''^2 + c'''^2)}} = \frac{ds'''}{ds}. \end{aligned}\right.$$



Hieraus folgt, daſs die gleichzeitigen Geschwindigkeiten für ein Zeitelement oder auch die Wegelemente der zu einander normalen Seitenkräfte gleich den Projektionen der Geschwindigkeit oder des Wegelementes der Mittelkraft auf die Richtungen der Wege der Seitenkräfte sind. Diese gleichzeitigen Seiten-Geschwindigkeiten nennt man, in Bezug auf die mittlen Geschwindigkeiten, die virtuellen Geschwindigkeiten, die Werthe $dm.c'dc'$ etc. nennen wir die virtuellen Arbeiten, und es läſst sich das Gesetz der Gleichungen 54 und 55) auch so fassen: Jedes Arbeitselement einer Kraft ist gleich der Summe seiner virtuellen Arbeiten.

Diesen Satz nennt man das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, besser wollen wir ihn das Prinzip der virtuellen Arbeiten nennen.

Ist ds der Weg während eines Zeitelements, welchen das Massenelement, durch die Mittelkraft getrieben, zurücklegen würde, so wollen wir die Wege ds', ds'', ds''' d. h. die Projektionen des Wegelementes ds auf die Richtung der Seitenkräfte, die virtuellen Wegelemente der Seitenkräfte für ds nennen.

Parallelogramm der Kräfte.

§ 28. Ist das Wegelement der einen von den drei Kräften gleich Null, hat man es also nur mit zwei Kräften zu thun, so läſst sich immer durch die Richtungen der beiden Kräfte eine Ebene legen. Es folgt sehr leicht aus dem Vorgetragenen, daſs in diesem Falle anstatt des Parallelepipedums ein Parallelogramm erscheint, daſs das Wegelement der Mittelkraft gleich der Diagonale des Parallelogramms der Wegelemente, und die Geschwindigkeit der Mittelkraft gleich der Diagonale des Parallelogramms der Geschwindigkeiten ist.

Prinzip des unmöglichen Gleichgewichts für ein Massenelement.

§ 29. Wirken drei Kräfte auf ein Massenelement, deren Richtungslinien in verschiedenen Ebenen liegen, so läſst sich immer eine resultirende Kraft finden, deren Leistungselement einen bestimmten Werth hat. Daraus folgt, daſs drei solcher Kräfte niemals für sich im Gleichgewicht sein können. Ebenso läſst sich zeigen, daſs zwei Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien einen Winkel mit einander bilden, niemals für sich im Gleichgewicht sein können.

Dies Gesetz nennen wir das Prinzip des unmöglichen Gleichgewichts.

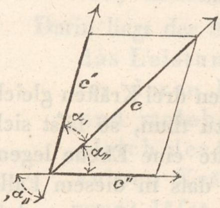
Mittelkraft einer beliebigen Anzahl von Kräften. Hilfssatz.

§ 30. In Folge des Satzes vom Parallelepipedum der Geschwindigkeiten kann man von einer beliebigen Anzahl von Kräften immer die Leistung der Mittelkraft bestimmen, denn man braucht die einzelnen Kräfte nur zunächst zu je zwei zusammenzusetzen und damit fortzufahren, bis man dieselben auf drei Kräfte, die in verschiedenen Ebenen liegen, oder auch auf zwei Kräfte in einer Ebene reducirt hat, und von diesen dann wieder die Mittelkraft bilden. Die so gefundene Mittelkraft ist die Mittelkraft sämmtlicher Kräfte. Bei dieser Zusammensetzung kann man sich des folgenden, geometrisch leicht nachzuweisenden Satzes bedienen:

Sind c' und c'' die Geschwindigkeiten zweier Kräfte, ist $_{,}\alpha_{,,}$ der Winkel, welchen die Richtungen mit einander bilden, so ist die Geschwindigkeit der Mittelkraft durch die Gleichung gegeben:

$$c^2 = c'^2 + c''^2 + 2c'c'' \cdot \cos{}_{,}\alpha_{,,},$$

folglich:



$$cdc = c'dc' + c''dc'' + \cos{}_{,}\alpha_{,,}(c'dc'' + c''dc')$$

und daher das Leistungselement der Mittelkraft.

$$57)\ dm\,cdc = dm[c'dc' + c''dc'' + \cos{}_{,}\alpha_{,,}(c'dc'' + c''dc')],$$

und wenn $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$ die Winkel bezeichnen, welche die Geschwindigkeit c mit c', und c mit c'' macht, so hat man auch:

$$58)\ \frac{c'}{c''} = \frac{\sin\alpha_{,,}}{\sin\alpha_{,}},$$

d. h.: die Geschwindigkeiten der beiden Kräfte verhalten sich umgekehrt zu einander wie die Sinus der Winkel, welche dieselben mit der Richtung der Geschwindigkeit der dritten Kraft bilden.

Ist der Winkel, welchen die Richtungen der beiden Kräfte bilden, $_{,}\alpha_{,,} = 90$ Grad, so folgt, da $\cos 90^0 = 0$:

$$dm\,cdc = dm(c'dc' + c''dc''),$$

also die Leistung der Mittelkraft gleich der Summe der Leistungen der Seitenkräfte, welches auch unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten sich ergiebt. Da nun in diesem Falle $\sin\alpha_{,} = \cos\alpha_{,,}$ ist, so hat man:

$$59)\ \begin{cases} \dfrac{c'}{c''} = \dfrac{\sin\alpha_{,,}}{\cos\alpha_{,,}} = \operatorname{tang}\alpha_{,,} = \operatorname{cotang}\alpha_{,}. \\ c' = c \cdot \sin\alpha_{,,};\ c'' = c \cdot \cos\alpha_{,,}. \end{cases}$$

Mittelkraft zweier Kräfte, deren Richtungen in derselben geraden Linie liegen.

§ 31. Wenn der Winkel $_{,}\alpha_{,,} = 0$ ist, so ist $\cos{}_{,}\alpha_{,,} = 1$; ist dagegen $_{,}\alpha_{,,} = 180$ Grad, so ist $\cos{}_{,}\alpha_{,,} = -1$, in beiden Fällen fallen die Richtungen der Geschwindigkeiten zusammen, und zwar liegen sie im ersten Falle nach derselben Richtung, in andern Falle sind sie entgegengesetzt. Man hat daher für den Fall, dafs die beiden Kräfte nach derselben Richtung wirken:

$$c^2 = c'^2 + c''^2 \pm 2c'c'',$$

folglich:

$$60)\ c = c' \pm c'',$$

d. h. die resultirende Geschwindigkeit ist dann gleich der Summe oder gleich der Differenz der Geschwindigkeiten der einzelnen

Kräfte. Giebt man den Geschwindigkeiten, je nachdem sie in dem einen oder in dem andern Sinne liegen, bestimmte Vorzeichen, so kann man den Satz auch so fassen:

Wenn die Richtungslinien zweier Kräfte in dieselbe gerade Linie fallen, so ist die resultirende Geschwindigkeit gleich der algebraischen Summe der einzelnen Geschwindigkeiten.

Mit Hilfe dieser Sätze kann man aber auch jede Kraft, welche ihrer Richtung und Geschwindigkeit nach gegeben ist, immer in zwei oder mehre Seitenkräfte zerlegen.

Bestimmung der Mittelkraft durch das Axensystem.

§ 32. Durch geschicktes Zusammensetzen und Zerlegen der Kräfte kann man oft verwickelte Rechnungen sehr erleichtern. Hat man z. B. eine beliebige Menge von Kräften, welche auf ein Massenelement wirken, so kann man die Mittelkraft derselben auch so bestimmen, dafs man zuerst drei Richtungen annimmt, die zu einander normal sind (Axensystem), dafs man sodann jede einzelne Kraft nach diesen drei Richtungen zerlegt, die algebraische Summe der einzelnen Geschwindigkeiten, die in einerlei Richtungslinie fallen, bildet, und nun diese drei Geschwindigkeiten wieder zusammensetzt, die resultirende Geschwindigkeit ist dann diejenige der Mittelkraft.

Es seien c', c'', c''', c'''' ... etc. die Geschwindigkeiten verschiedener Kräfte, $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,,}$, $\alpha_{,,,,}$ .... die Winkel, welche sie mit der ersten Axe bilden, $\beta_{,}$, $\beta_{,,}$, $\beta_{,,,}$, $\beta_{,,,,}$.... die Winkel mit der zweiten und $\gamma_{,}$, $\gamma_{,,}$, $\gamma_{,,,}$, $\gamma_{,,,,}$ ... die Winkel mit der dritten Axe. Zerlegt man die Geschwindigkeit c' nach der Richtung der drei Axen, so hat man mit Benutzung der Gleichung 56) die Seiten-Geschwindigkeit nach der ersten Axe: $c' \cos\alpha_{,}$, nach der Richtung der zweiten Axe $c' \cos\beta_{,}$, nach der Richtung der dritten Axe $c' \cos\gamma_{,}$. In gleicher Weise zerlegt man die übrigen Geschwindigkeiten, und wenn man nun die algebraische Summe der Geschwindigkeiten, die in einerlei Axe liegen, bildet, und diese für die erste Axe mit $c_{,}$, für die zweite Axe mit $c_{,,}$, für die dritte Axe mit $c_{,,,}$ bezeichnet, so folgt die Geschwindigkeit nach der ersten Axe:

$$61)\quad \left\{\begin{array}{c} c' \cos\alpha_{,} + c'' \cos\alpha_{,,} + c''' \cos\alpha_{,,,} + \ldots = c_{,}, \\ \text{die nach der zweiten Axe:} \\ c' \cos\beta_{,} + c'' \cos\beta_{,,} + c''' \cos\beta_{,,,} + \ldots = c_{,,}, \\ \text{die nach der dritten Axe:} \\ c' \cos\gamma_{,} + c'' \cos\gamma_{,,} + c''' \cos\gamma_{,,,} + \ldots = c_{,,,}, \end{array}\right.$$

und folglich die mittle Geschwindigkeit c:

$$62)\quad c = \sqrt{(c_{,}^2 + c_{,,}^2 + c_{,,,}^2)}.$$

Die Winkel α, β, γ, welche c mit den Axen bildet, findet man durch die Gleichung 56):

$$\cos\alpha = \frac{c_{,}}{c},\quad \cos\beta = \frac{c_{,,}}{c},\quad \cos\gamma = \frac{c_{,,,}}{c}.$$

Bei Bestimmung der Ausdrücke $c'\cos\alpha_{,}$ etc. ist besonders auf das Vorzeichen von $\cos\alpha_{,}$ etc. zu achten, und es sind die Winkel stets in demselben Sinne zu messen.

Die Leistung, welche aus der Wirkung einer beliebigen Zahl von Kräften nach der Richtung einer der drei Axen hervorgeht, nennen wir eine Kräftesumme für diese Richtung. Wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, so kann man in jedem Augenblick die Wirkung derselben auf drei Kräftesummen, deren Richtungen in den drei Axen liegen, zurückführen. Jede der drei Kräftesummen läfst sich behandeln, als ob sie die Leistung einer einzigen in dieser Richtung wirkenden Gesammtkraft sei, und wenden wir das Prinzip der virtuellen Leistungen an, so ergiebt sich sehr leicht für beliebig viele Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, das Gesetz:

> die Leistung der Mittelkraft in irgend einem Zeitelement ist gleich der Summe dreier Kräftesumsummen für drei zu einander normale Axen.

Parallelepipedum und Parallelogramm der Drucke.

§ 33. Sind die sämmtlichen Kräfte, welche anf ein Mas senelement wirken, konstante, d. h. ist das Aenderungsmaafs für dieselben in jedem Zeitelement dasselbe, so folgt nach S. 19 (No. 30) $c' = f't'$, $c'' = f''t''$ etc. Nehmen wir an, dafs die sämmtlichen Kräfte gleich lange Zeit wirksam gewesen sind, also $t' = t''$ etc., so folgt ferner, dafs die Geschwindigkeiten unter sich in jedem Augenblicke dasselbe Verhältnifs haben, und wenn man für die Geschwindigkeiten in den Gleichungen 61) die Werthe $f't$, $f''t$, $f'''t$ etc. substituirt, und durch t durchweg dividirt, so hat man:

$$63)\quad \begin{cases} f'\cos\alpha_{,} + f''\cos\alpha_{,,} + f'''\cos\alpha_{,,,} + \ldots = f_{,}, \\ f'\cos\beta_{,} + f''\cos\beta_{,,} + f'''\cos\beta_{,,,} + \ldots = f_{,,}, \\ f'\cos\gamma_{,} + f''\cos\gamma_{,,} + f'''\cos\gamma_{,,,} + \ldots = f_{,,,}, \end{cases}$$

und folglich das Aenderungsmaafs der Mittelkraft:

$$64)\quad f = \sqrt{(f_{,}^2 + f_{,,}^2 + f_{,,,}^2)}.$$

Es drücken sich aber die Drucke, welche die Kräfte auf das Massenelement ausüben, aus durch:

$$dK' = dmf', \ dK'' = dmf'' \text{ etc.}$$

Wenn man nun die obigen Gleichungen 63) mit dm multiplizirt und für dmf' etc. die Werthe dK' etc. setzt, so hat man:

$$65)\ \begin{cases} dK' \cos\alpha_{\prime} + dK'' \cos\alpha_{\prime\prime} + dK''' \cos\alpha_{\prime\prime\prime} + \ldots = dK_{\prime}, \\ dK' \cos\beta_{\prime} + dK'' \cos\beta_{\prime\prime} + dK''' \cos\beta_{\prime\prime\prime} + \ldots = dK_{\prime\prime}, \\ dK' \cos\gamma_{\prime} + dK'' \cos\gamma_{\prime\prime} + dK''' \cos\gamma_{\prime\prime\prime} + \ldots = dK_{\prime\prime\prime}, \end{cases}$$

und folglich der Mitteldruck:

$$66)\ dK = \sqrt{(dK_{\prime}^2 + dK_{\prime\prime}^2 + dK_{\prime\prime\prime}^2)}.$$

$$67)\ \cos\alpha = \frac{dK_{\prime}}{dK} = \frac{f_{\prime}}{f}, \ \cos\beta = \frac{dK_{\prime\prime}}{dK} = \frac{f_{\prime\prime}}{f}, \ \cos\gamma = \frac{dK_{\prime\prime\prime}}{dK} = \frac{f_{\prime\prime\prime}}{f}.$$

Hat man es mit veränderlich wirkenden Kräften zu thun, so ändert sich freilich f in jedem Zeitelement, man kann jedoch für die Dauer eines Zeitelements f als konstant ansehen, und versteht man unter f' f'' etc. die bestimmten gleichzeitigen Werthe, welche die Aenderungsmaafse in einem bestimmten Zeitelement besitzen, so gelten die obigen Gleichungen unter dieser Voraussetzung auch für veränderlich wirkende Kräfte; und dann ergeben sich durch jene Betrachtungen die Gesetze:

1) In jedem Zeitelement verhalten sich die Drucke, welche verschiedene Kräfte auf ein Massenelement ausüben, zu einander, wie die Geschwindigkeiten, welche die Kräfte dem Massenelement in diesem Augenblick ertheilen würden, falls sie frei wirkten.

2) Wenn man die Drucke ihrer Gröfse und Richtung nach durch Linien darstellt, so gilt das Gesetz, welches wir als Parallelepipedum resp. Parallelogramm der Kräfte und der Geschwindigkeiten bezeichnet haben, mit allen seinen Konsequenzen auch für die Drucke.

In dieser Gestalt nennen wir dies Gesetz das Prinzip des Parallelepipedums resp. des Parallelogramms der Drucke.

Bedingungen für das Gleichgewicht nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen.

§ 34. Sind die Geschwindigkeiten in der Richtung aller dreier Axen gleichförmig, d. h. nach S. 16, wenn die Kräftesummen für die Richtungen aller dreier Axen im Gleichgewicht sind, so ist auch die mittle Geschwindigkeit gleichförmig, und folglich sind die Kräfte überhaupt im Gleichgewicht. Denn nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten ergiebt sich $dm.cdc = dmc_{\prime}dc_{\prime} + dmc_{\prime\prime}dc_{\prime\prime} + dmc_{\prime\prime\prime}dc_{\prime\prime\prime}$, und da die Geschwindigkeiten $c_{\prime}$, $c_{\prime\prime}$, $c_{\prime\prime\prime}$ konstant sind, so sind ihre Differentiale gleich Null, folglich ist die Summe ihrer virtuellen Arbeiten gleich Null, d. h. es ist auch die Arbeit der Mittelkraft gleich Null. Dasselbe findet statt, wenn die virtuellen Geschwindigkeiten $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$ einzeln gleich Null sind.

Hieraus ergiebt sich als Bedingung des Gleichgewichts:

Sollen mehre Kräfte, deren Richtungslinien in verschiedenen Ebenen liegen, im Gleichgewicht sein, so müssen die Kräftesummen für drei zu einander normale Axen gleich Null sein.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt.

Sind die sämmtlichen Kräfte im Gleichgewicht, so ist das Massenelement entweder in Ruhe, oder es bewegt sich in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Im ersten Falle sind die Wegelemente jeder der drei Kräftesummen gleich Null, im andern Falle sind die Wegelemente in jedem Zeitelement konstant. Da in beiden Fällen $dc = fdt$ gleich Null ist, so folgt, da dt nicht Null sein kann, das Aenderungsmaafs $f = 0$; folglich sind die resultirenden Drucke in der Richtung jeder der drei Kräftesummen in beiden Fällen gleich Null.

Liegen die Richtungen der verschiedenen Kräfte alle in derselben Ebene, so gelten die obigen Sätze in der Weise, dafs man nur die Kräftesummen für zwei zu einander normale Axen in dieser Ebene in Betracht zu ziehen hat.

Substituirung gegebener Kräfte durch andere.

§ 35. Aus dem eben Vorgetragenen ziehen wir hier noch einige Folgerungen, die sich leicht einsehen lassen, und welche für die folgenden Betrachtungen von Interesse sind.

1) Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, nicht im Gleichgewicht, und man läfst eine neue Kraft auf das Massenelement wirken, deren Leistungselement demjenigen der resultirenden Kraft gleich, aber entgegengesetzt ist, so tritt Gleichgewicht ein.

Dasselbe geschieht, wenn man auf das Massenelement anstatt der einen neuen Kraft, ein System von neuen Kräften wirken läfst, dessen Resultirende ein gleiches, aber entgegengesetztes Leistungselement hat, als die Resultirende des ersten Systems.

2) Sind mehre Kräfte an einem Massenelement im Gleichgewicht, so läfst sich jede von ihnen so auffassen, als ob sie eine Kraft sei, deren Leistung der resultirenden Kraft sämmtlicher übrigen Kräfte gleich und entgegengesetzt ist, oder als ob sie die resultirende Kraft eines Systemes von Kräften sei, dessen resultirende

Leistung der resultirenden Leistung sämmtlicher übrigen gegebenen Kräfte gleich und entgegengesetzt ist.

3) Wirkt ein System von Kräften auf ein Massenelement ein, und es erfolgt Bewegung, so läfst sich der Fall auch so ansehen, als wirke eine Kraft, welche gleich der resultirenden aller übrigen Kräfte ist, allein frei auf das System ein, während alle übrigen Kräfte einzeln durch Gegenkräfte, die ihnen gleich und entgegengesetzt sind, im Gleichgewicht gehalten werden. Sind aber die auf ein Massenelement wirkenden Kräfte sämmtlich im Gleichgewicht, so läfst sich die Sache auch so auffassen, als ob jede einzelne Kraft für sich durch eine gleiche und entgegengesetzte im Gleichgewicht gehalten werde. Wenn man nach den Gesetzen 1, 2 und 3 die Wirkung, welche eine gegebene Kraft, oder ein gegebenes System von Kräften auf ein Massenelement ausübt, hervorgebracht denkt durch eine andere Kraft, oder durch ein anderes System von Kräften, so sagt man, diese andere Kraft, oder dieses andere System werde der ersten Kraft, oder dem ersten System substituirt.

Aeufsere und innere Kräfte eines Massenelements.

§ 36. Aus dem letzten Satz (No. 3) des vorigen Paragraphen folgt, dafs wenn mehre Kräfte auf ein Massenelement einwirken, man sich die Sache so vorstellen könne, als ob jede einzelne Kraft nach ihrer Richtung auf das Massenelement einen Druck ausübe, welcher durch einen gleichen, aber entgegengesetzten Gegendruck aufgehoben wird; gleichviel ob das ganze System im Gleichgewicht oder in Bewegung ist. Diese Gegendrucke sind wir genöthigt wiederum der Wirkung von Kräften zuzuschreiben. Dergleichen Kräfte nennen wir Reaktionskräfte, auch wohl innere Kräfte des Massenelementes zum Unterschiede von den zuerst betrachteten Kräften, welche wir äufsere Kräfte, oder bewegende Kräfte nennen. Jenen Gegendruck, welchen eine äufsere Kraft hervorruft, nennen wir die Reaktion auch wohl den Widerstand des Massenelements. Die innern Kräfte eines Massenelements erscheinen uns stets nur im Zustande des Gleichgewichts; niemals sind sie fähig Bewegung hervorzurufen. Wir können ihr Vorhandensein nur als Hypothese hinstellen, als Folgerung aus den Ansichten, welche wir über die Wirkung der Kräfte aufgestellt haben; unserer direkten Wahrnehmung entziehen sie sich vollständig.

Aus den eben entwickelten Begriffen folgt:

wenn eine oder mehre Kräfte auf ein Massenelement einwirken, so entspricht stets jedem wirkenden Drucke eine gleich grofse, aber nach entgegengesetzter Richtung wirkende Reaktion.

Gleichung für die Bahn eines Massenelements.

§ 37. Die sämmtlichen auf ein Massenelement wirkenden Kräfte können wir in jedem Zeitelement auf drei Kräftesummen zurückführen, deren Richtungslinien stets parallel mit drei angenommenen, zu einander normalen und in verschiedenen Ebenen liegenden Axen bleiben (§ 32), indem wir dazu die Gleichungen 61) S. 35 benutzen.

Sind $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$ die Koordinaten eines Massenelements in Bezug auf dasselbe Axensystem, auf welches wir die ursprünglichen Kräfte zurückgeführt haben, und sind für die drei zu einander normalen Kräftesummen $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$ die Geschwindigkeiten für irgend ein Zeitelement, so sind die Wege des Massenelements in der Richtung der Axen:

$$ds' = c_{,}dt, \quad ds'' = c_{,,}dt, \quad ds''' = c_{,,,}dt.$$

Diese Wege bilden das Wachsthum der Koordinaten, und bezeichnen wir die letzten mit x, y, z, so ist:

$$dx = ds' = c_{,}dt, \quad dy = ds'' = c_{,,}dt, \quad dz = ds''' = c_{,,,}dt.$$

Da aber die betrachteten Zeitelemente für sämmtliche Axen dieselben sind, so folgt, wenn wir dt aus diesen Ausdrücken entwikkeln, und die so gefundenen Werthe einander gleich setzen:

$$dt = \frac{dx}{c_{,}} = \frac{dy}{c_{,,}} = \frac{dz}{c_{,,,}},$$

folglich:

$$68) \left\{ \begin{aligned} dy &= dx \cdot \frac{c_{,,}}{c_{,}} \\ dz &= dx \cdot \frac{c_{,,,}}{c_{,}}, \end{aligned} \right.$$

und wenn man integrirt, und die Constante wie oben bezeichnet:

$$69) \left\{ \begin{aligned} y &= \int \frac{c_{,,}}{c_{,}}\, dx + a_{,,}, \\ z &= \int \frac{c_{,,,}}{c_{,}}\, dx + a_{,,,}. \end{aligned} \right.$$

Durch diese Gleichungen ist also der Weg des Massenelements bestimmt.

Geradlinige Bahn eines Massenelements.

§ 38. Die Gleichungen für den Weg des Massenelements zeigen, dafs wenn die Geschwindigkeiten $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$ konstant sind, oder wenn nur ihr Verhältnifs konstant ist, der Weg eine gerade Linie wird. Die Geschwindigkeiten sind aber konstant, wenn sie gleichförmig sind, wenn also die einzelnen Kräftesummen sich im Zustande des Gleichgewichts befinden, und ihr Verhältnifs ist konstant, wenn entweder die einzelnen Kräfte konstant wirkende sind, oder, wenn zwar die einzelnen Kräfte veränderlich wirkende sind, aber doch so, dafs die Aenderungsmaafse ihrer Kräftesummen nach den normalen Axen in jedem Augenblick ein konstantes Verhältnifs haben.

Im ersten Fall hat man $c_{,} = f_{,}t$, $c_{,,} = f_{,,}t$, $c_{,,,} = f_{,,,}t$, und da die Kräfte konstant wirken, so sind die Aenderungsmaafse $f_{,}$, $f_{,,}$, $f_{,,,}$ konstant, folglich die Verhältnisse konstant.

Bezeichnet man diese konstanten Verhältnisse $\frac{f_{,,}}{f_{,}}$ mit q und $\frac{f_{,,,}}{f_{,}}$ mit p, so hat man für die Gleichung des Weges:

$$y = qx + a_{,,}$$
$$z = px + a_{,,,}.$$

Sind dagegen die Kräfte veränderlich wirkend, so hat man nach der Gleichung No. 26 (S. 18):

$$c_{,} = \Sigma f_{,}dt, \quad c_{,,} = \Sigma f_{,,}dt, \quad c_{,,,} = \Sigma f_{,,,}dt,$$

folglich:

$$\frac{c_{,,}}{c_{,}} = \frac{\Sigma f_{,,} \cdot dt}{\Sigma f_{,} \cdot dt} \text{ und } \frac{c_{,,,}}{c_{,}} = \frac{\Sigma f_{,,,} \cdot dt}{\Sigma f_{,} \cdot dt}.$$

Ist nun zwar $f_{,}$, $f_{,,}$, $f_{,,,}$ in jedem Augenblick veränderlich, aber doch so, dafs immer

$$\frac{f''}{f_{,}} = q, \quad \frac{f_{,,,}}{f_{,}} = p$$

ist, so hat man:

$$\frac{c_{,,}}{c_{,}} = \frac{\Sigma q f_{,}dt}{\Sigma f_{,}dt} = q \text{ und } \frac{c_{,,,}}{c_{,}} = \frac{\Sigma p f_{,}dt}{\Sigma f_{,}dt} = p,$$

und daher ebenfalls die Gleichung für die Bahn des Massenelements wie vorhin:

$$y = qx + a_{,,},$$
$$z = px + a_{,,,}.$$

In beiden Fällen ergiebt sich also die Gleichung der geraden Linie.

Hieraus folgt:

Wirken mehre Kräfte auf ein Massenelement ein, so kann es sich nur in drei Fällen in gerader Linie bewegen, nämlich:

a) wenn alle Kräfte konstant wirkende sind;

b) wenn die einzelnen Kräfte zwar veränderlich wirkende sind, aber doch so, dafs die Aenderungsmaafse der Kräftesummen nach drei zu einander normalen Axen sich stets in konstantem Verhältnifs zu einander ändern.

In diesen beiden Fällen erfolgt die resultirende Bewegung mit veränderter Geschwindigkeit.

c) wenn alle Kräfte im Gleichgewicht sind, und dann ist die Bewegung eine gleichförmige.

In allen andern Fällen bewegt sich das Massenelement in einer Kurve, und umgekehrt: Bewegt sich das Massenelement in einer Kurve, so findet keiner dieser drei Fälle statt.

Krummlinige Bahn eines Massenelements.

§ 39. Sind in den Gleichungen 69):

$$y = \int \frac{c_{\prime\prime}}{c_\prime} dx + a_{\prime\prime},$$

$$z = \int \frac{c_{\prime\prime\prime}}{c_\prime} dx + a_{\prime\prime\prime}$$

die Verhältnisse $\frac{c_{\prime\prime}}{c_\prime}$ und $\frac{c_{\prime\prime\prime}}{c_\prime}$ nicht konstant, so bewegt sich das Massenelement in einer Kurve. Sind die Verhältnisse in jedem Augenblick andere, so kann dies daher rühren, dafs entweder die Geschwindigkeiten $c_\prime$, $c_{\prime\prime}$, $c_{\prime\prime\prime}$ der drei Kräftesummen alle drei sich unabhängig von einander ändern, oder daher, dafs die Geschwindigkeiten sich nach einer oder nach zwei Axen gar nicht ändern, also gleichförmig sind, wohl aber nach der dritten, resp. nach den beiden andern Axen.

Hiernach ist die krummlinige Bewegung als das Resultat anzusehen:

a) entweder von drei Kräftesummen, welche unabhängig veränderlich sind,

b) oder von einer Kräftesumme, die im Gleichgewicht ist, und von zwei Kräftesummen, von welchen jede entweder konstant oder veränderlich wirkend sein kann;

c) oder endlich von zwei Kräftesummen, welche im Gleichgewicht sind, und von einer Kräftesumme, welche entweder konstant oder veränderlich wirkend ist.

Nach den auf S. 17 über die Entstehung der gleichförmigen Geschwindigkeit gemachten Bemerkungen läfst sich in den beiden unter *b* und *c* genannten Fällen die krummlinige Bewegung auch auffassen, als hervorgegangen aus der Wirkung dreier zu einander normalen Kräftesummen, von denen eine oder zwei momentan wirkend, die beiden anderen, resp. die dritte aber kontinuirlich, sei es konstant oder veränderlich wirkend, zu denken sind.

Bewegung in einer ebenen Kurve.

§ 40. Die Kurve, welche den Gleichungen No. 69 entspricht, ist im Allgemeinen eine Kurve von doppelter Krümmung; sie wird eine ebene Kurve, wenn entweder y oder z konstant wird, d. h. wenn die in der Richtung der einen Axe liegende Geschwindigkeit gleich Null ist. Für die Bewegung in einer ebenen Kurve haben wir also die Bedingungsgleichungen:

$$70)\quad \begin{cases} y = \int \frac{c_{\prime\prime}}{c_{\prime}}\, dx + a_{\prime\prime} \\ z = 0 \text{ oder } c_{\prime\prime\prime} = 0. \end{cases}$$

Die Bewegung in einer ebenen Kurve läfst sich also immer als das Resultat zweier Kräftesummen ansehen, deren Richtungen zu einander normal sind, und von welchen entweder die eine im Gleichgewicht, und die andere konstant resp. veränderlich wirkend, oder aber welche beide veränderlich wirkend zu denken sind.

Parabelbahn.

§ 41. Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs zweier Kräftesummen, deren Richtungen normal zu einander sind und von denen eine im Gleichgewicht ist, also eine gleichförmige Geschwindigkeit bedingt, die andere aber konstant wirkend ist, so ist die Bahn eine Parabel; denken wir nämlich, die gleichförmige Geschwindigkeit finde in der Axe der X statt, die ungleichförmige in der Axe der Y, und es sei $f_{\prime\prime}$ das Aenderungsmaafs der konstant wirkenden Kraft. Man hat sodann:

$$c_{\prime\prime} = f_{\prime\prime} t \text{ (No. 35. S. 20)},$$

worin t die Zeit bedeutet, welche seit der Einwirkung der Kraft verflossen ist. Diese Zeit ist aber dieselbe, während welcher in der Axe der X ein bestimmter Weg x mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $c_{,}$ durchlaufen ist, und sie findet sich nach No. 25. S. 17);

$$t = \frac{x}{c_{,}}.$$

Man hat also für die Gleichung der Kurve (No. 69):

$$y = \int \frac{c_{,,}}{c_{,}} dx + a_{,,} = \int \frac{f_{,,}t}{c_{,}} dx + a_{,,}$$

$$71)\quad y = \int \frac{f_{,,}x}{c_{,}^2} dx = \tfrac{1}{2} \frac{f_{,,}}{c_{,}^2} . x^2 + a_{,,},$$

welches die Gleichung der Parabel ist.

Sind die Kräftesummen nicht normal zu einander, schliefsen ihre Richtungen vielmehr den Winkel α ein, so kann man sie immer auf zwei zu einander normale Kräftesummen zurückführen. Nimmt man die Richtung der einen dieser normalen Kräftesummen mit der Richtung der konstant wirkenden Kraft zusammenfallend, so läfst sich die gleichförmige Geschwindigkeit der andern Kräftesumme $c_{,}$ in zwei andre Geschwindigkeiten zerlegen (No. 59. S. 34), deren eine in der Richtung der XAxe liegt, und gleich $c_{,} \sin \alpha$ ist, die andre in der Richtung der YAxe liegt und gleich $c_{,} \cos \alpha$ ist. Man hat sodann die Geschwindigkeitssumme in der YAxe (No. 60. S. 34):

$$c_{,,} = c_{,} \cos \alpha + f_{,,} t,$$

und nach der obigen Darstellung $t = \frac{x}{c_{,} \sin \alpha}$ setzt man nun in der allgemeinen Gleichung für die Kurve:

$$y = \int \frac{c_{,,}}{c_{,}} dx + a_{,,},$$

für $c_{,,}$ den Werth $c_{,} \cos \alpha + f_{,,} t$ und für $c_{,}$ den Werth $c_{,} \sin \alpha$; sodann aber für t den eben berechneten Werth, so ergiebt sich leicht:

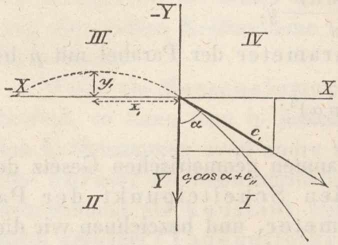
$$72)\quad \begin{cases} y = \int \left(\operatorname{cotg} \alpha + \frac{f_{,,}}{(c_{,} \sin \alpha)^2} . x\right) dx + a_{,,} \\ y = x . \operatorname{cotg} \alpha + x^2 . \frac{f_{,,}}{2(c_{,} \sin \alpha)^2} + a_{,,}. \end{cases}$$

Diese Kurve ist aber ebenfalls eine Parabel. Dies läfst sich auf folgende Weise zeigen. Zunächst finden wir einen Wendepunkt der Kurve, wenn y ein Maximum oder ein Minimum wird, und nach bekannten Regeln haben wir zur Bestimmung dieses Wendepunkts zu setzen:

$$dy = \operatorname{cotg} \alpha + \frac{f_{,,}}{(c' \sin \alpha)^2} x = 0,$$

daraus folgt:

$$73)\quad x_{,} = -\frac{c_{,}^2}{f_{,,}} . \sin \alpha . \cos \alpha . = -\tfrac{1}{2} \frac{c_{,}^2}{f_{,,}} . \sin 2\alpha.$$



Da nun die zweite Ableitung immer positiv ist, so lange $f_{,,}$ als positiv gedacht wird, weil nämlich das Quadrat im Nenner immer positiv sein muſs, so entspricht der eben bestimmte Werth von x einem Minimum, also einem negativen Werth von y; es wird also der Wendepunkt im III. oder IV. Quadranten liegen. Er liegt im III. Quadranten, wenn das zugehörige x negativ ist, und dies tritt ein, nach 73), wenn α ein spitzer Winkel ist. Dagegen wird x positiv, wenn α ein stumpfer Wtnkel, also $\cos\alpha$ negativ ist, und dann liegt der Wendepunkt im IV. Quadranten.

Setzen wir den Werth von x aus 73 in 72, so erhalten wir für den Wendepunkt:

$$74)\quad y_{,} = -\tfrac{1}{2}\frac{c_{,}^{2}}{f_{,,}}\cos.\alpha^2 + a_{,,}.$$

Verlegen wir nun den Anfangspunkt der Koordinaten in den Wendepunkt der Kurve, so ist zunächst $a_{,,}. = 0$ und nennen wir die neuen Koordinaten y' und x', so ist offenbar $x = x' - \frac{c_{,}^{2}}{f_{,,}}\sin\alpha\,.\cos\alpha$ (nach No. 73) und wenn wir diesen Werth in die Gleichung 72) einsetzen, so geht dieselbe nach einer leichten Rechnung über in:

$$75)\quad y' = \tfrac{1}{2}\frac{f_{,,}}{(c_{,}\sin\alpha)^2}\,.\,x'^2,$$

welches wieder die Gleichung der Parabel ist; dieselbe geht in die Gleichung No. 71 über, wenn α gleich einem Rechten ist.

Zu bemerken ist hier noch, daſs die konkave Seite der Parabel immer der Axe der Y, oder derjenigen Axe zugekehrt ist, welche der Richtung der konstant wirkenden Kräftesumme entspricht.

Da endlich die gleichförmige Geschwindigkeit nach S. 17 als das Resultat einer momentan wirkenden Kraft aufgefaſst werden kann, so läſst sich die Parabelbewegung immer betrachten als das Resultat einer momentan wirkenden Kräftesumme und einer konstant wirkenden Kräftesumme, deren Richtungen einen Winkel mit einander bilden.

Krümmungskreis der Bahn, — Normalkraft, Tangentialkraft.

§ 42. Die Gleichung 75) läſst sich auch folgendermaaſsen schreiben:

$$x^2 = \frac{2(c_{,} \sin \alpha)^2}{f_{,,}} y,$$

und folglich ist, wenn wir den Parameter der Parabel mit p bezeichnen:

$$p = \frac{2(c_{,} \sin \alpha)^2}{f_{,,}}.$$

Nun ist aber nach einem bekannten geometrischen Gesetz der Krümmungshalbmesser für den Scheitelpunkt der Parabel gleich dem halben Parameter, und bezeichnen wir diesen Krümmungshalbmesser mit r, so folgt:

$$76)\quad r = \tfrac{1}{2}p = \frac{(c_{,} \sin \alpha)^2}{f_{,,}}.$$

Dieser Krümmungshalbmesser liegt aber in der Axe der Y, d. h. in der Richtung der konstant wirkenden Kräftesumme.

Nun ist klar, dafs wir jeden beliebigen Kreis als Krümmungskreis des Scheitels einer Parabel ansehen können, und dafs für jedes Bogenelement eines Kreises, welches von einem Massenelement durchlaufen wird, immer die obige Gleichung gelten mufs, sobald wir unter $f_{,,}$ das Aenderungsmaafs einer in der Richtung des Radius wirkenden konstanten Kraft, unter $c_{,}$ eine gleichförmige Geschwindigkeit, welche mit der Richtung der konstanten Kraft, oder mit der Richtung des Radius den Winkel α bildet, verstehen.

Ebenso leicht ist es einzusehen, dafs wenn ein Massenelement sich in einer beliebigen Kurve bewegt, und wir denken für irgend ein Element der Kurve den Krümmungskreis: die obige Gleichung auch für dieses Kurvenelement gelten mufs. Hieraus folgt aber folgendes wichtige Gesetz:

> Bewegt sich ein Massenelement in einer beliebigen Kurve, so läfst sich für jedes Element der Bahn die Bewegung als das Resultat zweier Kräftesummen ansehen, von denen die eine nach der Richtung des Krümmungshalbmessers für dieses Bahnelement als konstant wirkend, die andre aber als im Gleichgewicht, folglich eine gleichförmige Geschwindigkeit bedingend, und mit der ersten einen beliebigen Winkel bildend, gedacht werden mufs.

Nimmt man den Winkel, welchen die beiden Kräftesummen mit einander bilden, gleich einem Rechten, und beachtet man, dafs die Richtung des Krümmungsradius eines Bahnelementes immer mit der Normalen für dieses Element zusammenfällt, so ist die Richtung der andern Kräftesumme tangential, und es folgt aus dieser Betrachtung:

Wenn ein Massenelement sich in einer beliebigen Kurve bewegt, so kann man in jedem Element der Bahn für die wirkenden Kräftesummen zwei andre substituiren (§38), von denen die eine normal zur Bahn gerichtet (Normalkraft) immer für dieses Bahnelement als konstant wirkend, die andre tangential zur Bahn gerichtet (Tangentialkraft) als im Gleichgewicht befindlich betrachtet werden mufs.

Die Gleichung 76):

$$r = \frac{(c_{,} \sin \alpha)^2}{f_{,,}}$$

gilt hiernach ganz allgemein, sobald man unter r den Krümmungshalbmesser in irgend einem Element der Kurve, unter $f_{,,}$ das Aenderungsmaafs der Normalkraft, unter $c_{,}$ die gleichförmige Seitengeschwindigkeit und unter α den Winkel versteht, welchen diese gleichförmige Seitengeschwindigkeit mit der Normale der Kurve bildet. Wird die gleichförmige Seitengeschwindigkeit tangential genommen, so ist $\alpha = 90$ Grad $\sin \alpha = 1$, und man hat:

$$77) \begin{cases} r = \dfrac{c_{,}^2}{f''} \\ f_{,,} = \dfrac{c_{,}^2}{r}. \end{cases}$$

Da aber die Tangente für ein Kurvenelement mit diesem zusammenfällt, so kann man unter $c_{,}$ auch die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn, oder die Geschwindigkeit, mit welcher das Massenelement in dem betrachteten Augenblick sich eben bewegt verstehen.

Centripetalkraft und Centrifugalkraft.

§ 43. Aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen folgt, dafs wenn ein Massenelement sich in einer beliebigen Kurve bewegt, man immer das Aenderungsmaafs $f_{,,}$ der Normalkraft nach der Gleichung 77) bestimmen kann, sobald man die Geschwindigkeit des Massenelements und den Krümmungshalbmesser der Bahn kennt. Diese Normalkraft äufsert auf das Massenelement einen Druck in der Richtung nach dem Mittelpunkt des Krümmungskreises, und diesem Druck mufs eine gleich grofse, aber entgegengesetzt wirkende Reaktion (§ 36) entsprechen. Man nennt daher auch wohl die Normalkraft, welche das Bestreben darstellt, das Massenelement dem Mittelpunkt des Krümmungskreises zu nähern, die Centripetalkraft, die gleich grofse, aber entgegengesetzte Reaktion dagegen, welche das Bestreben ausdrückt, das Massenelement von dem Mittelpunkt des Krümmungskreises zu entfernen, die Centrifugalkraft (Fliehkraft, Schwungkraft). Nennt man dF das Werthelement einer von beiden, so drücken sich offenbar beide aus (nach Gleichung 76 und 4) durch:

$$78)\ dF = dm \, . \, f_{\prime\prime} = dm \, . \, \frac{c_{\prime}^{2}}{r} = \frac{dG}{g} \, . \, \frac{c_{\prime}^{2}}{r} .$$

Bezeichnet man eine von beiden als positiv, so ist die andere negativ zu bezeichnen. Auch ist es klar, dafs es gleichgiltig bleibt, welchen von beiden Drucken man als den wirkenden, und welchen man als die Reaktion ansehen will; in manchen Fällen erleichtert es die Anschauung, wenn man die Centripetalkraft als Reaktion der Centrifugalkraft betrachtet.

Kreisbewegung.

§ 44. Die Gleichung 77):

$$f_{\prime\prime} = \frac{c_{\prime}^{2}}{r}$$

zeigt, dafs das Aenderungsmaafs der Centrifugalkraft in jedem Augenblick konstant ist, wenn $\frac{c_{\prime}^{2}}{r}$ konstant ist, also unter andern, wenn $c_{\prime}$ konstant und r konstant ist. Der Krümmungshalbmesser r ist nur konstant, wenn die Kurve, in welcher das Massenelement sich bewegt, ein Kreis ist. Bewegt sich also ein Massenelement in einem Kreise, und zwar so, dafs die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn in jedem Augenblick konstant ist, so ist auch das Aenderungsmaafs der Normalkraft, und diese selbst konstant, und umgekehrt:

Ist das Aenderungsmaafs der Normalkraft konstant, und bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so ist die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn in jedem Augenblick konstant.

Aus diesen Gesetzen lassen sich noch mancherlei Folgerungen leicht herleiten.

Die Bewegung im Kreise kommt bei Maschinen sehr häufig vor. Man bezeichnet sie gewöhnlich als Rotationsbewegung, oder als rotirende Bewegung, pflegt aber diese Benennungen allgemeiner auch wohl auf die Bewegungen in einer geschlossenen Kurve überhaupt auszudehnen.

Bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so dafs die Tangential-Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn dieselbe ist, so nennt man die Bewegung eine gleichförmig rotirende, im entgegengesetzten Falle eine ungleichförmig rotirende.

Die gleichförmig rotirende Bewegung ist also als das Resultat einer konstant wirkenden Normalkraft, und einer im Gleichgewicht befindlichen Tangentialkraft anzusehen.

Ist dagegen bei der Bewegung eines Massenelements in einem Kreise die Normalkraft veränderlich wirkend, d. h. ist das Aenderungsmaafs $f_{\prime\prime}$ derselben für verschiedene Bahnelemente verschieden grofs (was jedoch nicht ausschliefst, dafs es, wie oben nachgewiesen worden, während der Zeitdauer, welche das Durchlaufen jedes einzelnen Bahnelementes erfordert, als konstant betrachtet werden könne), so ist auch die Geschwindigkeit in der Richtung der Bahn veränderlich.

Winkelgeschwindigkeit, Peripherie-Geschwindigkeit.

§ 45. Bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so können wir uns den Radius dieses Kreises als mathematische Linie ohne Masse, und mit dem Massenelement gemeinschaftlich rotirend denken, ohne dafs dadurch in den Bewegungsverhältnissen des Massenelements irgend etwas geändert wird.

Ist in irgend einem Punkte der Bahn $c_{\prime} = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Massenelements, und $v = \frac{ds'}{dt}$ die Geschwindigkeit irgend eines andern Punktes dieses Radius, welcher den Abstand ϱ vom Mittelpunkt hat, so sind offenbar die in gleichen Zeitelementen von dem Massenelement und von jenem Punkt zurückgelegte Wege gleich den Längen der gleichzeitig durchlaufenen Bogenelemente, und da diese, wie leicht ersichtlich, sich wie die Radien verhalten, so hat man:

$$ds : ds' = r : \varrho$$

und folglich auch $c_{\prime} : v = r : \varrho$,

oder:

$$c_{\prime} = v \frac{r}{\varrho}.$$

Man kann also die Geschwindigkeit des Massenelements finden, wenn man den Radius r desselben und aufserdem die Geschwindigkeit v irgend eines Punktes in diesem Radius und den Abstand ϱ dieses Punkts vom Mittelpunkt des Kreises kennt. Nimmt man diesen Punkt so an, dafs sein Abstand ϱ gleich der Längeneinheit ist, so nennt man die Geschwindigkeit desselben in Bezug auf das Massenelement die Winkel-Geschwindigkeit, und bezeichnet man dieselbe mit w, so hat man:

$$c_{\prime} = w\,r\,; \quad w = \frac{c_{\prime}}{r}\,.$$

Es ist also unter der Winkel-Geschwindigkeit eines rotirenden Massenelements diejenige Geschwindigkeit zu verstehen, welche ein Punkt, der in dem Abstand 1 von dem Mittelpunkt des Kreises mit dem Massenelement gemeinschaftlich rotirt, besitzt. Im Gegensatz hierzu pflegt man die Geschwindigkeit $c_{\prime}$, welche das Massenelement in der Richtung seiner Bahn hat, die Peripherie-Geschwindigkeit des Massenelements zu nennen.

Führen wir in die Gleichung 78) die Winkel-Geschwindigkeit w ein, so ergiebt sich für die Centrifugalkraft:

$$79) \left\{ \begin{aligned} dF &= dm\,.\,f_{\prime\prime} = dm\,\frac{c_{\prime}^{2}}{r} = dm\,.\,w^{2}\,.\,r \\ &= \frac{dG}{g}\,.\,\frac{c_{\prime}^{2}}{r} = \frac{dG}{g}\,w^{2}\,.\,r \\ r &= \frac{dm}{dF}\,.\,c_{\prime}^{2} = \frac{dF}{dm}\,.\,\frac{1}{w^{2}} = \frac{f_{\prime\prime}}{w^{2}} \\ f_{\prime\prime} &= \frac{dF}{dm} = w\,.\,c_{\prime} \end{aligned} \right.$$

Bewegt sich ein Massenelement in einem Kreise, so nennt man den Weg, welchen dasselbe zurücklegt, in dem es einmal die Peripherie des Kreises durchläuft, eine Umdrehung. Ist die Bewegung eine gleichförmig rotirende, so ist offenbar die Zeitdauer einer Umdrehung nach No. 25. S. 17:

$$t = \frac{s}{c} = \frac{2\pi r}{c_{\prime}} = \frac{2\pi}{w}\,.$$

Macht das Massenelement in einer Minute n Umdrehungen, so ist andrerseits auch:

$$t = \frac{60}{n}\,,$$

aus diesen beiden Ausdrücken ergeben sich folgende Formeln:

$$
80) \left\{
\begin{aligned}
t &= \frac{60}{n} = \frac{2\pi r}{c_{\prime}} = \frac{2\pi}{w} \\
n &= \frac{60}{t} = \frac{60 c_{\prime}}{2\pi r} = \frac{60 w}{2\pi} = 9{,}5493 \frac{c_{\prime}}{r} = 9{,}5493\, w \\
c_{\prime} &= \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi r \,.\, n}{60} = wr = 0{,}1047\, rn \\
r &= \frac{c_{\prime} t}{2\pi} = \frac{60}{2\pi} \,.\, \frac{c_{\prime}}{n} = \frac{c_{\prime}}{w} = 9{,}5493 \frac{c_{\prime}}{n} \\
w &= \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{60} \,.\, n = \frac{c_{\prime}}{r} = 0{,}1047\, n.
\end{aligned}
\right.
$$

In diesen Formeln bedeutet:

t die Zeitdauer einer Umdrehung in Sekunden,
n die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute,
$c_{\prime}$ die Peripherie-Geschwindigkeit,
r den Halbmesser des Kreises, in welchen sich das Massenelement bewegt,
w die Winkel-Geschwindigkeit,
$c_{\prime}$, r, w sind in einerlei Maafseinheit zu nehmen; die Zeiteinheit ist die Sekunde.

Ist die Bewegung nicht gleichförmig rotirend, so gelten obige Formeln noch für die mittlen Werthe.

Aus den Formeln 80 lassen sich, indem man die Werthe für die Geschwindigkeit $c_{\prime}$ in die Formeln 53. Seite 28 einführt, folgende für den praktischen Gebrauch bequeme Formeln herleiten (die Zahlenwerthe sind abgerundet):

$$
81) \left\{
\begin{aligned}
\mathbf{Kr} &= \mathbf{4868} \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{n}} \\
\sqrt{\mathbf{Kr}} &= \mathbf{70} \sqrt{\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{n}}} \\
\sqrt[3]{\mathbf{Kr}} &= \mathbf{17} \sqrt[3]{\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{n}}},
\end{aligned}
\right.
$$

in welchen Formeln bezeichnet:

K den Druck in der Richtung der Peripherie in Pfunden,
r den Abstand dieses Druckes von der Drehaxe in Fufsen,
N die Anzahl der wirksamen Pferdekräfte,
n die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute.

Nimmt man K in Kilogrammes, r in Mètres, so hat man:

$$81\,a)\begin{cases} Kr = 718\,\dfrac{N}{n} \\ \sqrt{Kr} = 27\sqrt{\dfrac{N}{n}} \\ \sqrt[3]{Kr} = \ \,9\sqrt[3]{\dfrac{N}{n}}. \end{cases}$$

Prinzip der virtuellen und reellen Wege.

§ 46. Denken wir uns ein Massenelement, auf welches eine beliebige Anzahl von Kräften einwirkt, deren Drucke in irgend einem Augenblick die Werthe dK', dK''.... haben. Denken wir ferner ein ganz beliebiges Axensystem so, daſs der Durchschnittspunkt der Axen in das Massenelement fällt, und lassen die früher eingeführten Bezeichnungen gelten, so ist nach Gleichung 65. S. 37 der resultirende Druck in der Richtung der ersten Axe:

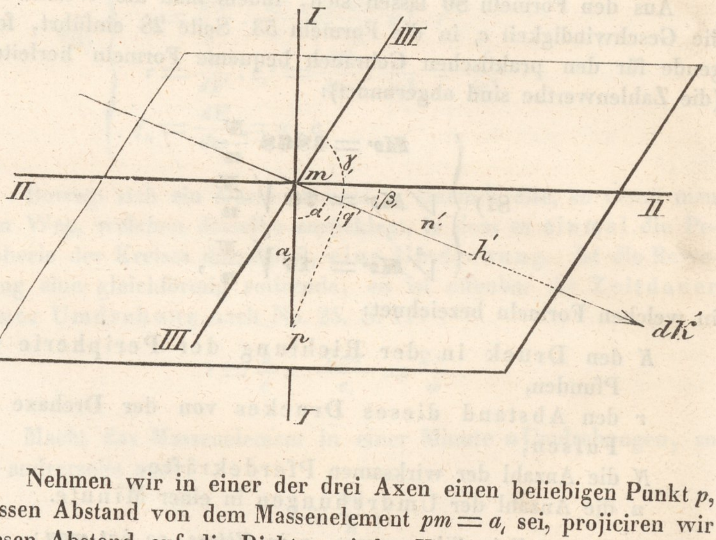
$$dK_{\prime} = \Sigma(dK' \,.\, \cos\alpha_{\prime}),$$

in der Richtung der zweiten Axe:

$$dK_{\prime\prime} = \Sigma(dK' \cos\beta_{\prime}),$$

in der Richtung der dritten Axe:

$$dK_{\prime\prime\prime} = \Sigma(dK' \,.\, \cos\gamma_{\prime}).$$



Nehmen wir in einer der drei Axen einen beliebigen Punkt p, dessen Abstand von dem Massenelement $pm = a_{\prime}$ sei, projiciren wir diesen Abstand auf die Richtung jeder Kraft, indem wir die Normalen pq', pq''*).... ziehen, und nehmen wir die Projektionen von $a_{,}$ auf die Richtung der einzelnen Kräfte a', a'', a''' etc., so ist offenbar:

$$\cos\alpha_{,} = \frac{mq'}{mp} = \frac{a'}{a_{,}},$$

und man hat daher:

$$dK_{,} = \Sigma\left(dK' . \frac{a'}{a_{,}}\right),$$

folglich, da der Nenner $a_{,}$ allen Summanden rechts gemeinschaftlich ist:

$$82)\quad dK_{,} . a_{,} = \Sigma(dK' . a').$$

In Bezug auf die beiden andern Axen würde sich für einen beliebigen Punkt derselben, dessen Abstand vom Massenelement $b_{,}$ beziehlich $e_{,}$ sei, nachweisen lassen:

$$82\text{a})\quad \begin{cases} dK_{,,} . b_{,} = \Sigma(dK'b') \\ dK_{,,,} . e_{,} = \Sigma(dK'e'). \end{cases}$$

Denken wir eine Ebene durch den Punkt p normal zur Axe mp, und daher parallel mit der Ebene, in welcher die beiden andern Axen liegen; es mögen die Richtungen der verschiedenen Kräfte diese Ebene in den Punkten h', h'' ... etc. schneiden, und es sei $mh' = n'$, $mh'' = n''$ etc., so ist:

$$\cos\alpha_{,} = \frac{mp}{mh'} = \frac{a_{,}}{n'},$$

folglich:

$$dK_{,} = \Sigma(dK' . \cos\alpha_{,}) = \Sigma\left(\frac{dK}{n'} . a_{,}\right),$$

und da wieder $a_{,}$ allen Summanden gemeinschaftlich ist, so folgt:

$$83)\quad \left\{ \frac{dK_{,}}{a_{,}} = \Sigma\left(\frac{dK'}{n'}\right). \right.$$

Ein ähnliches Gesetz läfst sich für die beiden andern Axen nachweisen, und wenn p', p'' .... und q', q'' .... die Entfernungen von dem Massenelement bezeichnen, in welchen die Richtungen der Drucke dK', dK''.... zwei andere Ebenen schneiden, von denen je eine normal ist auf je einer der beiden andern Axen, so hat man auch:

$$83\text{a})\quad \begin{cases} \dfrac{dK_{,,}}{b_{,}} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{p'}\right) \\ \dfrac{dK_{,,,}}{e_{,}} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{q'}\right). \end{cases}$$

Nun ist p (in der Figur) ein beliebiger Punkt einer der drei

---

*) In der Figur ist nur eine Kraft dK' ihrer Richtung nach gezeichnet, um nicht durch viele Linien das Bild undeutlich zu machen; es gelten natürlich für alle andern Kraftrichtungen dieselben Beziehungen, welche für diese eine gelten.

Axen; es ist aber auch das angenommene Axensystem ein beliebiges, und folglich, da man durch jeden Punkt im Raume und durch das Massenelement immer eine gerade Linie legen, diese aber als Axe eines Axensystems ansehen kann, so gilt die oben bewiesene Gleichung 82) für jeden beliebigen Punkt, der aufserhalb des Massenelements liegt, und da ferner jede Ebene normal sein kann, zu einer entsprechenden, durch das Massenelement gedachten Axe, so gilt die Gleichung 83) für jede beliebige Ebene.

Die Entfernung des Massenelementes von dem Durchschnittspunkte einer Kraftrichtung mit einer angenommenen Ebene wollen wir den **reellen Weg** der Kraft für diese Ebene nennen.

Denken wir uns einen Punkt in einem beliebigen Abstande von dem Massenelement, und projiciren wir diesen Abstand auf die Richtung einer auf das Massenelement wirkenden Kraft, so nennen wir die Projektion den **virtuellen** Weg der Kraft in Bezug auf den Punkt (analog der Bezeichnung in § 27, doch nicht damit zu verwechseln).

Zerlegen wir sämmtliche Drucke nach drei auf einander normale Axen, deren Durchschnittspunkt im Massenelement liegt, und von denen eine durch einen angenommenen Punkt geht, so nennen wir die Summe der Drucke für diese letztgenannte Axe (S. 37) auch wohl den resultirenden Druck für den gedachten Punkt. Legen wir durch den angenommenen Punkt eine Ebene, welche normal ist zum Abstande des Punkts von dem Massenelement, so wollen wir den resultirenden Druck für den gedachten Punkt auch als „Normaldruck für diese Ebene“ bezeichnen.

Nach diesen Erklärungen können wir die Gesetze, welche die Gleichungen 82 und 83 enthalten, folgendermaafsen ausdrücken:

> Wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, so ist für jeden beliebigen Punkt aufserhalb des Massenelements in irgend einem Augenblick das Produkt aus dem resultirenden Druck für diesen Punkt in den Abstand des Punkts von dem Massenelement gleich der Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man den Druck jeder einzelnen Kraft mit ihrem virtuellen Wege in Bezug auf den angenommenen Punkt multiplizirt, und es ist ferner für jede beliebige Ebene der Quotient aus dem Normaldruck für

diese Ebene durch den normalen Abstand derselben von dem Massenelement gleich der Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck durch seinen reellen Weg in Bezug auf die Ebene dividirt.

Dieses Gesetz wollen wir das Prinzip der virtuellen und reellen Wege nennen. Wir haben dasselbe hier für den allgemeinsten Fall entwickelt, und es bleibt nur übrig, daraus Folgerungen für spezielle Anwendungen zu ziehen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen und reellen Wege auf die resultirende Kraft, und auf die Normalkraft bei der Bewegung in einer beliebigen Kurve.

§ 47. Nach § 35. No. 3 (S. 39) kann man für die Wirkung der einzelnen Kräfte diejenige ihrer Resultirenden substituiren. Für den im vorigen Paragraphen betrachteten Fall würde man offenbar haben, wenn man den virtuellen Weg der Resultirenden in Bezug auf den gewählten Punkt mit a, den reellen Weg mit n bezeichnet:

$$84)\quad \begin{cases} dK_{\prime}\, a_{\prime} = dK \, . \, a = \Sigma(dK'\, a') \\ \dfrac{dK_{\prime}}{a_{\prime}} = \dfrac{dK}{n} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{n'}\right). \end{cases}$$

Die Gesetze dieser beiden Gleichungen lassen sich ähnlich wie die der Gleichungen 82) und 83) in Worten ausdrücken, nämlich so:

Wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, und man denkt irgend einen Punkt aufserhalb des Massenelements, projicirt den Abstand dieses Punkts auf die Richtung jeder einzelnen Kraft und auch auf die Richtung der Resultirenden sämmtlicher Kräfte, so ist das Produkt aus dem resultirenden Druck in die Projektion jenes Abstands auf die Richtung der Resultirenden gleich der Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck mit der Projektion jenes Abstandes auf seine Richtung multiplizirt. Aufserdem ist der Quotient aus dem resultirenden Druck durch seinen reellen Weg in Bezug auf eine beliebige Ebene gleich der Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck durch seinen reellen Weg in Bezug auf dieselbe Ebene dividirt.

Liegt der gewählte Punkt in der Richtung der **Resultirenden**, so ist der resultirende Druck für diesen Punkt offenbar der Mitteldruck sämmtlicher Kräfte, folglich $dK_{\prime} = dK$; die Drucke nach den beiden andern Axen, welche normal zu der gewählten Richtung zu denken sind, würden dann zufolge der Gleichung 67) gleich Null sein, insofern die Winkel β und γ gleich 90 Grad sind, und man hat also für diesen Fall die Bedingungsgleichungen:

$$85)\quad \begin{cases} dK \,.\, a_{\prime} = \Sigma(dK_{\prime}\, a') \\ \Sigma(dK'\, b') = 0 \\ \Sigma(dK'\, e') = 0, \end{cases}$$

oder:

$$86)\quad \begin{cases} \dfrac{dK}{a_{\prime}} = \Sigma\left(\dfrac{dK'}{n'}\right) \\ \Sigma\,\dfrac{dK'}{p'} = 0 \\ \Sigma\,\dfrac{dK'}{q'} = 0, \end{cases}$$

wenn p' und q' die reellen Wege in Bezug auf zwei Ebenen bezeichnen, welche zu je einer der beiden andern Axen normal, oder, was dasselbe heifst, welche mit der Richtung der Resultirenden parallel und unter sich normal sind.

Bewegt sich ein Massenelement in einer beliebigen **Kurve**, so ist in Folge des Gesetzes in § 42. S. 46 in jedem Augenblicke der Druck in der Richtung der Normalen als konstant wirkend, derjenige in der Richtung der Tangente als im Gleichgewicht befindlich, anzusehen. Zerlegt man in irgend einem Augenblick die sämmtlichen auf das Massenelement wirkenden Drucke nach drei Axen, von denen die eine (die erste) mit der Richtung des Krümmungshalbmessers zusammenfällt, so müssen die beiden andern in einer Ebene liegen, welche zu dem Krümmungshalbmesser normal ist, folglich die Kurve berührt; die Resultirende aus den beiden Kräftesummen, welche in dieser Ebene liegen, giebt die Leistung in der Richtung der Tangente, und da diese gleich Null sein soll, so mufs auch nach § 34 (S. 38) der Druck in der Richtung jeder dieser beiden Axen gleich Null sein. Man hat daher auch für diesen Fall die Gleichungen 85 und 86 in Geltung, wenn

dK den Druck der Normalkraft,

$a_{\prime}$ den Abstand eines beliebigen Punktes auf der Normalen zur Kurve von dem Massenelement,

$a', a'' \ldots$ die Projektion dieses Abstandes auf die Richtung der verschiedenen Kräfte,

$b' \, b'' \ldots$ und $e' \, e''$ die Projektionen der Abstände zweier Punkte, die in der Berührungsebene der Kurve in je einer von zwei sich im Berührungspunkt rechtwinklig schneidenden Axen liegen, auf die Richtung der verschiedenen Kräfte,

$n' \, n'' \ldots$ die reellen Wege der verschiedenen Kräfte in Bezug auf eine Ebene, die im Abstande $a_{,}$ zur Richtung des Krümmungshalbmessers normal, also mit der Berührungsebene parallel ist,

$p' \, p'' \ldots$ und $q' \, q'' \ldots$ die reellen Wege der verschiedenen Kräfte in Bezug auf je zwei zu einander normale und mit dem Krümmungshalbmesser parallele Ebenen

bezeichnen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen und reellen Wege auf den Zustand des Gleichgewichts.

§ 48. Sind beliebig viele Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht, und wir denken ein beliebiges Axensystem, dessen Durchschnittspunkt mit dem Massenelement zusammenfällt, so sind die resultirenden Drucke für jede der drei Axen einzeln gleich Null (§ 34. S. 38), es ist also:

$$dK_{,} = 0; \quad dK_{,,} = 0; \quad dK_{,,,} = 0;$$

und es folgt daher für den Zustand des Gleichgewichts nach Gleichung 82 und 83):

$$87) \left\{ \begin{aligned} &\Sigma(dK' a') = 0 \\ &\Sigma(dK' b') = 0 \\ &\Sigma(dK' e') = 0. \end{aligned} \right.$$

$$88) \left\{ \begin{aligned} &\Sigma\left(\frac{dK'}{n'}\right) = 0 \\ &\Sigma\left(\frac{dK'}{p'}\right) = 0 \\ &\Sigma\left(\frac{dK'}{q'}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Hierin liegen folgende Sätze:

1) Sind beliebig viele Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht, und man nimmt einen beliebigen Punkt im Raume an, projicirt den Abstand desselben von dem Massenelement auf die Richtung jeder einzelnen Kraft, so ist die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man den Druck

jeder Kraft mit der Projektion jenes Abstandes auf ihre Richtung multiplizirt, gleich Null.

2) Sind beliebig viele Kräfte, welche auf ein Massenelement wirken, im Gleichgewicht, und man denkt eine beliebige Ebene im Raum, so ist die Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man den Druck jeder Kraft durch ihren reellen Weg in Bezug auf diese Ebene dividirt, gleich Null.

Diese Sätze gelten auch umgekehrt.

Wenn nämlich mehre Kräfte auf ein Massenelement wirken und es ist:

> entweder für jeden beliebigen Punkt im Raume die Summe der Produkte aus dem Druck jeder Kraft in die Projektion des Abstandes jenes Punktes von dem Massenelement auf die Richtung der Kraft gleich Null, oder:
>
> für jede beliebige Ebene die Summe der Quotienten, welche gebildet werden, indem man den Druck jeder Kraft durch ihren reellen Weg in Bezug auf jene Ebene dividirt, gleich Null,

so sind die Kräfte im Gleichgewicht.

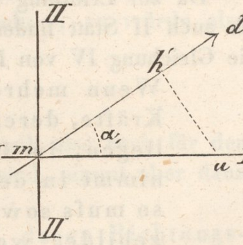
Um nun nachzuweisen, dafs jene Bedingungen für **jeden beliebigen Punkt**, oder **für jede beliebige Ebene** statt finden, braucht man nur zu zeigen, dafs sie für drei Punkte erfüllt werden, deren jeder in einer andern von drei durch das Massenelement gehenden zu einander rechtwinkligen Axen liegt, oder dafs sie für drei Ebenen gelten, die auf solchen Axen folglich nach unter einander normal sind. Dies läfst sich sehr leicht geometrisch beweisen, indem man das Axensystem um seinen Durchschnittspunkt dreht, und nun zeigt, dafs wenn diese obigen Bedingungen für das Axensystem in der ursprünglichen Lage gelten, dieselben auch für jede andere Lage gelten müssen, in welche man dasselbe durch Drehung bringen kann. Endlich läfst sich eben so leicht nachweisen, dafs der Durchschnittspunkt des anzunehmenden Axensystems auch aufserhalb des Massenelements liegen könne. Man hat also die obigen Bedingungs-Gleichungen überhaupt nur für drei Punkte, deren Ebene nicht durch das Massenelement geht, beziehlich für drei sich rechtwinklich schneidende Ebenen, nachzuweisen.

Bemerkung über die Vorzeichen bei Anwendung des Prinzips der virtuellen und reellen Wege.

§ 49. Bei der Anwendung dieser Gesetze (§ 46 bis § 48) ist es von der gröfsten Wichtigkeit, die **Vorzeichen** richtig anzuwenden, welche den Cosinus und den Linien, welche entweder die Projektionen des Abstandes der gewählten Punkte auf die Richtungen der Kräfte, oder die reellen Wege der Kräfte in Bezug auf die gewählten Ebenen bedeuten, angehören. In dieser Beziehung ist zu bemerken, dafs man die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit den angenommenen Axen bilden, von jeder Axe anfangend stets in ein und demselben Sinne messen mufs, und dafs wenn man die Richtungen, nach welchen die Kräfte das Massenelement einzeln zu bewegen streben, als positiv ansieht, die Verlängerungen dieser Richtungen rückwärts über das Massenelement hinaus als negativ betrachtet werden müssen, und umgekehrt. Es erleichtert dabei die Betrachtung, wenn man entweder sämmtliche Kräfte als ziehend, oder sämmtliche Kräfte als schiebend sich vorstellt.

Prinzip der statischen Momente für den Zustand des Gleichgewichts.

§ 50. Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, im Gleichgewicht, und zerlegt man den Druck jeder Kraft nach zwei Axen, die zu einander normal sind, und in derselben Ebene liegen, so folgt leicht (§ 34. S. 38), wenn $dK', dK'' \ldots$ die Drucke und $\alpha_{,}\ \alpha_{,,} \ldots$ die Winkel, welche die Richtung derselben mit der einen Axe bilden, folglich $(90^\circ - \alpha_{,})$, $(90^\circ - \alpha_{,,}) \ldots$ die Winkel mit der andern Axe sind:



$$\text{I.} \quad \Sigma(dK' \cdot \cos \alpha_{,}) = 0$$

$$\text{II.} \quad \Sigma(dK' \cdot \sin \alpha_{,}) = 0.$$

Nach dem Frühern folgt aus der Gleichung I. auch (S. 57):

$$\text{III.} \quad \Sigma(dK'\, mh') = 0.$$

Nun ist aber $\sin \alpha_{,} = \frac{uh'}{mu}$, folglich hat man auch nach II.

$\Sigma\left(dK' \cdot \frac{uh'}{mu}\right) = 0$, und da mu bei sämmtlichen Drucken dasselbe ist, so folgt:

$$\text{IV.} \quad \Sigma(dK' \cdot uh') = 0.$$

Die Linie uh' oder die Normale von irgend einem Punkt auf die Richtungslinie einer Kraft nennt man den Hebelsarm dieser Kraft in Bezug auf den Punkt, das Produkt von der Form $dK'.uh'$ oder das Produkt aus dem Druck einer Kraft in ihren Hebelsarm nennt man das statische Moment der Kraft in Bezug auf jenen Punkt.

Bezeichnet man den Hebelsarm der Kräfte mit r' r''...., so hat man die Gleichung IV in der Form:

$$89) \quad \Sigma(dK'.r') = 0.$$

Da nun die Lage der Axe mu in der Ebene gleichgiltig ist, so folgt, dafs Alles, was für den Punkt u bewiesen ist, auch für jeden andern Punkt der Ebene gilt, und daher läfst sich die so eben entwickelte Gleichung IV in Verbindung mit III als Gesetz so ausdrücken:

> Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, im Gleichgewicht, und man denkt in der Ebene einen beliebigen Punkt, so ist sowohl die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden Druck mit der Projektion des Abstandes jenes Punktes von dem Massenelement auf die Richtungslinie des Drukkes multiplizirt, als auch die Summe der statischen Momente in Bezug auf jenen Punkt, gleich Null.

Da zur Erfüllung des Gleichgewichts sowohl die Gleichung I als auch II Statt finden mufs, da ferner die Gleichung III von I, die Gleichung IV von II abgeleitet wurde, so folgt umgekehrt:

> Wenn mehre, auf ein Massenelement wirkende Kräfte, deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, im Gleichgewicht sein sollen, und man nimmt in der Ebene einen beliebigen Punkt an, so mufs sowohl die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck mit der Projektion des Abstandes jenes Punktes von dem Massenelement auf die Richtungslinie des Drucks multiplizirt, als auch die Summe der statischen Momente der Drucke in Bezug auf diesen Punkt gleich Null sein.

Hat man es mit Kräften zu thun, deren Richtungslinien in verschiedenen Ebenen liegen, und man will die Bedingungen des Gleichgewichts untersuchen, so kann man aufser den in § 48. S. 57 angeführten Gesetzen auch noch folgendes Verfahren befolgen: Man zerlegt jede einzelne Kraft in zwei andere, von denen eine in eine bestimmt angenommene, durch das Massenelement gehende Ebene fällt, die andere in einer Richtung normal zu dieser Ebene liegt. Nun wendet man für das Gleichgewicht in der Ebene die eben aufgestellten Gesetze an, und untersucht, ob aufserdem noch entweder die Summe der Drucke in der zur Ebene normalen Richtung gleich Null ist, oder aber ob in Beziehung auf diese Richtung die Gesetze S. 48. No. 1 oder 2 erfüllt werden, indem man entweder einen Punkt in der normalen Richtung annimmt und seinen Abstand auf die Richtung jeder Kraft projicirt, oder indem man zu der angenommenen Ebene eine Parallelebene denkt, und die reellen Wege der einzelnen Drucke in Bezug auf diese Ebene untersucht etc.

Anwendung des Prinzips der statischen Momente auf Kräfte, die nicht im Gleichgewicht sind.

§ 51. Wirken mehre Kräfte, deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement, und die Kräfte sind nicht im Gleichgewicht, so wird nach § 35. No. 1 Gleichgewicht hergestellt sein, wenn wir eine neue Kraft auf das Massenelement einwirken lassen, welche der Resultirenden gleich und entgegengesetzt ist. Sobald diese Kraft einwirkt, gelten die Gesetze des vorigen Paragraphen. Ist der resultirende Druck dK und der Hebelsarm in Bezug auf einen angenommenen Punkt r, so würde also folgen:

$$\Sigma(dK'r') - dK \, . \, r = 0.$$

$$90) \quad dK \, . \, r = \Sigma(dK'r').$$

Das Prinzip der statischen Momente gilt also auch für den Fall, dafs die Kräfte nicht im Gleichgewicht sind, nimmt aber dann die Form an:

> Wirken beliebig viele Kräfte, deren Richtungslinien in ein und derselben Ebene liegen, auf ein Massenelement, so ist in jedem Augenblick das statische Moment der Mittelkraft in Bezug auf einen Punkt in der Ebene der Kräfte gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf denselben Punkt.

Liegt der angenommene Punkt in der Richtung der Resultirenden, so ist offenbar der Hebelsarm der Resultirenden in Bezug auf diesen Punkt gleich Null, und es folgt daher der Satz:

Sind mehre Kräfte, die auf ein Massenelement wirken, und deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen, **nicht** im Gleichgewicht, so ist dennoch die Summe der statischen Momente in Bezug auf jeden Punkt in der Richtung der Resultirenden gleich Null.

Prinzip der konstanten Leistungen für parallele Ebenen.

§ 52. Denken wir, es wirken beliebig viele Kräfte auf ein Massenelement, und dasselbe bewege sich unter dem Einflufs derselben in einer gewissen Kurve; zerlegen wir nun sowohl die Drucke, als die Wegelemente nach drei zu einander normalen Axen, so ist das Leistungselement in irgend einem Augenblick in der Richtung der ersten Axe:

$$dK_{,}\, ds_{,} = \Sigma(dK' \cos\alpha_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \cos\alpha_{,}),$$

in der Richtung der zweiten Axe:

$$dK_{,,}\, ds_{,,} = \Sigma(dK' \,.\, \cos\beta_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \,.\, \cos\beta_{,}),$$

in der Richtung der dritten Axe:

$$dK_{,,,}\, ds_{,,,} = \Sigma(dK' \,.\, \cos\gamma_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \,.\, \cos\gamma_{,}),$$

und das Leistungselement der Mittelkraft (§ 32. S. 36):

$$dK.ds = dK_{,}\, ds_{,} + dK_{,,}\, ds_{,,} + dK_{,,,} \,.\, ds_{,,,} = \Sigma(dK' \,.\, \cos\alpha_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \cos\alpha_{,}) + \Sigma(dK' \cos\beta_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \,.\, \cos\beta_{,}) + \Sigma(dK' \,.\, \cos\gamma_{,}) \,.\, \Sigma(ds' \,.\, \cos\gamma_{,}).$$

Ist nun für irgend eine Zeitdauer der Druck in der Richtung einer der drei Axen konstant, so ist (S. 27. Gleichung 48) für diese Zeit die Leistung in dieser Richtung gleich dem Produkt aus dem konstanten Druck in den Weg, welchen derselbe in dieser Zeit zurückgelegt hat. Wenn also z. B. der resultirende Druck für die erste Axe während einer bestimmten Zeitdauer konstant ist, so ist die Kräftesnmme (§ 32. S. 36) für diese Richtung in der genannten Zeitdauer gleich $(dK_{,} \,.\, s_{,})$; die Drucke in der Richtung der beiden andern Axen mögen dabei während dieser Zeitdauer konstant oder beliebig veränderlich sein. Die Form der Bahn des Massenelements ist aber nach § 38 und 39 von der Beschaffenheit der Kräftesummen für alle drei Axen abhängig. Diese Form der Bahn kann, wenn die Kräftesumme nach der Richtung der einen Axe eine konstante ist, sowohl eine gerade Linie sein, wenn auch die Kräftesummen für die beiden andern Axen konstant sind (§ 38) als auch irgend eine Kurve bilden (§ 39). Wie sie aber auch beschaffen sein mag, die Arbeit in der Richtung der konstant wirkenden Kräftesumme wird sich immer ausdrücken durch $(dK_{\prime}.s_{\prime})$, wenn $dK_{\prime}$ der konstante Druck, $s_{\prime}$ der Weg dieses Druckes ist. Nun ist aber der Weg $s_{\prime}$, den das Massenelement von irgend einer Lage aus bis zu irgend einer andern Lage in der Richtung einer bestimmten Axe durchläuft, nichts anderes, als der Zuwachs der Ordinate des Weges nach der Richtung dieser Axe für die Zeit, in welcher das Massenelement aus der ersten Lage in die zweite übergeht. Der Werth dieses Ordinaten-Zuwachses aber wird dargestellt durch den normalen Abstand der beiden Ebenen, welche man durch das Massenelement in seiner ersten und in seiner spätern Lage normal zu der Axe denken kann. Hierin nun liegt der Satz:

> Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einfluſs einer beliebigen Menge von Kräften in irgend welcher Kurve, und es ist für irgend eine Richtung der Druck für eine gewisse Zeit konstant, so ist die Leistung der Kräftesumme für diese Richtung, indem das Massenelement aus einer Ebene, die normal zu der Richtung ist, in eine andere, ebenfalls zu der Richtung normale Ebene übergeht, immer dieselbe und wird durch das Produkt aus dem konstanten Druck in den normalen Abstand der beiden Ebenen gemessen, gleichviel wie die Kurve beschaffen sein mag, welche das Massenelement bei dieser Bewegung beschreibt. Es ist folglich auch der Gewinn an lebendiger Kraft, und mithin auch der Zuwachs an Geschwindigkeit derselbe. (§ 21. S. 26 und § 22. S. 27.)

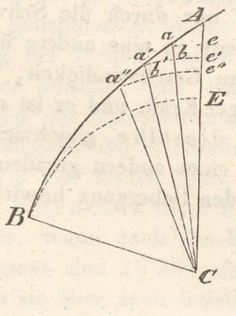
Dieses Gesetz findet besonders Anwendung für alle die Fälle, wo nach der Richtung der Vertikalen die Schwere die einzige wirkende Kraft ist. Ein Körper, welcher nur durch die Schwerkraft getrieben aus einer horizontalen Ebene in eine andere übergeht, erlangt immer denselben Zuwachs an Geschwindigkeit, also auch immer denselben Gewinn an lebendiger Kraft, und es ist auch die auf ihn wirkende Kraftrichtung immer dieselbe, gleichviel ob er in der vertikalen Linie oder in irgend einer andern geraden Linie (geneigte Ebene) oder in einer Kurve den Uebergang bewirke.

Prinzip der konstanten Leistungen, wenn der konstante Druck stets durch denselben Punkt geht.

§ 53. Der Satz des vorigen Paragraphen läfst sich noch auf eine allgemeinere Form bringen, und gewinnt dann folgende Gestalt:

Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs mehrer Kräfte in einer Kurve, und es existirt ein Punkt, für welchen der resultirende Druck (§ 46. S. 54) konstant ist, so ist auch die Leistung, der Gewinn an lebendiger Kraft und die Geschwindigkeits-Aenderung konstant, welche für das Massenelement Statt finden, indem dasselbe seine Entfernung von jenem Punkte um ein bestimmtes Stück ändert, und zwar drückt sich immer die Leistung für eine bestimmte Zeit aus durch das Produkt aus dem konstanten Druck in die Differenz der Entfernung von jenem Punkt, welche das Massenelement am Anfange und am Ende der Zeit besitzt: die Kurve, welche während dieser Zeit durchlaufen wird, mag eine beliebige Form haben.

Denn es bewege sich das Massenelement in der Kurve AB so, dafs der resultirende Druck für den Punkt C konstant $= dK$ ist, nehmen wir auf der Kurve AB unendlich kleine Wegstücken an, Aa, aa', $a'a''$.... und beschreiben aus C mit den Abständen aC, $a'C$.... BC Kugelflächen, welche AC in den Punkten e, e', e''...E schneiden, so ist für ein unendlich kleines Wegstück Aa das Kugelelement ae als eben, Ae aber als normal zu dieser Ebene, und der konstante Druck dK als parallel mit AC wirkend anzusehen, das Leistungselement, welches auf das Massenelement wirkt, indem dasselbe von A nach a sich bewegt, drückt sich also nach dem vorigen Satze aus durch $dK.Ae$, welche Gestalt auch immer das Kurvenelement Aa haben mag. Ebenso läfst sich zeigen, dafs das Leistungselement für die Bewegung von a nach a' gleich $dK.ab$ $= dK.ee'$ etc. ist; es ist folglich die Leistung der stets durch den Punkt C gehenden konstant wirkenden Kraft, indem das Massenelement sich von A



nach B bewegt, gleich: $\Sigma(dK.Ae')$ und da dK für alle Elemente konstant ist, auch gleich:

$$dK.\Sigma(Ae) = dK.AE = dK(AC - CE) = dK.(AC - BC),$$

das ist, was zu beweisen war.

Dieser Fall kommt auf den des vorigen Paragraphen zurück, wenn man annimmt, daſs der Punkt C unendlich weit entfernt liegt, die Richtungen nach C also alle als parallel angesehen werden können.

Geht die Richtung einer Kraft stets durch einen bestimmten Punkt, so pflegt man diesen Punkt den **Mittelpunkt der Kraft** zu nennen.

Bewegung eines Massenelements durch Gleichgewichtslagen. — Stabiles, labiles Gleichgewicht.

§ 54. Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einfluſs beliebiger Kräfte in einer gewissen Kurve, so setzt dies immer voraus, daſs die Kräfte **nicht** in allen aufeinander folgenden Lagen des Massenelements im **Gleichgewicht** sind, denn wäre dies der Fall, so müſste (§ 38) die Bahn eine gerade Linie sein.

Wenn jedoch bei der Bewegung eines Massenelements in einer Kurve die Kräfte in irgend einem Punkte durch eine Gleichgewichtslage gehen, d. h. wenn für irgend einen Punkt die resultirende Leistung aus sämmtlichen Kräften Null wird, **so ist in diesem Punkte die Geschwindigkeit des Massenelements ein Maximum oder ein Minimum.**

Denn, zerlegen wir die Leistung sämmtlicher Kräfte nach drei zu einander normalen Richtungen, so ist nach Gleichung 54) S. 32 in jedem Augenblick:

$$dm\,.\,c\,dc = dm\,c_{\prime}\,dc_{\prime} + dm\,c_{\prime\prime}\,dc_{\prime\prime} + dm\,c_{\prime\prime\prime}\,dc_{\prime\prime\prime},$$

wenn c die resultirende Geschwindigkeit, $c_{\prime}$, $c_{\prime\prime}$, $c_{\prime\prime\prime}$ die Geschwindigkeiten nach der Richtung der drei Axen bezeichnen. Nun ist offenbar die resultirende Geschwindigkeit (c), mit welcher sich das Massenelement bewegt, in dem Augenblick ein Maximum oder Minimum, wo ihr Differenzial dc gleich Null wird, d. h. wenn die Gleichung erfüllt wird:

$$dc = \frac{dm\,c_{\prime}\,dc_{\prime} + dm\,c_{\prime\prime}\,dc_{\prime\prime} + dm\,c_{\prime\prime\prime}\,dc_{\prime\prime\prime}}{dm\,c} = 0,$$

oder:

$$dm\,c_{\prime}\,dc_{\prime} + dm\,c_{\prime\prime}\,dc_{\prime\prime} + dm\,c_{\prime\prime\prime}\,dc_{\prime\prime\prime} = 0.$$

Diese Gleichung zeigt aber an, dafs, wenn $dc = 0$ sein soll, d. h. wenn die Geschwindigkeit des Massenelements ein Maximum oder ein Minimum sein soll, die resultirende Leistung sämmtlicher Kräfte gleich Null sein müsse, d. h. dafs die Kräfte für diesen Augenblick im Gleichgewicht sein müssen.

Die Geschwindigkeit ist ein Maximum, wenn die zweite Ableitung negativ ist, sie ist ein Minimum, wenn die zweite Ableitung positiv ist. Wenn nun von der Gleichgewichtslage aus die Kräfte dem Massenelement einen negativen Geschwindigkeitszuwachs ertheilen, d. h. wenn sie das Bestreben haben, das Massenelement an der Entfernung aus der Gleichgewichtslage zu hindern, oder, was dasselbe sagt, wenn sie in solchem Sinne wirken, dafs sie das Massenelement, so bald es sich aus der Gleichgewichtslage entfernt, wieder in dieselbe zurückzuführen streben, so nennt man eine solche Gleichgewichtslage eine stabile. Wenn dagegen von der Gleichgewichtslage ab die Kräfte dem Massenelement einen positiven Geschwindigkeitszuwachs ertheilen, d. h. wenn sie das Bestreben äufsern, das Massenelement, sobald es einmal die Gleichgewichtslage verlassen hat, nicht wieder in dieselbe zurückzuführen, so sagt man, die Gleichgewichtslage sei nicht stabil, auch wohl, es sei eine labile Gleichgewichtslage. Dieser Darstellung gemäfs läfst sich folgender Satz aufstellen:

> Wenn ein Massenelement sich unter dem Einflufs beliebiger Kräfte in einer Kurve bewegt, und die Kräfte erlangen für irgend einen Punkt der Kurve eine Gleichgewichtslage, so ist die Geschwindigkeit des Massenelements ein Maximum, wenn die Gleichgewichtslage eine stabile ist, dagegen ein Minimum, wenn die Gleichgewichtslage eine labile ist.

Bestimmung des stabilen und labilen Gleichgewichts.

§ 55. Betrachten wir nun wiederum den Fall, welcher in § 53 vorausgesetzt wurde. Denken wir, das Massenelement bewege sich in einer Kurve, und für einen bestimmten Punkt sei der resultirende Druck ein konstanter; ziehen wir von diesem Punkte Normalen an die Kurve, so wird in den Durchschnittspunkten dieser Normalen mit der Kurve diese letzte entweder einen gröfsten oder kleinsten Abstand von dem Punkte haben. Das Massenelement wird also, nachdem es einen solchen Durchschnittspunkt passirt hat, seinen Abstand von dem Mittelpunkt der Kraft im entgegengesetzten Sinne zu ändern beginnen, als vor dem Durchgange durch denselben; und zwar so, dafs wenn es einen nächsten Durchschnittspunkt passirt, von da an die Entfernungen vom Mittelpunkt der Kraft wachsen, und wenn es einen entferntesten Durchschnittspunkt passirt, die Abstände vom Mittelpunkt der Kraft von da ab sich verringern. Hat nun die Kraft das Bestreben, das Massenelement dem Mittelpunkt der Kraft konstant zu nähern (Anziehungskraft), so wird der Geschwindigkeitszuwachs vor einem nächsten Punkt, wo sich das Massenelement dem Mittelpunkt der Kraft nähert, sich also im Sinne der Kraft bewegt, positiv; hinter demselben, wo sich also das Massenelement im entgegengesetzten Sinne der Kraft bewegt, negativ; dagegen wird in analoger Weise der Geschwindigkeitszuwachs vor einem entferntesten Punkt negativ, hinter demselben positiv; es wird also für eine Anziehungskraft in einem nächsten Punkte ein Maximum der Geschwindigkeit, in einem entferntesten Punkte ein Minimum der Geschwindigkeit stattfinden, und es stellt daher für eine solche Kraft ein nächster Punkt immer eine stabile Gleichgewichtslage, ein entferntester Punkt immer eine labile Gleichgewichtslage dar. Hat dagegen die Kraft das Bestreben, das Massenelement konstant von dem Mittelpunkt der Kraft zu entfernen (Abstofsungskraft), so finden genau die entgegengesetzten Verhältnisse statt.

Es ist natürlich hierbei vorausgesetzt, dafs die Richtung, in welcher die Kraft wirksam ist, als positiv angesehen wird.

Legen wir durch die Durchschnittspunkte der Normalen mit der Kurve Ebenen, welche normal zu jenen Normalen sind, so sind dies Berührungsebenen zur Kurve. Liegt nun der Mittelpunkt der Kraft so entfernt, dafs man alle von der Kurve nach demselben gezogenen Linien als parallel ansehen kann (der Fall des § 52), so werden auch diese Berührungsebenen alle normal zu der Kraftrichtung, und unter sich parallel sein.

Die obigen Gesetze lassen sich nun leicht auch auf den Fall übertragen, wo die konstante Kraft immer parallel mit einer bestimmten, geraden Linie bleibt (§ 52). Hier wird für jede Berührungsebene, welche zur Kraftrichtung normal ist, die Geschwindigkeit des Massenelements ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem diese Ebene einem nächsten oder einem entferntesten Berührungspunkt entspricht.

Schwingende Bewegung. Gesetz für die Schwingung durch eine stabile Gleichgewichtslage.

§ 56. Denken wir, ein Massenelement bewege sich auf einer Kurve unter dem Einflufs einer konstant wirkenden Anziehungs- oder Abstofsungskraft; es habe seine Bewegung in irgend einem Punkte der Kurve mit Null-Geschwindigkeit begonnen, während es in diesem Punkte den Abstand a' vom Mittelpunkt der Kraft besafs, und habe sich bis zu einem Punkte, welcher einer stabilen Gleichgewichtslage entspricht und den Abstand a von dem Mittelpunkt der Kraft hat, bewegt. Die Leistung der Kraft auf das Massenelement ist in diesem Augenblick geworden nach § 53 (Gleichung 48. S. 27):

$$dK.(a'-a) = \tfrac{1}{2}dm.c^2,$$

in sofern $a'-a$ die Abstandsänderung, welche das Massenelement unter der Einwirkung der Kraft vom Zustand der Ruhe aus und c die Endgeschwindigkeit bedeutet, welche das Massenelement im Punkt a erlangt hat. Mit dieser erlangten Geschwindigkeit passirt das Massenelement die stabile Gleichgewichtslage, und von nun an wird der Geschwindigkeitszuwachs in der Richtung nach dem Mittelpunkt der Kraft konstant negativ, d. h. es nimmt die Geschwindigkeit, mit welcher das Massenelement sich dem Sinne der Kraft entgegen bewegt, fortwährend ab, bis sie endlich Null wird. Dieser Augenblick tritt ein, wenn die Summe der dem Massenelement in den einzelnen Zeitelementen entzogenen Geschwindigkeiten wieder c geworden ist, oder wenn die auf das Massenelement nun verzögernd einwirkende Kraft eine Leistung gleich $-\tfrac{1}{2}dm.c^2$ erzeugt hat. Da aber

$$\tfrac{1}{2}dm.c^2 = (a'-a).dK$$

ist, so folgt:

$$-\tfrac{1}{2}dmc^2 = -(a'-a).dK,$$

d. h. die, dem Massenelement bei seiner, dem Sinne der Kraft entgegengesetzten Bewegung entzogene lebendige Kraft ist gleich derjenigen geworden, welche die Kraft dem Massenelement bei seiner Bewegung im Sinne der Kraft ertheilt hat, sobald die Abstandsänderung $(a'-a)$ von dem Mittelpunkt der Kraft gleich aber entgegengesetzt derjenigen Abstandsänderung geworden ist, welche das Massenelement bei seiner Bewegung im Sinne der Kraft erlangt hat. Das Massenelement erlangt also auf der andern Seite der stabilen Gleichgewichtslage denselben Abstand von dem Mittelpunkt der Kraft, welchen es bei dem Beginn der Bewegung nach der Gleichgewichtslage hin besessen hatte. Sobald es diesen Abstand erlangt hat, ist seine Geschwindigkeit wieder Null geworden; die konstant wirkende Kraft bewegt nun, falls dieser Augenblick nicht einer Gleichgewichtslage entspricht, das Massenelement wieder in ihrem Sinne nach der Gleichgewichtslage hin, und dasselbe passirt diese Lage wiederum nach der entgegengesetzten Seite hin, bis es wieder mit Null-Geschwindigkeit in seiner ursprünglichen Lage angekommen ist. Nun wiederholt sich das Spiel von Neuem. Endlich läfst sich noch ganz allgemein zeigen, dafs bei der Bewegung von der Ruhe nach dem Punkt des stabilen Gleichgewichts hin einerseits, und bei der Entfernung von diesem Punkt andrerseits, in gleichen Abständen vom Mittelpunkt der Kraft gleich grofse Geschwindigkeiten Statt finden müssen.

Denn es sei c die Geschwindigkeit, welche das Massenelement erreicht hat, indem sein Abstand vom Mittelpunkt der Kraft gleich x geworden, und zwar während es sich von dem Zustand der Ruhe, oder von dem Abstand a' aus nach dem Mittelpunkt der Kraft hin bewegt, es sei ferner f das Aenderungsmaafs der Kraft, so ist offenbar die gewonnene lebendige Kraft:

$$\tfrac{1}{2} dm \,.\, c^2 = dK \,.\, (a' - x) = dm \,.\, f\,(a' - x),$$

folglich:

$$c = \sqrt{[2f(a' - x)]}.$$

Indem das Massenelement den Punkt des stabilen Gleichgewichts erreicht, ist die Arbeit der konstant wirkenden Kraft gleich $dK(a' - a)$ geworden, und wenn es sich bis zum Abstande x wieder von der Gleichgewichtslage entfernt hat, so ist demselben die Arbeit $dK(a - x)$ ertheilt, folglich besitzt es die Arbeit:

$$dK(a' - a) + dK(a - x) = dK(a' - x);$$

ist nun in diesem Augenblick seine Geschwindigkeit c' geworden, so hat man:

$$\tfrac{1}{2} dm \,.\, c'^2 = dK \,.\, (a' - x) = \tfrac{1}{2} dm f(a' - x)$$

$$c' = \sqrt{[2f \,.\, (a' - x)]},$$

folglich:

$$c' = c.$$

Aus dieser Darstellung folgt folgendes Gesetz:

Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs beliebiger Kräfte in einer Kurve, so, dafs für einen bestimmten Punkt die resultirende Kraft eine konstant wirkende ist, und fängt die Bewegung in der Kurve mit Null-Geschwindigkeit an, so wird das Massenelement, falls es bei seiner Bewegung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, auf der andern Seite dieser Lage eine ebenso grofse Entfernung von dem Mittelpunkt der Kraft erlangen, als es bei dem Beginn der Bewegung hatte, dann für einen Augenblick zur Ruhe kommen, sich hierauf, wieder mit Null-Geschwindigkeit beginnend, rückwärts in seine ursprüngliche Lage zurückbewegen, und diese hin- und hergehende Bewegung ununterbrochen fortsetzen. Bei dieser Bewegung hat das Massenelement zu beiden Seiten der stabilen Gleichgewichtslage in gleichen Abständen vom Mittelpunkt der Kraft gleiche Geschwindigkeiten.

Diese Gesetze lassen sich leicht für den Fall verstehen, wo der Mittelpunkt der Kraft unendlich weit entfernt liegt.

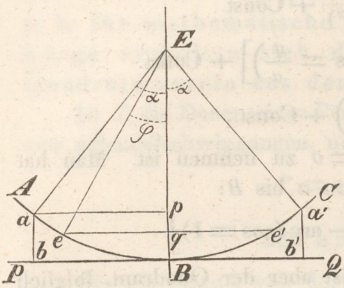
Eine solche hin- und hergehende Bewegung eines Massenelements nennen wir eine schwingende Bewegung. Die Bewegung von dem Zustand der Ruhe aus durch die stabile Gleichgewichtslage bis wiederum zum Zustand der Ruhe hin, nennen wir eine Schwingung. Die Schwingungen wiederholen sich hiernach ununterbrochen, so lange die Resultirende für den Mittelpunkt der Kraft konstant wirkend bleibt. Diese Voraussetzung trifft jedoch bei den in der Praxis vorkommenden Fällen nur sehr selten zu.

Mathematisches Pendel — Pendelschwingung im Kreisbogen.

§ 57. Ein Massenelement, welches unter dem Einflufs der Schwerkraft in irgend einer Kurve schwingt, so dafs es bei dieser Schwingung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, nennt man ein mathematisches Pendel. Ist diese Kurve ein Kreisbogen, so nennt man das Pendel ein Kreispendel.

Es schwinge ein Massenelement unter dem Einflufs der Schwerkraft in dem Kreisbogen ABC. Ist EB die Richtung der Schwere, so erhalten wir die Lage des stabilen Gleichgewichts, wenn wir die Berührungsebene des Kreisbogens denken, welche normal zu EB ist, und zwischen dem Kreisbogen und dem Mittelpunkt der Kraft liegt. Der Berührungspunkt dieser Ebene B ist der Punkt des stabilen Gleichgewichts (§ 55). Fängt die Bewegung des Massenelements in a an, wo der Abstand von der Ebene gleich ab ist, so mufs, nach § 56, das Massenelement, nachdem es den Punkt B passirt hat, sich so weit erheben, dafs der Abstand $a'b'$ gleich ab wird; d. h. es wird der Winkel aEB gleich BEa' sein müssen.

Den Winkel $aEB = BEa'$ nennen wir den Erhebungswinkel, bezeichnen wir denselben mit α. Hat sich das Massenelement unter dem Einflufs der Schwere von a, mit Null-Geschwindigkeit anfangend, bis nach einem beliebigen Punkte e bewegt, und legen wir durch a und e die beiden Ebenen ap und eq normal zu EB, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher das Massenelement in e ankommt, dieselbe, welche es erlangt haben würde, indem es von p nach q frei gefallen wäre (§ 52), folglich:



$$c = \sqrt{(2g.pq)}$$
$$= \sqrt{[2gr(\cos\varphi - \cos\alpha)]},$$

wenn wir mit r den Halbmesser des Kreisbogens, mit φ den Winkel eEB, um welchen das Massenelement nun noch von der Gleichgewichtslage entfernt ist, bezeichnen. Ist in diesem Augenblick ds das Wegelement, so ist auch, wenn wir die Geschwindigkeit für die Dauer eines Zeitelements als konstant ansehen:

$$c = \frac{ds}{dt},$$

es ist aber jedenfalls:

$$ds = -d\varphi \, . \, r,$$

da das Wegelement ds wächst, wenn das Element des veränderlichen Winkels φ abnimmt, folglich:

$$c = \frac{-r \, . \, d\varphi}{dt} = \sqrt{[2g(\cos\varphi - \cos\alpha) \, . \, r]}$$

$$dt = -\sqrt{\left(\frac{r}{2g}\right)} \, . \, \frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)}}.$$

Die Zeit, welche das Massenelement braucht, um von a nach B zu gelangen, wird sich finden, indem wir diesen Ausdruck integriren, und das Integral zwischen den Grenzen $\varphi = \alpha$ und $\varphi = o$ nehmen. Allein das Integral von $\frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)}}$ läfst sich nicht in geschlossener Form erhalten. Wir können es aber für hinreichend kleine Winkel ermitteln, indem wir, mit Vernachlässigung der vierten Potenzen, von φ und α setzen:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}; \quad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)} = \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \varphi^2)}{2}},$$

folglich für kleine Erhebungswinkel:

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha^2 - \varphi^2)}}$$

$$t = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha^2 - \varphi^2)}} + \text{Const.}$$

$$= -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \left[-\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\varphi}{\alpha}\right)\right] + \text{Const.}$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\varphi}{\alpha}\right) + \text{Const.},$$

welches Integral von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = o$ zu nehmen ist. Man hat sodann für die Zeit der Bewegung von a bis B:

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \left[\operatorname{arc}(\cos = 0) - \operatorname{arc}(\cos = 1)\right].$$

Der Bogen, dessen $\cos = 0$ ist, ist aber der Quadrant, folglich $\operatorname{arc}(\cos = 0) = \frac{1}{2}\pi$, und der Bogen, dessen $\cos = 1$ ist, ist Null, folglich ist $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.

Indem nun das Massenelement von dem Punkt B aus seine Bewegung nach C hin fortsetzt, verliert es allmählich die Geschwindigkeit, welche im Punkt B das Maximum erreicht hatte. In dem Punkt e', welcher in derselben Horizontalen mit dem Punkt e liegt, wird nach § 56 die Geschwindigkeit wieder gleich derjenigen im Punkte e geworden sein, und man hat:

$$c = \sqrt{[2g(\cos\varphi - \cos\alpha) \cdot r]},$$

es ist aber auch hier $ds = -d\varphi \cdot r$ und $c = -\frac{d\varphi \cdot r}{dt}$, folglich hat man auch für diesen Theil der Schwingung:

$$dt = \frac{-d\varphi \cdot r}{\sqrt{[2g \cdot (\cos\varphi - \cos\alpha) \cdot r]}},$$

und es mufs sich die Zeitdauer, welche das Massenelement braucht, um von B nach dem Punkt der Ruhe a' zu gelangen, genau in derselben Weise, wie vorhin, finden.

Nennen wir T die Zeit einer ganzen Pendelschwingung, so ist:

$$90) \quad T = 2t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 0{,}5620\sqrt{r}.$$

Man sieht, dafs in diesem Ausdruck der Erhebungswinkel α nicht vorkommt; es ist also die Zeitdauer einer Pendelschwingung unabhängig vom Erhebungswinkel, so lange derselbe so klein ist, dafs man die oben gemachte Substitution für $\cos\alpha$ gelten lassen kann.

Den Radius des Kreisbogens r nennt man die Länge des Pendels. Für eine Länge r' ist die Dauer der Schwingung:

$$T' = \pi \sqrt{\frac{r'}{g}},$$

folglich:

$$91)\quad T : T' = \sqrt{r} : \sqrt{r'},$$

d. h. für mathematische Kreispendel von verschiedener Länge verhalten sich die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Längen der Pendel.

Ist T die Dauer einer Pendelschwingung, so ist $T.n$ die Dauer von n Pendelschwingungen, nennen wir diese $T_{\prime}$, so hat man:

$$T_{\prime} = nT = n\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$92)\quad n = \frac{T_{\prime}}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Für ein Pendel von der Länge r' hat man in derselben Zeit die Anzahl der Pendelschwingungen:

$$n' = \frac{T_{\prime}}{\pi} \sqrt{\frac{g}{r'}},$$

folglich:

$$92a)\quad n : n' = \sqrt{\frac{1}{r}} : \sqrt{\frac{1}{r'}} = \sqrt{r'} : \sqrt{r},$$

d. h. für mathematische Kreispendel von verschiedenen Längen verhalten sich die Anzahl von Schwingungen in einer gegebenen Zeit **umgekehrt** wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

Aus der Formel 90 folgt für $T = 1$:

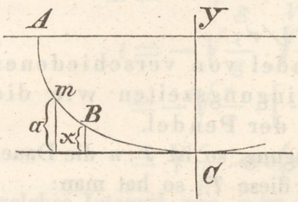
$$r = \frac{g}{\pi^2} = \frac{31{,}25}{9{,}8696} = 3{,}1666 \text{ Fufs.}$$

Ein Pendel, dessen Schwingungsdauer eine Sekunde beträgt, nennt man ein Sekundenpendel. Hiernach ist die Länge eines mathematischen Sekundenpendels:

3,1667 Fufs = 38 Zoll preufsisch,
= 0,9938 Mètres.

Pendelschwingung in einer beliebigen Kurve — Cykloïdenpendel — Tautochrone — Brachystochrone.

§ 58. Es sei allgemein (Fig. auf folg. Seite) ABC eine beliebige Kurve, in welcher ein Massenelement sich unter dem Einflufs der Schwerkraft bewegt. C sei ein Punkt des stabilen Gleichgewichts, und zugleich der Anfangspunkt des Koordinatensystems, dessen eine Axe cy mit der Richtung der Schwere zusammenfällt, also in dem Punkte C normal zur Kurve ist, während die beiden andern Axen in einer horizontalen, die Kurve C berührenden Ebene liegen. Ist a der Abstand des Punktes, in welchem das Massenelement seine Bewe-



gung von der Ruhe aus beginnt, so ist die erlangte Geschwindigkeit in dem Augenblick, wo es den Punkt B erreicht hat, dessen Abstand von der Horizontalen gleich x ist:

$$c = \sqrt{[2g(a-x).]}$$

Ist ds das Kurvenelement, so ist auch

$$c = \frac{-ds}{dt}$$

folglich

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{[2g(a-x)]}}.$$

Um nun die Zeit zu finden, welche das Massenelement braucht, um von einem Punkte der Kurve bis zu einem andern zu gelangen, mufs man diesen Ausdruck integriren, indem man ds und x von ein und demselben Urvariablen abhängig macht, und dann das Integral zwischen den entsprechenden Grenzen nehmen. Man kann dazu die Gleichung der Kurve benutzen. Ist dieselbe:

$$y = f_x + C$$
$$z = \varphi_x + C',$$

so hat man:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = dx\sqrt{[1 + (df_x)^2 + (d\varphi_x)^2]},$$

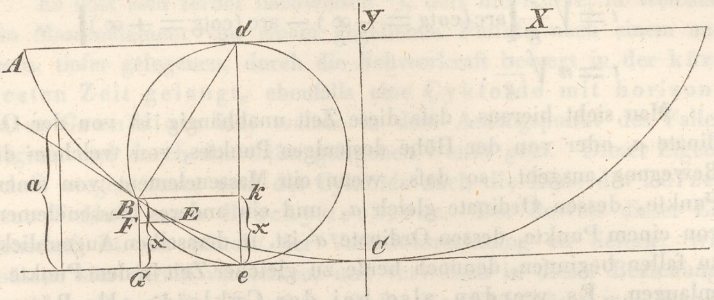
folglich ganz allgemein:

$$93)\quad t = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int \sqrt{\left[\frac{1 + (df_x)^2 + (d\varphi_x)^2}{a - x}\right]} dx + \text{Const.}$$

Gewöhnlich führt diese Methode, wegen des schwierigen Integrals, nur schwer zum Ziele, und man sucht lieber ds aus andern Eigenschaften der Kurve herzuleiten, wie wir es bei dem Kreispendel gethan.

Von den verschiedenen Kurven, in welchen Pendelschwingungen stattfinden können, hat, aufser dem Kreisbogen, noch die Cykloïde ein besonderes Interesse.

Es sei ABC eine Cykloïde, welche durch Abwickelung eines Kreises von dem Halbmesser gleich r auf der horizontalen Linie AX entstanden ist. Der Erzeugungskreis sei bei seiner Abwickelung in die Lage gekommen, in welcher er eben das Kurvenelement BE beschreibt; er berühre dabei die Grundlinie AX in d, und indem er sich auf derselben fortwälzt, macht er zunächst, indem er



das Element BE beschreibt, eine unendlich kleine Drehung um den Punkt d; es ist folglich die Sehne Bd des Erzeugungskreises die Normale für den Punkt B, und daher die hierzu normale Sehne Be Tangente für denselben. Wo die Richtung der Normalen mit der Richtung der Schwere zusammenfällt, ist ein Punkt des stabilen Gleichgewichts (§ 55). Da die Erzeugungslinie horizontal ist, so ist leicht einzusehen, dafs dies der Punkt C sein müsse, welcher zugleich Scheitel der Cykloïde ist. Nun ist:

$$BE = \frac{BF}{\sin(BEF)} = \frac{BF}{\sin(BeG)} = \frac{BF \,.\, Be}{BG}.$$

Es ist aber $BE = ds$; $BF = dx$; $BG = x$; $Be = \sqrt{(ed.ek)} = \sqrt{(2r.x)}$, folglich hat man:

$$ds = dx\sqrt{\frac{2r}{x}},$$

setzt man diesen Werth in den oben gefundenen allgemeinen Ausdruck für dt, so hat man:

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{[2g(a-x)]}} = -\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

folglich:

$$t = -\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

$$= -\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \cdot \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{2x-a}{2\sqrt{(ax-x^2)}}\right)^{*)}$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \operatorname{arc}\left(\operatorname{cotg} = \frac{2x-a}{2\sqrt{(ax-x^2)}}\right).$$

Nehmen wir dies Integral zwischen den Grenzen $x = a$ bis $x = 0$, so findet man die Zeit, welche das Massenelement braucht, um von der Ruhe aus bis zum Punkt des stabilen Gleichgewichts in der Cykloïde zu fallen:

---

*) Es ist nämlich (Wolffs Zahlenlehre II. Th. § 607. No. 9):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(m+px-qx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{q}} \operatorname{arc}\left[\operatorname{tang} = \frac{2qx-p}{2\sqrt{q} \cdot \sqrt{(m+px-qx^2)}}\right].$$

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\left[\operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = -\infty) - \operatorname{arc}(\operatorname{cotg} = +\infty)\right]$$

$$t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Man sieht hieraus, dafs diese Zeit unabhängig ist von der Ordinate a, oder von der Höhe desjenigen Punktes, von welchem die Bewegung ausgeht, so dafs, wenn ein Massenelement von einem Punkte, dessen Ordinate gleich a, und ein anderes Massenelement von einem Punkte, dessen Ordinate a' ist, in demselben Augenblicke zu fallen beginnen, dennoch beide zu gleicher Zeit in dem Punkte C anlangen. Es werden also bei der Cykloïde alle Bögen, die man von irgend einem Punkte der Kurve bis zum Scheitelpunkte rechnen kann, in gleichen Zeiten durchfallen, und deshalb nennt man die Cykloïde in Bezug auf diese Eigenschaft tautochronische Linie; das Kreispendel ist dagegen nur für kleine Erhebungswinkel annähernd isochron.

Da die Cykloïde zu beiden Seiten der Linie CY symmetrisch ist, so läfst sich, wie beim Kreispendel, zeigen, dafs die Zeit, welche das Massenelement braucht, um von C aus sich wiederum bis zum Abstande a von der Horizontalen zu erheben, ebenfalls gleich t sein müsse. Demnach ist die Dauer einer Schwingung in der Cykloïde:

$$94)\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4r}{g}},$$

d. h. die Dauer der Schwingung ist ebenso grofs, wie bei einem isochron schwingenden Kreispendel, dessen Pendellänge gleich dem doppelten Durchmesser des erzeugenden Kreises der Cykloïde ist.

Denken wir die Cykloïde auf einen cylindrischen Körper, dessen Seiten vertikal sind, dessen Grundfläche aber eine ganz beliebige Form haben mag, aufgewickelt, und zwar so, dafs die Grundlinie der Cykloïde in einer horizontalen Ebene bleibt, so entsteht eine Kurve von doppelter Krümmung, welche aber immer noch dieselbe Eigenschaft des Tautochronismus haben mufs, wie die ursprüngliche Cykloïde, denn es ist für diese Kurve in dem Ausdruck:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{[2g(a-x)]}}$$

für denselben Werth von x das Kurvenelement ds von derselben Länge, wie bei der ursprünglichen Cykloïde, es hat also dt denselben Ausdruck, und folglich lassen sich daran dieselben Entwickelungen knüpfen, welche wir eben besprochen haben.

Es läfst sich ferner nachweisen *), dafs die Kurve, in welcher ein Massenelement von einem gegebenen Punkte nach einem andern, tiefer gelegenen, durch die Schwerkraft bewegt in der kürzesten Zeit gelangt, ebenfalls eine Cykloïde mit horizontaler Grundlinie ist, welche in dem Anfangspunkt des Falles beginnt und durch den tiefer gelegenen Punkt geht. Dieser Eigenschaft wegen nennt man die Cykloïde auch die Linie des kürzesten Falles, auch Brachystochrone. Der Beweis dieser Eigenschaft ist nur mittelst der Variationsrechnung zu liefern, wir müssen hier darauf verzichten, und verweisen in dieser Beziehung, sowie in Betreff des Beweises, dafs die Cykloïde mit horizontaler Grundlinie die einzige Tautochrone sei, auf das unten genannte Werk von Poisson **).

Allgemeines Gesetz für das Gleichgewicht eines Massenelements auf einer Kurve.

§ 59. **Bewegt sich ein Massenelement unter dem Einflufs verschiedener Kräfte in einer beliebigen Kurve, und ist die Resultirende aus diesen Kräften in irgend einem Augenblick normal zur Kurve, so sind die Kräfte in diesem Augenblick im Gleichgewicht, und umgekehrt: wenn die Kräfte in irgend einem Augenblick im Gleichgewicht sein sollen, so mufs die Resultirende normal zur Kurve sein.**

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Darstellung in § 55, denn für irgend einen Augenblick läfst sich die Resultirende als konstant wirkend betrachten (§ 33) und für eine konstant wirkende Kraft ist in § 55 nachgewiesen, dafs die Kräfte eine Gleichgewichtslage haben, wenn die Richtung der Resultirenden für einen gewissen Punkt normal zur Kurve ist.

Es sei (Fig. auf folg. Seite) AB eine beliebige ebene Kurve; das Massenelement befinde sich in a, und es wirken auf dasselbe die Drucke ein dG, parallel mit der Axe BX und dF parallel mit der Axe BY. Die Richtung des resultirenden Druckes ist dann zu bestimmen durch Gleichung 59) und mit Rücksicht auf Satz 2 in § 33 durch:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dF}{dG},$$

wenn α den Winkel bezeichnet, den der resultirende Druck mit

---

*) Vergl. Traité de Mécanique par S. D. Poisson. T. I. § 285. S. 425.
**) Ebendaselbst. Tom. I. § 283. S. 422.

der Richtung dG macht. Soll nun die Lage a eine Gleichgewichtslage sein, so mufs diese Richtung des resultirenden Druckes normal zur Kurve sein, und für diesen Fall hat man auch:

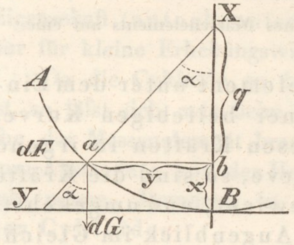
$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx},$$

folglich mufs für die Gleichgewichtslage immer die Gleichung statt finden:

$$95)\quad \frac{dF}{dG} = \frac{dy}{dx}.$$

Gleichgewicht eines Massenelements auf einer rotirenden Kurve.

§ 60. Denken wir nun, dafs dG der Druck der Schwerkraft sei, dafs die Axe BX vertikal sei, dafs die Kurve AB um die Axe BX gedreht werde, und dafs folglich das Massenelement der Einwirkung der Centrifugalkraft unterworfen sei. Da das Massenelement sich bei jener Drehung in einem Kreise bewegt, dessen Halbmesser die Ordinate y ist, so hat man, wenn w die Winkelgeschwindigkeit, und n die Anzahl der Umdrehungen bezeichnet, welche die Kurve in einer bestimmten Zeit $T_{\prime}$ macht, nach No. 79 und 80:



$$dF = d.\frac{dG}{g}.w^2.y = \frac{dG}{g}.\frac{4\pi^2}{T_{\prime}^2}.n^2 g.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung 95), so folgt für die Gleichgewichtslage:

$$\frac{n^2}{g}.\frac{4\pi^2}{T_{\prime}^2}.y = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha,$$

folglich:

$$n = \frac{T_{\prime}}{2\pi}.\sqrt{\left(g.\frac{\operatorname{tang} \alpha}{y}\right)}.$$

Nun ist $\frac{y}{\operatorname{tang} \alpha} = Xb$ oder gleich der Subnormalen des Punktes a in Bezug auf die Drehaxe XB. Bezeichnen wir diese Subnormale Xb mit q, so ergiebt sich:

$$96)\quad n = \frac{T_{\prime}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{q}}.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit der Gleichung 92), so ergiebt sich die Zahl der Schwingungen n' eines mathematischen Pendels, dessen Pendellänge gleich der Subnormalen ist, in derselben Zeit $T_{\prime}$:

$$n' = \frac{T_{\prime}}{\pi}\sqrt{\frac{g}{q}},$$

folglich doppelt so grofs.

Hierin liegt folgendes Gesetz:

Kann ein Massenelement in einer Kurve, welche in einer vertikalen Ebene liegt, und die sich um eine vertikale Axe dreht unter dem Einflufs der Schwerkraft und der Centrifugalkraft sich bewegen, so ist das Massenelement im Gleichgewicht, sobald die Anzahl der Umdrehungen, welche die Kurve um die Axe in einer gegebenen Zeit macht, halb so grofs ist, als die Zahl der Schwingungen eines mathematischen, isochron schwingenden Kreispendels, dessen Pendellänge gleich ist der, auf der Umdrehungsaxe gemessenen Subnormalen desjenigen Punktes der Kurve, in welchem das Massenelement sich befindet.

Gleichgewicht eines Massenelements auf einer rotirenden Parabel.

§ 61. Aendert sich die Zahl der Umdrehungen, und ist auch die Subnormale veränderlich, so wird das Massenelement sich auf der Kurve fortbewegen so lange, bis wieder die Bedingungs-Gleichung 96) erfüllt wird; es wird also, falls die Kurve die entsprechende Ausdehnung und Gestalt hat, für eine geänderte Anzahl von Umdrehungen endlich in eine neue Lage kommen, in welcher es wiederum im Gleichgewicht ist.

In der Praxis ist jedoch die Bedingung von Wichtigkeit, eine solche Kurve zu bestimmen, auf welcher das Massenelement sich zwar fortbewegt, sobald die Anzahl der Umdrehungen, damit die Centrifugalkraft dF und folglich auch die Richtung der Resultirenden zur Kurve sich ändert, die jedoch so beschaffen ist, dafs das Massenelement bei dieser Fortbewegung niemals auf der Kurve ins Gleichgewicht gelangen kann, wenn nicht die Anzahl der Umdrehungen in einer bestimmten Zeit wieder denselben Werth n erreicht hat, dafs aber, sobald dieser Werth wieder erreicht ist, das Massenelement, wo es sich auch auf der Kurve befinden mag, im Gleichgewicht sei.

Die gesuchte Kurve mufs offenbar die Eigenschaft haben, dafs ihre **Subnormale** für **jeden Punkt konstant** sei, denn wenn in der Gleichung:

$$n = \frac{T_{,}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{q}}$$

die Subnormale q konstant ist, so kann die Gleichung nicht anders erfüllt werden, als wenn auch n einen konstanten Werth hat, sobald aber n diesen Werth erreicht, wird die Gleichung erfüllt, wo auch das Massenelement sich auf der Kurve befinden mag.

Bekanntlich ist die **Parabel** eine Kurve, deren Subnormale für die symmetrische Axe konstant gleich dem halben Parameter ist. Es folgt daher für die gesuchte Parabel die Gleichung:

$$x^2 = 2qy,$$

und wenn man q aus der Gleichung 96) entwickelt und hier einsetzt:

$$x^2 = \frac{T_{,}^2 \cdot g}{2\pi^2 \,.\, n^2} \cdot y.$$

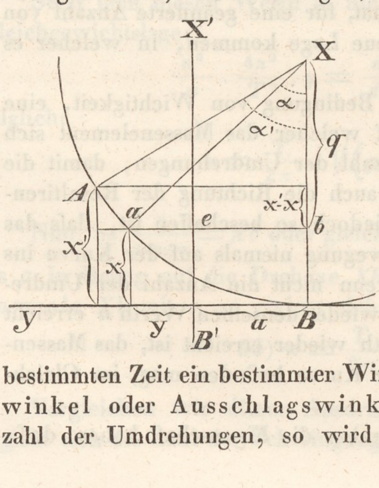
Bezeichnet n die Anzahl der Umdrehungen in **einer Minute**, so hat man $T_{,} = 60$, und nach Ausrechnung der Zahlenwerthe:

$$97)\ x^2 = 5684{,}115 \,.\, \frac{y}{n^2}.$$

Hierdurch ist die Parabel bestimmt; die Rotationsaxe ist die Axe der X.

Gleichgewicht eines Massenelements auf einem rotirenden Kreisbogen.

§ 62. Ist die Kurve AB, in welcher sich das Massenelement bewegen kann, ein Kreisbogen, dessen Halbmesser $= r$ ist, und welcher um seinen **Durchmesser rotirt**, so drückt sich die Subnormale aus durch:



$$q = r \,.\, \cos\alpha,$$

und da r für jeden Punkt konstant ist, so findet man, indem man diesen Werth von q in die Gleichung 96) einsetzt:

$$98)\ n = \frac{T_{,}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}} \,.\, \sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}}.$$

Es entspricht daher jeder Anzahl von Umdrehungen in einer bestimmten Zeit ein bestimmter Winkel α, welcher der **Erhebungswinkel** oder **Ausschlagswinkel** heifst. Aendert sich die Anzahl der Umdrehungen, so wird auch der Ausschlagswinkel geändert, das Massenelement kann dann bei einer geänderten Umdrehungszahl ins Gleichgewicht kommen, aber nothwendiger Weise in einer andern Lage, und dies bedingt einen wesentlichen Unterschied mit dem eben betrachteten Fall (§ 61), wo sich das Massenelement in einer Parabelbahn bewegte.

Hat der Winkel α zugenommen bis α', so ist die Entfernung des Massenelements von der Horizontalen um

$$x' - x = r(\cos\alpha' - \cos\alpha)$$

gewachsen.

Der hier besprochene Fall setzt voraus, dafs der Mittelpunkt des Kreises, in welchem das Massenelement steigen und fallen kann, in der Rotationsaxe liege. Diese Annahme ist keineswegs nothwendig. Denken wir, es sei $X'B'$ die Rotationsaxe, während XB eine andre vertikale, durch den Mittelpunkt des Kreisbogens AB gehende Axe vorstelle. Der Abstand der Axe $X'B'$ von XB sei a. Für irgend eine Lage des Massenelements in a ist nun die Subnormale auf der neuen Axe:

$$q = ae = r \, . \cos\alpha - a \, . \operatorname{cotg}\alpha,$$

und folglich:

$$99) \quad n = \frac{T_{\prime}}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r \, . \cos\alpha - a \, . \operatorname{cotg}\alpha}}\,.$$

Bei dieser Anordnung ändert sich die Subnormale nicht in demselben Sinne, in welchem der Cosinus des Erhebungswinkels sich ändert. Es ist denkbar, dafs, während sich der Winkel α wachsend bis α' ändert, die Aenderung der Subnormale äufserst gering sein, dafs also für die Lagen des Massenelements in dem Bogen $\alpha' - \alpha$ die Subnormale fast einen konstanten Werth haben könne, und dafs mithin für diese Lagen der Kreisbogen, welcher um eine Sehne rotirt, näherungsweise dieselben Eigenschaften haben könne, welche die Parabel, die um ihre symmetrische Axe rotirt, für alle Lagen des Massenelements hat. Es wird dabei wesentlich auf die Entfernung a der Rotationsaxe von dem Mittelpunkt des Kreisbogens ankommen, und wir wollen, da dieser Gegenstand von praktischer Wichtigkeit ist, untersuchen, welchen Werth a haben müsse, damit für die Lagen des Massenelements in dem Bogen von $\alpha' - \alpha$ die Subnormale nahezu konstant bleibe.

Für den Erhebungswinkel α ist die Subnormale:

$$q = r \, . \cos\alpha - a \, . \operatorname{cotg}\alpha,$$

und für den Erhebungswinkel α' hat sie den Werth:

$$q' = r \, . \cos\alpha' - a \, . \operatorname{cotg}\alpha'.$$

Wenn nun die Subnormale für den Ausschlagswinkel α denselben Werth hat, als für α', so kann sie zwar für jeden zwischen α und α' liegenden Winkel einen andern Werth haben, allein sie wird, indem sich der Winkel von α bis α' ändert, sich nur in der Weise ändern können, daſs sie um eben soviel wächst, als sie abnimmt, so daſs also ihr mittler Werth derselbe bleibt. Wir setzen demnach:

$$q = q'; \quad r \cdot \cos\alpha - a \cdot \operatorname{cotg}\alpha = r \cdot \cos\alpha' - a \cdot \operatorname{cotg}\alpha',$$

folglich:

$$100) \quad a = r \cdot \frac{\cos\alpha - \cos\alpha'}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha'}.$$

Z. B. es soll das Massenelement, während es den Bogen von 30 Grad bis 45 Grad durchläuft, nahezu eine konstante Subnormale haben, wie weit muſs die vertikale Sehne, um welche der Kreisbogen rotirt, von dem Durchmesser desselben entfernt sein.

Es ist:

$$a = r \frac{\cos 30^0 - \cos 45^0}{\operatorname{cotg} 30^0 - \operatorname{cotg} 45^0}$$

$$a = 0{,}217 r.$$

Es ist dann die Subnormale:

$$q = r \cdot \cos\alpha - a \cdot \operatorname{cotg}\alpha$$
$$= r(\cos\alpha - 0{,}217 \operatorname{cotg}\alpha),$$

also für:

$$30^0 \quad q = 0{,}4901 r$$
$$32^0 \quad q = 0{,}5007 r$$
$$34^0 \quad q = 0{,}5073 r$$
$$36^0 \quad q = 0{,}5103 r$$
$$37\tfrac{1}{2}{}^0 \quad q = 0{,}5106 r$$
$$38^0 \quad q = 0{,}5103 r$$
$$40^0 \quad q = 0{,}5074 r$$
$$42^0 \quad q = 0{,}5021 r$$
$$44^0 \quad q = 0{,}4946 r$$
$$45^0 \quad q = 0{,}4901 r.$$

Die gröſste Differenz der Subnormalen beträgt also nur circa $0{,}02 r$, und da sich die Umdrehungszahlen umgekehrt verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Subnormalen (No. 96), so wird, während das Massenelement auf diesem Bogen sich befindet, die Zahl der Umdrehungen, bei welchen es im Gleichgewicht ist, höchstens zwischen n und $n\sqrt{\frac{0{,}5106}{0{,}4901}} = 1{,}02 n$ variiren können.

Es ist übrigens hervorzuheben, dafs diese Betrachtungen nur zulässig sind, wenn a positiv ist, d. h. wenn die Rotationsaxe zwischen dem Mittelpunkt des Kreisbogens und dem Massenelement angenommen wird. Nimmt man sie auf der entgegengesetzten Seite, so ist immer:

$$q = r \cdot \cos\alpha + a \cdot \operatorname{cotg}\alpha$$
$$= \cos\alpha\left(r + \frac{a}{\sqrt{(1 - \cos\alpha^2)}}\right);$$

es ändert sich also q in demselben Sinn, wie $\cos\alpha$, und es können daher nie für zwei Winkel von verschiedenen Cos. gleiche Subnormalen statt finden.

c) Wirkung mehrer mechanischen Kräfte auf ein festes System von Massenelementen.

Festes System.

§ 63. Unter einem festen System von Massenelementen verstehen wir zwei oder mehre Massenelemente, welche in fester Verbindung (Th. I. § 3) mit einander stehen, die folglich mit einander so zusammenhängen, dafs sich keines unabhängig von dem andern bewegen kann, und deren Abstand unter einander daher stets unverändert bleibt, wie sich auch der Abstand der einzelnen Elemente von andern, nicht zu dem System gehörigen Punkten ändern mag (§ 12).

Jeder feste Körper stellt hiernach ein festes System von Massenelementen dar, so lange man von der Formänderung, welche er durch äufsere Kräfte erleiden kann, absieht.

Ein Massenelement, welches sich vollkommen unabhängig von andern Massenelementen bewegen kann, welches also keinem festen System angehört, nennen wir frei.

Innere Kräfte eines festen Systems — Festigkeit.

§ 64. Wirkt eine Kraft auf ein zu einem festen System gehöriges Massenelement, so hat sie im Allgemeinen das Bestreben, den Abstand desselben von den übrigen Elementen des Systems zu ändern; da aber eine solche Aenderung nicht statt finden kann, so lange das System ein festes bleiben soll, so mufs dies Bestreben durch eine Gegenkraft aufgehoben werden. Es mufs also der Druck der äufserlich auf das Massenelement wirkenden Kraft durch einen Gegendruck, welcher dem ersten der Gröfse nach gleich aber der Richtung nach entgegengesetzt ist, im Gleichgewicht gehalten werden (§ 19). Diesen Gegendruck schreiben wir analog der Betrachtung in § 36 einer innern Kraft des Systems zu. Wir nennen diese innere Kraft die Festigkeit des Systems.

Unter der Festigkeit eines festen Systems verstehen wir also überhaupt diejenigen Kräfte, welche sich der Aenderung des gegenseitigen Abstandes der einzelnen Elemente des Systems entgegensetzen.

Die Festigkeit eines Systems wird durch jeden äufsern Druck, welcher auf dasselbe wirkt, in Anspruch genommen, sie ist immer als eine diesem Druck gleich grofse, aber in entgegengesetzter Richtung wirkende Reaktion anzusehen, welche in dem Punkte wirksam zu denken ist, in welchem die Richtung des äufsern Druckes das System trifft. Von der Richtung dieses Druckes gegen die Elemente des festen Systems, und von der Lage und der Beschaffenheit dieser letzten ist es abhängig, in welcher Weise auch die übrigen Punkte des Systems sich an der durch jenen äufsern Druck hervorgerufenen Reaktion betheiligen. Jenachdem diese Betheiligung eine verschiedene ist, pflegt man der Festigkeit verschiedene Bezeichnungen beizulegen, als absolute, relative etc. (Vergl. I. S. 193). Sind die äufsern Drucke so grofs, dafs die innern Kräfte des Systems ihnen nicht mehr das Gleichgewicht halten können, so erfolgt eine Aenderung des gegenseitigen Abstandes der einzelnen Elemente, oder mit andern Worten eine Formänderung des Systems. Bei dieser Formänderung nehmen zuweilen die innern Kräfte des Systems zu, und es tritt dann in gewissen Fällen endlich ein Augenblick ein, in welchem sie den äufsern Kräften wiederum das Gleichgewicht halten. Hört die Wirkung der äufsern Kräfte auf, so stellt sich die ursprüngliche gegenseitige Lage der Elemente entweder vollkommen, oder theilweise, oder gar nicht wieder her. Man sagt dann, das System sei vollkommen, unvollkommen elastisch, oder unelastisch. Sind die äufsern Kräfte so grofs, dafs die innern Kräfte des Systems ihnen überhaupt nicht das Gleichgewicht halten können, so erfolgt eine Zerstörung des festen Systems, entweder nachdem zuvor eine Formveränderung mit Zunahme der innern Kräfte in der eben besprochenen Weise statt gefundenen hat (zähes System), oder, ohne dafs vorher irgend welche Formveränderung erfolgt ist (sprödes System).

Bei den folgenden Untersuchungen dieses Abschnittes setzen wir immer voraus, dafs wir es mit einem absolut festen System zu thun haben, abstrahiren also ganz von der Möglichkeit einer Formveränderung, oder einer Zerstörung des Systems durch die auf dasselbe wirkenden Kräfte.

Allgemeine Gesetze für die Bewegung eines festen Systems. — Fortschreitende und drehende Bewegung.

§ 65. Bewegt sich ein festes System unter dem Einfluſs beliebiger Kräfte, so haben entweder alle Massenelemente desselben gleiche Geschwindigkeit, oder sie haben verschiedene Geschwindigkeiten, doch stehen in diesem Fall die Geschwindigkeiten in einem bestimmten abhängigen Verhältniſs zu einander; denn, da die Elemente des Systems ihren gegenseitigen Abstand nicht ändern können, so kann das Wegelement eines Massenelementes in einem Zeitelement nicht unabhängig sein von dem Wegelement, welches jedes der anderen Massenelemente in derselben Zeit zurücklegt.

Sind die Geschwindigkeiten aller Massenelemente in einer gewissen Zeit unter sich stets gleich groſs und haben sie auch einerlei Richtung, so schreiten die sämmtlichen Massenelemente in parallelen geraden Linien fort, und umgekehrt. Sind dagegen die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenelemente während einer gewissen Zeit nicht gleich groſs, oder sind sie zwar gleich groſs, aber ihre Richtungen sind entgegengesetzt, so bewegen sich sämmtliche Massenelemente in Kurven. Da aber die Massenelemente dabei ihren gegenseitigen Abstand nicht ändern dürfen, so müssen auch die in irgend einem Augenblick von ihnen beschriebenen Kurvenelemente überall denselben Abstand von einander behalten, also entweder äquidistant sein, oder zusammenfallen. Dies ist nicht anders denkbar, als wenn die gleichzeitig durchlaufenen Kurvenelemente sämmtlich aus ein und demselben Punkte beschrieben werden können, wobei jedoch nicht ausgeschlossen bleibt, daſs dieser Punkt in demselben Zeitelement selbst fortrückt. Denn: denken wir uns irgend ein Massenelement des Systems, und es sei der Weg desselben in dem betrachteten Zeitelement irgend ein beliebiges Kurvenelement, denken wir uns sodann den Mittelpunkt des Krümmungskreises dieses Kurvenelements, und nehmen an, dieser Mittelpunkt sei mit dem System fest verbunden, so dürfen die Abstände aller übrigen Massenelemente von diesem fest verbundenen Punkte sich bei der Bewegung nicht ändern. Nun erscheint aber der Mittelpunkt jenes Krümmungskreises für den Augenblick, in welchem jenes zuerst betrachtete Massenelement sein Kurvenelement durchläuft, als fester Punkt, um welchen die Drehung erfolgt, und da alle übrigen Massenelemente in demselben Augenblick ihren Abstand von jenem Mittelpunkt nicht ändern dürfen, so müssen sie unter allen Umständen in diesem Augenblicke Bogenelemente aus demselben Mittelpunkt beschreiben. Aber die Massenelemente dürfen auch ihren Abstand unter einander nicht ändern. Dazu gehört zweierlei, nämlich:

a) die Bogenelemente, welche die einzelnen Massenelemente bei jener Bewegung beschreiben, müssen entweder in ein und derselben Ebene, oder in parallelen Ebenen liegen, und

b) die Bogenelemente müssen sämmtlich mit derselben Winkelgeschwindigkeit durchlaufen werden. Dies läfst sich leicht einsehen, wenn man beachtet, dafs, falls diese beiden Bedingungen für irgend ein Element nicht erfüllt werden, dasselbe nothwendiger Weise eine Verschiebung gegen die übrigen erleiden werde.

Denken wir nun die Ebene des Krümmungskreises für das zuerst betrachtete Bahnelement, so müssen alle übrigen Bahnelemente nach der Bedingung a) entweder in dieser Ebene, oder in solchen Ebenen liegen, welche mit derselben parallel sind. Errichten wir im Mittelpunkt des zuerst betrachteten Krümmungskreises eine Normale zu der Ebene desselben, so erscheinen offenbar im Allgemeinen die Wegelemente sämmtlicher Massenelemente als Bögen, welche den Peripherien der Grundflächen von Kegeln angehören, deren gemeinschaftliche Axe die eben betrachtete Normale, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunkt des zuerst betrachteten Krümmungskreises ist, und deren Grundflächen in jenen parallelen Ebenen liegen. Das heifst nichts anders, als es fallen die Wegelemente sämmtlicher Massenelemente mit Kreisbögen zusammen, welche aus den Punkten beschrieben werden, in welchen jene Normale die betreffenden Parallelebenen schneidet. Die Kreise, mit deren Bögen die Wegelemente zusammenfallen, sind aber auch die Krümmungskreise der Wegelemente, und es folgt daraus, dafs die Mittelpunkte sämmtlicher Krümmungskreise der einzelnen Wegelemente nicht nur in parallelen Ebenen, sondern auch in ein und derselben geraden Linie liegen müssen, welche normal ist zu jenen parallelen Ebenen. Diese gerade Linie heifst die Drehungsaxe des Systems. Da übrigens das zuerst betrachtete Massenelement ein beliebiges war, so mufs der Mittelpunkt des Krümmungskreises jedes anderen Massenelementes dieselben Eigenschaften haben, und schon hieraus folgt der eben entwickelte Satz, denn nur in dem Fall, wo die Mittelpunkte sämmtlicher Krümmungskreise in derselben geraden Linie liegen, lassen sich sämmtliche Wegelemente als Bogenstücke von den Peripherien der Grundflächen normaler Kegel auffassen, deren gemeinschaftliche Axe diese gerade Linie, und deren gemeinschaftliche Spitze ein beliebiger Punkt dieser geraden Linie ist.

Im nächsten Augenblick kann der Punkt, aus welchem wir die sämmtlichen Wegelemente beschrieben dachten, noch derselbe sein, oder er kann seine Lage geändert haben, d. h. jener Punkt kann, während die Massenelemente des Systems um ihn eine Drehung machen, selbst fortrücken. Geschieht dies Fortrücken immer in derselben Ebene, in welcher der zuerst betrachtete Krümmungskreis liegt, so beschreibt das zuerst betrachtete Massenelement, und folglich auch alle übrigen ebene Kurven. Die Drehungsaxe des Systems rückt dabei parallel mit ihrer ursprünglichen Lage fort. Schreitet der Punkt, um welchen wir die Drehung erfolgend denken, so fort, dafs er nicht stets in jener Ebene bleibt, so beschreiben sämmtliche Massenelemente Kurven von doppelter Krümmung, dabei schreitet die Axe so fort, dafs sie fortwährend andere Winkel mit ihrer ursprünglichen Lage macht.

Aus diesen Darstellungen folgt nun folgendes Gesetz:

Wenn ein festes System sich bewegt, und die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenelemente sind der Richtung und Gröfse nach in irgend einem Augenblick **nicht** gleich, so läfst sich die Bewegung immer so auffassen, als ob sämmtliche Massenelemente in diesem Augenblick eine Drehung um ein und dieselbe Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit und in parallelen Ebenen machten, während diese Axe gleichzeitig nach irgend einem Gesetz fortrückt. Es ist dabei nicht ausgeschlossen, dafs eine dieser beiden Bewegungen Null sein könne.

Ferner ergeben sich folgende Gesetze:

1) Ist der Weg, welchen ein Massenelement macht, gegeben, und ist auch die Lage der übrigen Massenelemente des Systems gegen dieses Element bekannt, so ist der Weg aller übrigen Massenelemente bestimmt;

2) Aendert sich in irgend einem Augenblick die Geschwindigkeit eines Massenelements des festen Systems, so ändern sich gleichzeitig die Geschwindigkeiten aller übrigen Elemente, und

3) Bleibt in irgend einem Augenblick die Geschwindigkeit irgend eines Elements des festen Systems ungeändert, so bleibt die Geschwindigkeit aller übrigen Elemente des Systems ungeändert.

Aus dem oben entwickelten Gesetz ergiebt sich, dafs wenn ein festes System in Bewegung ist, im Allgemeinen jedes Massenelement gleichzeitig zwei Bewegungen mache, nämlich:

1) eine drehende Bewegung um eine gemeinschaftliche Axe mit einer allen Massenelementen gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit, und
2) eine fortschreitende Bewegung, welche alle Massenelemente mit der Axe gemeinschaftlich besitzen, und deren Wegelemente für alle Massenelemente gleich grofs und parallel sind.

Diese beiden gleichzeitig erfolgenden Bewegungen können wir immer hervorgebracht denken durch Kräfte, welche auf die einzelnen Massenelemente in entsprechenden Richtungen wirken, und indem wir den Grundsatz 1. des § 24 anwenden, können wir diese beiden gleichzeitig erfolgenden Bewegungen auch so auffassen, als ob sie innerhalb der Dauer eines Zeitelementes nach einander statt fänden, wobei es dann gleichgiltig ist, ob wir die fortschreitende Bewegung oder die drehende Bewegung als die zuerst erfolgende ansehen wollen.

Angriffspunkt einer Kraft. — Auf ein festes System angebrachte, und in einem festen System thätige Kräfte.

§ 66. Es ist hier ein sehr wesentlicher Unterschied hervorzuheben, welcher zwischen der Bewegung eines freien Massenelements und der Bewegung eines Massenelements, welches einem festen System angehört, statt findet. Ein freies Massenelement kann den Kräften, die auf dasselbe wirken, immer frei folge und die Bahn desselben ist daher nur von diesen Kräften abhängig (vergl. § 37. S. 42); ein Massenelement, welches einem festen System angehört, kann dagegen nicht der Einwirkung der Kräfte, welche dasselbe in Anspruch nehmen, frei folgen, sondern seine Bahn ist auch bedingt durch den Zusammenhang mit den übrigen Elementen desselben Systems, und es ist durch diesen Zusammenhang gezwungen, jenen oben angedeuteten Bewegungsgesetzen zu folgen. Wie also auch die Kräfte beschaffen sein mögen, die auf die verschiedenen Massenelemente eines festen Systems wirken, das Resultat ihrer Wirkung wird immer jene fortschreitende und gleichzeitig drehende Bewegung der einzelnen Massenelemente sein.

Derjenige Punkt eines festen Systems, in welchem wir eine Kraft wirksam denken, heifst der Angriffspunkt dieser Kraft.

Denken wir uns beliebige Kräfte in verschiedenen Angriffspunkten auf ein System wirkend, und denken wir, dafs durch den Einflufs dieser Kräfte das System sich bewegt, so wird dieselbe Bewegung auch hervorgebracht werden können, wenn anstatt jener in den verschiedenen Angriffspunkten wirkenden Kräfte andere Kräfte in jedem einzelnen Massenelement des Systems thätig wären; nämlich solche Kräfte, welche jedem Massenelement während des betrachteten Zeitelementes zuerst eine bestimmte fortschreitende und dann eine bestimmte drehende Bewegung (oder auch in umgekehrter Folge) ertheilen. Wir können also immer für die Wirkung der in verschiedenen Angriffspunkten beliebig auf das System wirkenden Kräfte zwei Reihen anderer Kräfte substituiren (§ 35. No. 3), die in jedem einzelnen Massenelement als thätig zu denken sind, so dafs die eine Reihe von Kräften jedem Massenelement eine gemeinschaftliche mit gleicher Geschwindigkeit und in parallelen Richtungen erfolgende fortschreitende Bewegung ertheilt, während die andere Reihe von Kräften jedem Massenelement eine Drehung um eine gemeinschaftliche Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit, und in einer zu dieser Axe normalen Ebene ertheilt.

Die beliebigen in verschiedenen Angriffspunkten des festen Systems wirkenden Kräfte nennen wir „auf das System wirkende oder angebrachte Kräfte", und wenn wir für dieselben in der eben angedeuteten Weise andere Kräfte substituiren, die in jedem einzelnen Massenelement thätig gedacht, demselben die Bewegung ertheilen würden, welche es wirklich erleidet, so nennen wir diese substituirten Kräfte „die in dem System thätigen oder lebendigen Kräfte". Die in dem System thätigen Kräfte lassen sich immer zerlegen in die Kräfte der fortschreitenden und in diejenigen der drehenden Bewegung.

Nun können wir nach § 35 und 36 und nach § 64 den Fall immer so auffassen, als würden sämmtliche auf das feste System angebrachte Kräfte durch innere Kräfte des Systems, die ihnen der Richtung nach gleich, aber entgegengesetzt sind, im Gleichgewicht gehalten, und als wirkten die in dem System thätigen Kräfte allein frei auf die einzelnen Massenelemente ein.

Um nun die Gesetze, nach welchen die Wirkung von Kräften auf ein festes System erfolgt, zu ermitteln, wollen wir zunächst die auf ein System angebrachten Kräfte, dann die in dem System thätigen Kräfte einer nähern Betrachtung unterziehen.

Von den auf ein festes System angebrachten Kräften.

Vollkommenes, unvollkommenes Gleichgewicht — Gegenkraft, Mittelkraft (Resultirende) mehrer auf ein festes System wirkenden Kräfte.

§ 67. Wirken beliebige Kräfte auf ein festes System, so ertheilen sie im Allgemeinen jedem Punkte desselben, wie wir oben gesehen haben, eine fortschreitende und eine drehende Bewegung. Wir sagen, die Kräfte, welche auf ein System wirken, seien in irgend einem Augenblick in vollkommenem Gleichgewicht, wenn sie dem System keine Bewegung, oder den einzelnen Massenelement keinen Geschwindigkeitszuwachs in diesem Augenblick ertheilen. Wenn dagegen die Kräfte dem System zwar keine fortschreitende, aber eine drehende Bewegung ertheilen, oder wenn sie zwar keine drehende, aber eine fortschreitende Bewegung bewirken, so sagen wir, es finde theilweises oder unvollkommenes Gleichgewicht statt, und bezeichnen den erstgenannten Fall als Gleichgewicht gegen fortschreitende, den andern Fall als Gleichgewicht gegen drehende Bewegung.

Sind mehre Kräfte, welche auf ein System wirken, nicht im Gleichgewicht, und es kann eine neue Kraft auf das System wirkend gedacht werden, durch deren Einwirkung Gleichgewicht statt finden würde, so nennen wir diese Kraft die Gegenkraft des Systems von Kräften. Denken wir in dem Angriffspunkt der Gegenkraft eine Kraft wirkend, welche derselben der Richtung nach gleich aber entgegengesetzt ist, so nennen wir diese die Mittelkraft, oder die Resultirende des ganzen Systems; denn offenbar würde die Wirkung der einzelnen in den verschiedenen Angriffspunkten wirkenden Kräfte durch die Wirkung dieser Mittelkraft substituirt werden können, das heifst, es würde die Wirkung auf das feste System dieselbe bleiben, wenn wir anstatt der einzelnen Kräfte die Mittelkraft in dem bestimmten Angriffspunkt allein wirksam denken.

Es folgt aus dieser Darstellung jedoch durchaus nicht, dafs für jedes feste System, auf welches beliebige Kräfte einwirken, jedesmal nur **eine** Mittelkraft wirklich denkbar sei; es kann vielmehr die fortschreitende Bewegung des Systems eine andere und in einem andern Angriffspunkt wirksame Gegenkraft bedingen, als die drehende Bewegung, ja es läfst sich oft die drehende Bewegung, welche die Kräfte dem System ertheilen, gar nicht durch eine einzige Gegenkraft im Gleichgewicht erhalten. Wir können demgemäfs unterscheiden eine Resultirende der fortschreitenden Bewegung, und eine Resultirende der drehenden Bewegung des Systems, indem wir unter jener eine solche Kraft verstehen, die, wenn sie in entgegengesetzter Richtung in ihrem Angriffspunkte wirkte, Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung, und unter der letztgenannten eine solche Kraft verstehen, welche, wenn sie an ihrem Angriffspunkt in entgegengesetzter Richtung wirkte, Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen würde.

Grundsätze für die Wirkung mehrer auf ein festes System angebrachten Kräfte.

§ 68. Bevor wir auf die Bestimmung der Resultirenden der Gröfse und Richtung nach eingehen, stellen wir zunächst folgende Grundsätze auf:

1) Wenn die sämmtlichen auf ein festes System wirkenden Kräfte in ihren Angriffspunkten einzeln im Gleichgewicht sind, so ist das ganze System im vollkommenen Gleichgewicht.

In diesem Falle ist nämlich überhaupt keine mechanische Wirkung auf irgend einen Punkt des Systems vorhanden.

2) Wenn die auf ein festes System wirkenden Kräfte in ihren Angriffspunkten nicht im Gleichgewicht sind, so erfolgt Bewegung des ganzen Systems; die Angriffspunkte der Kräfte legen dabei in irgend einem Augenblicke gewisse Wegelemente zurück; soll nun die Gegenkraft im Stande sein, in dem System Gleichgewicht herzustellen, so mufs nach den ersten Prinzipien von der Wirkung der Kräfte, die Wirkungsgröfse der Gegenkraft gleich und entgegengesetzt sein der Summe sämmtlicher Wirkungsgröfsen, welche sich bilden, indem man in jedem Angriffspunkt den resultirenden Druck (§ 46. S. 54) der in demselben wirkenden Kräfte für die Richtung, nach welcher die Bewegung des Angriffspunktes erfolgt, bestimmt, und diesen Druck mit dem Wegelemente, welches der Angriffspunkt bei der Bewegung durchläuft, multiplicirt (§ 22. S. 27). Dabei ist wohl zu beachten, dafs jedes Produkt negativ zu nehmen ist, für welches der Weg, den der Angriffspunkt durchläuft, der Richtung, in welcher der resultirende Druck für diesen Angriffspunkt wirkt, entgegengesetzt ist, vorausgesetzt nämlich, dafs man diejenigen Produkte positiv nimmt, für welche die Richtung des resultirenden Drucks mit der Richtung, in welcher die Bewegung erfolgt, zusammenfällt.

Dieses wichtige Gesetz haben wir hier als **Grundsatz** aufgestellt. Es bedarf auch in der That keines Beweises, da es unmittelbar aus der Betrachtung fliefst, dafs die Wirkung irgend einer Kraft nur durch eine eben so grofse und entgegengesetzte Wirkung aufgehoben werden kann, dafs ferner, wenn das System eine Bewegungsänderung erführe, dies nur durch die in den einzelnen Angriffspunkten wirksamen Kräfte geschehen könne; und dafs endlich die Wirkungsgröfsen dieser Kräfte nach den Richtungen hin, nach welchen sie ihre Angriffspunkte wirklich bewegen, sich summiren müssen.

Anwendung des Prinzips der virtuellen Wege auf Kräfte, die auf ein festes System wirken.

§ 69. Bezeichnet nun K den Druck der Resultirenden für irgend eine der Bewegungen, welche das System annehmen kann; dS das Wegelement, welches der Angriffspunkt dieses Drucks durchlaufen mufs, K', K'', K'''.... seien die resultirenden Drucke für verschiedene Angriffspunkte nach der Richtung, in welcher die Bewegung des Systems erfolgt, und ds', ds'', ds''' seien die Wegelemente, welche sie bei dieser Bewegung durchlaufen, so ist offenbar in Folge des Gesetzes No. 2 in § 68:

$$101)\quad K \,.\, dS = K' \,.\, ds' + K'' \,.\, ds'' + K''' \,.\, ds''' + \ldots = \Sigma(K' \,.\, ds'),$$

folglich:

$$101\,a)\quad \Sigma(K' ds') - K \,.\, dS = 0,$$

welche Gleichung den Fall des Gleichgewichts bezeichnet, indem $-K \,.\, dS$ das Leistungselement der Gegenkraft ausdrückt. — Diese Gleichungen gelten übrigens ganz **allgemein**, sowohl **wenn das System eine fortschreitende** Bewegung erfährt, als auch für eine **drehende Bewegung**, wenn nämlich dS, ds'.... die unendlich kleinen Wege sind, welche durch Drehung durchlaufen werden, und welche immer für ein Zeitelement als geradlinigt betrachtet werden können.

Nun läfst sich aber für jeden Angriffspunkt das Gesetz der virtuellen und reellen Wege anwenden § 46. S. 54. Nehmen wir nämlich in der Richtung der resultirenden Drucke, welche in den verschiedenen Angriffspunkten wirksam sind, beliebige Abstände von den Angriffspunkten selbst, und es seien a', a'', a'''.... diese Abstände, denken wir nun, K' sei der resultirende Druck von einer Menge anderer Drucke $K'_{\prime}$, $K'_{\prime\prime}$, $K'_{\prime\prime\prime}$...., die in demselben Angriffspunkte wirken, und wir projiciren den Abstand a' auf die Richtungen dieser Drucke, so dafs $a'_{\prime}$, $a'_{\prime\prime}$, $a'_{\prime\prime\prime}$.... die Projektionen werden; mit den übrigen Drucken, welche in den andern Angriffspunkten wirken, machen wir es ebenso, dann folgt nach Gleichung 82):

$$K'a' = K'_{,}a'_{,} + K'_{,,}a'_{,,} + K'_{,,,}a'_{,,,} + \dots = \Sigma(K'_{,}a'_{,}),$$

$$K' = \Sigma\left(\frac{K'_{,}a'_{,}}{a'}\right),$$

setzen wir diesen Werth in die Gleichung **101)**, so folgt:

$$102)\ K.dS = \Sigma\left(K'_{,}a'_{,}.\frac{ds'}{a'}\right).$$

Da der Abstand a' ein beliebiger ist, so können wir auch $a' = ds'$, d. h. wir können a' für jeden Angriffspunkt gleich dem Wegelement dieses Angriffspunkts nehmen, bezeichnen wir dann die Projektion des Wegelements ds' auf die Richtung der verschiedenen in demselben Angriffspunkt wirkenden Kräfte mit $ds'_{,}$, $ds'_{,,}\dots$, so folgt:

$$103)\ K.dS = \Sigma(K'_{,}ds'_{,}).$$

Diese Gleichung lehrt das Prinzip der virtuellen Wege auf Kräfte anwenden, welche auf ein festes System wirken. Sie heifst in Worten:

> Wenn auf ein festes System beliebige Kräfte einwirken, und das System erleidet in irgend einem Augenblick eine unendlich kleine Bewegung, gleichviel wie dieselbe beschaffen ist, so ist das Produkt aus dem Druck der Resultirenden in das Wegelement ihres Angriffspunkts gleich der Summe der Produkte, welche man erhält, indem man jeden einzelnen Druck, der auf das System wirkt, multiplizirt mit der Projektion des Wegelements (welches sein Angriffspunkt bei dieser Bewegung durchläuft) auf die Richtung des Drukkes; wobei die Vorzeichen nach § 49 zu bestimmen sind.

Für den Zustand des Gleichgewichts gilt die Gleichung 101 a):

$$\Sigma(K'ds') - K.dS = 0,$$

oder da KdS hier keine andere Rolle spielt, als $K'ds'$ etc. auch:

$$104)\ \Sigma(K.dS) = 0,$$

und es folgt, wie sich für diesen Fall sehr leicht entwickeln läfst, das Gesetz in folgender Form:

> Wenn auf ein festes System beliebig viel Kräfte wirken, und dieselben sind im Gleichgewicht, so mufs, wenn man dem ganzen System eine beliebige unendlich kleine, sei es fortschreitende

oder drehende Verrückung ertheilt, die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jeden einzelnen Druck mit der Projektion des Wegelements (welches sein Angriffspunkt bei dieser Verrückung durchläuft) auf die Richtung der einzelnen Drucke multiplizirt, gleich Null sein.

In allen Fällen, wo die in endlichen Zeiten durchlaufenen Wege der Angriffspunkte sich verhalten, wie die unendlich kleinen Wege, gilt das Gesetz auch für endliche Verrückungen des festen Systems.

Suchen wir nunmehr die eben entwickelten allgemeinen Gesetze auf besondere Fälle anzuwenden, und daraus Folgerungen zu ziehen, welche in vielen Fällen die Betrachtung vereinfachen.

Bedingungen des Gleichgewichtes für Kräfte, die auf ein festes System wirken.

§ 70. Wirken beliebig viele Kräfte auf ein festes System, und es soll vollkommenes Gleichgewicht statt finden, so müssen nach § 67 zwei Bedingungen erfüllt werden:

1) Es mufs für jede fortschreitende Bewegung die Leistung der Resultirenden Null sein; und:
2) Es mufs für jede drehende Bewegung die Leistung der Resultirenden Null sein.

Es mufs also die Gleichung 104) sowohl für jede fortschreitende Bewegung, als auch für jede drehende Bewegung erfüllt werden. Wird nur eine von beiden Bedingungen erfüllt, so ist unvollkommenes Gleichgewicht vorhanden.

Sind beliebige Kräfte, die auf ein festes System wirken, im Gleichgewicht, so läfst sich jede als die Gegenkraft aller übrigen ansehen. (Vergl. §. 35. No. 2).

Um zu zeigen, dafs die Leistung für jede beliebige Richtung in Bezug auf fortschreitende Bewegung gleich Null ist, genügt es, zu zeigen, dafs sie für drei zu einander normale Richtungen gleich Null ist, und um zu zeigen, dafs die resultirende Leistung für jede beliebige Drehung gleich Null sei, genügt es zu zeigen, dafs sie für drei zu einander normale Axen gleich Null sei. (Vergl. § 48. S. 58).

Wenn nach irgend einer Richtung keine fortschreitende Bewegung statt finden soll, so mufs, wenn K, K', K'', K''' .... die resultirenden Drucke für diese Richtung, ds, ds', ds'' ... aber die

Wegelemente sind, welche von den Angriffspunkten gleichzeitig durchlaufen werden, zufolge Gleichung 104) sein für diese Richtung:

$$\Sigma(K . ds) = 0,$$

nun sind bei der fortschreitenden Bewegung die Wegelemente der einzelnen Angriffspunkte alle gleich grofs (§ 65. S. 88), es folgt also als Bedingung für das Gleichgewicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung nach irgend einer Richtung:

$$105)\ \Sigma(K) = 0,$$

d. h. es mufs die Summe sämmtlicher resultirenden Drucke für diese Richtung gleich Null sein.

Wenn in Bezug auf drehende Bewegung um irgend eine Axe Gleichgewicht vorhanden sein soll, so mufs auch die Gleichung 104) erfüllt werden. Nennen wir $R_{\prime}$, $R_{\prime\prime}$, $R_{\prime\prime\prime}$ ... die Halbmesser der Krümmungskreise der Wegelemente, welche die einzelnen Angriffspunkte bei der Drehung um jene Axe beschreiben würden, oder, was dasselbe sagt, die normalen Abstände der Angriffspunkte von der Drehungsaxe, $K_{\prime}$, $K_{\prime\prime}$, $K_{\prime\prime\prime}$ .... die resultirenden Drucke nach der Richtung der Wegelemente, welche die Angriffspunkte durchlaufen würden, und bemerken wir, dafs die einzelnen Wegelemente sich ausdrücken durch $ds_{\prime} = C' . dt$, wenn C'... die Geschwindigkeiten bedeuten (Gleichung 24. S. 17) oder, da $C' = wR_{\prime}$ (Gleichung 80. S. 51) wenn w ... die Winkel-Geschwindigkeiten bezeichnen, durch $ds_{\prime} = wR_{\prime} dt$, so folgt für die Gleichung 104) in Bezug auf Drehung folgende Gestalt:

$$\Sigma(K_{\prime} ds_{\prime}) = \Sigma(K_{\prime} wR_{\prime} dt) = 0,$$

und da dt ein gemeinschaftlicher Faktor, w aber ebenfalls allen Summanden gemeinschaftlich ist, insofern alle Angriffspunkte sich nur mit derselben Winkel-Geschwindigkeit bewegen können (§. 65. S. 86), so folgt als Bedingung des Gleichgewichts in Bezug auf Drehung um irgend eine Axe:

$$106)\ \Sigma(K_{\prime} R_{\prime}) = 0,$$

worin $K_{\prime}$ den resultirenden Druck in jedem Angriffspunkt bezeichnet, in einer Richtung, welche in einer durch den Angriffspunkt gehenden, zur Drehaxe normalen Ebene liegt, und zu dem Halbmesser $R_{\prime}$ normal ist.

Zerlegt man die sämmtlichen in ein und demselben Angriffspunkt wirkenden Drucke nach zwei Richtungen, von denen eine parallel mit der angenommenen Drehaxe ist, die andere aber in jene normale Ebene fällt, so erscheint offenbar der Druck $K_{\prime}$ auch als der resultirende Druck aus allen diesen in der genannten Ebene liegenden Drucken, und das Produkt $K_{\prime} R_{\prime}$ erscheint als das statische

Moment dieses resultirenden Druckes (§ 50. S. 60). Es gilt dann das Gesetz des § 51, d. h. man kann setzen:

$$K_{\prime}R_{\prime} = \Sigma(K_{\prime}'R_{\prime}'),$$

wenn man unter $K_{\prime}'$, $K_{\prime}''$, $K_{\prime}'''$.... die Komponenten sämmtlicher in demselben Angriffspunkt wirkender Kräfte in Bezug auf eine, zur Drehaxe normale Ebene versteht, und wenn $R_{\prime}'$, $R_{\prime}''$, $R_{\prime}'''$ etc. die Hebelsarme dieser Komponenten, oder die Normalen bezeichnen, welche man von dem Durchschnittspunkt der Drehaxe mit der Ebene auf die Richtung der Drucke $K_{\prime}'$, $K_{\prime}''$, $K_{\prime}'''$.... ziehen kann. Demnächst geht die Gleichung 106) über in:

$$106\text{a)}\quad \Sigma(K_{\prime}'R_{\prime}') = 0,$$

d. h. wenn in Bezug auf Drehung um eine gewisse Axe Gleichgewicht bestehen soll, und man zerlegt die sämmtlichen in den einzelnen Angriffspunkten wirkenden Kräfte nach je zwei Richtungen, von denen die einen parallel mit der Drehaxe sind, die andern aber in Ebenen liegen, welche normal zu der Drehaxe sind und durch den Angriffspunkt der einzelnen Kräfte gehen, so mufs die Summe der statischen Momente dieser letztgenannten Komponenten in Bezug auf die Durchschnittspunkte ihrer Ebenen mit der Drehaxe gleich Null sein.

Nun ist aber zu bemerken, dafs der Hebelsarm $R'_{\prime}$ die Normale ist, welche man von der Drehaxe auf die in der zur Drehaxe normalen Ebene liegende Komponente ziehen kann, diese Normale giebt aber zugleich den Abstand einer Ebene, welche mit der Drehaxe parallel ist, und durch die Komponente geht; in dieser hier erwähnten Ebene liegt aber auch die ursprüngliche Kraftrichtung, da ja diese Kraftrichtung mit ihren Komponenten in einer und derselben Ebene liegen mufs, die eine Komponente aber die eben erwähnte, die andere dagegen mit der Drehaxe parallel ist; es stellt also die Normale $R'_{\prime}$ den Abstand der Drehaxe von einer Ebene dar, welche mit derselben parallel durch die ursprüngliche Kraftrichtung gelegt ist, oder mit andern Worten, es ist der Hebelsarm $R'_{\prime}$ der Komponente, welche auf Drehung um irgend eine Axe wirkt, nichts anders, als die k ü r z e s t e E n t f e r n u n g der ursprünglichen Kraftrichtung von dieser Drehaxe.

Nach diesen Darstellungen ist es nun nicht schwer die Bedingungen für das v o l l k o m m e n e G l e i c h g e w i c h t mehrer auf ein festes System wirkender Kräfte aufzustellen.

Zunächst denken wir ein festes Axensystem, es seien α, β, γ; α', β', γ' etc. die Winkel, welche die in den verschiedenen Angriffspunkten wirksamen Kräfte mit den Axen bilden. Die resultirenden Drucke in dem ersten Angriffspunkt nach der Richtung der ersten Axe sind dann $\Sigma(K.\cos\alpha)$, im zweiten Angriffspunkt $\Sigma(K'.\cos\alpha')$, im dritten $\Sigma(K''.\cos\alpha'')$ etc., ebenso lassen sich die in den einzelnen Angriffspunkten wirkenden resultirenden Drucke für die beiden andern Axen bestimmen, und es folgt aus der Gleichung 105) als Bedingung des Gleichgewichts gegen fortschreitende Bewegung:

$$107)\ \begin{cases} \Sigma(K.\cos\alpha) = 0 \\ \Sigma(K.\cos\beta) = 0 \\ \Sigma(K.\cos\gamma) = 0. \end{cases}$$

Die Komponenten der Kräfte in Ebenen, welche zu den angenommenen Axen normal sind, drücken sich aus durch $K.\sin\alpha$, $K'.\sin\alpha'$, $K''.\sin\alpha''\ldots$ für die Ebenen normal zur ersten Axe; durch $K.\sin\beta\ldots$ und durch $K.\sin\gamma\ldots$ für die Ebenen normal zur zweiten und dritten Axe, und es folgt für die Bedingung des Gleichgewichts gegen drehende Bewegung aus Gleichung 106a) für alle drei Axen:

$$108)\ \begin{cases} \Sigma(K.\sin\alpha.R_{\prime}) = 0 \\ \Sigma(K.\sin\beta.R_{\prime\prime}) = 0 \\ \Sigma(K.\sin\gamma.R_{\prime\prime\prime}) = 0, \end{cases}$$

worin $R_{\prime}$, $R_{\prime\prime}$, $R_{\prime\prime\prime}$ die kürzesten Entfernungen der Richtungslinien der einzelnen Kräfte von der ersten, zweiten und dritten Axe bezeichnen.

Die Gleichungen 107 und 108):

$$\Sigma(K.\cos\alpha) = 0;\quad \Sigma(K.\cos\beta) = 0;\quad \Sigma(K.\cos\gamma) = 0,$$

und

$$\Sigma(K.\sin\alpha.R_{\prime}) = 0;\quad \Sigma(K.\sin\beta.R_{\prime\prime}) = 0;\quad \Sigma(K.\sin\gamma.R_{\prime\prime\prime}) = 0$$

stellen sechs Bedingungs-Gleichungen dar, welche erfüllt werden müssen, wenn vollständiges Gleichgewicht der verschiedenen auf ein festes System wirkenden Kräfte vorhanden sein soll.

Bestimmung der Resultanten der fortschreitenden Bewegung für Kräfte, die unter beliebigen Winkeln auf ein festes System wirken.

§ 71. Da nun jede Kraft in einem festen System, an welchem Gleichgewicht statt findet, als die Gegenkraft aller übrigen sich ansehen läfst, so können wir nach den oben gefundenen Gesetzen leicht die Gröfse, die Richtung und den Angriffspunkt der Resultanten von Kräften bestimmen, die nicht im Gleichgewicht sind. Wir wollen zuerst die Untersuchung führen in Bezug auf die Resultante der fortschreitenden Bewegung, dann in Bezug auf die Resultante der drehenden Bewegung, und endlich zu bestimmen suchen, in welchen Fällen das System nur eine Resultante hat, oder mit andern Worten, in welchen Fällen die Resultanten gegen die fortschreitende und gegen die drehende Bewegung der Richtung und Gröfse nach zusammenfallen können.

Bezeichnen wir mit Q die Resultante gegen die fortschreitende Bewegung, mit A, B, Γ die Winkel, welche ihre Richtung mit den drei Axen macht, so wird, wenn vorhin nicht Gleichgewicht vorhanden war, dieses eintreten, sobald eine der Resultante gleiche, aber der Richtung nach entgegengesetzte Kraft auf das System einwirkt; es werden dann die Bedingungs-Gleichungen 107) erfüllt werden, und zwar werden sie die Form annehmen:

$$109)\quad \begin{cases} \Sigma(K.\cos\alpha) - Q.\cos A = 0 \\ \Sigma(K.\cos\beta) - Q.\cos B = 0 \\ \Sigma(K.\cos\gamma) - Q.\cos\Gamma = 0. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der vier unbekannten Werthe Q, A, B, Γ haben wir noch die vierte Gleichung, die durch die Bedingung gegeben ist, dafs die drei Winkel A, B, Γ von einer Linie mit drei andern gebildet werden, welche letztere unter einander rechte Winkel machen. Für diesen Fall ist nämlich nach einem bekannten Satze:

$$(\cos A)^2 + (\cos B)^2 + (\cos\Gamma)^2 = 1.$$

Aus diesen vier Gleichungen folgt zunächst durch eine leichte arithmetische Operation:

$$Q^2 = [\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2,$$

folglich die Resultante sämmtlicher Kräfte der Gröfse nach:

$$110)\quad Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2\right\}},$$

ferner:

$$111)\quad \begin{cases} \cos A = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha)}{Q} \\ \cos B = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta)}{Q} \\ \cos\Gamma = \dfrac{\Sigma(K.\cos\gamma)}{Q}. \end{cases}$$

Vergleichen wir diese beiden Gleichungen mit den Gleichungen 66 und 67) § 33. S. 37, so ergiebt sich durch eine sehr einfache Betrachtung, dafs die Resultirende der fortschreitenden Bewegung der Gröfse und Richtung nach ganz in derselben Weise gefunden wird, als ob die in den verschiedenen Angriffspunkten wirkenden Drucke parallel mit ihren ursprünglichen Richtungen an einen einzigen Punkt getragen würden, und man nun den resultirenden Druck aus allen diesen Drucken zusammensetzte.

Für die fortschreitende Bewegung läfst sich hiernach immer eine Resultante finden, da es aber nur darauf ankommt, die Bedingungen der Gleichungen 109) zu erfüllen, so ist der Angriffspunkt der Resultanten in Bezug auf fortschreitende Bewegung ganz gleichgültig, ja wir können die Resultante gegen fortschreitende Bewegung in jedem beliebigen Punkte des Systems angreifend denken, oder aber wir können anstatt der einen Resultanten uns auch mehre resultirende Kräfte denken, welche zusammen wirkend die Bedingungs-Gleichungen erfüllen. Sobald wir also an einem festen System beliebig viele Kräfte wirkend haben, welche nicht im Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung sind, so wird ein solches Gleichgewicht eintreten, sobald wir eine oder mehre Gegenkräfte anbringen, welche die Bedingungen der Gleichungen 109) erfüllen; in welchen Punkten wir diese Kräfte angreifen lassen, ist in Bezug auf fortschreitende Bewegung ganz gleichgiltig; nicht so in Betreff der drehenden Bewegung.

Bestimmung der Resultanten der fortschreitenden Bewegung für Kräfte, deren Richtungslinien parallel sind.

§ 72. Wenn die Richtungen sämmtlicher Kräfte parallel sind, so bilden sie sämmtlich dieselben Winkel mit den drei Axen; es werden also die Faktoren $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in den Gleichungen 110 und 111) gemeinschaftliche, und es geht für diesen Fall die Gleichung 110) über in:

$$Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K)]^2\,[\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2]\right\}}$$

und zufolge des bekannten Gesetzes $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ hat man:

$$112)\quad Q = \Sigma(K),$$

folglich auch, wenn man diese Werthe in die Gleichungen 111) einsetzt:

$$113)\quad \left\{\begin{array}{l}\cos A = \cos\alpha \\ \cos B = \cos\beta \\ \cos \Gamma = \cos\gamma,\end{array}\right.$$

für parallele Kräfte ist also die Resultante gegen fortschreitende Bewegung gleich der Summe der sämmtlichen Kräfte, und die Richtung der Resultante ist parallel mit der Richtung der einzelnen Kräfte.

Sollen die Kräfte, deren Richtungen parallel sind, gegen fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sein, so folgt aus Gleichung 112):

$$112a)\ \Sigma(K) = 0.$$

Gesetze für das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung, wenn die Kraftrichtungen parallel sind.

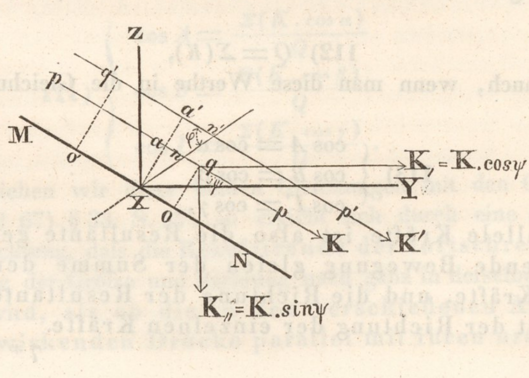
§ 73. Untersuchen wir nun die Verhältnisse der drehenden Bewegung.

Zu dem Ende wollen wir zunächst die Gesetze des Gleichgewichts gegen drehende Bewegung näher betrachten.

In den Gleichungen 108):

$$\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) = 0;\quad \Sigma(K.\sin\beta.R_{,,}) = 0;\quad \Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,}) = 0$$

bezeichnen $R_{,}$, $R_{,,}$, $R_{,,,}$ die kürzesten Abstände der einzelnen Kräfte von den drei angenommenen Axen; diese kürzesten Abstände werden erhalten, wenn man durch die Richtungen der Kräfte Ebenen legt, die parallel mit den Axen sind, und die Abstände dieser Ebenen, oder die Normalen von den betreffenden Axen auf die Ebenen konstruirt. Jede Ebene, parallel mit einer der drei Axen, ist normal auf der Ebene, in welcher die beiden andern Axen liegen, die so gedachte Ebene durch irgend eine Kraftrichtung ist also die projicirende Ebene für diese Kraftrichtung auf die Ebene der beiden andern Axen, und ihre Durchschnittslinie mit dieser letztgenannten Ebene ist die Projektion der Kraftrichtung auf diese; die Normale von der Axe auf die projicirende Ebene, oder der gesuchte kürzeste Abstand ist also gleich der Normalen von dem Durchschnittspunkt der drei Axen auf die Projektion der Kraftrichtung. Es sei z. B. die Ebene des Papiers diejenige der Axen YZ; pq sei die Projektion der Kraftrichtung K auf diese Ebene oder der Durch-



schnitt dieser Ebene mit einer Ebene, welche durch die Richtung von K parallel zur ersten Axe gelegt werden kann, dann ist Xa, oder die Normale von der Axe X auf diese Ebene, welche gleich ist der Normalen vom Durchschnittspunkt der Axen auf die Projektion pq, die gesuchte kürzeste Entfernung $R_{\prime}$.

Betrachten wir nun zunächst den Fall, dafs die Richtungen sämmtlicher Kräfte parallel mit einander sind. Es werden dann auch die projicirenden Ebenen, und folglich auch die Projektionen parallel mit einander sein; ist z. B. $p'q'$ die Projektion der Kraftrichtung K', so ist offenbar $a'X = R_{\prime}'$, gleich dem kürzesten Abstande der Kraft K', und es fallen daher die Hebelsarme sämmtlicher parallelen Kräfte in Bezug auf eine bestimmte Axe in ein und dieselbe Ebene, welche durch diese Axe geht, und normal zu den Kraftrichtungen ist. Nun gehen auch, unter der Bedingung, dafs die Kraftrichtungen parallel sind, dafs folglich die Neigungswinkel, welche sie mit den drei angenommenen Axen bilden, für alle Kräfte dieselben sind, die Gleichungen 108), nach Ausscheidung der gemeinschaftlichen Faktoren $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, über in:

$$114)\quad \Sigma(KR_{\prime}) = 0;\quad \Sigma(KR_{\prime\prime}) = 0;\quad \Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) = 0.$$

Denken wir durch die Axe X eine Ebene nX gelegt, welche die projicirenden Ebenen der Kraftrichtungen unter einem beliebigen Winkel φ schneidet, so sieht man leicht, dafs die Hebelsarme

$$R_{\prime} = Xa = Xn\,.\sin\varphi;\quad R_{\prime}' = Xa' = Xn'\,.\sin\varphi$$

etc. sind. Setzen wir diese Werthe in die Gleichung 114), so folgt, indem man mit dem gemeinschaftlichen Faktor $\sin\varphi$ dividirt,

$$\Sigma(K\,.\,Xn) = 0 \text{ etc.},$$

d. h. man kann, wenn die Kraftrichtungen parallel sind, anstatt der kürzesten Entfernungen von den Drehaxen, auch beliebig andere Abstände der projicirenden Ebene von den Drehaxen einführen, wenn dieselben nur sämmtlich zur Drehaxe normal und unter sich parallel sind.

Legt man durch die Axe X eine Ebene MN, welche parallel mit den projicirenden Ebenen ist, so folgt leicht, dafs wenn q, q'... die Angriffspunkte der parallelen Kräfte sind, die Abstände $qo = aX = R_{\prime}$ $q'o' = a'X = R_{\prime}'$ .... zu setzen sind. Bezeichnet man mit x, x', x'' etc. die Abstände der Angriffspunkte der parallelen Kräfte von einer Ebene, die mit ihrer Richtung parallel ist, so folgt aus Gleichung 114) auch:

$$\Sigma(Kx) = 0 \text{ etc.}$$

Sind die Kraftrichtungen zwar unter sich parallel, aber nicht parallel mit der Ebene in Bezug auf welche die Abstände ihrer Angriffspunkte x, x', x''... gegeben sind, sondern bilden sie mit derselben einen beliebigen Winkel ψ, so kann man offenbar für jede der einzelnen Kräfte K, K', K'' etc. immer zwei andere substituiren, welche wir mit $K_{\prime}$ und $K_{\prime\prime}$, $K'_{\prime}$ und $K'_{\prime\prime}$ etc. bezeichnen wollen; und von denen die Kräfte $K_{\prime}$, $K'_{\prime}$ parallel, die Kräfte $K_{\prime\prime}$, $K'_{\prime\prime}$... normal zu der Ebene sind. Durch diese Substitution wird offenbar das Gleichgewicht nicht geändert; und es gilt dann in Bezug auf die mit der Ebene parallelen Kräfte die Gleichung:

$$\Sigma(K_{\prime}x) = 0.$$

Es ist aber offenbar $K_{\prime} = K \cdot \cos\psi$, $K'_{\prime} = K' \cdot \cos\psi$ etc. Setzen wir diese Werthe für $K_{\prime}$, $K'_{\prime}$ etc. ein, so geht die Gleichung über in:

$$\Sigma(K \cdot \cos\psi \cdot x) = 0,$$

und da $\cos\psi$ allen Summanden gemeinschaftlich ist, so folgt auch:

$$115)\ \Sigma(K \cdot x) = 0.$$

Diese wichtige Gleichung drückt folgendes Gesetz aus:

Wenn auf ein festes System beliebig viele Kräfte wirken, deren Richtungslinien parallel sind und die Kräfte sind in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht, so ist die Summe der Produkte, welche gebildet werden, indem man jede Kraft mit dem normalen Abstand ihres Angriffspunktes von einer beliebig gegebenen Ebene multiplicirt, gleich Null.

Sind die Kräfte unter sich parallel, und denken wir drei beliebige Ebenen, welche unter einander normal sind (Koordinaten-Ebenen), so gilt das Gesetz für alle drei Koordinaten-Ebenen, und wenn x, x', x'' .. die Koordinaten der Angriffspunkte in Bezug auf die erste Ebene, y, y', y'' und z, z', z''.... die Koordinaten in Bezug auf die zweite und dritte Ebene bezeichnen, so hat man für parallele Kräfte, die an einem festen System im Gleichgewicht gegen drehende Bewegung sein sollen, die drei Bedingungs-Gleichungen:

$$116)\ \Sigma(Kx) = 0; \quad \Sigma(Ky) = 0; \quad \Sigma(Kz) = 0.$$

Fügen wir noch die Bedingung der Gleichung 112a) hinzu, welche das Gleichgewicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung enthält, so sind die vier Gleichungen:

$$\Sigma(Kx) = 0; \quad \Sigma(Ky) = 0; \quad \Sigma(Kz) = 0$$

und

$$\Sigma(K) = 0.$$

vier Bedingungs-Gleichungen, welche sämmtlich erfüllt werden müssen, wenn parallele Kräfte, die auf ein festes System wirken, in vollkommenem Gleichgewicht sein sollen.

Das Produkt $K.x$ aus dem Druck einer Kraft in den normalen Abstand ihres Angriffspunkts von einer Ebene nennt man das Moment der Kraft in Bezug auf die Ebene. Es ist dieser Ausdruck nicht zu verwechseln mit dem statischen Moment einer Kraft in Bezug auf eine Axe.

Bestimmung des Angriffspunktes der Resultanten von parallelen Kräften, die auf ein festes System wirken; Kräftepaar.

§ 74. Werden die Bedingungs-Gleichungen 116) erfüllt, aber nicht 112a), so rückt das feste System geradlinig fort, ohne daſs eine Drehung erfolgt; die Resultante der fortschreitenden Bewegung läſst sich dann durch die Gleichungen 112 und 113) der Gröſse und Richtung nach bestimmen. Will man nun auch Gleichgewicht gegen die fortschreitende Bewegung herstellen, so muſs man eine Kraft Q, die gleich dieser Resultante ist, also

$$Q = \Sigma(K)$$

in entgegengesetzter Richtung der Resultanten auf das System wirken lassen; allein sobald man diese Kraft einführt, wird zwar die fortschreitende Bewegung aufgehoben, aber es ist denkbar, daſs nun die Bedingungs-Gleichungen gegen die drehende Bewegung dadurch gestört werden. Soll gleichwohl das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung bestehen bleiben, so ist der Angriffspunkt dieser Kraft nicht mehr beliebig (vergl. S. 99), sondern, wenn X, Y, Z die Koordinaten desselben sind, so muſs zufolge der Gleichung 116) die Bedingung erfüllt werden:

$$\Sigma(Kx) - QX = 0$$
$$\Sigma(Ky) - QY = 0$$
$$\Sigma(Kz) - QZ = 0,$$

daraus folgen die Koordinaten für den Angriffspunkt der Resultanten paralleler Kräfte, unter der Voraussetzung, daſs in dem System keine drehende Bewegung statt finden soll:

$$117) \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\Sigma(Kx)}{Q} = \frac{\Sigma(Kx)}{\Sigma(K)} \\ Y &= \frac{\Sigma(Ky)}{Q} = \frac{\Sigma(Ky)}{\Sigma(K)} \\ Z &= \frac{\Sigma(Kz)}{Q} = \frac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K)}. \end{aligned} \right.$$

Da übrigens zufolge der Bedingung, dafs die Kräfte gegen drehende Bewegung im Gleichgewicht sein sollen, sowohl $\Sigma(Kx)$ als $\Sigma(Ky)$ und $\Sigma(Kz)$ einzeln gleich 0 sind, so folgt auch $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, d. h. wenn parallele Kräfte in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber nicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung, so liegt der Angriffspunkt der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung so, dafs wenn man durch denselben drei zu einander normale Ebenen legt, die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf jede dieser Ebenen gleich Null ist; oder mit anderen Worten, es ist der Angriffspunkt der Resultirenden immer in dem Anfangspunkt des angenommenen Koordinatensystems zu denken, und er liegt daher in jeder der Drehaxen, für welche Gleichgewicht gegen drehende Bewegung nachgewiesen werden kann.

In diesem Fall läfst sich folglich durch eine einzige Gegenkraft Gleichgewicht gegen drehende und gegen fortschreitende Bewegung herstellen.

Wenn die parallelen Kräfte, welche auf ein festes System wirken, weder in Bezug auf drehende noch in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, so werden die Bedingungs-Gleichungen nicht erfüllt; dieselben haben dann im Allgemeinen die Form:

$$\Sigma(Kx)=A;\quad \Sigma(Ky)=B;\quad \Sigma(Kz)=C,$$
$$\Sigma(K)=Q,$$

soll nun die Gegenkraft $-Q$, welche die fortschreitende Bewegung aufhebt, gleichzeitig auch die drehende Bewegung aufheben, so folgt wieder als Bedingung:

$$\Sigma(Kx)-QX=0=\Sigma(Kx)-A=0 \text{ etc.},$$

und daraus:

$$117\text{a)}\quad \left\{\begin{aligned} X&=\frac{A}{Q}=\frac{\Sigma(Kx)}{Q}=\frac{\Sigma(Kx)}{\Sigma(K)}\\ Y&=\frac{B}{Q}=\frac{\Sigma(Ky)}{Q}=\frac{\Sigma(Ky)}{\Sigma(K)}\\ Z&=\frac{C}{Q}=\frac{\Sigma(Kz)}{Q}=\frac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K)}.\end{aligned}\right.$$

Durch diese Gleichungen sind die Koordinaten des Angriffspunktes der Resultirenden gegen fortschreitende Bewegung unter der Bedingung vollständig bestimmt, dafs dieselbe Gegenkraft, welche die fortschreitende Bewegung aufhebt, gleichzeitig auch die drehende Bewegung aufheben soll; vorausgesetzt nämlich, dafs A, B, C und Q reelle Werthe sind.

Die beiden Gleichungen 117 und 117a) zeigen, dafs wenn auf ein festes System parallele Kräfte einwirken, in folgenden beiden Fällen sich immer eine einzige Gegenkraft und deren Angriffspunkt bestimmen läfst, nämlich:

1) wenn die parallelen Kräfte von Hause aus schon gegen drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber in Bezug auf fortschreitende Bewegung kein Gleichgewicht statt findet;

2) wenn die parallelen Kräfte weder in Bezug auf fortschreitende Bewegung noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind.

Es bleibt noch ein dritter Fall zu erörtern, nämlich der, wenn

3) die parallelen Kräfte von Hause aus gegen fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber nicht gegen drehende Bewegung.

Wir werden sogleich zeigen, dafs dann das vollkommene Gleichgewicht nicht durch eine einzige Gegenkraft hergestellt werden kann.

Dieser Fall entspricht nämlich den Gleichungen:

$$\Sigma(Kx) = A; \quad \Sigma(Ky) = B; \quad \Sigma(Kz) = C; \quad \Sigma(K) = 0.$$

Denken wir nun, es würde eine einzige Kraft angebracht, welche im Stande wäre das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herzustellen, so würde durch dieselbe offenbar die Gleichung $\Sigma(K)=0$ gestört werden, und es würde nun eine fortschreitende Bewegung eintreten. Um aber die Gleichung $\Sigma(K) = 0$ aufrecht zu erhalten, ist es nöthig wenigstens zwei Kräfte auf das System wirken zu lassen, die der Gröfse nach gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt, und deren Richtungslinien parallel mit den Richtungslinien der gegebenen Kräfte sind. Nennen wir diese beiden Kräfte P und $-P$. Durch Einführung dieser beiden Kräfte wird das Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung nicht gestört, denn es ist offenbar, wenn $\Sigma(K) = 0$ ist, auch $\Sigma(K)+P-P=0$.

Nennen wir die Koordinaten des Angriffspunktes der beiden Kräfte P und $-P$ beziehlich X, Y, Z und X', Y', Z', so folgt, wenn diese Kräfte das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen sollen:

$$118) \quad \begin{cases} \Sigma(Kx) + P(X-X') = 0 \\ \Sigma(Ky) + P(Y-Y') = 0 \\ \Sigma(Kz) + P(Z-Z') = 0. \end{cases}$$

Diese drei Bedingungs-Gleichungen sind die einzigen, welche sich für die Bestimmung der Drucke P und $-P$, sowie der Koordinaten ihrer Angriffspunkte aufstellen lassen, sie enthalten sieben

Unbekannte, nämlich P, X, Y, Z, X', Y', Z', und es sind daher immer vier davon beliebig zu geben.

Giebt man den Druck $+P$ der Gröfse nach, und auch seinen Angriffspunkt durch die Koordinaten X, Y, Z, so sind die Koordinaten des Angriffspunktes für den Druck $-P$ durch die Gleichungen 118) zu finden.

Durch die Werthe $(X-X')$, $(Y-Y')$, $(Z-Z')$ ist übrigens die gegenseitige Lage der Angriffspunkte der beiden Kräfte vollkommen bestimmt, so dafs wenn man die Gröfse der Kräfte P annimmt, es nur auf diese gegenseitige Lage ankommt, nicht aber auf die absolute Lage der Angriffspunkte.

Man sieht überhaupt, dafs die Gleichungen 118) folgendes Gesetz ausdrücken:

> Wenn auf ein festes System beliebig viele parallele Kräfte wirken, welche im Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung sich befinden, aber nicht im Gleichgewicht gegen drehende Bewegung, so ist in Bezug auf drehende Bewegung niemals eine einzige Resultante denkbar, sondern es müssen deren wenigstens zwei angenommen werden, deren Richtungen parallel sind mit denjenigen der parallelen Kräfte, und die einander der Gröfse nach gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind. Man kann die Gröfse dieser beiden Resultanten beliebig annehmen, dann aber ist die gegenseitige Lage der Angriffspunkte vollkommen bestimmt.

Da diese beiden Resultanten parallel mit einander und mit den Richtungen der ursprünglich gegebenen Kräfte sind, so läfst sich durch beide immer eine Ebene legen, welche parallel ist mit den Richtungen der gegebenen Kräfte.

Zwei gleich grofse Kräfte, deren Richtungen parallel aber entgegengesetzt sind, und welche sich nicht im Gleichgewicht gegen Drehung befinden, nennt man ein **Kräftepaar.**

Das Produkt aus dem Druck einer der beiden Kräfte in den kürzesten Abstand ihrer Richtungslinien nennt man das **Moment des Kräftepaars.**

Die Wirkung paralleler Kräfte, die in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, nicht aber in Bezug auf drehende Bewegung, läfst sich daher immer durch ein Kräftepaar ersetzen, welches in einer mit den Kraftrichtungen parallelen Ebene liegt, dessen Kräfte beliebig grofs angenommen werden können, und dessen Angriffspunkte eine bestimmte relative Lage gegen einander haben, die man konstruiren kann, sobald man die Gröfse der Kräfte des Kräftepaars gegeben hat.

Die Entfernung der Angriffspunkte des Kräftepaars drückt sich wie leicht zu übersehen ist, aus durch:

$$\sqrt{\left\{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2\right\}},$$

und wenn ψ der Winkel ist, welchen die Verbindungslinie der Angriffspunkte mit der Richtung der Kräfte macht, so ist die kürzeste Entfernung der Richtungslinien der Kräfte, wie ebenfalls durch eine einfache Betrachtung zu übersehen ist:

$$\sin\psi\,.\sqrt{\left\{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2\right\}}$$

und folglich das Moment des Kräftepaares:

$$118\text{a)}\quad P\,.\sin\psi\sqrt{\left\{(X-X')^2+(Y-Y')^2+(Z-Z')^2\right\}}=$$

$$=\sin\psi\,.\sqrt{\left\{[\Sigma(Kx)]^2+[\Sigma(Ky)]^2+[\Sigma(Kz)]^2\right\}}\quad(\text{Gl. }118)$$

in welchem Ausdruck ψ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtungen der parallelen Kräfte mit der Verbindungslinie der Angriffspunkte des Kräftepaares bilden.

Bestimmung der Resultanten und ihrer Angriffspunkte für Kräfte, die auf ein festes System wirken, und welche zwar in parallelen Ebenen liegen, aber nicht unter einander parallel sind.

§ 75. Untersuchen wir nun den Fall, dafs Kräfte, die zwar nicht parallel sind, deren Richtungslinien aber in parallelen Ebenen liegen, auf ein festes System wirken.

Wir setzen zuerst den allgemeinsten Fall voraus, nämlich:

A. dafs die Kräfte weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht seien.

Denken wir drei Koordinaten-Ebenen, von denen eine (die dritte) parallel ist mit den Ebenen der Kräfte, die beiden andern also (die erste und zweite) normal zu den Ebenen der Kräfte sind; es liegt dann die erste und zweite Axe in einer Ebene parallel mit den Ebenen der Kräfte, und die dritte Axe ist normal zu den Ebenen der Kräfte.

Da die Komponenten sämmtlicher Kräfte, welche parallel mit der dritten Axe sind, unter der gemachten Annahme nothwendiger Weise gleich Null sein müssen, in sofern der Neigungswinkel γ gegen diese Axe für alle Kräfte gleich einem Rechten, also $\cos\gamma$ gleich Null ist, so folgt, dafs die Resultirende der fortschreitenden Bewegung für diese Richtung ebenfalls Null ist, und dafs also die Resultirende der fortschreitenden Bewegung überhaupt in einer Ebene liegen mufs, welche mit den Ebenen der Kräfte parallel ist. Die allgemeinen Gleichungen 110 und 111) für die Resultirende der fortschreitenden Bewegung gehen dann über in die Form:

$$119)\quad \left\{\begin{aligned} Q &= \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\sin\alpha)]^2\right\}} \\ \cos A &= \frac{\Sigma(K.\cos\alpha)}{Q} = \sin B \\ \sin A &= \frac{\Sigma(K.\sin\alpha)}{Q} = \cos B, \end{aligned}\right.$$

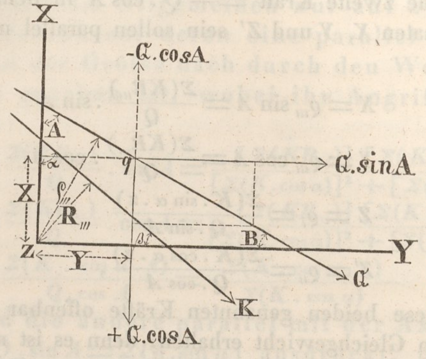
insofern nämlich in diesem Falle die Neigungswinkel α und β, welche die einzelnen Kräfte mit der ersten und zweiten Axe machen, immer zusammen einen Rechten betragen.

Durch diese Gleichungen ist die Resultante der fortschreitenden Bewegung der Kräfte in parallelen Ebenen der Gröfse und Richtung nach gegeben. Führt man eine Gegenkraft gleich $-Q$ ein, so erlangt das System Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung, gleichviel in welchem Angriffspunkt diese Gegenkraft angebracht wird. Soll aber die Gegenkraft auch Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen, so mufs sie die allgemeinen Bedingungs-Gleichungen 108) erfüllen, nämlich es mufs sein:

$$119a)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma(K.\sin\alpha.R_{\prime}) - Q.\sin A.\varrho_{\prime} &= 0 \\ \Sigma(K.\sin\beta.R_{\prime\prime}) - Q.\sin B.\varrho_{\prime\prime} &= 0 \\ \Sigma(K.\sin\gamma.R_{\prime\prime\prime}) - Q.\sin\Gamma.\varrho_{\prime\prime\prime} &= 0, \end{aligned}\right.$$

worin $\varrho_{\prime}$, $\varrho_{\prime\prime}$, $\varrho_{\prime\prime\prime}$ die kürzesten Abstände der Kraftrichtung Q von den drei Axen, oder die Abstände der Projektionen ihrer Richtung auf die zu den betreffenden Axen normalen Projektionsebenen von dem Durchschnittspunkt der Axen (§ 73. S. 100) bezeichnet. Beachtet man, dafs $\sin\gamma \ldots \sin\Gamma = 1$ ist, dafs $\sin\beta = \cos\alpha$; $\sin B = \cos A$ etc. ist, so folgt:

$$119b)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma(K.\sin\alpha.R_{\prime}) - Q.\sin A.\varrho_{\prime} &= 0 \\ \Sigma(K.\cos\alpha.R_{\prime\prime}) - Q.\cos A.\varrho_{\prime\prime} &= 0 \\ \Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) - Q.\varrho_{\prime\prime\prime} &= 0. \end{aligned}\right.$$



Es sei die Ebene des Papiers die dritte Projektionsebene, also parallel mit den Ebenen, in welchen die Kräfte liegen, die Axe Z normal zur Ebene des Papiers, dann liegen die Axen X und Y in der Ebene des Papiers, nun ist $\varrho_{\prime\prime\prime}$ der Abstand der Projektion der Resultirenden auf die Ebene XY und durch die dritte Gleichung zu bestimmen, nämlich:

$$\varrho_{\prime\prime\prime} = \frac{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}{Q}.$$

Zugleich bemerkt man, dafs die Abstände $R_{\prime} \ldots$ und $R_{\prime\prime} \ldots$ nämlich die kürzesten Entfernungen der Kräfte $K, K' \ldots$ von den Axen X und Y, nichts anderes darstellen, als die Entfernungen der Parallelebenen, in welchen die Kraftrichtungen liegen, von der Projektionsebene XY, oder mit andern Worten die Abstände $z, z_{\prime}, z_{\prime\prime} \ldots$ der Angriffspunkte der Kräfte von der dritten Projektionsebene. Es ist also $R_{\prime} = R_{\prime\prime} = z$ etc. und die beiden ersten Gleichungen liefern daher für den Abstand des Angriffspunktes der Resultirenden von der Ebene XY die beiden Werthe:

$$\varrho_{\prime} = \frac{\Sigma(K \,.\, \sin\alpha \,.\, z)}{Q \,.\, \sin A}$$

$$\text{und } \varrho_{\prime\prime} = \frac{\Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z)}{Q \,.\, \cos A}.$$

Diese beiden Werthe sind nicht nothwendiger Weise einander gleich, und man sieht daher, dafs es in diesem Falle nicht immer möglich ist nur eine Resultirende für das System zu finden. Um nun aber das System im vollkommenen Gleichgewicht zu halten, stellen wir uns vor, es wirke eine Kraft $= - Q.\sin A$ in dem Punkte q, dessen Koordinaten X, Y und Z seien, parallel mit der

Axe Y und eine zweite Kraft $= - Q \cdot \cos A$ in dem Punkte q' *), dessen Koordinaten X, Y und Z' sein sollen parallel mit der Axe X. Nimmt man:

$$X = \varrho_{\prime\prime\prime} \sin A = \frac{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}{Q} \cdot \sin A$$

$$Y = \varrho_{\prime\prime\prime} \cos A = \frac{\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})}{Q} \cdot \cos A$$

$$Z = \varrho_{\prime} = \frac{\Sigma(K \cdot \sin \alpha \cdot z)}{Q \cdot \sin A}$$

$$Z' = \varrho_{\prime\prime} = \frac{\Sigma(K \cdot \cos \alpha \cdot z)}{Q \cdot \cos A},$$

so werden diese beiden genannten Kräfte offenbar das System in vollkommenem Gleichgewicht erhalten; denn es ist nach 119):

120) $Q \cdot \sin A = \Sigma(K \cdot \sin \alpha)$; $Q \cdot \cos A = \Sigma(K \cdot \cos \alpha)$,

folglich in Bezug auf fortschreitende Bewegung:

$$\Sigma(K \cdot \sin \alpha) - (Q \cdot \sin A) = 0$$

$$\Sigma(K \cdot \cos \alpha) - (Q \cdot \cos A) = 0,$$

welche Gleichungen zeigen, daſs durch die beiden Kräfte Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung hergestellt ist, und da in Bezug auf drehende Bewegung um die Axe Z die Hebelsarme der Kräfte $- Q \cdot \sin A$ und $- Q \cdot \cos A$ beziehlich X und Y sind, so hat man:

$$\Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) - Q \cdot \sin A \cdot X - Q \cdot \cos A \cdot Y =$$

$$\Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) - (\sin A^2 + \cos A^2) \cdot \Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) = 0,$$

(indem man nämlich für X und Y die oben bestimmten Werthe setzt) welche Gleichung zeigt, daſs keine Drehung um die Axe Z statt findet. Man hat aber in Bezug auf Drehung um die Axe Y, da die Kraft $- Q \cdot \sin A$ keine Drehung um diese Axe bewirkt, insofern sie mit derselben parallel ist:

$$\Sigma(K \cos \alpha \cdot z) - Q \cdot \cos A \cdot Z' = 0$$

(wenn man für Z' den oben angenommenen Werth setzt), und ebenso findet man in Bezug auf Drehung um die Axe X:

$$\Sigma(K \cdot \sin \alpha \cdot z) - Q \cdot \sin A \cdot Z = 0.$$

Man sieht also:

I. wenn Kräfte in parallelen Ebenen wirken, ohne selbst parallel zu sein, und wenn die Kräfte weder in Bezug auf fortschreitende Bewegung noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind: so ist die Wir-

---

*) Der Punkt q' ist in der Figur normal über oder unter dem Punkt q liegend zu denken; er deckt sich also mit dem Punkte q und konnte daher nicht besonders bezeichnet werden.

kung der Kräfte im Allgemeinen nur auf zwei Resultirende zurückzuführen, deren eine parallel mit der Axe der X ist, und der Gröfse nach durch den Werth $Q \cdot \cos A = \Sigma(K \cdot \cos\alpha)$ gegeben ist, wobei ihr Angriffspunkt die Koordinaten

$$\text{120a)} \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{Q} \cdot \sin A = \frac{[\Sigma(KR_{,,,})]\,[\Sigma(K \cdot \sin\alpha)]}{[\Sigma(K \cdot \cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K \cdot \sin\alpha)]^2} \\ Y &= \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{Q} \cdot \cos A = \frac{[\Sigma(KR_{,,,})]\,[\Sigma(K \cdot \cos\alpha)]}{[\Sigma(K \cdot \cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K \cdot \sin\alpha)]^2} \\ Z' &= \frac{\Sigma(K \cdot \cos\alpha \cdot z)}{Q \cdot \cos A} = \frac{\Sigma(K \cdot \cos\alpha \cdot z)}{\Sigma(K \cdot \cos\alpha)} \end{aligned} \right.$$

hat, während die andere parallel mit der Axe der Y ist, sich durch $Q \cdot \sin A = \Sigma(K \cdot \sin\alpha)$ ausdrückt, und ihr Angriffspunkt durch die Koordinaten X und Y, welche dieselben wie die der ersten Kraft sind, und durch die Ordinate

$$\text{120b)} \left\{ Z = \frac{\Sigma(K \cdot \sin\alpha \cdot z)}{Q \cdot \sin A} = \frac{\Sigma(K \cdot \sin\alpha \cdot z)}{\Sigma(K \cdot \sin\alpha)} \right.$$

gegeben ist.

Beachtet man, dafs die Axen X und Y ganz beliebig angenommen sind, nur durch die Bedingung bestimmt, dafs sie zu einander normal, und dafs sie in einer mit den Ebenen der Kräfte parallelen Ebene liegen sollen, so ergiebt sich, dafs die Wirkung sämmtlicher Kräfte in dem behandelten Falle sich immer auf zwei Resultirende zurückführen läfst, die in zwei mit den Kräften parallelen Ebenen liegen, zu einander normal sind, in den Ebenen aber gegen die Richtungen der gegebenen Kräfte eine ganz beliebige Lage haben können. Nimmt man diese Lage an, so sind die Axen beziehlich parallel mit den angenommenen Richtungen der beiden Resultirenden zu legen, und nun sind die Resultirenden und ihre Angriffspunkte durch die Gleichungen 120, 120a und 120b) zu bestimmen.

Wenn sich der Fall auf eine einzige Resultirende zurückführen lassen soll, so mufs sein:

$$Z = Z',$$

oder nach 120a) und 120b):

$$\frac{\Sigma(K \cdot \cos\alpha \cdot z)}{\Sigma(K \cdot \sin\alpha \cdot z)} = \frac{\Sigma(K \cdot \cos\alpha)}{\Sigma(K \cdot \sin\alpha)};$$

dies ist im Allgemeinen nur möglich, wenn entweder:

1) der Werth z sämmtlichen Summanden ein gemeinschaftlicher Faktor ist, der sich dann links fortheben läfst, d. h. wenn die Kräfte sämmt-

lich in ein und derselben Ebene liegen, und weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, oder:

2) wenn die Kräfte sämmtlich parallel sind, wobei sie in verschiedenen Ebenen liegen können, aber dabei nicht von Hause aus in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sein dürfen (vergl. § 74. S. 105), denn in diesem Falle ist $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ rechts und links in der Gleichung ein gemeinschaftlicher Faktor für alle Summanden, und die Gleichung wird vollkommen erfüllt. Wären aber die Kräfte in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht, so ginge die rechte Seite der Gleichung in die Form $\frac{0}{0}$ über, woraus sich nicht der Schlufs ziehen läfst, dafs nun auch $Z = Z'$ sein müsse.

Uebrigens läfst sich der in diesem Paragraphen behandelte allgemeine Fall auch zurückführen auf eine Resultirende und auf ein Kräftepaar. Denn (vgl. die Figur auf S. 109) bringen wir z. B. in dem Punkte q', der durch die Koordinaten X, Y, Z' (Gleichung 120a) gegeben ist, und in welchem die Resultirende $Q.\cos A = \Sigma(K.\cos\alpha)$ wirksam ist, zwei gleich grofse, der Richtung nach aber entgegengesetzte Kräfte an, welche parallel mit der Richtnng der Kraft $Q.\sin A$, folglich normal zu der Richtung der in dem Punkte q' wirkenden Kraft $Q.\cos A$ sind, und deren eine gleich $+Q.\sin A$, die andere gleich $-Q.\sin A$ ist, so wird in dem System in Bezug auf Gleichgewicht nichts geändert; nun aber läfst sich die Kraft $+Q.\sin A$ und $+Q.\cos A$ vereinigen zu der Resultirenden Q und es bleibt in dem Punkt q' somit wirksam die Kraft Q und die Kraft $-Q.\sin A$, welche mit der Kraft $Q.\sin A$ in dem Punkt q, der durch die Koordinaten X, Y, Z (Gleichung 120b) gegeben ist, parallel ist, folglich in einer Ebene liegt, und auch der Gröfse nach gleich, aber entgegengesetzt ist. Diese beiden Kräfte bilden also ein Kräftepaar. In ganz gleicher Weise kann man das System zurückführen auf die Kraft Q, welche in dem Punkte q angreift, und auf ein Kräftepaar $+Q.\cos A$ und $-Q.\cos A$, von dem die Kraft $-Q.\cos A$ in dem Punkte q wirksam zu denken ist. Da nun die Richtung der Axen X und Y in der dritten Projektionsebene beliebig zu nehmen ist (vergl. oben), so ist auch die Lage der Ebene, in welcher das Kräftepaar wirksam zu denken ist, gegen die Richtung von Q beliebig zu nehmen, nur mufs sie normal sein zu den Parallelebenen, in welchen die Kräfte liegen. Es ist also der behandelte Fall immer zurückzuführen:

II. auf eine der Gröſse und Richtung nach (Gleichung 119) bestimmte Kraft Q, deren Angriffspunkt durch die Koordinaten-Gleichung 120a) zu bestimmen ist, und auf ein Kräftepaar, welches in einer zu den Ebenen der Kräfte normalen Ebene liegt, die mit der Richtung von Q einen beliebig angenommenen Winkel A bildet. Die Kräfte dieses Kräftepaares sind $+Q \,.\, \cos A$ und $-Q \,.\, \cos A$, und es ist die Kraft $-Q \,.\, \cos A$ in demselben Angriffspunkt wirksam zu denken, in welchem die Kraft Q wirkt, während die Kraft $+Q \,.\, \cos A$ in einem normalen Abstande von diesem Angriffspunkt wirksam zu denken ist, der gleich:

$$121)\quad Z' - Z = \frac{\Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z)}{\Sigma(K \,.\, \cos\alpha)} - \frac{\Sigma(K \,.\, \sin\alpha \,.\, z)}{\Sigma(K \,.\, \sin\alpha)}$$

ist; wobei unter $\alpha \ldots.$ die Winkel zu verstehen sind, welche die Richtungen der Kräfte $K \ldots$ mit der Ebene machen, in welcher das Kräftepaar liegt; da nämlich diese Ebene parallel mit derselben Axe angenommen worden, mit welcher die Kräfte die Winkel $\alpha \ldots.$ bilden. Das Moment dieses Kräftepaares ist offenbar:

$$121\text{a})\quad Q \,.\, \cos A \,.\, (Z' - Z) = \Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z) - \Sigma(K \,.\, \sin\alpha \,.\, z) \,.\, \operatorname{cotg} A$$
$$= \Sigma(K \,.\, \cos\alpha \,.\, z) - \Sigma(K \,.\, \sin\alpha \,.\, z) \frac{\Sigma(K \,.\, \cos\alpha)}{\Sigma(K \,.\, \sin\alpha)},$$

welches mit Benutzung der Gleichungen 121) und 119) folgt, und worin $\alpha \ldots.$ die Winkel bezeichnen, welche die einzelnen Kräfte mit der Ebene machen, in welche das Kräftepaar liegt.

Sind die Kräfte parallel, so folgt, wie leicht ersichtlich, das Moment des Kräftepaars gleich Null, und man kann das System auf eine Resultirende zurückführen.

Da nun der Winkel, welchen das Kräftepaar mit der Richtung von Q macht, ein beliebiger sein kann, so kann man ihn auch gleich einem Rechten nehmen, d. h. man kann auch die eine der beiden Axen mit der Resultirenden Q parallel, die andere normal zu derselben nehmen. Allein für diesen Fall reichen die Gleichungen 120), 120a) und 120b) nicht aus, um die Lage der Angriffspunkte zu bestimmen, da dieselben für $A = 90$ Grad $\cos A = 0$, folglich die Ordinate $Z' = \infty$ liefern würden. Man sieht leicht, wie in diesem Fall zu verfahren ist. Nehmen wir die erste Axe normal zur Resultirenden der fortschreitenden Bewegung und folglich die zweite Axe parallel mit dieser Richtung, so folgt (Gleichung 119):

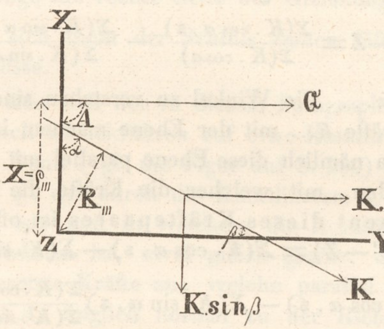
$$Q = \Sigma(K \,.\, \sin\alpha)$$
$$\Sigma(K \,.\, \cos\alpha) = 0,$$

worin $\alpha \ldots$ die Winkel bezeichnen, welche die Kräfte mit der ersten Axe machen. Führt man lieber die Winkel $\beta \ldots$ ein, welche die Kräfte mit der zweiten Axe, oder was dasselbe ist, mit der Richtung von Q machen, so hat man:

$$122) \quad \begin{aligned} Q &= \Sigma(K \cdot \cos\beta) \\ \Sigma(K \cdot \sin\beta) &= 0. \end{aligned}$$

Soll nun die Kraft Q so liegen, daſs sie auch Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellt *), so hat man in Bezug auf Drehung um die Axe Z:

$$122\text{a}) \quad \Sigma(KR_{\prime\prime\prime}) - Q.X = 0,$$



in Bezug auf Drehung um die Axe XZ:

$$122\text{b}) \quad \Sigma(K \cdot \cos\beta \cdot z) - Q.Z = 0.$$

Allein in Bezug auf Drehung um die Axe ZY kann die Kraft Q unter keinen Umständen das Gleichgewicht herstellen, da sie parallel mit dieser Axe ist; man muſs also, um dieses Gleichgewicht herzustellen, und dabei andrerseits nicht das Gleichgewicht in Bezug auf fortschreitende Bewegung zu stören, zwei neue Kräfte $+P$ und $-P$ einführen, welche in einer Ebene liegen, die normal zu der Axe ZY ist, und welche die Bedingungs-Gleichung erfüllen:

$$122\text{c}) \quad \begin{aligned} \Sigma(K \cdot \sin\beta \cdot z) + P.Z' - P.Z'' &= 0. \\ \Sigma(K \cdot \sin\beta \cdot z) - P(Z'' - Z') &= 0. \end{aligned}$$

III. Man kann also den Fall, daſs die Kräfte, welche auf ein festes System wirken, zwar in parallelen Ebenen liegen, aber nicht selbst parallel sind, während unter ihnen weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung Gleichgewicht statt fin-

*) Vergl. S. 90.

det, immer auf eine Kraft Q, welche der Richtung und Gröfse nach durch die Gleichungen 119) gegeben ist, und auf ein Kräftepaar, welches in einer zu der Richtung Q normalen Ebene liegt, zurückführen.

Hat man Q der Richtung und Gröfse nach bestimmt, so findet man die Koordinaten des Angriffspunktes, nämlich

1) den Abstand X von einer mit der Richtung von Q parallelen und zu den Parallelebenen der Kräfte normalen Ebene (ZY) aus 122a):

$$X = \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{Q} = \frac{\Sigma(KR_{,,,})}{\Sigma(K.\cos\beta)},$$

worin $R_{,,,}$ die kürzesten Abstände der Kraftrichtungen K... von einer in dieser Ebene liegenden, zu den Parallelebenen der Kräfte normalen Axe bezeichnet,

2) den Abstand der Ebene, in welcher Q liegt, und welche mit den Ebenen der Kraftrichtungen parallel ist, von irgend einer mit dieser Ebene parallelen Ebene (Grundebene): 122b):

$$Z = \frac{\Sigma(K.\cos\beta.z)}{Q} = \frac{\Sigma(K.\cos\beta.z)}{\Sigma(K.\cos\beta)},$$

worin β.... den Winkel bezeichnet, welchen die Kraftrichtungen mit der Richtung von Q machen, z.... aber die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte von der Grundebene sind.

3) Die Koordinate Y, welche die Lage des Angriffspunktes von Q in der Richtung der Kraft Q angeben würde, bleibt unbestimmt, und man kann folglich jeden Punkt der Kraftrichtung Q, als Angriffspunkt betrachten.

4) Für die Bestimmung des Kräftepaars hat man die Bedingung, dafs dasselbe in einer Ebene liegen müsse, welche zu der Richtung der Kraft Q normal ist, und die Gleichung 122c), aus welcher folgt für das Moment des Kräftepaars:

$$P(Z''-Z') = \Sigma(K.\sin\beta.z),$$

so dafs man von den beiden Werthen P und $(Z''-Z')$ einen beliebig annehmen kann. Dieser Ausdruck folgt auch aus der allgemeinen Gleichung 121a), indem man beachtet, dafs $\Sigma(K.\cos\alpha) = 0$ ist.

Betrachten wir nun den Fall:

B. dafs die Kräfte zwar in Bezug auf drehende Bewegung, nicht aber in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind.

Die Resultirende gegen fortschreitende Bewegung ist der Lage und Richtung nach auch in diesem Falle durch die Gleichungen 119) zu bestimmen, da aber zufolge der Bedingung, dafs die Kräfte gegen drehende Bewegung im Gleichgewicht sein sollen, ihre Momente für drei Axen gleich Null sind, so folgt nach Gleichung 119a) auch $\varrho_{\prime}=0$, $\varrho_{\prime\prime}=0$, $\varrho_{\prime\prime\prime}=0$, d. h. der Angriffspunkt der Resultirenden mufs im Anfangspunkte des Koordinatensystems liegen, oder so dafs er den Bedingungen entspricht, welche in Folge der Gleichungen 117) für den analogen Fall paralleler Kräfte aufgestellt worden sind (S. 104). In diesem Fall ist also eine Resultirende denkbar.

C. Wenn endlich auf ein festes System Kräfte wirken, deren Richtungslinien zwar in parallelen Ebenen liegen, aber nicht unter einander parallel sind, und wenn die Kräfte zwar in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, aber nicht in Bezug auf drehende Bewegung, so läfst sich die Wirkung der Kräfte immer nur auf ein Kräftepaar zurückführen.

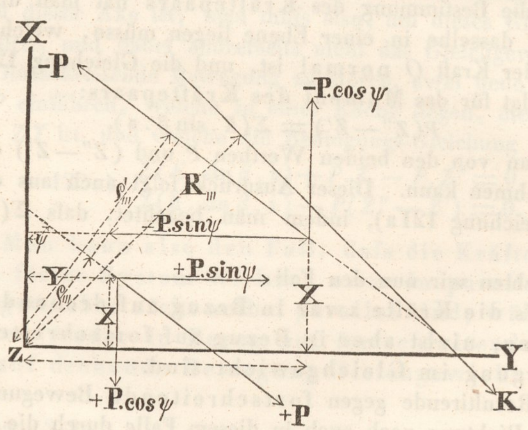
Die Gleichungen 119) nehmen für den gegebenen Fall die Form an:

$$\Sigma(K.\sin\alpha)=0;\quad \Sigma(K.\cos\alpha)=0,$$

und die Gleichungen in Bezug auf Drehung haben die Form:

$$\Sigma(K.\sin\alpha.z)=A,\quad \Sigma(K.\cos\alpha.z)=B,\quad \Sigma(K.R_{\prime\prime\prime})=C,$$

wenn wir die früheren Bezeichnungen, und die zu Anfange dieses Paragraphen angenommene Lage der Koordinatenebenen gelten lassen. Man sieht leicht, dafs das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung nur durch ein Kräftepaar $+P$ und $-P$ herzustel-



len ist, dessen Kräfte in Ebenen liegen, die mit den Parallelebenen der Kräfte parallel sind, denn wollte man nur eine einzige Kraft einführen, so würde durch dieselbe das Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung gestört werden. Bezeichnen wir den Abstand des Angriffspunkts von $+P$ von der Grundebene mit Z, denjenigen von $-P$ mit Z', den Winkel, welcher die Richtung von P mit der ersten Axe macht, mit ψ; ferner den Hebelsarm in Bezug auf die Axe Z von $+P$ mit $\varrho_{,,,}$, denjenigen von $-P$ mit $\varrho'_{,,,}$, so folgt, wenn die Kräfte $+P$ und $-P$ die Resultirenden der drehenden Bewegung sein sollen:

$$\text{a)}\ \Sigma(K.\sin\alpha.z) = P.\sin\psi\,(Z-Z'),$$

$$\text{b)}\ \Sigma(K.\cos\alpha.z) = P.\cos\psi\,(Z-Z'),$$

$$\text{c)}\ \Sigma(KR_{,,,}) = P(\varrho_{,,,}-\varrho'_{,,,}).$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$\text{123)}\ \operatorname{tang}\psi = \frac{\Sigma(K.\sin\alpha.z)}{\Sigma(K.\cos\alpha.z)},$$

durch welche Gleichung die Lage der **Durchschnittslinie** der Ebene, welche man durch die Kraftrichtungen des Kräftepaars legen kann, mit der **Grundebene** (ersten Projektionsebene) gegen die Axen XZ und YZ vollkommen bestimmt ist. Nennen wir nun den Neigungswinkel der Ebene, in welcher das Kräftepaar liegt, mit der Grundebene φ, so ist, wie leicht ersichtlich:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(Z-Z')}{(\varrho_{,,,}-\varrho'_{,,,})} = \frac{(Z-Z')}{\Sigma(KR_{,,,})}.\frac{1}{P};$$

(vermöge Gleichung c). Indem wir aber die Gleichungen a) und b) quadriren, addiren, und $Z-Z'$ entwickeln, folgt:

$$(Z-Z') = \frac{1}{P}.\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.z)]^2+[\Sigma(K.\cos\alpha.z)]^2\right\}}$$

$$\text{123a)}\ \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.z)]^2+[\Sigma(K.\cos\alpha.z)]^2\right\}}}{\Sigma(KR_{,,,})}.$$

Durch die Gleichungen 123 und 123a) ist die Lage der Ebene, in welcher das Kräftepaar wirksam zu denken ist, der Richtung nach vollkommen bestimmt. Der kürzeste Abstand der beiden Kraftrichtungen $+P$ und $-P$ ist aber, wie die Figur leicht übersehen läfst, gleich

$$\sqrt{\left\{(Z-Z')^2+(\varrho_{,,,}-\varrho'_{,,,})^2\right\}},$$

und indem wir die Werthe für $(Z-Z')^2$ und $(\varrho_{,,,}-\varrho'_{,,,})^2$ einsetzen und mit P multipliziren, folgt das **Moment des Kräftepaars**:

$$\text{123b)}\ \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.z)]^2+[\Sigma(K.\cos\alpha.z)]^2+[\Sigma(KR_{,,,})]^2\right\}}.$$

Bezeichnen wir den Abstand der beiden Kraftrichtungen mit a, die Koordinaten des Angriffspunktes der einen von beiden Gegenkräften $(+P)$ mit X, Y, Z, so sind, wie sich leicht übersehen läſst, die Koordinaten des Angriffspunkts der andern Gegenkraft $(-P)$:

$$123\text{c)}\quad Z' = Z + a \,.\, \sin\varphi;\quad Y' = Y + a \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi;$$
$$X' = X + a \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\psi.$$

Für den Fall, daſs **sämmtliche Kraftrichtungen parallel sind**, folgt aus 123), 123a) und 123b):

$$124)\ \begin{cases} \tang\psi = \tang\alpha \\ \tang\varphi = \dfrac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K.R_{\prime\prime\prime})}, \end{cases}$$

und das Moment des Kräftepaars:

$$124\text{a)}\quad \sqrt{\left\{[\Sigma(Kz)]^2 + [\Sigma(KR_{\prime\prime\prime})]^2\right\}},$$

in welchen Gleichungen z die Abstände der Angriffspunkte der einzelnen parallelen Kräfte von einer beliebigen mit ihrer Richtung parallelen Ebene und $R_{\prime\prime\prime}$ die Hebelsarme in Bezug auf eine beliebige, und zu dieser Ebene normale, Axe bezeichnen.

In dem Falle endlich, wo sämmtliche Kräfte in ein und derselben Ebene liegen, folgt:

$$125)\ \begin{cases} \tang\psi = \dfrac{z \,.\, \Sigma(K \,.\, \sin\alpha)}{z \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)} = \dfrac{0}{0} \\ \tang\varphi = 0, \end{cases}$$

und das Moment des Kräftepaares:

$$125\text{a)} = \Sigma(K \,.\, R_{\prime\prime\prime}),$$

d. h. in diesem Fall bleibt die Neigung des Kräftepaares (Winkel ψ) gegen die Axe XZ unbestimmt und kann beliebig genommen werden, das Kräftepaar, welches für die Wirkung der Kräfte substituirt werden kann, liegt in derselben Ebene, in welcher die Kräfte liegen, $(\varphi = 0)$ und es ist das Moment des Kräftepaares gleich der Summe der Momente sämmtlicher auf Drehung wirkenden Kräfte in Bezug auf eine beliebige zur Ebene der Kräfte normale Axe.

Bestimmung der Resultirenden und ihres Angriffspunktes für Kräfte, welche auf ein festes System wirken, und deren Richtungslinien eine beliebige Lage haben.

§ 76. Wir wenden uns nun zu dem allgemeinsten Fall, nämlich zu dem, daſs **auf ein festes System beliebige Kräfte in ganz beliebigen Richtungen wirken**, und daſs es darauf ankommt, ihre **Resultirende der Gröſse und Richtung nach** zu bestimmen.

Wenn zunächst:

A. die Kräfte weder in Bezug auf drehende noch in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind:

so können wir, indem wir drei beliebige Koordinatenebenen annehmen, die Resultirende der fortschreitenden Bewegung Q der Gröfse und Richtung nach bestimmen nach § 71 und mittelst der Gleichungen 110) und 111).

Um nun aber den Angriffspunkt der Resultirenden zu finden, denken wir uns sämmtliche Kräfte in den einzelnen Angriffspunkten nach drei zu einander normalen Richtungen zerlegt, die Komponenten parallel mit den drei Axen sind dann:

$$K.\cos\alpha\ldots,\quad K.\cos\beta\ldots,\quad K.\cos\gamma\ldots,$$

Nun haben wir drei Gruppen paralleler Kräfte, für die wir nach § 74 und Gleichung 117a) drei Resultirende einführen können. Es seien $Q_{\prime}$ die Resultirende aller parallelen Kräfte $K.\cos\alpha\ldots$ und X, Y, Z die Koordinaten ihres Angriffspunktes; in ähnlicher Weise bezeichnen $Q_{\prime\prime}$ und $Q_{\prime\prime\prime}$ die Resultirenden der parallelen Kräfte $K.\cos\beta\ldots$ und $K.\cos\gamma\ldots$ und $X_{\prime\prime}$, $Y_{\prime\prime}$, $Z_{\prime\prime}$ beziehlich $X_{\prime\prime\prime}$, $Y_{\prime\prime\prime}$, $Z_{\prime\prime\prime}$ die Koordinaten ihrer Angriffspunkte. Wir haben dann:

$$126)\quad \left\{\begin{array}{lll}
Q_{\prime}=\Sigma(K.\cos\alpha), & Q_{\prime\prime}=\Sigma(K.\cos\beta), & Q_{\prime\prime\prime}=\Sigma(K.\cos\gamma)\\
X_{\prime}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.x)}{\Sigma(K.\cos\alpha)}, & X_{\prime\prime}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.x)}{\Sigma(K.\cos\beta)}, & X_{\prime\prime\prime}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\gamma.x)}{\Sigma(K.\cos\gamma)}\\
Y_{\prime}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.y)}{\Sigma(K.\cos\alpha)}, & Y_{\prime\prime}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.y)}{\Sigma(K.\cos\beta)}, & Y_{\prime\prime\prime}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\gamma.y)}{\Sigma(K.\cos\gamma)}\\
Z_{\prime}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.z)}{\Sigma(K.\cos\alpha)}, & Z_{\prime\prime}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.z)}{\Sigma(K.\cos\beta)}, & Z_{\prime\prime\prime}=\dfrac{\Sigma(K.\cos\gamma.z)}{\Sigma(K.\cos\gamma)}.
\end{array}\right.$$

Diese Gleichungen zeigen folgendes Gesetz:

I. Wenn auf ein festes System beliebig viele Kräfte einwirken, welche weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, so läfst sich ihre Wirkung immer auf drei einzelne Kräfte zurückführen, deren Richtungen einzeln parallel sind mit drei beliebig angenommenen zu einander normalen Axen, und deren Angriffspunkte vollständig durch die Gleichung 126) bestimmt sind.

Da nun die Richtung der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung Q durch die Gleichungen 110) und 111) vollkommen bestimmt ist, so können wir jede dieser drei Kräfte, auf welche wir so eben das System zurückgeführt haben, zerlegen nach zwei Richtungen, von welchen eine parallel mit der Richtung von Q, die andere aber normal dazu ist, wir erhalten dann zwei Gruppen von Kräften, nämlich eine Gruppe, bestehend aus drei Kräften, die unter sich und mit der Richtung von Q parallel sind, und eine andere Gruppe von drei Kräften, welche in Ebenen liegen, die normal zu der Richtung von Q sind, welche folglich in parallelen Ebenen liegen. Da die Resultirende mit den Axen die Winkel A, B, Γ bildet, so bildet sie dieselben Winkel der Reihe nach auch mit den drei Kräften $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$, welche der Reihe nach mit diesen Axen parallel sind. Hiernach haben wir die beiden Gruppen:

parallel mit Q:	normal zu Q:
$Q_{,} . \cos A = Q . \cos A^2$,	$Q_{,} . \sin A = Q . \cos A . \sin A$,
$Q_{,,} . \cos B = Q . \cos B^2$,	$Q_{,,} . \sin B = Q . \cos B . \sin B$,
$Q_{,,,} . \cos \Gamma = Q . \cos \Gamma^2$,	$Q_{,,,} . \sin \Gamma = Q . \cos \Gamma . \sin \Gamma$.

Die Kräfte der ersten Gruppe lassen sich durch die Gleichungen 110) und 111) vereinigen. Es ist ihre Resultante (Gleichung 110), 111) und 112):

$$Q_{,} . \cos A + Q_{,,} . \cos B + Q_{,,,} . \cos \Gamma =$$
$$\frac{[\Sigma(K . \cos \alpha)]^2}{Q} + \frac{[\Sigma(K . \cos \beta)]^2}{Q} + \frac{[\Sigma(K . \cos \gamma)]^2}{Q} =$$

$$127)\quad Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K . \cos \alpha)]^2 + [\Sigma(K . \cos \beta)]^2 + [\Sigma(K . \cos \gamma)]^2\right\}}.$$

Der Angriffspunkt dieser Resultante ergiebt sich nach 117a), wenn wir die Koordinaten mit X, Y, Z bezeichnen:

$$128)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{Q_{,} . \cos A . X_{,} + Q_{,,} . \cos B . X_{,,} + Q_{,,,} . \cos \Gamma . X_{,,,}}{Q_{,} . \cos A + Q_{,,} . \cos B + Q_{,,,} . \cos \Gamma} \\ Y &= \frac{Q_{,} . \cos A . Y_{,} + Q_{,,} . \cos B . Y_{,,} + Q_{,,,} . \cos \Gamma . Y_{,,,}}{Q_{,} . \cos A + Q_{,,} . \cos B + Q_{,,,} . \cos \Gamma} \\ Z &= \frac{Q_{,} . \cos A . Z_{,} + Q_{,,} \cos B . Z_{,,} + Q_{,,,} . \cos \Gamma . Z_{,,,}}{Q_{,} . \cos A + Q_{,,} . \cos B + Q_{,,,} . \cos \Gamma}. \end{aligned}\right.$$

Setzen wir in diese Gleichungen die Werthe der Gleichungen 126) für $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$; $X_{,}$, $X_{,,}$, $X_{,,,}$ etc., so ergiebt sich mit Berücksichtigung, dafs nach Gleichung 111)

$$\cos A = \frac{\Sigma(K . \cos \alpha)}{Q}, \quad \cos B = \frac{\Sigma(K . \cos \beta)}{Q}, \quad \cos \Gamma = \frac{\Sigma(K . \cos \gamma)}{Q}$$

ist:

128a)

$$X = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.x).\Sigma(K.\cos\alpha)+\Sigma(K.\cos\beta.x).\Sigma(K.\cos\beta)+\Sigma(K.\cos\gamma.x).\Sigma(K.\cos\gamma)}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2+[\Sigma(K.\cos\beta)]^2+\Sigma(K.\cos\gamma)]^2}$$

$$Y = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.y).\Sigma(K.\cos\alpha)+\Sigma(K.\cos\beta.y).\Sigma(K.\cos\beta)+\Sigma(K.\cos\gamma.y).\Sigma(K.\cos\gamma)}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2+[\Sigma(K.\cos\beta)]^2+[\Sigma(K.\cos\gamma)]^2}$$

$$Z = \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.z).\Sigma(K.\cos\alpha)+\Sigma(K.\cos\beta.z).\Sigma(K.\cos\beta)+\Sigma(K.\cos\gamma.z).\Sigma(K.\cos\gamma)}{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2+[\Sigma(K.\cos\beta)]^2+[\Sigma(K.\cos\gamma)]^2}$$

Es ist übrigens leicht zu übersehen, dafs der hier bestimmte Angriffspunkt der Resultirenden dieser drei parallelen Kräfte in der Ebene liegen mufs, welche durch die Angriffspunkte der drei Kräfte gelegt werden kann, denn läge er aufserhalb dieser Ebene und zerlegte man die sämmtlichen Kräfte in zwei andere, parallel und normal zu der Ebene, so würde diejenige Komponente der Mittelkraft, welche parallel mit der Ebene ist, und deren Angriffspunkt aufserhalb der Ebene läge, einen Hebelsarm in Bezug auf eine in der Ebene liegende, und die Richtungen der Komponenten der drei Kräfte, deren Angriffspunkte in der Ebene liegen, schneidende Axe haben, während diese Komponenten einen Hebelsarm in Bezug auf diese Axe nicht hätten; es würde also durch die Mittelkraft Gleichgewicht gegen drehende Bewegung nicht hergestellt werden.

Betrachten wir jetzt die zweite Gruppe der Komponenten, deren Richtungen in Ebenen liegen, welche zur Richtung der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung normal sind, so können diese Kräfte keine fortschreitende Bewegung bedingen, wohl aber ist eine drehende Bewegung denkbar. Wir haben es also mit Kräften zu thun, die dem im vorigen Paragraphen unter C. behandelten Fall entsprechen, und für welche ein Kräftepaar substituirt werden kann. Um die Verhältnisse dieses Kräftepaares zu bestimmen, denken wir uns irgend eine Ebene, welche normal zu der Richtung von Q ist, nennen den normalen Abstand des Angriffspunktes $Q_{\prime}$ von dieser Ebene $Z_{\prime}^{0}$, den normalen Abstand der Angriffspunkte $Q_{\prime\prime}$ und $Q_{\prime\prime\prime}$ von derselben Ebene $Z_{\prime\prime}^{0}$, $Z_{\prime\prime\prime}^{0}$, denken ferner in der Ebene eine beliebige Axe, und bezeichnen die Winkel, welchen die Richtungslinien von $Q_{\prime}.\sin A$ mit dieser Axe bildet mit $\alpha_{\prime}^{0}$, ebenso die Winkel, welche die Richtungslinien der Kräfte $Q_{\prime\prime}.\sin B$ und $Q_{\prime\prime\prime}.\sin\Gamma$ mit derselben Axe bilden mit $\alpha_{\prime\prime}^{0}$, $\alpha_{\prime\prime\prime}^{0}$, so ergiebt sich der Neigungswinkel der Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars mit jener Axe ψ nach 123:

$$\tan\psi = \frac{Z_{,}^{0} Q_{,} \cdot \sin A \cdot \sin \alpha_{,}^{0} + Z_{,,}^{0} Q_{,,} \cdot \sin B \cdot \sin \alpha_{,,}^{0} + Z_{,,,}^{0} Q_{,,,} \cdot \sin \Gamma \cdot \sin \alpha_{,,,}^{0}}{Z_{,}^{0} Q_{,} \cdot \sin A \cdot \cos \alpha_{,}^{0} + Z_{,,}^{0} Q_{,,} \cdot \sin B \cdot \cos \alpha_{,,}^{0} + Z_{,,,}^{0} Q_{,,,} \cdot \sin \Gamma \cdot \cos \alpha_{,,,}^{0}}$$

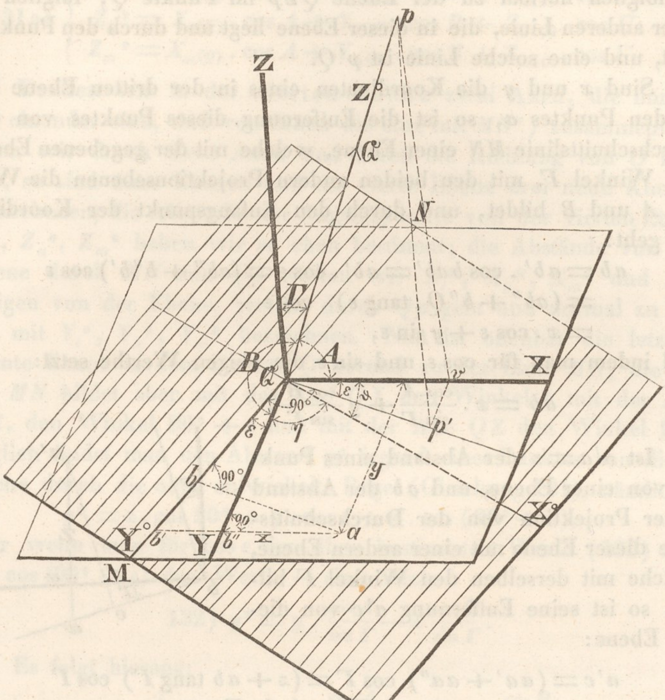
und in ähnlicher Weise läfst sich der Neigungswinkel φ der Ebene des Kräftepaares gegen die Richtung von Q nach 123a), sowie das Moment des Kräftepaares nach 123b) finden. Wollte man die in diesen Gleichungen vorkommenden Werthe analytisch ausdrücken, so kompliciren sich die Ausdrücke so sehr, dafs sie ihren Werth als Formeln für den Gebrauch verlieren, und es besser ist in jedem einzelnen Falle die Rechnung besonders durchzuführen. Um diese Rechnung zu erleichtern, dürfte folgender Weg zu empfehlen sein.

Wir verlegen den Anfangspunkt des ursprünglichen Koordinatensystems in den Angriffspunkt von Q. Es sind sodann die Koordinaten der drei Angriffspunkte $Q_{,}$, $Q_{,,}$, $Q_{,,,}$ durch die Gleichungen zu finden:

$$129)\left\{\begin{array}{lll} X_{,(Q)} = X_{,} - X, & Y_{,(Q)} = Y_{,} - Y, & Z_{,(Q)} = Z_{,} - Z, \\ X_{,,(Q)} = X_{,,} - X, & Y_{,,(Q)} = Y_{,,} - Y, & Z_{,,(Q)} = Z_{,,} - Z, \\ X_{,,,(Q)} = X_{,,,} - X, & Y_{,,,(Q)} = Y_{,,,} - Y, & Z_{,,,(Q)} = Z_{,,,} - Z. \end{array}\right.$$

Legen wir nun durch den Angriffspunkt von Q, also durch den Anfangspunkt des neuen Koordinatensystems eine Ebene normal zur Richtung von Q (vierte Ebene), so bildet diese Ebene mit den Ebenen, in welcheu die Axen X und Y liegen (dritte Ebene), den Winkel Γ mit der Ebene, in welcher die Axen X und Z (zweite Ebene) liegen, den Winkel B, und mit der Ebene, in welcher die Axen Y und Z (erste Ebene) liegen, den Winkel A; denn der Winkel, welchen zwei Ebenen bilden, wird gemessen durch den Winkel, welchen zwei Linien einschliefsen, die in einem Punkte der Durchschnittslinie einzeln normal auf den Ebenen sind. Der Angriffspunkt von Q ist aber ein Punkt der Durchschnittslinien der vier Ebenen, die Richtung Q ist normal auf der vierten Ebene, die Axe der Z ist normal auf der Ebene, in welcher die Axen der X und der Y liegen, folglich macht diese Ebene mit der vierten Ebene den Winkel, welcher die Richtung von Q mit der Axe der Z bildet, d. i. den Winkel Γ etc.

Projiciren wir die Richtung von Q auf die Ebene, in welcher die Axen der X und der Y liegen, und bezeichnen wir den Winkel, welcher die Projektion Qp' mit der Axe X bildet, mit ε, ziehen von $p_{,}$ die Normale $p'v$ auf die Axe X und verbinden pv, so ist auch pv normal zu QX, und daher:



130) $\cos\varepsilon = \dfrac{Qv}{Qp'} = \dfrac{Qp \cdot \cos A}{Qp \cdot \sin(Qpp')} = \dfrac{\cos A}{\sin(pQZ)} = \dfrac{\cos A}{\sin \Gamma}$.

Ebenso findet man:

$$\cos(p'QY) = \frac{\cos B}{\sin \Gamma} = \sin\varepsilon,$$

d. h. der Kosinus des Winkels, welchen die Projektion einer Linie auf eine Ebene mit einer in dieser Ebene liegenden Axe macht, ist gleich dem Quotienten aus dem Kosinus des Winkels, welchen die Linie selbst mit derselben Axe macht, durch den Sinus des Winkels, welchen die Linie mit einer zu der Ebene normalen Axe macht; ähnlich läſst sich eine Regel für den Sinus ableiten.

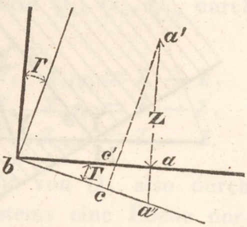
Die Durchschnittslinie MN, zwischen der vierten Ebene und der dritten Ebene, ist normal zu der Projektion Qp', denn, da sie in der vierten Ebene liegt, so ist sie normal auf pQ, und da sie auch in der dritten Ebene liegt, so ist sie normal zu QZ, sie ist folglich normal zu der Ebene QZp im Punkte Q, folglich zu jeder anderen Linie, die in dieser Ebene liegt und durch den Punkt Q geht, und eine solche Linie ist $p'Q$.

Sind x und y die Koordinaten eines in der dritten Ebene liegenden Punktes a, so ist die Entfernung dieses Punktes von der Durchschnittslinie MN einer Ebene, welche mit der gegebenen Ebene den Winkel Γ, mit den beiden andern Projektionsebenen die Winkel A und B bildet, und durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht:

$$\begin{aligned} ab &= ab' \,.\, \cos b\,ab' = ab' \,.\, \cos \varepsilon = (ab'' + b''b') \cos \varepsilon \\ &= (ab'' + b''Q \,.\, \operatorname{tang} \varepsilon) \,.\, \cos \varepsilon \\ &= x \,.\, \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon, \end{aligned}$$

und indem man für $\cos \varepsilon$ und $\sin \varepsilon$ die obigen Werthe setzt:

$$ab = x \,.\, \frac{\cos A}{\sin \Gamma} + y \frac{\cos B}{\sin \Gamma}.$$



Ist $a'a = z$ der Abstand eines Punktes von einer Ebene, und ab der Abstand seiner Projektion von der Durchschnittslinie dieser Ebene mit einer andern Ebene, welche mit derselben den Winkel Γ bildet, so ist seine Entfernung $a'c$ von dieser Ebene:

$$\begin{aligned} a'c &= (aa' + aa'') \cos \Gamma = (z + ab \operatorname{tang} \Gamma) \cos \Gamma \\ &= z \,.\, \cos \Gamma + ab \sin \Gamma. \end{aligned}$$

Setzen wir für ab den vorhin bestimmten Werth, und bezeichnen wir den Abstand $a'c$ mit z^0, so ist:

$$131)\quad z^0 = z \,.\, \cos \Gamma + x \cos A + y \cos B,$$

d. h. der Abstand eines Punktes, dessen Koordinaten x, y und z sind von einer Ebene, die im Anfangspunkt des Koordinatensystems normal steht auf einer durch den Anfangspunkt des Koordinaten gehenden, und mit den drei Koordinatenaxen die Winkel A, B, Γ bildenden Linie, ist gleich der Summe der Produkte, welche gebildet werden, wenn man jede der drei Koordinaten einzeln mit dem Kosinus des Winkels multiplizirt, welcher die Richtung jener Linie mit derjenigen Axe bildet, mit welcher die betreffende Koordinate parallel ist.

Hiernach hat man die Abstände der Angriffspunkte der Kräfte $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$ und $Q_{\prime\prime\prime}$ von der Ebene, welche im Angriffspunkt von Q normal zu der Richtung der Mittelkraft Q gedacht ist:

$$131\text{a)} \left\{ \begin{array}{l} Z_{\prime}{}^{0} = X_{\prime(Q)} \cdot \cos A + Y_{\prime(Q)} \cdot \cos B + Z_{\prime(Q)} \cdot \cos \Gamma \\ Z_{\prime\prime}{}^{0} = X_{\prime\prime(Q)} \cdot \cos A + Y_{\prime\prime(Q)} \cdot \cos B + Z_{\prime\prime(Q)} \cdot \cos \Gamma \\ Z_{\prime\prime\prime}{}^{0} = X_{\prime\prime\prime(Q)} \cdot \cos A + Y_{\prime\prime\prime(Q)} \cdot \cos B + Z_{\prime\prime\prime(Q)} \cdot \cos \Gamma. \end{array} \right.$$

Denken wir in der vierten Ebene zwei Axen, die normal auf einander sind, und von denen die eine mit MN*) zusammenfällt; legen wir durch diese Axen und durch die Richtung von Q Ebenen, so sind diese Ebenen und die vierte Ebene drei neue Koordinatenebenen, die Abstände der Angriffspunkte von der vierten Ebene $Z_{\prime}{}^{0}$, $Z_{\prime\prime}{}^{0}$, $Z_{\prime\prime\prime}{}^{0}$ haben wir so eben bestimmt; die Abstände von der Ebene durch MN und Qp wollen wir $X_{\prime}{}^{0}$, $X_{\prime\prime}{}^{0}$, $X_{\prime\prime\prime}{}^{0}$ und diejenigen von der Ebene, welche durch Qp geht und normal zu MN ist, mit $Y_{\prime}{}^{0}$, $Y_{\prime\prime}{}^{0}$, $Y_{\prime\prime\prime}{}^{0}$ bezeichnen. Nun ist offenbar die letztgenannte Ebene in dem Punkte Q normal zu der Linie MN; die Linie MN bildet aber mit der Axe QY den Winkel ε mit der Axe QX, den Winkel $90^{0} + \varepsilon$ und mit der Axe QZ den Winkel 90^{0}, folglich findet man den Abstand y^{0} irgend eines Punktes von dieser Ebene durch die oben entwickelte Regel (Gleichung 131), nämlich:

$$y^{0} = z \cdot \cos 90^{0} + y \cdot \cos \varepsilon + x \cdot \cos (90^{0} + \varepsilon),$$

oder wenn man für $\cos \varepsilon$ den oben bestimmten Werth (130) und für $\cos (90^{0} + \varepsilon)$ den Werth $-\sin \varepsilon$ setzt:

$$132) \quad y^{0} = y \cdot \frac{\cos A}{\sin \Gamma} - x \frac{\cos B}{\sin \Gamma}.$$

Es folgt hieraus:

$$132\text{a)} \left\{ \begin{array}{l} Y_{\prime}{}^{0} = Y_{\prime(Q)} \cdot \dfrac{\cos A}{\sin \Gamma} - X_{\prime(Q)} \cdot \dfrac{\cos B}{\sin \Gamma} \\ Y_{\prime\prime}{}^{0} = Y_{\prime\prime(Q)} \cdot \dfrac{\cos A}{\sin \Gamma} - X_{\prime\prime(Q)} \cdot \dfrac{\cos B}{\sin \Gamma} \\ Y_{\prime\prime\prime}{}^{0} = Y_{\prime\prime\prime(Q)} \cdot \dfrac{\cos A}{\sin \Gamma} - X_{\prime\prime\prime(Q)} \cdot \dfrac{\cos B}{\sin \Gamma}. \end{array} \right.$$

Die Linie Qp' erscheint offenbar als die Projektion derjenigen Axe, welche in der vierten Ebene liegt und in Q zu MN normal ist, auf die dritte Ebene. Bezeichnen wir den Winkel, welchen die genannte Axe mit der Axe QZ macht mit σ, den Winkel mit QY mit η und den Winkel mit QX mit ϑ, so ist nach der früher entwickelten Regel (130):

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos \vartheta}{\sin \sigma}, \qquad \sin \varepsilon = \frac{\cos \eta}{\sin \sigma},$$

daraus folgt:

$$\cos \vartheta = \cos \varepsilon \cdot \sin \sigma, \qquad \cos \eta = \sin \varepsilon \cdot \sin \sigma.$$

---

*) Siehe die Figur auf S. 123.

Nun ist aber der Winkel σ offenbar gleich $90^0 + \Gamma$ und daher $\sin\sigma = \cos\Gamma$, und indem wir für $\cos\varepsilon$ und $\sin\varepsilon$ die oben gefundenen Werthe setzen, ergiebt sich:

$$\cos\vartheta = \frac{\cos A \,.\, \cos\Gamma}{\sin\Gamma}, \qquad \cos\eta = \frac{\cos B \,.\, \cos\Gamma}{\sin\Gamma}.$$

Die Ebene, welche durch MN*) und Qp gelegt wird, ist aber normal auf der ebenerwähnten Axe, und da diese Axe mit den drei ersten Axen die Winkel σ, η und ϑ macht, so folgt der Abstand eines beliebigen Punktes von dieser Ebene (131):

$$x_0 = z \,.\, \cos\sigma + y \,.\, \cos\eta + z \,.\, \cos\vartheta,$$

und wenn man für $\cos\sigma$ setzt $\cos(90^0 + \Gamma) = -\sin\Gamma$ und für $\cos\vartheta$ und $\cos\eta$ die eben bestimmten Werthe, so folgt:

$$x_0 = -z\sin\Gamma + y \,.\, \frac{\cos B \,.\, \cos\Gamma}{\sin\Gamma} + x \,.\, \frac{\cos A \,.\, \cos\Gamma}{\sin\Gamma},$$

oder durch eine leichte Umformung:

$$x_0 = \frac{z \,.\, \cos\Gamma^2 + y \,.\, \cos B \,.\, \cos\Gamma + x \,.\, \cos A \,.\, \cos\Gamma - z}{\sin\Gamma} = \frac{z_0 \cos\Gamma - z}{\sin\Gamma}.$$

Hiernach ist also:

133)

$$X_{\prime}{}^0 = \frac{X_{\prime}(\varrho) \,.\, \cos A \,.\, \cos\Gamma + Y_{\prime}(\varrho) \,.\, \cos B \,.\, \cos\Gamma + Z_{\prime}(\varrho) \,.\, \cos\Gamma^2 - Z_{\prime}(\varrho)}{\sin\Gamma}$$

$$X_{\prime\prime}{}^0 = \frac{X_{\prime\prime}(\varrho) \,.\, \cos A \,.\, \cos\Gamma + Y_{\prime\prime}(\varrho) \,.\, \cos B \,.\, \cos\Gamma + Z_{\prime\prime}(\varrho) \,.\, \cos\Gamma^2 - Z_{\prime\prime}(\varrho)}{\sin\Gamma}$$

$$X_{\prime\prime\prime}{}^0 = \frac{X_{\prime\prime\prime}(\varrho) \,.\, \cos A \,.\, \cos\Gamma + Y_{\prime\prime\prime}(\varrho) \,.\, \cos B \,.\, \cos\Gamma + Z_{\prime\prime\prime}(\varrho) \,.\, \cos\Gamma^2 - Z_{\prime\prime\prime}(\varrho)}{\sin\Gamma},$$

oder:

$$\text{133a)} \quad X_{\prime}{}^0 = \frac{Z_{\prime}{}^0 \,.\, \cos\Gamma - Z_{\prime}(\varrho)}{\sin\Gamma}, \qquad X_{\prime\prime}{}^0 = \frac{Z_{\prime\prime}{}^0 \,.\, \cos\Gamma - Z_{\prime\prime}(\varrho)}{\sin\Gamma},$$

$$X_{\prime\prime\prime}{}^0 = \frac{Z_{\prime\prime\prime}{}^0 \,.\, \cos\Gamma - Z_{\prime\prime\prime}(\varrho)}{\sin\Gamma}.$$

Es kommt nur noch darauf an die Winkel $\alpha_{\prime}{}^0$, $\alpha_{\prime\prime}{}^0$, $\alpha_{\prime\prime\prime}{}^0$ zu bestimmen, welche die drei Kraftrichtungen $Q_{\prime} . \sin A$, $Q_{\prime\prime} . \sin B$, $Q_{\prime\prime\prime} . \sin\Gamma$ mit einer von den neuen, in der vierten Ebene liegenden Axen bilden. Wir wählen die Axe, welche normal zu MN ist, als diejenige, mit welcher die genannten zu bestimmenden Winkel gebildet werden, und nennen diese Axe die Axe der X^0. Jene drei Kraftrichtungen sind entstanden, indem man die Drucke $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, $Q_{\prime\prime\prime}$ nach der Richtung Q und normal dazu zerlegte, sie erscheinen also als die Projektionen der Kraftrichtungen $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, $Q_{\prime\prime\prime}$ auf die zu Q normale vierte Ebene, oder da diese letztgenannten Kraftrichtungen parallel mit den drei ersten Axen sind, als die Pro-

*) Siehe die Figur auf S. 123.

jektionen dieser drei Axen auf die vierte Ebene. Nun macht die Axe QX*) mit der angenommenen neuen Axe der X^0 den Winkel ϑ; mit der zu der Ebene, in welcher diese neue Axe liegt, normalen Axe Qp (Axe der Z^0) den Winkel A und mit der Axe MN (oder der Axe der Y^0) den Winkel $90^0 + \varepsilon$.

Wir haben also nach dem Gesetz (130) auf S. 123 für den Winkel, welchen die Projektion von QX auf die vierte Ebene mit der Axe der X^0 macht, oder, was dasselbe ist, für den Winkel, welcher die Kraftrichtung $Q_{\prime} . \sin A$ mit der Axe der X^0 macht:

$$134) \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha_{\prime}{}^0 &= \frac{\cos \vartheta}{\sin A} = \frac{\cos A \,.\, \cos \Gamma}{\sin A \,.\, \sin \Gamma} = \operatorname{cotg} A \,.\, \operatorname{cotg} \Gamma \\ \sin \alpha_{\prime}{}^0 &= \frac{\cos (90^0 + \varepsilon)}{\sin A} = \frac{-\sin \varepsilon}{\sin A} = \frac{-\cos B}{\sin A \,.\, \sin \Gamma}. \end{aligned} \right.$$

Ebenso findet man den Winkel, welchen die Projektion der Axe QY oder die Kraftrichtung $Q_{\prime\prime} . \sin B$ mit der Axe der X^0 macht, durch die Betrachtung, dafs die Axe QY mit der Axe der X^0 den Winkel η mit der Axe der Y^0 den Winkel ε und mit der Axe der Z^0 den Winkel B bildet:

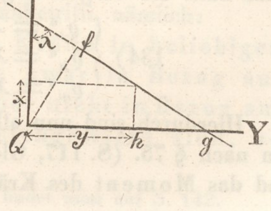
$$134\,a) \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha_{\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos \eta}{\sin \varepsilon} = \frac{\cos B \,.\, \cos \Gamma}{\sin B \,.\, \sin \Gamma} = \operatorname{cotg} B \,.\, \operatorname{cotg} \Gamma \\ \sin \alpha_{\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos \eta}{\sin B} = \frac{\cos A}{\sin B \,.\, \sin \Gamma}, \end{aligned} \right.$$

und endlich ergiebt sich der dritte Winkel, da die Axe QZ mit der Axe der X^0, den Winkel $\sigma = 90^0 + \Gamma$; mit der Axe der Y^0 einen Rechten, und mit der Axe der Z^0 den Winkel Γ bildet:

$$134\,b) \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha_{\prime\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos (90^0 + \Gamma)}{\sin \Gamma} = -1 \\ \sin \alpha_{\prime\prime\prime}{}^0 &= \frac{\cos 90^0}{\sin \gamma} = 0, \end{aligned} \right.$$

d. h. die Richtung $Q_{\prime\prime\prime} . \sin \Gamma$ macht mit der Richtung der Axe der X^0 einen Winkel von 180 Grad, ist der Richtung der Axe X^0 also entgegengesetzt.

Endlich lassen sich auch noch die **Hebelsarme** der Kräfte $Q' . \sin A$, $Q_{\prime\prime} . \sin B$ und $Q_{\prime\prime\prime} . \sin \Gamma$ in Bezug auf die Axe pQ leicht bestimmen. Sind nämlich x und y die Koordinaten eines Punktes parallel mit der Ebene gemessen, auf welcher die dritte Axe normal steht, so ist der kürzeste Abstand der Richtungslinie der Kraft, welche durch diesen Punkt



*) Siehe die Figur auf S. 123.

geht, und deren Projektion mit der Axe der X den Winkel λ bildet, von der dritten Axe offenbar:

$$135)\quad \begin{cases} Qf = Qg \,.\, \cos\lambda = (y + hg)\cos\lambda = (y + x\,\mathrm{tang}\,\lambda)\cos\lambda \\ \qquad = y\,.\,\cos\lambda + x\sin\lambda. \end{cases}$$

Macht die Kraftrichtung selbst mit der Axe der X den Winkel α, mit der Axe der Y den Winkel β und mit der Axe der Z den Winkel γ, so hat man nach dem Frühern (130) für den Winkel, welcher ihre Projektion mit der Axe der X bildet:

$$\cos\lambda = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \quad \sin\lambda = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma},$$

folglich die kürzeste Entfernung der Kraftrichtung von der Axe der Z oder den Hebelsarm der Kraft in Bezug auf die Axe der Z:

$$135\text{a})\quad Qf = R_{\prime\prime\prime} = \frac{x\,.\,\cos\beta}{\sin\gamma} + \frac{y\,.\,\cos\alpha}{\sin\gamma}.$$

Man findet also den Hebelsarm einer Kraft, deren Richtung durch einen gegebenen Punkt geht und mit den drei Axen gegebene Winkel bildet, in Bezug auf eine Axe, wenn man jede einzelne der beiden Koordinaten, welche nicht mit dieser Axe parallel sind, multiplizirt mit dem Kosinus des Neigungswinkels, welchen die Kraftrichtung mit derjenigen Axe macht, die der andern von beiden parallel ist, und die Summe der Produkte dividirt durch den Sinus des Neigungswinkels, welchen die Kraftrichtung mit derjenigen Axe macht, für welche man den Hebelsarm bestimmen will, oder wenn man jede der beiden Koordinaten mit dem Sinus des Neigungswinkels multiplizirt, welchen die Projektion der Kraftrichtung auf eine Ebene, die normal zu der Axe ist, für welche man den Hebelsarm bestimmen will, bildet mit derjenigen Axe, mit welcher die betreffende Koordinate parallel ist; und die Summe nimmt.

Nennen wir die Hebelsarme der drei Kräfte $Q_{\prime}.\sin A$, $Q_{\prime\prime}\sin B$, $Q_{\prime\prime\prime}.\sin \Gamma$ in Bezug auf die mit der Richtung Q zusammenfallende Axe der Reihe nach $\varrho_{\prime}{}^{0}$, $\varrho_{\prime\prime}{}^{0}$, $\varrho_{\prime\prime\prime}{}^{0}$, so findet man diese Hebelsarme nach der obigen Regel (135):

$$134)\quad \begin{cases} \varrho_{\prime}{}^{0} = X_{\prime}{}^{0}\,.\,\sin\alpha_{\prime} + Y_{\prime}{}^{0}\,.\,\cos\alpha_{\prime}{}^{0} \\ \varrho_{\prime\prime}{}^{0} = X_{\prime\prime}{}^{0}\,.\,\sin\alpha_{\prime\prime} + Y_{\prime\prime}{}^{0}\,.\,\cos\alpha_{\prime\prime}{}^{0} \\ \varrho_{\prime\prime\prime}{}^{0} = X_{\prime\prime\prime}{}^{0}\,.\,\sin\alpha_{\prime\prime\prime} + Y_{\prime\prime\prime}{}^{0}\,.\,\cos\alpha_{\prime\prime\prime}{}^{0} = -\,Y_{\prime\prime\prime}{}^{0}. \end{cases}$$

Hierdurch sind nun alle Elemente bestimmt, deren man bedarf, um nach § 75. (S. 117, Gleichung 123), 123a) und 123b) die Lage und das Moment des Kräftepaares zu bestimmen.

Man hat nämlich zu setzen in jenen Gleichungen:

$$
137)\left\{\begin{aligned}
&\Sigma(K.\sin a.z) = Q_{,}.\sin A.\sin\alpha_{,}{}^{0}.Z_{,}{}^{0} + Q_{,,}.\sin B.\sin\alpha_{,,}{}^{0}.Z_{,,}{}^{0} + \\
&\qquad Q_{,,,}.\sin\Gamma.\sin\alpha_{,,,}{}^{0}.Z_{,,,}{}^{0} \\
&\Sigma(K.\cos a.z) = Q_{,}.\sin A.\cos\alpha_{,}{}^{0}.Z_{,}{}^{0} + Q_{,,}.\sin B.\cos\alpha_{,,}{}^{0}.Z_{,,}{}^{0} + \\
&\qquad Q_{,,,}.\sin\Gamma.\cos\alpha_{,,,}{}^{0}.Z_{,,,}{}^{0} \\
&\Sigma(K.R_{,,,}) = Q_{,}.\sin A.\varrho_{,}{}^{0} + Q_{,,}.\sin B.\varrho_{,,}{}^{0} + Q_{,,,}.\sin\Gamma.\varrho_{,,,}{}^{0}.
\end{aligned}\right.
$$

Es ergiebt sich sodann aus Gleichung 123) der Winkel ψ, welchen die Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars und der vierten Ebene mit der Axe der X^0 macht; aus Gleichung 123a) der Winkel, welchen die Ebene des Kräftepaars mit der vierten Ebene, oder überhaupt mit einer Ebene macht, die normal ist zur Richtung der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung, und endlich aus Gleichung 123b) das Moment des resultirenden Kräftepaares *).

Ueberhaupt folgt aus der eben durchgeführten Rechnung:

II. Wenn auf ein festes System beliebige Kräfte einwirken, welche weder in Bezug auf fortschreitende noch in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, so läſst sich ihre Wirkung immer zurückführen auf eine Kraft, welche der Richtung und Gröſse nach (Gleichung 127, 128, 128a), und auf ein Kräftepaar, dessen Moment der Gröſse nach, und dessen Ebene der Lage nach (Gleichung 123 und 136) zu bestimmen sind.

Ziehen wir nunmehr den zweiten Fall in Betracht:

B. Wenn auf ein festes System Kräfte in beliebigen Richtungen wirken, welche zwar in Bezug auf drehende Bewegung, nicht aber in Bezug auf fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sind, so läſst sich immer eine Resultante durch die Gleichungen 127), 128) und 128a) der Gröſse und Richtung nach bestimmen.

Dieser Fall ist nämlich ohne Weiteres auf die analogen Fälle auf S. 104 und 115 zurückzuführen.

Was nun endlich den dritten Fall anbetrifft, nämlich:

C. Wenn auf ein festes System Kräfte in beliebigen Richtungen wirken, welche zwar in Bezug auf fortschreitende Bewegung, aber nicht in Bezug auf drehende Bewegung im Gleichgewicht sind, so

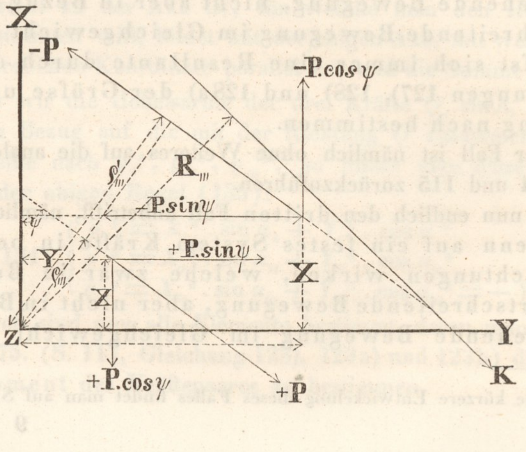
*) Eine kürzere Entwickelung dieses Falles findet man auf S. 142.

läfst sich die Wirkung derselben immer nur auf ein resultirendes Kräftepaar zurückführen.

Um dies nachzuweisen, verfahren wir ganz ähnlich wie auf S. 116 C.

Zunächst ist einleuchtend, dafs eine Gegenkraft, welche wir in das System einführen möchten, das Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung stören würde; es sind also wenigstens zwei gleich grofse, parallele, aber der Richtung nach entgegengesetzte Kräfte $+P'$ und $-P'$ einzuführen, welche mit den drei Axen die Winkel A, B und Γ bilden mögen.

Legen wir durch die parallelen Richtungen der Kräfte $+P'$ und $-P'$ eine Ebene, und verbinden nun ihre Angriffspunkte, so liegt auch diese Verbindungslinie in derselben Ebene. In jedem Falle lassen sich aber die beiden Kräfte in dieser Ebene zerlegen in je zwei andere, von denen die einen parallel sind mit einer der Koordinaten-Ebenen, z. B. mit der Ebene XY, und die andern in die Richtung der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte fallen. Die Komponenten, parallel mit der Grundebene XY, sind unter sich parallel, gleich grofs, aber entgegengesetzt, und mögen mit $+P$ und $-P$ bezeichnet werden, die Komponenten nach der Richtung der Verbindungslinie sind ebenfalls gleich grofs, entgegengesetzt und fallen in dieselbe gerade Linie, sie mögen mit $+P''$ und $-P''$ bezeichnet werden. Diese beiden Komponenten halten einander das Gleichgewicht, sie nehmen nur die innern Kräfte des Systems in Anspruch, und können auf das System weder auf Drehung noch auf Fortschreiten wirken; sie fallen also aus der Betrachtung, und man sieht, dafs, wie man auch die Lage und Richtung der beiden



Kräfte $+P'$ und $-P'$ gewählt haben mag, sich für dieselben immer zwei andere $+P$ und $-P$ substituiren lassen, die in denselben Angriffspunkten wirken, deren Richtungen parallel mit einer der Koordinatenebenen sind, und aufserdem in derselben Ebene liegen, welche durch die Kräfte $+P'$ und $-P'$ gelegt werden konnte.

Behalten wir die Bezeichnungen auf S. 116 bei, so folgt, dafs, wenn die beiden Kräfte $+P$ und $-P$ Gleichgewicht gegen drehende Bewegung herstellen sollen, sein müsse:

a) $\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,}) = P.\sin\psi(Z-Z')$

b) $\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,}) = P.\cos\psi(Z-Z')$

c) $\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,}) = P.(\varrho_{,,,}-\varrho'_{,,,})$.

Durch dieselben Betrachtungen, welche bereits auf S. 117 angestellt worden, und in Erwägung, dafs wir diese Betrachtungen, welche für die Ebene XY gelten, hier auch für die Ebene XZ und ZY anstellen können, folgt allgemein:

Der Neigungswinkel der Ebene des Kräftepaars gegen die Ebene XY

138) $$\tang\varphi = \frac{\sqrt{[\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})]^2 + [\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2}}{\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})},$$

d. h. man findet die Tangente des Neigungswinkels der Ebene, in welcher das resultirende Kräftepaar liegt, gegen eine der Koordinatenebenen gleich dem Quotienten aus der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Momentensummen der einzelnen Kräfte in Bezug auf die beiden Axen, die in dieser Ebene liegen, durch die Momentensumme der einzelnen Kräfte in Bezug auf die Axe, welche normal zu dieser Ebene ist.

Es folgt ferner:

Der Neigungswinkel der Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars mit einer der Koordinatenebenen gegen eine der Axen, welche in dieser Ebene liegen:

138a) $$\tang\psi = \frac{\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})}{\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})},$$

d. h. man findet die Tangente des Neigungswinkels, welchen die Durchschnittslinie der Ebene des Kräftepaars mit einer der Koordinatenebenen gegen eine in dieser letztgenannten Ebene liegende Axe macht, gleich dem Quotienten aus der Momentensumme der einzelnen Kräfte in Bezug auf diese Axe durch die Momentensumme in Bezug auf die andere in derselben Ebene liegende Axe.

138b) Das Moment des Kräftepaars

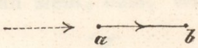
$$\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})]^2+[\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2+[\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})]^2\right\}},$$

d. h. das Moment des resultirenden Kräftepaars ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Momentensummen der einzelnen Kräfte in Bezug auf die drei Axen.

Vorschlag zur Annahme eines allgemein giltigen Modus die Winkel zu zählen, welche Kraftrichtungen mit rechtwinkligen Koordinaten-Axen bilden.

§ 77. Bei den vorhergehenden statischen Untersuchungen hat man mit Kräften zu thun, deren Richtungslinien nicht in ein und derselben Ebene liegen; man bestimmt sodann die Lage dieser Richtungslinien durch die Winkel, welche sie mit drei angenommenen Koordinaten-Axen machen; es ist sehr wichtig die Vorzeichen der Winkelfunktionen richtig in die Rechnung einzuführen, und um in dieser Beziehung keinen Irrthum zu begehen, mufs man die Winkel, welche die Richtungslinien mit den einzelnen Axen machen, von jeder Axe aus stets in demselben Sinne rechnen (vergl. § 59). Es erscheint wünschenswerth, dafs man sich allgemein über einen Modus einige, nach welchem bei dergleichen Untersuchungen die Kraftrichtungen zu bestimmen sind, und zu dem Zwecke scheint folgendes Verfahren empfehlenswerth:

1) Man sehe sämmtliche Kräfte so an, als ob sie in ihrem Angriffspunkt ziehend wirken, und nehme ihre Werthe dann absolut.

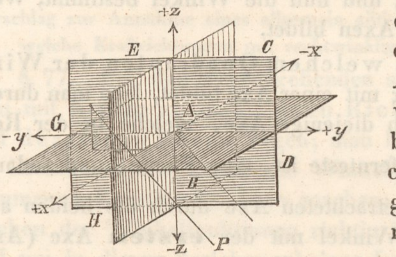


Um dies zu verstehen, diene folgende Erläuterung: Strebt eine Kraft ein Massenelement von a nach b zu bewegen, so können wir entweder die Kraft in einem Punkte wirkend denken, der auf derselben Seite von a liegt, auf welcher auch b liegt, und so als ob sie das Massenelement anziehe, oder wir können die Kraft auch in einem Punkte wirksam denken, der auf der entgegengesetzten Seite von a liegt, und so, als ob die Kraft das Bestreben habe, das Massenelement abzustofsen (§ 55. S. 67). Im ersten Falle bezeichnen wir die Wirkung, indem wir sagen, die Kraft wirke ziehend, im andern Fall, indem wir sagen, die Kraft wirke schiebend auf das Massenelement. Es ist gleichgiltig, ob wir sämmtliche Kräfte in ihren Angriffspunkten ziehend, oder ob wir sämmtliche Kräfte schiebend wirkend denken. Um eine Uebereinstimmung herbeizuführen, mögen stets sämmtliche Kräfte ziehend angenommen werden, und wenn sie schiebend gedacht werden sollen, möge man es ausdrücklich bemerken.

2) Die Winkel, welche eine Kraftrichtung mit den drei Axen macht, werden gefunden, wenn man von dem Anfangspunkt der Koordinaten eine Linie zieht, parallel mit der Richtung der Kraft, und in demselben Sinne, in welchem die Kraft auf ihren Angriffspunkt ziehend wirkt, und nun die Winkel bestimmt, welche diese Linie mit den drei Axen bildet.

3) Um zu beurtheilen, in welchem Quadranten der Winkel liegt, den diese Richtung mit einer Axe bildet, lege man durch die betrachtete Axe und durch diejenige Axe, welche in der Reihenfolge $\overset{1}{X}, \overset{2}{Y}, \overset{3}{Z}$ ihr die entfernteste ist, eine Ebene, und sodann eine Ebene normal zu der betrachteten Axe durch die beiden anderen Axen. Um also den Winkel mit der **ersten** Axe (Axe der *X*) zu bestimmen, lege man eine Ebene durch die erste und dritte Axe (Axe der *X* und der *Z*) und eine Ebene durch die zweite und dritte Axe (Axe der *Y* und der *Z*). Um den Winkel mit der **zweiten** Axe (Axe der *Y*) zu beurtheilen, lege man eine Ebene durch die zweite und erste Axe (Axe der *Y* und der *X*) und eine Ebene durch die erste und dritte Axe (Axe der *X* und der *Z*) und endlich um den Winkel zu bestimmen, welchen eine Kraftrichtung mit der **dritten** Axe macht, lege man eine Ebene durch die dritte und erste Axe und eine Ebene durch die erste und zweite Axe. Die beiden Ebenen, welche man für jede einzelne Axe gedacht hat, theilen den Raum in vier Abtheilungen. Die erste Abtheilung liegt zwischen dem Theile der durch die betrachtete Axe gelegten Ebene, welcher den positiven Zweig dieser Axe enthält, und demjenigen Theil der durch die beiden andern Axen gelegten Ebene, welcher den positiven Zweig der in der obenerwähnten Reihenfolge zunächst liegenden Axe enthält. Alle Linien, welche vom Anfangspunkt der Koordinaten gezogen in diese Abtheilung fallen, bilden mit der betrachteten Axe Winkel, die im ersten Quadranten liegen. Die zweite Abtheilung liegt zwischen diesem zuletzt erwähnten Theil der durch die beiden andern Axen gelegten Ebene, und demjenigen Theil der durch die betrachtete Axe gelegten Ebene, welche den negativen Zweig dieser Axe enthält. Alle Linien, die in diese Abtheilung fallen, bilden Winkel mit der betrachteten Axe, die im zweiten Quadranten liegen. Die dritte Abtheilung des Raumes liegt zwischen den so eben be-

zeichneten Theil der durch die betrachtete Axe gelegten Ebene, und demjenigen Theil der durch die beiden andern Axen gelegten Ebene, welcher den negativen Zweig der in der obigen Reihenfolge zunächst liegenden Axe enthält. Diese Abtheilung stellt den dritten Quadranten, und die noch übrige Abtheilung den vierten Quadranten dar.



Denkt man die drei Koordinatenebenen, so wird durch dieselben der Raum in acht Abtheilnngen getheilt, die wir mit A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnen. Die Punkte, welche in diesen Abtheilungen liegen, haben folgende Koordinaten-Vorzeichen, nach welchen sich die Bezeichnung der Abtheilungen bestimmen soll.

A	B	C	D	E	F	G	H
$+x$	$+x$	$-x$	$-x$	$-x$	$-x$	$+x$	$+x$
$+y$	$+y$	$+y$	$+y$	$-y$	$-y$	$-y$	$-y$
$+z$	$-z$	$+z$	$-z$	$+z$	$-z$	$+z$	$-z$.

(Die Abtheilung F ist in der Figur nicht sichtbar).

Bezeichnen wir die Winkel mit der ersten Axe durch α, mit der zweiten Axe durch β und mit der dritten Axe durch γ, und nehmen wir den oben dargestellten Modus der Winkelzählung an, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

Eine Linie, durch den Angriffspunkt der Koordinaten parallel mit einer Kraftrichtung gezogen, liegt in der Abtheilung	Die Winkel liegen in den Quadranten			Vorzeichen der Kosinus			Vorzeichen der Sinus			Vorzeichen der Kotangente			Vorzeichen der Tangente		
	α	β	γ	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	$\sin\alpha$	$\sin\beta$	$\sin\gamma$	ctg α	ctg β	ctg γ	tg α	tg β	tg γ
A	I	I	I	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
B	I	IV	II	+	+	—	+	—	+	+	—	—	+	—	—
C	II	I	IV	—	+	+	+	+	—	—	+	—	—	+	—
D	II	IV	III	—	+	—	+	—	—	—	—	+	—	—	+
E	III	II	IV	—	—	+	—	+	—	+	—	—	+	—	—
F	III	III	III	—	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+	+
G	IV	II	I	+	—	+	—	+	+	—	—	+	—	—	+
H	IV	III	II	+	—	—	—	—	+	—	+	—	—	+	—

Aus dieser Zusammenstellung ist ersichtlich, dafs die Vorzeichen der Kosinus von Winkeln, welche Linien bilden, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehen und in irgend einer Abtheilung liegen, dieselben sind, welche auch die Koordinaten von Punkten haben, die in derselben Abtheilung liegen. Diese Vorzeichen sind jedoch nicht zu verwechseln mit den Vorzeichen, welche etwa die Koordinaten des Angriffspunkts der Kraft haben.

Es wirke z. B. in einem Punkte, dessen Koordinaten $+x$, $-y$, $+z$ sind, eine Kraft, welche mit der ersten und zweiten Axe einen Winkel mit positivem, mit der dritten Axe einen Winkel mit negativem Kosinus mache, so liegt der Winkel α im ersten, der Winkel β im vierten und der Winkel γ im zweiten Quadranten. Die Kraftrichtung ist in der Figur angedeutet. Die entgegengesetzte Kraftrichtung macht mit den drei Axen Winkel, deren Kosinus eben so grofs, aber entgegengesetzt sind, sie bildet also mit der ersten und zweiten Axe Winkel mit negativem und mit der dritten Axe einen Winkel mit positivem Kosinus, liegt also in der Abtheilung E.

Aus den obigen Darstellungen ist nun leicht ersichtlich, welche Bedeutung es haben müsse, wenn die Kräfte selbst mit positivem oder negativem Vorzeichen ($+P$ und $-P$) erscheinen, oder in die Rechnung eingeführt werden. Es kann dies nämlich in zwiefachem Sinne geschehen, entweder deuten die Vorzeichen $+P$ und $-P$ überhaupt nur an, dafs zwei Kräfte in parallelen Richtungen, aber entgegengesetzt wirkend, gedacht werden sollen, und es ist dann gleichgiltig, welche von beiden man als positiv, und welche man als negativ betrachten will, oder sie deuten an, dafs die betrachtete Kraft, welche mit negativem Vorzeichen erscheint, in ihrem Angriffspunkt in einem Sinne wirkt, welcher demjenigen der übrigen Kräfte entgegengesetzt ist; dafs sie also, wenn wir allgemein die Kräfte ziehend wirkend denken, in ihrem Angriffspunkte schiebend wirke; sie wird sofort in eine Kraft verwandelt werden können, welche ziehend wirkt, und dann absolut zu nehmen sein.

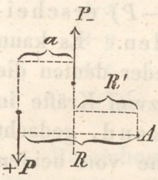
Gesetze über die Wirkung, Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare. Parallelogramm und Parallelepipedum der Kräftepaare und der Paar-Axen.

§ 78. Aus den Betrachtungen der §§ 74, 75 und 76 ergiebt sich, dafs, wenn auf ein festes System Kräfte wirken, welche in Bezug auf drehende Bewegung nicht im Gleichgewicht sind, das Gleichgewicht nur in dem einzigen Fall, wo die Kraftrichtungen parallel und zugleich die Summe sämmtlicher Kräfte nicht gleich Null ist (S. 105. No. 2, Gleichung 117a) durch eine einzige Gegenkraft herzustellen ist, in jedem andern Falle aber das Gleichgewicht gegen drehende Bewegung sich nur durch ein Kräftepaar herstellen läfst. Hieraus folgt, dafs überhaupt jede drehende Bewegung, welche Kräfte, die auf ein festes System wirken, diesem zu ertheilen streben, sich auf ein resultirendes Kräftepaar zurückführen lasse.

Es ist von Interesse einige Eigenschaften der Kräftepaare hier hervorzuheben.

1) Jedes Kräftepaar hat das Bestreben das System um eine Axe zu drehen, die normal ist zu der Ebene, in welcher das Kräftepaar liegt; der Punkt, in welchem die Axe die Ebene schneidet, läfst sich aus den Eigenschaften des Kräftepaares nicht bestimmen; es kann jeder beliebige Punkt sein, wenn er nicht durch andere Bedingungen gegeben ist.

Denn es sei R der kürzeste Abstand der Kraft $+P$ von der beliebig angenommenen Drehaxe A; R' der kürzeste Abstand der Kraft $-P$, dann ist die Summe der Momente, welche auf Drehung um die angenommene Axe wirken, $P.R - P.R' = P.(R-R')$, es ist aber immer $R-R'$ der kürzeste Abstand der Kraftrichtungen $+P$ und $-P$, bezeichnen wir denselben mit a, so ist Pa das Moment des Kräftepaars (S. 106), und es folgt, dafs die Summe der Momente für die Drehung um eine beliebige zur Ebene des Paares normale Axe immer gleich dem Moment des Kräftepaars ist, d. h. immer denselben Werth hat.



2) Man kann für jedes Kräftepaar ein anderes substituiren, welches in derselben Ebene liegt, und dasselbe Moment hat; es ist dabei gleichgiltig, welche Lage die Kraftrichtungen des neuen Paares gegen die des ersten haben, auch kann man entweder den Abstand der neuen Kraftrichtungen von einander, oder die Gröfse der Drucke derselben beliebig annehmen.

Denn, da das Bestreben auf Drehung um eine beliebige Axe durch die Summe der Momente in Bezug auf diese Axe gemessen wird, so hat das neue Kräftepaar in Bezug auf jeden beliebigen Punkt der Ebene immer dasselbe Bestreben auf Drehung, wie das erste Kräftepaar, sobald sein Moment dasselbe ist (No. 1).

3) Man kann daher die eine Kraftrichtung eines Kräftepaares durch einen beliebigen Punkt in der Ebene gehen lassen, und derselben eine beliebige Richtung geben, während die andere einen beliebigen Abstand von diesem Punkt bekommen kann.

Ist Pa das Moment eines Kräftepaars, und a' der Abstand des neuen Kräftepaars, so ist:

$$139)\quad \left\{ \begin{aligned} P' &= \frac{Pa}{a'} \\ a &= \frac{Pa}{p'}. \end{aligned} \right.$$

4) Jedes Kräftepaar kann durch ein anderes ersetzt werden, welches in einer parallele Ebene liegt, und dasselbe Moment hat.

Denn da das Bestreben auf Drehung um irgend eine zur Ebene des Paares normale Axe durch das Moment des Kräftepaares ausgedrückt wird, so hat das neue Kräftepaar, da es in einer parallelen Ebene liegt, die folglich auch normal ist zu einer beliebigen Axe, welche normal zur Ebene des ersten Paares ist, dasselbe Bestreben auf Drehung um diese Axe, welches das erste Paar hat, sobald sein Moment dasselbe ist.

5) Kräftepaare, welche in derselben Ebene liegen, lassen sich durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Kräftepaare ist, wobei diejenigen Momente, welche die Ebene in entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben, mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen sind.

Denn man kann jedes der Kräftepaare $P'a'$, $P''a''$, $P'''a'''$ .... in ein anderes verwandeln, dessen Richtungen in zwei bestimmte Parallellinien fallen. Ist a der kürzeste Abstand dieser beiden Parallellinien, so ist nach 139 die Kräftesumme in der einen Richtung:

$$+\left(\frac{P'a'}{a} + \frac{P''a''}{a} + \frac{P'''a'''}{a} \ldots\ldots\right) = P$$

und die Kräftesumme in der entgegengesetzten Richtung:

$$-\left(\frac{P'a'}{a} + \frac{P''a''}{a} + \frac{P'''a'''}{a}\right) = -P,$$

folglich hat man wiederum ein Kräftepaar, und es ist dessen Moment:

$$Pa = P'a' + P''a'' + P'''a''' + \ldots\ldots$$

6) Kräftepaare, welche in parallelen Ebenen liegen, lassen sich durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Kräftepaare ist, wobei diejenigen Momente, welche die Ebenen in entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben, mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen sind.

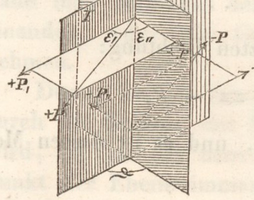
Denn, man kann jedes dieser Kräftepaare nach No. 4 in eine bestimmte Ebene verlegen, welche mit den Ebenen der Kräftepaare parallel ist, und dann nach No. 5 diese Kräftepaare vereinigen.

7) Kräfte, welche auf Drehung um irgend eine Axe wirken, lassen sich in Bezug auf drehende Bewegung durch ein Kräftepaar ersetzen, welches in einer zu der Axe normalen Ebene liegt, und dessen Moment gleich der Summe der Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf diese Axe ist.

Denn das Bestreben auf Drehung um eine gegebene Axe wird gemessen durch die Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte in Bezug auf diese Axe (S. 95); ein Kräftepaar, dessen Moment gleich der Summe der Momente der einzelnen Kräfte ist, hat dasselbe Bestreben auf Drehung zu wirken, (No. 1 und 2) würde also, wenn man es im entgegengesetzten Sinne wirken liefse, die Drehung durch die einzelnen Kräfte aufheben, und ersetzt demnach deren Wirkung auf drehende Bewegung.

Die Ebene, in welcher ein Kräftepaar liegt, nennen wir die Paar-Ebene; eine Normale zu dieser Ebene: eine Paar-Axe, und den kürzesten Abstand der Richtungslinien: den Hebelsarm des Kräftepaars, oder kurz der Paar-Arm.

8) Kräftepaare, welche in Ebenen liegen, die sich schneiden, lassen sich immer durch ein Kräftepaar ersetzen, dessen Moment sich bestimmen läfst, welches in einer Ebene liegt, die durch die Durchschnittslinie der beiden Paar-Ebenen geht, und deren Lage gegen die beiden Paar-Ebenen eine bestimmte ist.



Es sei ϑ der Neigungswinkel der beiden Paar-Ebenen, $a^I P^I$ sei das Moment des Kräftepaars in der ersten Ebene, $a^{II} P^{II}$ das Moment des Paares in der zweiten Ebene. Da die Kräftepaare jede Lage in der Ebene haben können, so lassen sich ihre Richtungen auch normal zur Durchschnittslinie denken, und wenn a der Abstand zweier Punkte der Durchschnittslinie ist, so lassen sich die Kräfte beider Paare durch diese Punkte der Durchschnittslinie legen. Nach Gleichung 139) sind sodann die Kräfte der beiden Paare:

$$P_{,} = \frac{a^{I} P^{I}}{a}; \quad P_{,,} = \frac{a^{II} P^{II}}{a}.$$

Nun greifen in dem einen Punkte der Durchschnittslinie die Kräfte $+P_{,}$ und $\pm P_{,,}$, im andern Punkte die Kräfte $-P_{,}$ und $\mp P_{,,}$ an. Da diese beiden Gruppen in ihren Angriffspunkten normal zur Durchschnittslinie sind, so liegen sie in parallelen Ebenen, die normal zur Durchschnittslinie sind; jede der beiden Gruppen läfst sich zusammensetzen nach dem Parallelogramm der Kräfte (§§ 28 und 30) und man hat in dem einen Angriffspunkt die Resultante:

$$P = \{P_{,}^2 + P_{,,}^2 + 2P_{,}P_{,,} . \cos\vartheta\},$$

in dem andern Angriffspunkt eine ebenso grofse, aber entgegengesetzt gerichtete Resultante. Anstatt der ursprünglichen Kräfte können wir diese beiden Kräfte wirkend denken; sie sind parallel, liegen in einer Ebene, welche durch die Durchschnittslinie der ersten beiden Paar-Ebenen geht, und ihr Moment ist $= Pa$, oder wenn wir für P den obigen Werth, und darin für $P_{,}$ und $P_{,,}$ die vorhin gefundenen Ausdrücke setzen:

$$140)\quad Pa = \sqrt{\{(a^{I}P^{I})^2 + (a^{II}P^{II})^2 + 2(a^{I}P^{I}) . (a^{II}P^{II}) . \cos\vartheta\}}.$$

Der Neigungswinkel, welchen die neue Paar-Ebene gegen die erste oder die zweite Paar-Ebene macht, ist gleich dem Winkel, welchen die Kraftrichtungen P und $P_{,}$ resp. $P_{,,}$ einschliefsen. Es ist also, wenn diese Winkel mit $\varepsilon_{,}$ und $\varepsilon_{,,}$ bezeichnet werden:

$$140a)\quad \begin{cases} \sin\varepsilon_{,} = \sin\vartheta . \dfrac{P_{,}}{P} = \sin\vartheta . \dfrac{a^{I}P^{I}}{aP} \\ \sin\varepsilon_{,,} = \sin\vartheta . \dfrac{P_{,,}}{P} = \sin\vartheta . \dfrac{a^{II}P^{II}}{aP}. \end{cases}$$

Man sieht hieraus folgendes Gesetz:

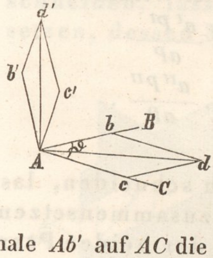
Kräftepaare in Ebenen, die sich schneiden, lassen sich stets zu einem Paare zusammensetzen, indem man den Neigungswinkel der beiden Paar-Ebenen konstruirt, auf den Schenkeln desselben in jeder Ebene Stücke abschneidet, welche dem Kräftepaar in dieser Ebene proportional sind, in der Ebene dieses Winkels über diesen Stücken ein

Parallelogramm konstruirt, und von dem Scheitel des Winkels die Diagonale zieht. Die Diagonale ist proportional dem resultirenden Kräftepaar; die Ebene durch die Diagonale und normal zur Ebene des Winkels ist die Paar-Ebene des resultirenden Kräftepaares, und die Winkel, welche die Diagonale mit den Schenkeln des Winkels bildet, sind gleich den Neigungswinkeln dieser Ebene gegen die betreffenden ersten Paar-Ebenen.

Dies interessante Gesetz bietet die gröfste Analogie mit dem Prinzip des Parallelogramms der Kräfte und der Geschwindigkeiten dar; wir nennen es das Prinzip des Parallelogramms der Kräftepaare.

9) Zwei Kräftepaare, deren Paar-Axen nicht parallel sind, lassen sich zu einem Kräftepaare vereinigen, indem man zwei Linien konstruirt, die sich schneiden, und den Paar-Axen einzeln parallel sind, von dem Durchschnittspunkt dieser Linien auf jeder ein Stück abträgt, welches dem Moment des Kräftepaars proportional ist, mit dessen Axe die betreffende Linie parallel ist, und aus diesen Stücken ein Parallelogramm konstruirt. Die Diagonale des Parallelogramms vom Durchschnittspunkt der Linien aus, repräsentirt, der Gröfse nach, das Moment des resultirenden Kräftepaars, und der Lage nach die Axe desselben. Die Paar-Ebene des resultirenden Kräftepaars ist normal zu dieser Axe.

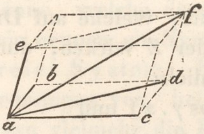
Denn es seien AB und AC die Schnitte der Paar-Ebenen der gegebenen Kräftepaare mit einer Ebene, die zu beiden normal ist, $ABC = \vartheta$ ist der Neigungswinkel beider Ebenen, nach dem vorigen Satz ist der Normalschnitt der resultirenden Paar-Ebene und das Moment des resultirenden Kräftepaars durch die Diagonale Ad zu bestimmen, wenn Ac dem Moment des Kräftepaars in der Ebene AC, Ab dem Moment des Kräftepaares in der Ebene AB proportional ist. Errichten wir in der Ebene ABC in A auf AB die Normale Ab' auf AC die Normale Ac', so sind diese Normalen auch normal auf den Ebenen AB und AC, und folglich parallel mit den Paar-Axen; machen wir $Ab' = Ab$, $Ac' = Ac$, vollenden das Parallelogramm und ziehen die Diagonale Ad', so ist sehr leicht geometrisch zu zeigen, dafs $Ad' = Ad$, und normal zu Ad sei. Da Ad'



$= Ad$ ist, so ist auch Ad' proportional dem resultirenden Kräftepaar, und da Ad' normal zu Ad ist, so ist Ad' auch normal zu der Ebene, in welcher das resultirende Paar liegt, folglich eine Paar-Axe des resultirenden Paars. Dies war nachzuweisen.

Wir nennen dies Gesetz das Parallelogramm der Paar-Axen.

10) Wirken auf ein festes System drei Kräftepaare, deren Paar-Axen nicht in eine Ebene gelegt werden können, so kann man dieselben zu einem Kräftepaar vereinigen, dessen Moment durch die Gröſse, und dessen Paar-Axe durch die Lage der Diagonale eines Parallelepipedums repräsentirt wird, dessen Seiten einzeln proportional den Momenten der gegebenen Kräftepaare, und parallel mit deren Paar-Axen sind. Die Ebene des resultirenden Kräftepaars steht normal auf der Diagonale des Parallelepipedums.



Denn es lassen sich nach dem vorigen Satze die Kräftepaare, deren Axen parallel mit ab und ac sind, zu einem Kräftepaar zusammensetzen, dessen Axe ad ist, und es läſst sich dieses Kräftepaar mit dem dritten, dessen Axe ac ist, wiederum zusammensetzen zu einem resultirenden Kräftepaare.

Die Axe desselben ist af, und es ist auch af proportional dem Moment desselben, wenn ae, ac und ab proportional sind dem Momente der einzelnen Kräftepaare. Nun ist aber af auch die Diagonale des Parallelepipedums $eabdcf$.

Wir nennen dies Gesetz das Parallelepipedum der Paar-Axen.

Die Kräftepaare lassen sich auch nach dem Gesetz No. 8 zusammensetzen, indem man zuerst die Kräftepaare in zwei Ebenen zu einem komponirt, und dieses dann mit dem Kräftepaar in der dritten Ebene zusammensetzt.

11) Jedes Kräftepaar läſst sich in zwei oder mehre andere zerlegen, von denen entweder die Lage der Paar-Axen oder die Gröſse der Momente der Kräftepaare gegeben sein kann.

Dies folgt unmittelbar aus den Gesetzen No. 8, 9 und 10.

12) Der Neigungswinkel der Paar-Axe gegen eine beliebige Ebene ist der Komplementswinkel des Neigungswinkels der Paar-Ebene gegen dieselbe Ebene, oder

auch des Neigungswinkels der Paar-Axe gegen eine auf dieser Ebene normale Axe.

Dies folgt unmittelbar aus der Bedingung, daſs die Paar-Axe normal zur Paar-Ebene ist.

Mit Hilfe dieser Gesetze lassen sich oft die Entwickelungen der §§ 75 und 76 wesentlich vereinfachen. Betrachten wir z. B. den Fall in § 76A. Wir zerlegen sämmtliche Kräfte in ihren Angriffspunkten nach drei Richtungen, parallel mit den drei Axen; es entstehen die Kräfte: $K.\cos\alpha\ldots$, $K.\cos\beta\ldots$, $K.\cos\gamma\ldots$, und es läſst sich die Resultirende der fortschreitenden Bewegung nach den Gesetzen auf S. 100 und nach den Gleichungen 127, 128, 128a) der Gröſse und Richtung nach, so wie ihr Angriffspunkt bestimmen. Nun wirken die Kräfte $K.\cos\beta$ und $K.\cos\gamma$ auf Drehung um die Axe der X; ihre Momente sind $K.\cos\beta.z\ldots$ und $K.\cos\gamma.y$. Diese Momente lassen sich durch ein Kräftepaar ersetzen (No. 7), dessen Moment ist:

$$141)\ \Sigma(K.\cos\beta.z)+\Sigma(K.\cos\gamma.y).$$

In gleicher Weise lassen sich die Momente, welche auf Drehung um die Axe der Y nnd um diejenige der Z wirken, durch Kräftepaare ersetzen, deren Momente beziehlich:

$$141)\ \begin{cases}\Sigma(K.\cos\alpha.z)+\Sigma(K.\cos\gamma.x)\text{ und}\\ \Sigma(K.\cos\alpha.y)+\Sigma(K.\cos\beta.x)\end{cases}$$

sind. Da die Axen dieser Kräftepaare normal zu einander sind, so ergiebt sich nach No. 10 das Moment des resultirenden Kräftepaars gleich:

$$141\text{a})\ \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\beta.z)+\Sigma(K.\cos\gamma.y)]^2+[\Sigma(K.\cos\alpha.z)+\Sigma(K.\cos\gamma.x)]^2+[\Sigma(K.\cos\alpha.y)+\Sigma(K.\cos\beta.x)]^2\right\}},$$

oder:

$$\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})]^2+[\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2+[\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})]^2\right\}},$$

und es findet sich der Neigungswinkel $\eta_{,}$ der resultirenden Paar-Axe gegen die Ebene YZ:

$$141\text{b})\ \operatorname{tang}\eta_{,}=\frac{\Sigma(K.\cos\beta.z)+\Sigma(K.\cos\gamma.y)}{\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha.z)+\Sigma(K.\cos\gamma.x)]^2+[\Sigma(K.\cos\alpha.y)+\Sigma(K.\cos\beta.x)]^2\right\}}}$$

oder nach 135a) gleich:

$$\operatorname{tang}\eta_{,}=\frac{\Sigma(K.\sin\alpha.R_{,})}{\sqrt{\left\{[\Sigma(K.\sin\beta.R_{,,})]^2+[\Sigma(K.\sin\gamma.R_{,,,})]^2\right\}}}.$$

und der Neigungswinkel $\varphi_{,}$ der resultirenden Paar-Ebene gegen die Ebene YZ, oder der Neigungswinkel der resultirenden Paar-Axe gegen die Axe der X nach No. 12:

$$141\text{ c)}\quad \operatorname{tang} \varphi_{,} = \operatorname{cotg} \eta_{,} = \frac{1}{\operatorname{tang} \eta_{,}}$$

u. s. w.

Die Gleichungen, welche entstehen, indem man anstatt der Koordinaten die Hebelsarme der Kräfte (nach Gleichung 135a) S. 128) einführt, sind dieselben, welche wir unter 138 und 138a) S. 131 auf anderem Wege entwickelt haben, uud es gelten für Kräftepaare, deren Paar-Axen normal zu einander sind und die nicht in derselben Ebene liegen, die auf S. 131 bei Gelegenheit der Entwickelung dieser Gleichungen aufgestellten Regeln.

Festes System mit fixen (festgehaltenen) Punkten.

§ 79. Die bisherigen Untersuchungen über die Gesetze, welche für Kräfte gelten, die auf ein festes System wirken, setzten überall voraus, daſs jeder Punkt des Systems diejenige Bewegung machen könne, welche durch die Einwirkung jener Kräfte bedingt wurde; wir nennen ein System, für welches diese Voraussetzung zutrifft ein freies System. Es kommen jedoch sehr häufig auch solche Anordnungen vor, bei denen jene Voraussetzungen nicht gelten; es kann vielmehr die Bedingung gestellt sein, daſs gewisse Punkte des festen Systems sich nicht bewegen dürfen, wie auch die Kräfte des Systems beschaffen sein mögen; solche Punkte nennen wir fixe Punkte, oder festgehaltene Punkte des Systems, und das System selbst im Gegensatz zu dem freien System, nennen wir ein festes System mit fixen Punkten. Die Fälle, welche hier von besonderem Interesse sind, sind folgende:

a) ein festes System mit einem fixen Punkte,
b) ein festes System mit zwei fixen Punkten,
c) ein festes System mit drei fixen Punkten.

Nach den vorstehenden Andeutungen haben wir unter einem fixen Punkt eines Systems überhaupt einen solchen zu verstehen, welcher weder eine fortschreitende Bewegung noch eine rotirende Bewegung um irgend eine Axe annehmen kann. Hieraus folgt zunächst:

1) daſs das System überhaupt keine fortschreitende Bewegung haben könne, denn eine solche würde allen Punkten des Systems gemeinschaftlich (§ 65. S. 88), folglich auch den fixen Punkten eigen sein, und dies widerspricht der Voraussetzung, und

2) dafs die Drehaxe des Systems immer durch die fixen Punkte gehen müsse; denn nur die Punkte, welche in der Drehaxe liegen, haben keine rotirende Bewegung.

Diese beiden Bedingungen erheischen, dafs in den fixen Punkten Kräfte wirksam sein müssen, deren Komponenten, in Bezug auf drei normale Axen, gleich und entgegengesetzt den Komponenten aller übrigen Kräfte in Bezug auf dieselben Axen sind (§ 71. S. 99), und deren Momente in Bezug auf irgend eine Axe, welche nicht durch die fixen Punkte geht, zusammen gleich und entgegengesetzt der Summe der Momente aller übrigen auf das System wirkenden Kräfte sein müssen; denn, denken wir solche Kräfte in das System eingeführt, so wird das System überhaupt im Gleichgewicht gegen fortschreitende Bewegung sein (erste Bedingung), und es wird auch im Gleichgewicht gegen drehende Bewegung sein in Bezug auf jede Axe, welche nicht durch die fixen Punkte des Systems geht (zweite Bedingung).

Die Kräfte, welche dieser Darstellung nach in den fixen Punkten wirksam sein müssen, um diese Punkte eben als fixe zu konstituiren, nennen wir die Reaktionen des Systems gegen die fixen Punkte, und die ihnen gleichen aber entgegengesetzten Kräfte, deren Komponenten nach den drei Axen also in demselben Sinne wirken, wie die Komponenten der Resultirenden der fortschreitenden Bewegung des Systems nach denselben Axen, nennen wir die Drucke des Systems gegen die fixen Punkte.

1) Festes System mit einem fixen Punkt. Der Druck Q des Systems gegen den fixen Punkt und die Richtung dieses Druckes ist hier ohne Weiteres zu bestimmen durch die Gleichungen **110** und **111**) S. 98; denn da nur ein fixer Punkt vorhanden ist, so mufs die Reaktion gegen denselben gleich der Gegenkraft des Systems $(-Q)$ gegen fortschreitende Bewegung sein. Denken wir drei normale Koordinaten-Axen, auf welche wir das System beziehen, und denken wir in dem fixen Punkt, dessen Koordinaten X, Y und Z sein mögen, die Kraft $-Q$ wirkend, welche mit den Axen die Winkel A, B, Γ macht, so haben wir nunmehr in Bezug auf diese drei Axen drei Kräftepaare, und es ist das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung um die erste Axe wirkt:

$$\Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y) - Q.\cos B.Z - Q.\cos\Gamma.Y),$$

nun ist aber (**111**. S. 98):

$$Q.\cos B = \Sigma(K.\cos\beta); \quad Q.\cos\Gamma = \Sigma(K.\cos\gamma);$$

folglich drückt sich das Moment des Kräftepaares in Bezug auf die erste Axe aus, durch:

$$\Sigma(K \,.\, \cos\beta \,.\, [z - Z]) + \Sigma(K \,.\, \cos\gamma \,.\, [y - Y]).$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Momente der Kräftepaare in Bezug auf die beiden andern Axen darstellen. Nun sieht man aber leicht, dafs $(z - Z) \ldots (y - Y) \ldots (x - X)$ nichts anders bezeichnet, als die Koordinaten der Angriffspunkte der Kräfte in Bezug auf ein Koordinaten-System, dessen Anfangspunkt in dem ersten Koordinaten-System die Koordinaten X, Y, Z hat, mit anderen Worten, dessen Anfangspunkt der fixe Punkt ist. Verlegt man also den Anfangspunkt der Koordinaten in den fixen Punkt und nennt man die neuen Koordinaten $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, so ist das Moment des Kräftepaares in Bezug auf die erste Axe

$$\Sigma(K \,.\, \cos\beta \,.\, z_{,}) + \Sigma(K \,.\, \cos\gamma \,.\, y_{,}) \text{ u. s. w.}$$

Es folgt sodann leicht folgendes Gesetz:

> Rotirt ein festes System um **einen** fixen Punkt, so erhält man die Lage der Drehaxe und das Moment des resultirenden Kräftepaares, indem man durch den fixen Punkt drei beliebige zu einander normale Koordinatenaxen annimmt, die Kräftepaare des Systems für diese drei Axen durch Bildung der entsprechenden Momentensummen bestimmt, und diese drei Kräftepaare nach den Gleichungen 141a) (resp. 138) zusammensetzt.

Für den Fall, dafs man die Koordinatenaxen durch den fixen Punkt legt, sind die Momente der Reaktion gegen den fixen Punkt in Bezug auf alle drei Axen Null; legt man dagegen die Koordinatenaxen nicht durch den fixen Punkt, so hat man die Momente der in dem fixen Punkte wirkenden Reaktion mit in Betracht zu ziehen.

2) Festes System mit zwei fixen Punkten. Hat ein festes System zwei fixe Punkte, so müssen beide in der Drehaxe liegen, und es folgt daher, dafs die Drehaxe des festen Systems durch die gerade Linie gegeben ist, welche durch die beiden fixen Punkte geht; es erfolgt daher die Drehung sämmtlicher Punkte des Systems in Ebenen, welche zu der Verbindungslinie der beiden fixen Punkte normal sind. Das Kräftepaar in Bezug auf diese Verbin-

dungslinie als Drehaxe mufs das resultirende Kräftepaar des Systems sein, und es müssen folglich die Kräftepaare in Bezug auf zwei Axen, die unter sich und zu der Verbindungslinie der fixen Punkte normal sind, einzelne gleich Null sein; denn wäre dies nicht der Fall, und man brächte das System auf drei Kräftepaare für diese drei Axen, so würde das resultirende Kräftepaar eine andere Paar-Axe haben, als die Verbindungslinie der beiden fixen Punkte. Nehmen wir nun ein rechtwinkliges Koordinaten-System an, dessen eine Axe (Axe der Z) mit der Verbindungslinie der beiden fixen Punkte der Richtung nach zusammenfällt, so liegen die beiden andern Axen in einer Ebene, welche normal zu der Verbindungslinie ist, und es sind die Koordinaten der fixen Punkte in Bezug auf diese beiden Axen gleich Null, während sie in Bezug auf die Axe der Z mit Z_I und Z_{II} bezeichnet werden mögen.

Bezeichnet nun Q_I' den Druck des Systems gegen den ersten fixen Punkt, parallel mit der Axe der X, Q_I'' und Q_I''' die Drucke in demselben Punkt, welche parallel mit der zweiten und dritten Axe sind, und bezeichnen wir analog mit Q_{II}', Q_{II}'', Q_{II}''' die Drucke des Systems in dem zweiten fixen Punkt; ihre Reaktionen also mit entgegengesetztem Vorzeichen, so müssen folgende Gleichungen erfüllt werden:

1) $\Sigma(K . \cos\alpha) - Q_I' - Q_{II}' = 0.$
2) $\Sigma(K . \cos\beta) - Q_I'' - Q_{II}'' = 0.$
3) $\Sigma(K . \cos\gamma) - Q_I''' - Q_{II}''' = 0.$
4) $\Sigma(K . \cos\beta . z) + \Sigma(K . \cos\gamma . y) - Q_I'' . Z_I - Q_{II}'' . Z_{II} = 0.$
5) $\Sigma(K . \cos\alpha . z) + \Sigma(K . \cos\gamma . x) - Q_I' . Z_I - Q_{II}' . Z_{II} = 0.$

Die drei ersten Gleichungen stellen die Bedingungen des Gleichgewichts gegen fortschreitende Bewegung dar, die beiden letzten die Bedingungen des Gleichgewichts gegen Drehung um die Axen X und Y. Die Gleichungen 1), 2), 4) und 5) genügen zur Bestimmung der Drucke Q_I' Q_I'' und Q_{II}' Q_{II}'', wogegen zur Bestimmung der Drucke Q_I''' und Q_{II}''', nämlich derjenigen, welche in den fixen Punkten auf Verschieben des Systems in der Richtung der Verbindungslinie wirken, nur die eine Gleichung 3) vorhanden ist; es bleibt daher einer von diesen beiden Drucken entweder willkürlich anzunehmen oder durch andere Bedingungen zu bestimmen.

Entwickelt man aus 1) und 5) die Drucke Q_I' und Q_{II}' so findet man:

$$142)\begin{cases} Q_I' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.[z - Z_{II}]) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)}{Z_I - Z_{II}} \\ Q_{II}' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\alpha.[z - Z_I]) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)}{Z_{II} - Z_I} \\ Q_I'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.[z - Z_{II}]) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)}{Z_I - Z_{II}} \\ Q_{II}'' = \dfrac{\Sigma(K.\cos\beta.[z - Z_I]) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)}{Z_{II} - Z_I} \\ \text{während zwischen } Q_I''' \text{ und } Q_{II}''' \text{ nur die Beziehung bleibt} \\ Q_I''' + Q_{II}''' = \Sigma(K.\cos\gamma). \end{cases}$$

Man bemerkt leicht, dafs der Nenner in den obigen Gleichungen überall die Entfernung der beiden fixen Punkte ausdrückt, und dafs der Zähler die Momentensummen in Bezug auf Drehung um eine Axe bezeichnet, die durch den andern fixen Punkt geht, und normal sowohl zu der Richtung der Verbindungslinie der fixen Punkte, als zu der Richung ist, für welche man den Druck des Systems bestimmen will (135a). Hieraus ergiebt sich, dafs die Gleichungen 142) folgendes Gesetz darstellen:

> Wenn in einem festen System, auf welches beliebige Kräfte einwirken zwei fixe Punkte vorhanden sind, so rotirt dasselbe um eine Axe, welche durch die beiden fixen Punkte geht (fixe Axe); man findet den Druck des Systems auf einen der fixen Punkte nach einer Richtung, die normal zu dieser Drehaxe ist, wenn man die Summe der Momente der sämmtlichen übrigen auf das System angebrachten Kräfte in Bezug auf eine Axe, die durch den andern fixen Punkt geht, und normal sowohl zur Drehaxe, als zu der betrachteten Richtung ist, dividirt durch den Abstand der beiden fixen Punkte.

Das Moment des auf Drehung um die fixe Axe wirkenden Kräftepaares drückt sich aus durch:

$$142a)\begin{cases} \Sigma(K.\cos\alpha.y) + \Sigma(K.\cos\beta.x) \\ \text{oder auch durch} \\ \Sigma(K.\sin\gamma.R_{III}) \text{ (Gleichung 135a)} \end{cases}$$

wenn R_{III} den kürzesten Abstand jeder Kraftrichtung von der fixen Axe, und γ den Winkel bezeichnet, den die Kraftrichtung mit der fixen Axe bildet.

Liegen die sämmtlichen Drucke in Ebenen, welche normal zu der fixen Axe sind, so ist für alle Drucke $\gamma = 90^0$ folglich

$\cos\gamma = 0$, und es folgt, dafs der Druck, welcher auf Verschieben in der Richtung der Axe wirkt, Null ist; bezeichnen wir den Abstand der beiden fixen Punkte mit L, die Koordinaten der Drucke K... in Bezug auf eine Ebene, welche durch den ersten fixen Punkt geht und normal zur fixen Axe ist mit z_0.... so folgt:

$$Z_{II} - Z_I = L;\quad z = z_0 + Z_I = z_0 + Z_{II} - L$$
$$Z_I - Z_{II} = -L;\quad z - Z_{II} = z_0 - L;\quad z - Z_I = z_0.$$

Es gehen also die Gleichungen 142) für diesen Fall über in folgende:

$$142\,b)\quad \left\{\begin{aligned} Q_I' &= \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.[L-z_0])}{L};\quad Q_I'' = \frac{\Sigma(K.\cos\beta.[L-z_0])}{L} \\ Q_{II}' &= \frac{\Sigma(K.\cos\alpha.z_0)}{L};\quad Q_{II}'' = \frac{\Sigma(K.\cos\beta.z_0)}{L}; \end{aligned}\right.$$

d. h. wenn ein festes System um eine Axe rotirt, welche durch zwei fixe Punkte geht, und es liegen sämmtliche Kräfte, die auf das System wirken, in Ebenen die zu der Axe normal sind, so findet man den Druck auf jeden der fixen Punkte nach irgend einer Richtung, wenn man die mit dieser Richtung parallelen Komponenten jeder Kraft mit dem Abstand ihres Angriffspunkts von einer Ebene, welche in dem andern fixen Punkt normal zur Drehaxe ist, multiplizirt, und die Summe der Produkte durch den Abstand der beiden fixen Punkte dividirt.

3) Festes System mit drei fixen Punkten. Hat ein festes System drei fixe Punkte, so können dieselben entweder in gerader Linie liegen, oder nicht.

Liegen die der fixen Punkte in gerader Linie, so ist der Fall zum Theil auf den vorigen zurückzuführen; die Drehaxe mufs mit jener geraden Linie zusammenfallen, allein indem man die Bedingungsgleichung 1 bis 5 (S. 146) bildet, und die Drucke auf den dritten fixen Punkt Q_{III}', Q_{III}'', Q_{III}''' mit den Koordinaten X_{III}, Y_{III} und Z_{III} einführt, so ergiebt sich bald, dafs nun die Zahl der Unbekannten gröfser ist, als die Zahl der Gleichungen; es lassen sich also nun die Drucke auf die fixen Punkte nicht anders bestimmen, als indem man entweder neue Bedingungen giebt, oder indem man gewisse Drucke annimmt. Diese Bemerkung gilt natürlich nur unter der Voraussetzung, dafs das System ein absosut festes (§ 64. S. 84) sei, dafs wir also keine Formveränderung desselben voraussetzen dürfen. In manchen Fällen ist die Voraussetzung zulässig, dafs das System durch eine Ebene, die normal zu der Verbindungslinie der drei fixen Punkte ist, und durch den mittlern fixen

Punkt geht, sich in zwei feste Systeme jedes mit zwei fixen Punkten zerlegen lasse, und dann sind die Drucke auf die fixen Punkte nach Anleitung der Gleichungen 142) zu bestimmen, indem man die Kräfte, deren Angriffspunkte auf der einen Seite der Ebene liegen als zu dem einen System, diejenigen auf der anderen Seite der Ebene als zu dem andern System gehörig ansieht.

Hat ein festes System drei fixe Punkte, welche **nicht** in gerader Linie liegen, so ist das System in vollkommenem Gleichgewicht, denn es kann zufolge des für die fixen Punkte im Anfange dieses Paragraphen entwickelten Satzes No. 1 (S. 143) keine fortschreitende Bewegung haben, und es kann auch keine drehende Bewegung um irgend eine Axe annehmen, denn eine solche Drehaxe müfste alle drei fixen Punkte aufnehmen, und das würde der Voraussetzung widersprechen, dafs die drei fixen Punkte nicht in ein und derselben geraden Linie liegen.

Reduktion der Kräfte in einem System mit zwei fixen Punkten.

§ 80. Hat ein festes System zwei fixe Punkte, und ist es daher gezwungen um eine Axe zu rotiren, welche durch diese beiden Punkte geht, so nennt man diese Axe die fixe Axe des Systems.

I. Denken wir ein festes System mit zwei fixen Punkten, und es mögen die Kraftrichtungen sämmtlich in Ebenen liegen, die normal zur fixen Axe sind. Wir können nun den Druck bestimmen, den jede einzelne Kraft parallel mit ihrer Richtung in jedem der beiden fixen Punkte erzeugt, indem wir nämlich einstweilen alle übrigen Kräfte fortdenken, und die Gleichung 142b) oder das Gesetz derselben (S. 148) für diese Kraft allein anwenden. Wir sagen dann, die Kraft werde auf die fixen Punkte reduzirt. Wenn wir sämmtliche Kräfte einzeln auf die fixen Punkte reduziren, so erhalten wir in jedem der fixen Punkte eine Reihe von Drucken, deren Richtungen sämmtlich in einer Ebene liegen, die in dem fixen Punkt normal zur Drehaxe ist, und indem wir diese Drucke nach bekannten Regeln zusammensetzen, oder auch nach zwei rechtwinklig angenommenen Axen zerlegen, erhalten wir wieder die Drucke sämmtlicher Kräfte auf den fixen Punkt.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes leuchtet ein, wenn wir berücksichtigen, dafs die mit den Kräften vorgenommenen Operationen lediglich die Berechnung der Gleichungen 142b) darstellen, mit dem Unterschiede, dafs wir für jede Kraft zuerst die Werthe $\frac{K.(L-z_0)}{L}$

und $\frac{K-z_0}{L}$ bilden, hierauf aber, nachdem durch diese Operation sämmtliche Kräfte reduzirt sind, die Werthe $\frac{K.(L-z)}{L}.\cos\alpha$ u. s. w. bilden, und dann die Summation dieser Werthe vornehmen.

II. Wenn die Drucke $K\ldots$, welche auf Drehung eines festen Systems um eine fixe Axe wirken in Ebenen liegen, die zu der fixen Axe normal sind, so kann man im Durchschnittspunkt jeder solchen Ebene mit der fixen Axe zwei gleich groſse, aber entgegengesetzt gerichtete Drucke $\mp K$ und $\pm K$ angebracht denken, die dem in dieser Ebene liegenden Druck $\pm K$ gleich und mit der Richtung desselben parallel sind. Nun giebt immer der ursprüngliche Druck $\pm K$ mit einem der beiden in der Axe angebrachten Drucke $\mp K$ ein Kräftepaar, während der andere Druck in der Axe $\pm K$ durch die Reaktion der fixen Punkte aufgehoben wird. Die verschiedenen Drucke $\pm K$, welche mit den ursprünglichen Drucken gleich groſs und gleich gerichtet sind, kann man auf die fixen Punkte reduciren, und dabei nach dem so eben entwickelten Gesetz verfahren, während das in der Ebene bestehende Kräftepaar den Gesetzen für die Kräftepaare unterworfen bleibt. Das Moment dieses Kräftepaares ist offenbar $K.R_{\prime\prime\prime}$, wenn $R_{\prime\prime\prime}$ der kürzeste Abstand der Kraftrichtung $\pm K$ von der fixen Axe ist. Man kann alle die einzelnen Kräftepaare zu einem Kräftepaar vereinigen, man kann jedes in eine beliebige parallele Ebene verlegen, man kann für jedes Kräftepaar ein anderes substituiren, dessen Hebelsarm oder dessen Druck beliebig anzunehmen sind. Man kann dabei die Kraft $\mp K$ immer durch die fixe Axe gehend denken oder auch nicht. Denkt man für das Kräftepaar $KR_{\prime\prime\prime}$ ein anderes Kräftepaar, das demselben gleich ist, dessen Druck aber K_0 und dessen Hebelsarm ϱ sei, so sagt man, es sei der Druck K von dem Hebelsarm $R_{\prime\prime\prime}$ auf dem Hebelsarm ϱ reduzirt worden, und aus der Gleichung

$$143)\left\{\begin{array}{l} KR_{\prime\prime\prime} = K_0\,\varrho \text{ folgt:} \\ K_0 = K.\frac{R_{\prime\prime\prime}}{\varrho} \\ \varrho = \frac{K}{K_0}.R_{\prime\prime\prime}. \end{array}\right.$$

Das Reduziren der Kräfte ist daher nichts anderes, als die Substitution eines Kräftepaars, durch ein anderes, dessen Moment dem ersten gleich ist, und man hat bei dieser Substitution volle Freiheit alle die Gesetze in Anwendung zu bringen, welche wir für die Kräftepaare (§ 78) entwickelt haben, nur darf man nie vergessen, dafs man es hierbei stets mit den Momenten zu thun hat, dafs also die Kräfte jedes substituirten Kräftepaars in Bezug auf fortschreitende Bewegung sich aufheben, und dafs folglich durch dergleichen Reduktionen der Druck auf die fixen Punkte nicht geändert wird.

Von den in einem festen System thätigen Kräften.

Thätige (lebendige) Kräfte der fortschreitenden Bewegung; Mittelpunkt derselben, Schwerpunkt, Guldinsche Regeln.

§ 81. Wenden wir uns nunmehr wieder zu den Betrachtungen des § 66. S. 88. Wir haben in dem Vorstehenden die wichtigsten Gesetze über die Wirkung der auf ein festes System angebrachten Kräfte entwickelt, und es wird sich nun darum handeln, die Gesetze für die in einem festen System thätigen Kräfte festzustellen. Nachdem dies geschehen, haben wir noch die Beziehungen zu untersuchen, welche zwischen den auf ein festes System angebrachten, und den in einem festen System thätigen Kräften statt finden. Zunächst ist wiederholt darauf hinzuweisen, dafs der Begriff der in einem System thätigen Kräfte nur auf einer Vorstellung beruht, welche wir zur Erleichterung der Anschauung gewisser Vorgänge eingeführt haben. Wir substituiren für die auf das System in verschiedenen Angriffspunkten angebrachten Kräfte andere Kräfte, nämlich solche, die in jedem einzelnen Massenelement thätig sein müfsten, um in dem System genau dieselbe Wirkung hervorzubringen, welche jene erzeugen (S. 66), oder mit anderen Worten, wir denken uns in dem System anstatt der auf dasselbe angebrachten Kräfte, andere Kräfte angebracht, deren Betrachtung bequemer ist. Da also die in einem System thätigen Kräfte sich vollkommen ansehen lassen, als eine neue Gruppe auf das System angebrachter Kräfte, durch welche wir die Wirkung der ursprünglich angebrachten Kräfte ersetzt denken, so werden sie auch im Allgemeinen keinen anderen Gesetzen unterliegen, als denen, welche wir für die auf ein festes System angebrachten Kräfte in den vorigen Paragraphen hergeleitet haben, nur werden diese Gesetze sich dadurch modificiren, dafs gewisse neue Bedingungen hinzutreten, welche diese neuen Kräfte erfüllen müssen, um den Voraussetzungen zu entsprechen, die wir für dieselben gemacht haben.

Indem wir also die thätigen oder lebendigen Kräfte (S. 89) betrachten, welche der fortschreitenden Bewegung des Systems entsprechen, werden wir von der Resultirenden dieser Kräfte und von deren Angriffspunkt sprechen können, und indem wir die thätigen oder lebendigen Kräfte der rotirenden Bewegung des Systems untersuchen, werden wir von dem Moment des resultirenden Kräftepaars, von der Lage der resultirenden Paaraxe u. s. w. handeln können, und zu bestimmen haben, welche eigenthümlichen Verhältnisse durch das Hinzutreten der gemachten Voraussetzungen entstehen.

Erinnern wir uns an die Resultate der Untersuchungen, die wir in § 65 über die Bewegung eines festen Systems angestellt haben (S. 88) und betrachten wir zunächst die fortschreitende Bewegung des Systems.

Zufolge jener Untersuchungen haben wir die lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung als solche zu betrachten, welche die sämmtlichen Massenelemente in der betrachteten Zeit durch gleich grofse und parallele geradlinigte Wegelemente treiben. Dies ist nicht anders denkbar, als indem wir diese in den einzelnen Massenelementen wirksamen Kräfte als gleich grofs und parallel ansehen. Jede dieser Kräfte hat also denselben Werth

$$dK = dm . f$$

und da sie sämmtlich parallel sind, so ist ihre Resultirende (§ 72. Gl. 112):

$$143) \quad Q = \Sigma (dK) = \Sigma (dm . f) = f . \Sigma (dm) = f . M.$$

Es bezeichnet aber offenbar $\Sigma (dm)$ die Summe aller Massenelemente oder die Gesammtmasse des Systems. Wir bezeichnen dieselbe künftig durch M. Da nun die Leistung jeder einzelnen Kraft sich ausdrückt durch

$$dK . ds = dm . f . ds,$$

ds aber ebenfalls für sämmtliche Massenelemente gleich grofs ist, so ist die Gesammtleistung aller lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung mit Rücksicht auf Gleichung 47) (S. 27)

$$143a) \quad \Sigma (dK . ds) = ds . f . \Sigma (dm) = M . f . ds = M . c . dc,$$

d. h. wenn ein festes System eine fortschreitende Bewegung hat, so ist die Leistung sämmtlicher lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung ebenso grofs, als ob die Gesammtmasse des Systems, in einem Punkte vereinigt, sich mit der, den sämmtlichen Massenelementen gemeinschaftlichen Geschwindigkeit bewegte.

Wir können nun auch die Lage des Angriffspunkts dieser Resultirenden bestimmen (§ 74), d. h. denjenigen Punkt, in welchem wir anstatt der sämmtlichen lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung des Systems ihre Resultirende wirksam denken können, so dafs durch Einführung der Resultirenden lediglich die fortschreitende, aber keine drehende Bewegung in dem System erzeugt wird. Diesen so bestimmten Angriffspunkt nennen wir den Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung. Wir bedienen uns zu seiner Bestimmung ganz einfach der Gleichungen 117a), S. 104, welche, mit Berücksichtigung der hier gemachten Voraussetzungen, folgende Form annehmen:

$$144)\quad X = \frac{\Sigma(dm\,.\,x)}{M}; \quad Y = \frac{\Sigma(dm\,.\,y)}{M}; \quad Z = \frac{\Sigma(dm\,.\,z)}{M}.$$

Man sieht, dafs in diesen Werthen überall das gemeinschaftliche Aenderungsmaafs f herausgefallen ist, und, dafs der Abstand des Mittelpunkts der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung von irgend einer Ebene gefunden wird durch die Summe der Produkte jedes Massenelements in seinen Abstand von derselben Ebene, dividirt durch die Gesammtmasse des Systems.

Es folgt hieraus, dafs die Lage dieses Mittelpunktes unabhängig von der Gröfse der lebendigen Kräfte, und nur abhängig ist von der Gruppirung der einzelnen Massenelemente des Systems.

Der Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung ist also:

1) in einem gegebenen festen System ein bestimmter Punkt, der in dem System so lange eine unveränderte Lage behält, als die Vertheilung der Massenelemente des Systems unverändert bleibt;
2) stets derselbe für alle Kräfte, die auf das System so einwirken, dafs sie jedes Massenelement in derselben Richtung und mit demselben Aenderungsmaafs in Anspruch nehmen, gleichviel wie grofs dieses Aenderungsmaafs sein mag, und gleichviel ob diese Kräfte als lebendige oder als angebrachte Kräfte (§ 66) betrachtet werden.

Die Schwerkraft (§ 18) ist als eine auf jedes feste System in einer Weise wirkende Kraft zu betrachten, die den zuletzt gemachten Voraussetzungen entspricht. Der Angriffspunkt der Resultirenden der Schwerkraft (der Schwerpunkt) fällt also mit dem Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung in jedem materiellen System zusammen. Es ist also der Mittelpunkt der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung eines festen Systems und der Schwerpunkt identisch.

Bezeichnen wir mit dG die Gewichte der einzelnen Massenelemente, so ist $dG = g \cdot dm$ und $G = g \cdot M$ (Gl. 38. S. 25), und indem man in Gleichung 144) Zähler und Nenner mit g multiplizirt, ergiebt sich durch Einsetzung dieser Werthe

$$144\text{a)}\quad X = \frac{\Sigma(dG \cdot x)}{G}; \quad Y = \frac{\Sigma(dG \cdot y)}{G}; \quad Z = \frac{\Sigma(dG \cdot z)}{G}.$$

Bezeichnet dV das Volumelement eines Körpers, und γ das Gewicht einer Volumeinheit, so ist offenbar $dG = dV \cdot \gamma$ und $G = \Sigma(dV \cdot \gamma)$, worin γ für jedes Volumelement einen andern oder auch denselben Werth haben kann. Im ersten Falle nennt man das System in Bezug auf seine Dichtigkeit heterogen (ungleichartig), im letzten Falle homogen (gleichartig). Setzt man diese Werthe in 144a), so hat man allgemein:

$$144\text{b)}\quad X = \frac{\Sigma(dV \cdot \gamma \cdot x)}{\Sigma(dV \cdot \gamma)}; \quad Y = \frac{\Sigma(dV \cdot \gamma \cdot y)}{\Sigma(dV \cdot \gamma)}; \quad Z = \frac{\Sigma(dV \cdot \gamma \cdot z)}{\Sigma(dV \cdot \gamma)},$$

und für homogene Systeme:

$$144\text{c)}\quad X = \frac{\Sigma(dV \cdot x)}{V}; \quad Y = \frac{\Sigma(dV \cdot y)}{V}; \quad Z = \frac{\Sigma(dV \cdot z)}{V}.$$

Nehmen wir in den Gleichungen 144, 144a, b und c) den Anfangspunkt des Koordinatensystems im Schwerpunkt an, so wird X, Y und Z einzeln gleich Null, und es folgt:

> dafs die Summe der Momente der einzelnen Massen-, Gewichts oder Raumelemente in Bezug auf jede durch den Schwerpunkt gedachte Ebene gleich Null sei.

Bezeichnet $\Sigma_{,}(dV.x)$ die Summe der Momente der auf einer Seite einer beliebigen durch den Schwerpunkt gedachten Ebene liegenden Elemente, und $\Sigma_{,,}(dV.x)$ die Summe der Momente der auf der anderen Seite dieser Ebene liegenden Elemente, so hat man:

$$\Sigma(dV \cdot x) = \Sigma_{,}(dV \cdot x) + \Sigma_{,,}(dV \cdot x) = 0,$$

folglich:

$$\Sigma_{,}(dV \cdot x) = -\Sigma_{,,}(dV \cdot x),$$

d. h. jede durch den Schwerpunkt eines Systems gedachte Ebene theilt dasselbe in zwei Theile, die so beschaffen sind, dafs die Momentensummen beider Theile gleich grofs sind, aber nach entgegengesetzten Richtungen wirken.

Durch die Gleichung 144c) ist für homogene Systeme die Bestimmung der Lage des Schwerpunktes eine rein geometrische Operation.

Der Begriff des festen Systems (§ 63) gestattet für unsere Untersuchungen jede beliebige Gruppirung der materiellen Punkte (Massenelemente), wir können sie nach denselben Gesetzen gruppirt denken, nach denen geometrische Punkte sich gruppiren lassen, also auch nach den Gesetzen, nach denen diese in Gestalt von Linien, Flächen, Körpern sich anordnen lassen, und es wird nach dieser Bemerknng verständlich sein, wenn wir vom Schwerpunkt einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers sprechen.

Wir müssen hier auf die geometrischen Bestimmungen der Schwerpunktslagen in Linien, Flächen und Körpern, sowie auf die weitern Untersuchungen der geometrischen Bedeutung des Schwerpunkts verzichten. Die wichtigsten Resultate jener Bestimmungen stellen wir weiter unten zusammen, und fügen hier gleichfalls in Gestalt eines Resultates zwei wichtige Gesetze an, welche die geometrische Bedeutung des Schwerpunkts erkennen lassen. Es sind dies die sogenannten Guldinschen Regeln*); sie lauten:

1) Der Inhalt eines Rotationskörpers [einer Rotationsfläche] ist gleich dem Produkte aus der Erzeugungsfläche [Erzeugungslinie] in den bei der Erzeugung des Rotationskörpers [der Rotationsfläche] durchlaufenen Weg des Schwerpunktes der erzeugenden Fläche [der Linie].

2) Der Inhalt jedes Körpers [jeder Oberfläche], welcher zwischen zwei beliebigen Ebenen liegt, und aufserdem von lauter parallelen geraden Linien begrenzt [gebildet] wird (schief abgeschnittener prismatischer Körper) ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt [Umfang] der ebenen Figur, welche den Durchschnitt mit der einen Ebene darstellt in den normalen Abstand dieser Ebene von dem Schwerpunkt der Fläche [des Umfangs] der Durchschnittsfigur mit der andern Ebene.

Gesetz für die Bewegung und die Lage der Drehaxe eines freien Systems.

§ 82. Wenn auf ein festes System beliebige Kräfte einwirken, so nimmt dasselbe, wie wir in § 65 gesehen haben, im Allgemeinen gleichzeitig aufser der allen Massenelementen gemeinschaftlichen

---

*) Den Beweis dieser Sätze siehe „Weisbach, Ingenieur und Maschinen-Mechanik, Th. I. § 119 und 120“, und: „Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst und Architektur von Moseley; deutsch von Scheffler,“ I. § 38 bis 41.

fortschreitenden Bewegung auch eine Rotationsbewegung an, welche um eine gemeinschaftliche Axe mit einer allen Massenelementen gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit statt findet. Die Axe um welche das System rotirt, ist entweder durch fixe Punkte (§ 79) bestimmt, und das System ist also gezwungen um eine gewisse Axe zu rotiren, oder das System ist frei, und dann wird offenbar die Axe um welche das System rotirt im Allgemeinen eine Lage annehmen, die von der Lage und Beschaffenheit der Kräfte abhängig ist, welche eine Rotation des Systems bewirken. Folgen wir der angenommenen Vorstellung, so haben wir uns die fortschreitende Bewegung in irgend einem Zeitelement durch Kräfte hervorgebracht zu denken, die, in den einzelnen Massenelementen wirksam, lediglich diese fortschreitende Bewegung erzeugen, und die drehende Bewegung, welche gleichzeitig erfolgt, haben wir durch eine andere Gruppe von Kräften hervorgebracht zu denken, welche in jedem einzelnen Massenelement wirksam, lediglich diejenige drehende Bewegung erzeugen, welche das Massenelement erleidet. Da nun die lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung in dem festen System nur eine fortschreitende, aber keine drehende Bewegung hervorbringen sollen, und da wir den Angriffspunkt ihrer Resultirenden der Bedingung gemäfs bestimmt haben, dafs wenn wir anstatt der Kräfte nur ihre Resultirende wirksam denken, in dem System gleichfalls keine Drehung erfolge: so mufs offenbar die Richtung dieser Resultirenden unter allen Umständen die Drehungsaxe des Systems schneiden; oder mit andern Worten: die Axe, um welche das System unter dem Einflufs der zweiten Gruppe der lebendigen Kräfte gleichzeitig eine Drehung erleidet, mufs durch die Richtung der Resultirenden der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung gehen; denn im entgegengesetzten Falle würde die Resultirende der fortschreitenden Bewegung einen Hebelsarm in Bezug auf diese Axe besitzen, und gleichfalls auf Drehung um dieselbe wirken, was der Voraussetzung widerspricht. Da nun aber in jedem Augenblick die Axe, um welche das System eine Drehung erleidet die Richtung der Resultirenden der lebendigen Kräfte der fortschreitenden Bewegung schneiden soll, so mufs sie auch in jedem Augenblick die Bahn des Angriffspunkts dieser Resultirenden schneiden, weil nämlich diese Bahn in jedem Augenblick mit der für diesen Augenblick statt finden Richtung der Resultirenden zusammenfällt. Dies heifst aber nichts anders, als dafs die Axe, um welche sich das freie System dreht in jenem Augenblick durch den Angriffspunkt der Resultirenden selbst gehen müsse, denn die in den verschiedenen Zeitelementen stetig aufeinanderfolgenden Lagen des Angriffspunkts einer Kraft bilden eben die Bahn desselben. Da nun der Angriffspunkt der Resultirenden der lebendigen Kräfte des Systems in jedem Augenblick derselbe Punkt, nämlich der Schwerpunkt des Systems ist, so geht die Drehaxe des freien Systems stets durch den Schwerpunkt desselben.

Die Bewegung eines freien Systems ist also immer so aufzufassen, als ob die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt, sich fortschreitend bewegte, und als ob sämmtliche Massenelemente gleichzeitig eine Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe und zwar mit gemeinschaftlicher Winkelgeschwindigkeit erleiden.

Trägheitsmoment eines festen Systems.

§ 83. Betrachten wir nunmehr ein festes System, welches um eine beliebige Axe rotirt. Die einzelnen Massenelemente beschreiben in jedem Augenblick Wegelemente, die in parallelen zur Drehaxe normalen Ebenen liegen (S. 86. § 65a.). Denkt man die kürzesten Abstände der Massenelemente von der Drehaxe, so fallen die bei der Drehung beschriebenen Wegelemente mit Bogenelementen zusammen, deren Radien diese Abstände sind, und deren Mittelpunkte in der Drehaxe liegen. Die in den einzelnen Massenelementen zu denkenden lebendigen Kräfte, welche diese Drehung hervorbringen, fallen aber ihrer Richtung nach mit diesen Wegelementen zusammen, es bilden also jene Radien auch die kürzesten Abstände der Kraftrichtungen von der Drehaxe, und da diese Kraftrichtungen mit der Drehaxe sämmtlich rechte Winkel machen, da sie in Ebenen liegen, welche zur Drehaxe normal sind, so drückt sich ihr Moment aus durch $dK.R$, wenn dK der in dem Massenelement wirksame Druck, und R der Abstand des Massenelements von der Drehaxe ist, oder indem wir setzen $dK = dm.f$ (S. 11. No. 4) und $f = \frac{dc}{dt}$ (S. 18) auch durch $dm.R.\frac{dc}{dt}$. Führen wir nach S. 50 anstatt dc die Winkelgeschwindigkeit w ein, so hat man $dc = dw.R$, folglich ist $f = \frac{dw}{dt}.R$, und es ist das auf Drehung wirkende Moment unter der Form:

$$dm.R^2.\frac{dw}{dt} = dK.R$$

für jedes einzelne Massenelement darzustellen.

Das Leistungselement der in dem Massenelement wirksam gedachten Kraft ist aber $dK . ds$, oder $dm . f . c . dt$ (S. 27), oder (indem man für c den Werth wR (S. 50) und für f wiederum $\frac{dw . R}{dt}$ setzt):

$$dm . R^2 . w . dw = dK . ds.$$

Vergleicht man diesen Werth mit dem eben gefundenen Ausdruck für das statische Moment, so ergiebt sich:

$$145)\quad dK . ds = (dK . R) . w . dt,$$

d. h. das Leistungselement einer Kraft, welche eine Drehung um eine Axe bewirkt, ist gleich dem statischen Moment in Bezug auf diese Axe, multiplizirt mit der Winkelgeschwindigkeit und dem Zeitelement.

Die Summe der statischen Momente drückt sich offenbar aus durch:

$$145a)\quad \Sigma(dK . R) = \Sigma\left(dm . R^2 . \frac{dw}{dt}\right) = \frac{dw}{dt} . \Sigma(dm . R^2) = f_{,} . \Sigma(dm . R^2)$$

(wenn man nämlich unter $f_{,} = \frac{dw}{dt}$ das Aenderungsmaaſs der Winkelgeschwindigkeit versteht), und die Summe der Leistungselemente sämmtlicher lebendigen Kräfte der drehenden Bewegung durch

$$145b)\quad \Sigma(dK . ds) = \Sigma(dm . R^2 . w . dw) = w . dw . \Sigma(dm . R^2).$$

In beiden Ausdrücken kommt der Faktor $\Sigma(dm . R^2)$, oder die Summe der Produkte aus jedem Massenelement in das Quadrat seines kürzesten Abstandes von der Drehaxe vor. Diese Summe nennt man das Trägheitsmoment des festen Systems für diese Drehaxe.

Wenn man die Drehaxe, für welche das Trägheitsmoment gilt, nicht besonders bezeichnet, also allgemein vom Trägheitsmoment eines Systems spricht, so versteht man darunter, daſs dasselbe für eine Axe gilt, die durch den Schwerpunkt geht. Wir bezeichnen künftig das Trägheitsmoment eines Systems für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe immer mit J, und für eine andere, nicht durch den Schwerpunkt gehende Axe mit $J_{,}$. Die Gleichungen 145a) und 145b) gehen also im Allgemeinen in die Form über:

$$145c)\quad \begin{cases} \Sigma(dK . R) = f_{,} . J_{,} = \frac{dw}{dt} . J_{,} \\ \Sigma(dK . ds) = J_{,} . w . dw, \end{cases}$$

worin das Trägheitsmoment

$$145d)\quad J_{,} = \Sigma(dm . R^2)$$

zu setzen ist.

Man sieht, dafs das Trägheitsmoment eines festen Systems unabhängig ist von der Gröfse der Kräfte, welche eine drehende Bewegung erzeugen und nur abhängig von der Gruppirung der Massenelemente gegen die Drehaxe. Stellen wir ähnliche Betrachtungen an, wie bei der Bestimmung der Lage des Schwerpunkts (S. 154), so ergiebt sich, indem wir für die Massenelemente deren Gewichte einführen:

$$146)\quad J_{\prime} = \Sigma(dm\,.\,R^2) = \frac{1}{g}\,.\,\Sigma(dG\,.\,\mathrm{R}^2)$$

und wenn wir die Volumenelemente einführen:

$$146\mathrm{a})\quad J_{\prime} = \frac{1}{g}\,.\,\Sigma(dV\,.\,\gamma\,.\,R^2)$$

für homogene Systeme hat man:

$$146\mathrm{b})\quad J_{\prime} = \frac{\gamma}{g}\,.\,\Sigma(dV\,.\,R^2),$$

worin γ das Gewicht der Raumeinheit des Körpers bezeichnet. Der Ausdruck $\Sigma(dV.R^2)$ ist ein rein geometrischer; wir nennen ihn das räumliche Trägheitsmoment des Systems und bezeichnen denselben mit $T_{\prime}$ beziehlich mit T. Es ist also:

$$146\mathrm{c})\quad J_{\prime} = \frac{\gamma}{g}\,.\,T_{\prime};\quad J = \frac{\gamma}{g}\,.\,T.$$

wobei nicht zu vergessen ist, dafs diese Beziehungen nur für homogene Systeme gelten.

Drehungshalbmesser und Reduktion der Massen.

§ 84. Der Ausdruck (145a):

$$\Sigma(dK.R) = J_{\prime}\,.\,\frac{dw}{dt} = J_{\prime}\,.\,f_{\prime}$$

erscheint als das Moment des resultirenden Kräftepaars der sämmtlichen lebendigen Kräfte der drehenden Bewegung. Man kann dasselbe immer unter der Form Pa ausdrücken, und nach den Gesetzen in § 78 den Werth P oder den Hebelsarm a beliebig wählen, auch kann man die Richtung von $+P$ und $-P$, welche das Kräftepaar bilden und den Angriffspunkt dieser Kräfte in verschiedener Weise variiren. Denken wir den Angriffspunkt der einen Kraft $(-P)$ in der Drehaxe, so stellt a den Hebelarm der andern Kraft $(+P)$ in Bezug auf die Drehaxe dar. Ist der Angriffspunkt von $+P$ ein mit dem System fest verbundener Punkt, so rotirt er mit derselben Winkelgeschwindigkeit, und indem wir die in den einzelnen Massenelementen wirksam gedachten lebendigen Kräfte des Systems durch die Wirkung des resultirenden Kräftepaars ersetzt denken, werden wir nothwendig auch anstatt der in den einzelnen Punkten des Systems vertheilten Massenelemente in dem Angriffspunkt von P eine konzentrirte Masse ($M_{\prime}$) denken müssen, auf welche wirkend der Druck P dem System dieselbe Winkelgeschwindigkeit ertheilen würde, welche unter dem Einfluſs jener Kräfte statt findet. Ist f das Aenderungsmaaſs des Drucks P, so ist zunächt $P = M_{\prime} . f$, und da $f = \frac{dc}{dt} = \frac{dw . a}{dt}$, so hat man $P = M_{\prime} . \frac{dw\, a}{dt}$, folglich das Moment des resultirenden Kräftepaars $Pa = M_{\prime} . \frac{dw}{dt} . a^2$; es ist aber auch $Pa = \Sigma (dK . R) = J_{\prime} . \frac{dw}{dt}$, folglich hat man

$$147) \begin{cases} M_{\prime} a^2 = J_{\prime} \\ M_{\prime} = \frac{J_{\prime}}{a^2}; \quad a = \sqrt{\left(\frac{J_{\prime}}{M_{\prime}}\right)}. \end{cases}$$

Man nennt das Maaſs der Masse $M_{\prime}$ welche in dem Abstand a von der Drehaxe vereinigt sein müſste, damit ein in diesem Abstande auf Drehung wirkender Druck dieselbe Winkelgeschwindigkeit in dem System erzeuge, wie die in den einzelnen Massenelementen wirksam gedachten, auf Drehung wirkenden lebendigen Kräfte des Systems: die auf diesen Abstand reduzirte Masse. Die auf einen gegebenen Abstand reduzirte Masse drückt sich aus durch das Trägheitsmoment des Systems in Beziehung auf diese Axe, dividirt durch das Quadrat des gegebenen Abstandes.

Man kann die Masse des Systems auf jeden beliebigen Abstand reduziren, d. h. man kann in jedem beliebigen Abstand von der Drehaxe eine bestimmte Menge materieller Punkte vereinigt denken, so, daſs die einzelnen auf Drehung wirkenden lebendigen Kräfte durch eine einzige in diesem Abstande wirkende Kraft sich ersetzen lassen. Andererseits kann man eine beliebige Masse als reduzirte Masse des Systems betrachten, und den Abstand a berechnen in welchem sie unter der eben genannten Voraussetzung vereinigt sein müſste. Es ist daher auch zulässig diese Masse so zu wählen, daſs sie gleich der Summe aller Massenelemente des Systems ist. In diesem Falle hätten wir für $M_{\prime}$ zu setzen $(\Sigma dm) = M$ und es würde sich der entsprechende Abstand finden:

$$147\text{a}) \quad a_{\prime} = \sqrt{\left(\frac{J_{\prime}}{\Sigma (dm)}\right)} = \sqrt{\left(\frac{J_{\prime}}{M}\right)} = \varrho_{\prime}.$$

Wir nennen diesen Abstand, für welchen die reduzirte Masse des Systems gleich der Summe der Massenelemente des Systems ist, den Drehungshalbmesser oder Trägheitshalbmesser des

Systems für diese Axe, und bezeichnen ihn mit $\varrho_{\prime}$. Unter dem „Drehungshalbmesser“, ohne weitere Bezeichnung der Axe, ist der Drehungshalbmesser in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe verstanden; wir bezeichnen einen solchen mit ϱ.

Für homogene Systeme ist $M = V \cdot \frac{\gamma}{g}$ und 146c) $J_{\prime} = \frac{\gamma}{g} \cdot T_{\prime}$ folglich:

$$147\text{b)} \left\{ \begin{aligned} \varrho_{\prime} &= \sqrt{\left(\frac{J_{\prime}}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{T_{\prime}}{V}\right)} \\ \varrho &= \sqrt{\left(\frac{J}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{T}{V}\right)} \\ M &= \frac{J}{\varrho^2} = \frac{J_{\prime}}{\varrho_{\prime}^2} \end{aligned} \right.$$

Aus der Gleichung 147) und 147a) ergiebt sich:

$$147\text{c)} \left\{ \begin{aligned} a^2 \cdot M_{\prime} &= \varrho'^2 \cdot M \\ M_{\prime} &= \frac{\varrho'^2}{a^2} \cdot M \end{aligned} \right.$$

d. h. die auf einen gegebenen Abstand a von der Drehaxe reduzirte Masse ist gleich der Gesammtmasse des Systems, multiplizirt mit dem Quadrat des Verhältnisses des Drehungshalbmessers des Systems für diese Axe zu dem gegebenen Abstand.

Uebrigens bemerkt man, dafs wenn man die Masse des Systems auf einen gegebenen Abstand reduzirt, es für die Betrachtung gleichgiltig bleibt, ob man diese reduzirte Masse in einen Punkt konzentrirt denkt, oder ob man sie in einem Cylindermantel, dessen Axe die Rotationsaxe und dessen Halbmesser der gegebene Abstand ist, beliebig vertheilt denkt, denn es kommt für die hier vorliegenden Untersuchungen nur darauf an, dafs sämmtliche Elemente der reduzirten Masse denselben Abstand von der Drehaxe haben.

Einige Sätze für die Berechnung der räumlichen Trägheitsmomente.

§ 85. Die Berechnung der räumlichen Trägheitsmomente ist eine rein geometrische Operation. Wir wollen hier jedoch einige Sätze zusammenstellen, welche diese Berechnung in vielen Fällen erleichtern. Es läfst sich übrigens nach der Bemerkung auf S. 155 bei Gelegenheit der Schwerpunktsbestimmungen übersehen, was man unter dem räumlichen Trägheitsmoment von Linien, Flächen und Körpern zu verstehen habe.

1) Ist J das Trägheitsmoment eines Systems in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt des Systems geht, und ist M die

Masse des Systems, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine in dem Abstande e mit jener parallele Axe

$$148)\quad J_{,} = J + Me^2,$$

denn wenn man die Richtung von dem Schwerpunkt normal auf die neue Axe als Axe der X eines Koordinatensystems ansieht, dessen zweite (Y) Axe auf der durch beide Axen zu legenden Ebene normal steht, so ist für den Schwerpunkt als Anfangspunkt der Koordinaten der Abstand jedes Massenelementes von der Axe der Z, welche mit der Rotationsaxe durch den Schwerpunkt identisch ist:

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

und der Abstand von der neuen Axe ist offenbar

$$R = \sqrt{[(x + e)^2 + y^2]}.$$

Es ist also:

$$J_{,} = \Sigma\,(dm\,.\,R^2) = \Sigma\left(dm\,.\,[(x + e)^2 + y^2]\right)$$

und wenn man entwickelt:

$$J_{,} = \Sigma\,[dm\,(x^2 + y^2)] + \Sigma\,(dm)\,e^2 + 2e\,.\,\Sigma\,(dmx).$$

Nun ist $\Sigma\,(dmx) = 0$ nach S. 154, $\Sigma\,[dm\,(x^2 + y^2)] = \Sigma\,(dm\,r^2) = J$ und $\Sigma(dm) = M$, und man erhält durch Einsetzung dieser Werthe die Gleichung 148).

In gleicher Weise ergiebt sich das räumliche Trägheitsmoment:

$$148a)\quad T_{,} = T + Ve^2,$$

wenn V das Volum des Systems bezeichnet.

2) Bezeichnet ϱ den Trägheitshalbmesser des Systems, so kann man in die Gleichung 148) setzen: $J = M\varrho^2$ (147b) und man hat

$$149)\quad \begin{cases} J_{,} = M(\varrho^2 + e^2) \\ T_{,} = V(\varrho^2 + e^2). \end{cases}$$

Hieraus folgt, dafs wenn der Trägheitshalbmesser ϱ im Vergleich zu e sehr klein ist, das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe näherungsweise ausgedrückt werden kann durch:

$$149a)\quad \begin{cases} J_{,} = Me^2 \\ T_{,} = Ve^2, \end{cases}$$

d. h. durch das Produkt aus der Masse, beziehlich dem Volum in das Quadrat des Abstandes des Schwerpunkts von der Rotationsaxe.

Da aber aus Gleichung 147b) folgt:

$$J_{,} = M\varrho_{,}^2;\qquad T_{,} = V\varrho_{,}^2,$$

so hat man nach Einsetzung dieser Werthe in Gleichung 149) und wenn man $\varrho_{,}$ entwickelt:

$$150)\quad \varrho_{,} = \sqrt{(\varrho^2 + e^2)},$$

d. h. der Drehungshalbmesser eines festen Systems in

Bezug auf eine gegebene Axe ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate des Drehungshalbmessers in Bezug auf eine parallele durch den Schwerpunkt gehende Axe und der Entfernung der gegebenen Axe.

Auch folgt nach Gleichung 147c):

$$150\text{a)}\quad M_{\prime} = M \cdot \frac{\varrho^2 + e^2}{a^2},$$

d. h. die auf den Abstand a reduzirte Masse ist gleich der Gesammtmasse des Systems, multiplizirt mit dem Verhältnisse der Summe der Quadrate des Drehungshalbmessers des Systems für eine durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe und der Entfernung dieser Axe von der Rotationsaxe zu dem Quadrat des Abstandes a.

3) Denken wir ein System welches durch zwei parallele Ebenen begrenzt wird, und welches sich also durch Ebenen, die mit jenen Begrenzungsebenen parallel sind, in lauter parallele, ebene und unendlich dünne Schichten zerlegen läſst; es sei F der Flächeninhalt einer dieser Schnittflächen, e die Entfernung ihres Schwerpunkts von einer Umdrehungsaxe, t das räumliche Trägheitsmoment der Schnittfläche in Beziehung auf eine durch ihren Schwerpunkt gehende parallele Axe, und dx die Dicke der Schicht. Man hat sodann:

$$151)\quad T_{\prime} = \Sigma(e^2 \cdot F \cdot dx) + \Sigma(t \cdot dx),$$

welcher Ausdruck sich integriren läſst, wenn t und F als Funktionen der Entfernung x der beiden parallelen Begrenzungsebenen gegeben sind.

Wenn ein System durch ein konstantes Profil erzeugt wird, welches sich*) normal auf einer Kurve fortbewegt, indem der Schwerpunkt dieses Profils das Kurvenelement ds beschreibt, so kann man das Trägheitsmoment des zwischen zwei aufeinander folgenden Profilen liegenden Elementes, dessen Volum $F \cdot ds$ ist, ausdrücken nach 149a) näherungsweise durch $t_{\prime} = F \cdot ds \cdot e^2$, folglich das räumliche Trägheitsmoment des ganzen Systems durch:

$$159\text{a)}\quad T_{\prime} = \Sigma(t_{\prime}) = \Sigma(F \cdot ds \cdot e^2) = F \cdot \Sigma(ds \cdot e^2).$$

Es ist aber $\Sigma(ds \cdot e^2)$ nichts anders, als das Trägheitsmoment der Richtlinie des Systems in Bezug auf die betrachtete Rotationsaxe d. h. das räumliche Trägheitsmoment des Systems ist näherungsweise gleich dem Produkte aus dem erzeugen-

*) Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen, von J. V. Poncelet; deutsch von Schnuse, I. S. 152 u. f.

den Profil in das räumliche Trägheitsmoment der Richtlinie.

4) Wenn man die Trägheitsmomente derselben Ebene in Beziehung auf zwei in dieser Ebene sich rechtwinklig schneidende Axen zusammenaddirt, so erhält man das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe, die im Durchschnittspunkt der beiden erstgenannten Axen auf der Ebene normal steht (polares Trägheitsmoment); denn es sei:

$$T_{\prime} = \Sigma (dV . R^2)$$

das Trägheitsmoment der Ebene in Bezug auf die zuletzt erwähnte Axe, und man nehme diese und die beiden in der Ebene liegenden Axen als Koordinatenaxen, dann ist offenbar, wenn x und y die Abstände des Elements dV von den beiden letztgenannten Axen bezeichnen $R^2 = x^2 + y^2$:

$$152) \quad \Sigma (dV . R^2) = \Sigma (dV . x^2) + \Sigma (dV . y^2),$$

worin die Werthe $\Sigma (dV . x^2)$ und $\Sigma (dV . y^2)$ die Trägheitsmomente der Ebene in Bezug auf die Axe X und Y ausdrücken.

Ist dz die Dicke eines räumlichen Elementes, so ist offenbar das Trägheitsmoment eines prismatischen Körpers, der jene Ebene zur Grundfläche hat:

$$T_{\prime} = \Sigma \left\{ [\Sigma (dV . R^2)] . dz \right\} = \Sigma (dV . R^2) \, (\Sigma . dz)$$

$$152a) \quad T_{\prime} = z . \Sigma (dV . R^2) = z \left\{ \Sigma (dV . x^2) + \Sigma (dV . y^2) \right\}.$$

Gesetze für die Beziehungen zwischen den auf ein festes System angebrachten und den in dem festen System thätigen Kräften. — Massenwiderstände.

§ 86. Durch die Untersuchungen der §§ 81 bis 85 ist es gelungen, die Bewegung eines festen Systems zurückzuführen auf die Bewegung von Punkten, in denen die Masse des Systems vereinigt zu denken ist; nämlich so, dafs man die fortschreitende Bewegung des Systems immer so betrachten kann, als ob die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt, die fortschreitende Bewegung erleide, und dafs man die drehende Bewegung des Systems immer so auffassen kann, als ob die Gesammtmasse des Systems in einem Abstande von der Rotationsaxe gleich dem Drehungshalbmesser die drehende Bewegung erleide. Hierdurch ist man im Stande die Gesetze, welche wir in den Abschnitten a) und b) für die Bewegung eines Massenelementes entwickelt haben, auf die Bewegung eines Systems von Massenelementen zu beziehen.

Die in dem System thätigen (lebendigen) Kräfte und folglich auch ihre Resultirenden sind nach der Voraussetzung nichts anderes, als Kräfte, welche wir für die Wirkung der auf das System angebrachten Kräfte substituiren; es folgt hieraus ohne Weiteres (§ 35. S. 38) dafs in jedem Augenblick die Wirkung der sämmtlichen auf das System angebrachten Kräfte gleich der Wirkung der denselben substituirten Kräfte sein müsse. Bezeichnet

dL das Leistungselement der Resultirenden sämmtlicher auf das System angebrachten Kräfte in Bezug auf fortschreitende Bewegung,
$dL_{\prime}$ das Leistungselement der Resultirenden sämmtlicher auf das System angebrachten auf Drehung wirkenden Kräfte,
M die Gesammtmasse des Systems,
ds das Wegelement,
f das Aenderungsmaafs (die Beschleunigung) und
c die Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Systems,
$J_{\prime}$ das Trägheitsmoment,
$\varrho_{\prime}$ den Drehungshalbmesser,
w die Winkelgeschwindigkeit, und
$f_{\prime}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit,

so mufs sein:

$$153)\quad \begin{cases} dL = M.f.ds = M.c.dc \\ dL_{\prime} = J_{\prime}.w.dw = M.\varrho_{\prime}^2.w.dw, \end{cases}$$

folglich:

$$153a)\quad \begin{cases} dL + dL_{\prime} = M.c.dc + J_{\prime}.w.dw \\ \phantom{dL + dL_{\prime}} = M.(c.dc + \varrho_{\prime}^2.w.dw), \end{cases}$$

oder wenn $v = \varrho_{\prime}.w$ die Geschwindigkeit ist, mit welcher ein Punkt in den Abstand $\varrho_{\prime}$ von der Drehaxe rotirt:

$$153b)\quad \begin{cases} dL = M.c.dc \\ dL_{\prime} = M.v.dv \\ dL + dL_{\prime} = M.(c.dc + v.dv). \end{cases}$$

Diese wichtigen Gleichungen drücken folgendes Gesetz aus:

1) Wenn ein festes System unter dem Einflufs beliebiger Kräfte sich bewegt, so ist in jedem Augenblick das Leistungselement der Resultirenden der auf das System **angebrachten** Kräfte sowohl für die fortschreitende, als für die drehende Bewegung gleich dem Leistungselement der sämmtlichen in dem System **thätigen** Kräfte.

Da wir nach § 71, zufolge der Bemerkung auf S. 99, die Resultante der fortschreitenden Bewegung in jedem beliebigen

Punkt angreifend denken können; so lange es nur darauf ankommt, die Gesetze der fortschreitenden Bewegung zu untersuchen, so können wir, indem wir nur die fortschreitende Bewegung des Systems betrachten, die Resultante der fortschreitenden Bewegung im Schwerpunkt, welcher ja die fortschreitende Bewegung des ganzen Systems repräsentirt, angreifend denken, und wenn wir die Bemerkung am Ende der S. 98 beachten, ergiebt sich folgendes Gesetz:

2) Die fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts eines festen Systems findet immer in derselben Weise statt, als ob sämmtliche auf das System wirkenden Kräfte parallel mit ihren ursprünglichen Richtungen im Schwerpunkt vereinigt wirkten.

Die gleichzeitigen Bewegungen, nämlich die fortschreitende Bewegung des ganzen Systems und die Rotationsbewegung um eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht (§ 82), kann man auch nach dem Grundsatz No. 1 in § 24 als innerhalb der Dauer eines Zeitelements aufeinander folgend betrachten. Während nun die drehende Bewegnng erfolgt, kann man offenbar den Schwerpunkt, durch welchen nothwendig die Drehaxe des Systems geht (§ 82), für diesen Augenblick als fixen Punkt des Systems auffassen. Die Lage der Drehaxe wird sich daher nach dem Gesetz in § 79. No. 1 (S. 145) ermitteln lassen. Es folgt hieraus das Gesetz:

3) Die Lage der Drehaxe eines festen Systems wird gefunden, wenn man durch den Schwerpunkt drei normale Koordinatenaxen legt, die Momente der auf das System wirkenden Kräfte für jede dieser Axen bestimmt und nach der Gleichung 141c) (resp. 138) die Lage der resultirenden Paaraxe des Systems gegen die angenommenen Axen ermittelt.

Aus den Gleichungen 153) und 153a) folgt:

$$154)\quad \begin{cases} dL - M.c.dc = 0 \\ dL_{\prime} - J_{\prime}.w.dw = 0 \\ dL + dL_{\prime} - M.c.dc - J_{\prime}.w.dw = 0. \end{cases}$$

Die Werthe $-M.c.dc$ und $-J_{\prime}.w.dw$ drücken aber nichts anders aus, als die Leistungselemente der Resultirenden von Kräften, welche den lebendigen Kräften der Gröfse nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt sind, solche Kräfte würden also als Gegenkräfte der in dem System wirksamen Kräfte erscheinen, und wenn man daher in den einzelnen Massenelementen die Gegenkräfte der in dem System wirksamen Kräfte angebracht denkt, so würde zufolge der Gleichungen 154) Gleichgewicht in dem System vorhanden sein, denn die Gleichungen 154) sind nichts anderes, als die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht. Da die in den einzelnen Massenelementen wirksam gedachten Kräfte solche sind, welche in den Massenelementen die entsprechende Bewegung erzeugen würden, so sind ihre Gegenkräfte als solche aufzufassen, welche der Bewegung der Massenelemente entgegenwirken, wir wollen sie daher als die Massenwiderstände der Bewegung bezeichnen, und es folgt aus der Gleichung 154) das Gesetz:

4) Wie auch die auf ein festes System wirkenden Kräfte beschaffen sein mögen, so ist doch in jedem Zeitelement zwischen diesen Kräften und den Massenwiderständen der Bewegung Gleichgewicht vorhanden.

Es lassen sich also für jedes Zeitelement die Gleichgewichtsgesetze (§ 69 und folgende) auf ein jedes System, das sich in Bewegung befindet, anwenden, sobald man die sämmtlichen auf das System angebrachten, und die sämmtlichen in dem System wirkenden Massenwiderstände in Betracht zieht.

Der aus sämmtlichen lebendigen Kräften der fortschreitenden Bewegung resultirende Druck für irgend eine Richtung drückt sich aus nach Gleichung 143) (S. 152) durch $M.f$, folglich der Druck der Massenwiderstände durch $-M.f$; und das Moment des aus sämmtlichen lebendigen Kräften der drehenden Bewegung resultirenden Kräftepaars drückt sich aus nach Gleichung 145c) (S. 158) durch $f_{,}.J_{,}$, folglich das Moment der Massenwidersände in Bezug auf drehende Bewegung durch $-f_{,}.J_{,}$. Wenn nun die Resultirende der fortschreitenden Bewegung aus sämmtlichen auf das System angebrachten Kräften für dieselbe Richtung mit $\Sigma(K)$ und das Moment des resultirenden Kräftepaars aus sämmtlichen auf das System angebrachten Kräften für dieselbe Axe mit $\Sigma(Ka)$ bezeichnet wird, so mufs nach dem eben entwikkelten Satze No. 4 und zufolge der Bedingungen des Gleichgewichts sein:

$$154a)\quad \begin{cases} \Sigma K - M.f = 0 \\ \Sigma(Ka) - f_{,}.J_{,} = 0, \end{cases}$$

und daraus folgt:

das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung:

$$154\text{b})\quad f = \frac{\Sigma(K)}{M} = \frac{\text{Resultirender Druck}}{\text{Gesammtmasse}},$$

und das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit:

$$154\text{c})\quad f_{\prime} = \frac{\Sigma(Ka)}{J_{\prime}} = \frac{\text{Summe der statischen Momente}}{\text{Trägheitsmoment}}.$$

Substituirung der auf Drehung wirkenden Kräfte eines festen Systems durch die Normalkräfte und Tangentialkräfte. Resultirende der Normalkräfte.

§ 87. Betrachten wir ein festes System, welches um irgend eine Axe rotirt, die Axe selbst möge fortschreiten oder nicht. Wenden wir auf jedes Massenelement die Betrachtungen an, welche wir in § 42 und 43 angestellt haben, so können wir die Bewegungen der einzelnen Massenelemente allemal auch erzeugt denken durch eine Normalkraft und eine Tangentialkraft; wir können also anstatt der Kräftegruppe, welche wir bisher als die in dem System wirksamen Kräfte der rotirenden Bewegung bezeichnet haben, noch andere Kräftegruppen substituiren, nämlich so, dafs wir in jedem Augenblick in jedem Massenelement eine konstantwirkende Normalkraft, und eine im Gleichgewicht befindliche Tangentialkraft wirksam denken. Die in den einzelnen Massenelementen wirkenden Tangentialkräfte sind in ihren Angriffspunkten einzeln im Gleichgewicht, ihr Druck auf das System ist folglich gleich Null (§ 34); die in den einzelnen Massenelementen wirksamen Normalkräfte wirken in der Richtung des Halbmessers des Kreiselements, welches das Massenelement in diesem Augenblick durchläuft; sie liegen folglich alle in parallelen Ebenen und ihre Richtungen schneiden sämmtlich die Drehaxe, sie üben auf jedes Massenelement einen Druck, durch welchen die Ablenkung des Massenelements von der Richtung der Tangente bedingt wird, diesem Druck (die Centripetalkraft) entspricht in jedem Massenelement eine gleich grofse entgegengesetzt gerichtete Reaktion (Centrifugalkraft), welche zunächst die Festigkeit des Systems in Anspruch nimmt, indem sie das Bestreben darstellt, die einzelnen Massenelemente radial von der Drehaxe zu entfernen. Wir können nun für die sämmtlichen in den einzelnen Massenelementen wirksamen Normalkräfte, die Resultirende bestimmen, wobei es im Allgemeinen gleichgiltig ist, ob wir für diese Untersuchung die Centrifugalkräfte, oder die Centripetalkräfte benutzen; die

Resultirenden werden sich nur durch die entgegengesetzte Richtung von einander unterscheiden *).

Es ist am Orte die Bemerkung ausdrücklich hervorzuheben, dafs die Centrifugalkraft oder die Centripetalkraft nicht als Kräfte aufgefafst werden dürfen, welche durch die rotirende Bewegung erst entstehen, und welche nun fähig sein könnten, auf das System irgend wie als darauf angebrachte Kräfte eine Wirkung zu äufsern. Die in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normalkräfte, welche wir nunmehr betrachten, sind vielmehr nichts anders, als Kräfte, welche wir für die Wirkung der auf das System angebrachten, die drehende Bewegung bedingenden Kräfte, oder auch für die Wirkung der in dem System wirksamen (lebendigen) Kräfte der drehenden Bewegung substituiren. Wir dürfen dieselben also nicht mit jenen zugleich wirksam denken, sondern nur entweder die einen, oder die andern. Die Normalkräfte (Centrifugal- oder Centripetalkräfte), oder deren Resultirende sind daher nicht im Stande, irgend welche Aenderung derjenigen Bewegung hervorzubringen, welche die auf das System angebrachten Kräfte bedingt haben, oder welche das System überhaupt besitzt. Wir betrachten sie nur, weil die Anschauung von den Verhältnissen der drehenden Bewegung und ihren Bedingungen zuweilen einfacher und bequemer ist, wenn wir diese drehende Bewegung durch die gleichzeitige Bewegung der Massenelemente mit gleichförmiger Geschwindigkeit nach der Richtung der Tangente und mit gleichmäfsig beschleunigter, durch einen konstantwirkenden Normaldruck bedingter Geschwindigkeit nach der Richtung des Radius hervorgebracht denken (§ 42).

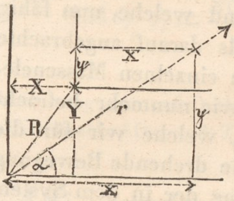
Da die Normalkräfte als Kräfte, die zwar in parallelen Ebenen liegen, deren Richtungen aber unter einander nicht parallel sind, erscheinen, so können wir ihre Wirkung im Allgemeinen auffassen nach dem in § 75 unter A. behandelten Fall; sie läfst sich also zurückführen (§ 75. AIII. S. 114) auf eine der Richtung und Gröfse nach zu bestimmende Resultirende Q, und auf ein Kräftepaar, welches in einer zur Richtung Q normalen Ebene liegt.

Es sei die Drehaxe die dritte Axe eines Koordinatensystems, dessen beide andern Axen also in einer zur Drehaxe normalen Ebene liegen. X, Y, Z seien die Korrdinaten des Schwerpunkts, x, y, z die Koordinaten der einzelnen Massenelemente, und x', y', z'

*) Vergleiche die Bemerkung am Schlusse des § 43.

seien die Koordinaten derselben Massenelemente in Bezug auf ein mit dem erwähnten Koordinatensystem paralleles durch den Schwerpunkt gehendes Koordinatensystem, endlich sei R der kürzeste Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe.

Zufolge dieser Disposition ist offenbar:



$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)} \qquad R = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$$
$$x = X + x' \qquad y = Y + y'$$

und da die Normalkräfte sämmtlich in der Richtung ihres kürzesten Abstandes r von der Drehaxe wirken, so ist der Winkel α den sie mit der ersten Axe machen zu bestimmen durch die Werthe

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}.$$

Die Resultirende von Kräften in parallelen Ebenen drückt sich durch Gleichung 119) aus:

$$Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(K.\sin\alpha)^2]\right\}}$$

worin wir hier für K die Werthe der in den einzelnen Massenelementen wirksam zu denkenden Normalkräfte zu setzen haben. Es ist aber nach Gleichung 79), S. 50 der Druck der Normalkraft:

$$dF = dm.w^2.r$$

und demnächst für jedes Massenelemennt:

$$K.\cos\alpha = dm.w^2.r.\frac{x}{r} = w^2.dm.x = w^2.dm.(X + x')$$
$$K.\sin\alpha = dm.w^2.r.\frac{y}{r} = w^2.dm.y = w^2.dm.(Y + y').$$

Man hat also, da w^2 gemeinschaftlich ist, die Resultirende aus allen Centrifugalkräften:

$$Q = w^2.\sqrt{\left\{[\Sigma(dm.X + dm.x')]^2 + [\Sigma(dm.Y + dm.y')]^2\right\}}.$$

Es ist aber nach dem Gesetz in § 81, S. 154 der Werth $\Sigma(dm.x')$ und $\Sigma(dm.y')$ jeder gleich Null, da diese Ausdrücke die Momentensummen für Ebenen vorstellen, die durch den Schwerpunkt gehen, und wenn man nun die Ausdrücke:

$$[\Sigma(dm.X + dm.x')]^2 \text{ und } [\Sigma(dm.Y + dm.y')]^2$$

berechnet, indem man sie auf die Form bringt:

$$[\Sigma(dm.X) + \Sigma(dm.x')] \text{ und } [\Sigma(dm.Y) + \Sigma(dm.y')]$$

so fallen die Summanden $\Sigma(dm.x')$ und $\Sigma(dm.y')$, da sie gleich Null sind fort, und man erhält schliefslich:

$$Q = w^2 . \sqrt{\left\{[\Sigma(dm . X)]^2 + [\Sigma(dm . Y)]^2\right\}}$$
$$= w^2 . \sqrt{\left\{[\Sigma(dm)]^2 . [X^2 + Y^2]\right\}}.$$

$$155)\quad Q = w^2 . (\Sigma . dm) . R = M . w^2 . R,$$

auch ergiebt sich nach Gleichung 119) für die Richtung von Q:

$$\cos A = \frac{w^2 . [\Sigma(dm . X) + \Sigma(dm . x')]}{Q} = \frac{X}{R}; \quad \sin A = \frac{Y}{R}.$$

Hieraus folgt, daſs die Richtung der Resultirenden der Normalkraft mit der Richtung der kürzesten Entfernung des Schwerpunkts des Systems von der Drehungsaxe zusammenfällt, und folglich sowohl die Drehaxe, als die mit derselben parallele durch den Schwerpunkt gehende Koordinatenaxe schneidet.

Für eine Drehaxe, die durch den Schwerpunkt geht, ist $R = 0$, folglich auch die Resultirende aller Normalkräfte nach Gleichung 155) gleich Null. Aus dieser Gleichung und der eben angeführten Bemerkung folgt folgendes Gesetz:

> Wenn ein festes System um eine gegebene Axe rotirt, so ist der resultirende Druck aller in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normalkräfte derselbe, welcher auch statt finden würde, wenn die Gesammtmasse des Systems in einem Punkte vereinigt, dessen Abstand gleich dem kürzesten Abstande des Schwerpunkts des Systems von der Drehaxe ist, mit der gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit des Systems um dieselbe Axe rotirt; für jede durch den Schwerpunkt gehende Rotationsaxe ist der Druck aller Normalkräfte gleich Null.

Rotation eines freien Systems. — Freie Axen.

§ 88. In einem freien System geht die Drehaxe immer durch den Schwerpunkt des Systems (§ 82. S. 157). Die Normalkräfte sind hier also immer als Kräfte aufzufassen, die in parallelen Ebenen liegen, und deren Resultirende gleich Null ist; der Fall entspricht also dem in § 75 unter C. S. 116 behandelten. Solche Kräfte können aber im Allgemeinen noch ein resultirendes Kräftepaar haben, dessen Ebene und Moment durch die Gleichungen 123), 123a) und 123b) zu bestimmen bleibt. Nach 123a) ist der Neigungswinkel der Paarebene gegen die parallele Ebene, in welcher die Kräfte liegen zu finden; da nun die Kraftrichtungen hier sämmtlich die Drehaxe schneiden, so ist ihr kürzester Abstand von derselben $R_{,,,} = 0$ und folglich findet sich tang $\varphi = \infty$, daher steht die Ebene des resultirenden Kräftepaars normal auf der Ebene der Kräfte, d. h. sie ist parallel mit der Drehaxe. Der Winkel ψ, unter welchem sie die angenommene Koordinatenaxe der X schneidet, ist nach Gleichung 123) zu bestimmen und nach Einsetzung der entsprechenden Werthe hat man:

$$\text{tang}\,\psi = \frac{\Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z')}{\Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z')}.$$

Endlich ist das Moment der resultirenden, in dieser Ebene liegenden Kräftepaares nach Gleichung 123 b) und nach Einsetzung der entsprechenden Werthe:

$$w^2\,.\,\sqrt{\left\{[\Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z')]^2 + [\Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z')]^2\right\}}.$$

Da nun aber zufolge der Voraussetzung die Axe der Z' die resultirende Axe des freien Systems ist, deren Lage durch die auf das System angebrachten Kräfte bestimmt ist (vergl. § 86. No. 3), so mufs in Bezug auf jede zu dieser Axe normale Axe das resultirende Moment gleich Null sein (vergl. die Darstellung in § 79. No. 2). Das eben berechnete Moment ist aber ein solches, welches eine Drehung um eine Axe bedingen würde, die zu der Axe der Z' normal ist und mit der Axe der X den Winkel $(90^0 - \psi)$ bildet, (da die Paarebene dieses Moments mit der Axe der Z' parallel ist und mit der Axe der X den Winkel ψ macht). Es mufs also das eben berechnete Moment gleich Null sein. Nun bemerkt man aber, dafs der Werth dieses Moments bedingt ist, durch die Lage der Massenelemente gegen die resultirende Axe der Z'. Diese Lage kann von vorne herein so beschaffen sein, dafs der Ausdruck

$$w^2\,.\,\sqrt{\left\{[\Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z)]^2 + [\Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z')]^2\right\}} = 0$$

ist, was im Allgemeinen erfordern würde, dafs einzeln:

$$\Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z') = 0 \text{ und } \Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z') = 0$$

sei, oder es läfst sich auch denken, dafs die Massenelemente von vorne herein eine solche Lage nicht haben; dafs sich also für das Moment ein reeller Werth ergiebt. In diesem Falle müssen aber offenbar die Massenelemente in dem Augenblick in welchem Bewegung eintritt eine Lage annehmen, durch welche jene Bedingung erfüllt wird, d. h. es mufs das ganze System sich gegen die (durch die auf dasselbe angebrachten Kräfte bedingte) Rotationsaxe so verschieben, dafs die eben aufgestellte Bedingungsgleichung erfüllt wird. Das System rotirt dabei um die Axe der Z', allein in sehr eigenthümlicher Weise, indem nämlich sämmtliche Massenelemente gleichzeitig um eine zweite Axe rotiren, die gegen die Axe der Z' geneigt ist, und welche gemeinschaftlich mit den um sie rotirenden Massenelementen um die Axe der Z' als um diejenige, welche durch die auf das System angebrachten Kräfte gegeben ist, rotirt. Die hierdurch bedingten höchst merkwürdigen Bewegungsverhältnisse können wir hier nicht spezieller untersuchen, da dies eine zu weit führende Diskussion nöthig machen würde; wir können darauf um so eher verzichten, als dieselben für unsere Zwecke von minderer Wichtigkeit sind.

Eine Axe für welche die in dem System wirksam zu denkenden Normalkräfte (Centripetal- oder Centrifugalkräfte) der einzelnen Massenelemente in vollkommenem Gleichgewicht (§ 70) sich befinden, nennt man eine **freie Axe.**

Damit die Axe gegen fortschreitende Bewegung im Gleichgewicht sei, mufs die Resultirende aus allen Normalkräften gleich Null sein; dies ist der Fall, wie in § 87 nachgewiesen, wenn die Axe durch den Schwerpunkt des Systems geht. Eine freie Axe mufs also durch den Schwerpunkt des Systems gehen.

Aber nicht jede Axe, die durch den Schwerpunkt des Systems geht, ist eine freie Axe; es mufs vielmehr auch das aus den Normalkräften, welche eine Rotation um die Axe bedingen, hervorgehende resultirende Kräftepaar gleich Null sein, um die Axe zu einer freien zu machen, d. h. es müssen die Momentensummen für drei zu einander normale Axen gleich Null sein. Dazu gehört nach der obigen Darstellung:

$$156) \quad \begin{cases} \Sigma(dm\,.\,x'\,.\,z') = 0 \text{ und} \\ \Sigma(dm\,.\,y'\,.\,z') = 0, \end{cases}$$

wenn z' die Koordinaten der Massenelemente in Bezugauf die Rotationsaxe, x' und y' aber die Koordinaten der Massenelemente in Bezug auf zwei andere, im Schwerpunkt des Systems auf der Rotationsaxe normale, Axen bezeichnen.

Diese Bedingung wird erfüllt:

a) wenn z' für alle Massenelemente gleich Null ist, d. h. wenn alle Massenelemente in einer Ebene liegen, die auf der Axe der Z' normal ist. Hieraus folgt:

> Für Massenelemente, die sämmtlich in einer Ebene liegen, ist die im Schwerpunkt der Ebene zu derselben normale Axe eine freie Axe.

b) Wenn das System durch Ebenen, die normal zu der Axe der Z' sind, sich in ebene Schichten zerlegen läfst, und für jede einzelne Schicht, deren Massenelemente also immer einen gemeinschaftlichen Werth von z' haben, die Bedingungen $\Sigma(dm\,.\,x') = 0$ und $\Sigma(dm\,.\,y' = 0)$ erfüllt werden, d. h. also wenn die Schwerpunkte der sämmtlichen Schichten in der Axe der Z' liegen. Dies wird durch folgendes Gesetz ausgedrückt:

> **Jede durch den Schwerpunkt gehende Axe, welche die Schwerpunkte sämmtlicher auf derselben normal stehenden Elemente eines Systems enthält, ist eine freie Axe.**

Es läfst sich zeigen, dafs jedes feste System wenigstens **drei freie Axen haben müsse**, und dafs **diese freien Axen im Schwerpunkt normal zu einander sind.**

Kennt man eine freie Axe des Systems, so lassen sich die andern freien Axen zuweilen ohne weitere Rechnung angeben, denn nach dem eben angeführten, nur mit Hilfe ausgedehnter analytischer Rechnungen nachzuweisenden Satze, müssen die andern Axen in der Ebene liegen, welche im Schwerpunkt normal zu der ersten freien Axe ist; haben nun sämmtliche in dieser Ebene liegenden Axen zu der ersten Axe ganz gleiche Beziehungen, so werden alle diese Axen **freie** sein. Dies ist z. B. der Fall mit einem homogenen **Rotationskörper**: denn, dreht sich eine ebene Figur um eine in ihrer Ebene liegende Axe, so ist diese Axe eine freie Axe des erzeugten Rotationskörpers, nach dem Satz b), und wenn man durch den Schwerpunkt dieses Rotationskörpers eine zu jener Axe normale Ebene legt, so liegen die andern freien Axen in dieser Ebene, und da der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Rotationskörper entweder eine Kreisfläche oder eine Kreis-Ringfläche ist, so haben alle Durchmesser dieser Fläche dieselben Beziehungen zur Rotationsaxe, sind also sämmtlich **freie** Axen.

Für jede Axe, die mit einer freien Axe parallel ist, aber nicht durch den Schwerpunkt geht, ist das Moment des auf Kippen der Achse wirkenden Kräftepaars ebenfalls gleich Null; denn wenn für die freie Axe $\Sigma(dm.x'.z') = 0$ und $\Sigma(dm.y'.z')$ gleich Null ist, und wir legen durch den Schwerpunkt eine Ebene normal zu den beiden Axen, nehmen den Durchschnittpunkt der neuen Axe mit diese Ebene als Anfangspunkt des neuen Koordinatensystems, dessen Axen parallel sein sollen mit denen des erstgedachten Koordinatensystems (dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt war), so sind, wenn X und Y die Koordinaten jenes neuen Anfangspunkts bedeuten:

$$z = z'; \quad x = X + x'; \quad y = Y + y'$$

wenn wir diese Werthe in die obigen Bedingungs-Gleichungen (156) einsetzen, so ist:

$$\Sigma(dm \,.\, x \,.\, z) \;-\; X \,.\, \Sigma(dm \,.\, z') = 0$$

$$\Sigma(dm \,.\, y \,.\, z) \;-\; Y \,.\, \Sigma(dm \,.\, z') = 0$$

und da $\Sigma(dm.z') = 0$ ist (§ 81. S. 154), so ist auch $\Sigma(dm.x.z) = 0$ und $\Sigma(dm \,.\, y \,.\, z) = 0$, d. h. es sind die Summen der Momente der Normalkräfte für zwei zu der neuen Axe normale Koordinatenaxen einzeln gleich Null, und daher besteht kein Bestreben die Axe zu kippen. Wohl aber besteht für solche Axe durch die Resultirende der Normalkräfte (Gleichung 155) ein Bestreben auf Verschieben, d. h. ein Druck auf die Axe. Eine Axe für welche kein Bestreben auf Kippen besteht, sondern nur ein aus den Normalkräften resultirender Druck, nennen wir eine Hauptaxe des Systems.

Rotation eines Systems mit fixen Punkten; Druck der Normalkräfte auf die fixen Punkte.

§ 89. Wenn ein festes System um einen fixen Punkt rotirt, der nicht der Schwerpunkt ist, und man denkt die Bewegung durch den Einflufs der in den einzelnen Massenelementen wirkenden Normal- und Tangentialkräfte bedingt, so ist zunächst der Druck auf den fixen Punkt gleich der Resultirenden aus allen Normalkräften; das ist nach Gleichung 155):

$$Q = M \,.\, w^2 \,.\, R.$$

worin M die Gesammtmasse des Systems und R den kürzesten Abstand des Schwerpunkts des Systems von der durch den fixen Punkt zu denkenden Rotationsaxe bezeichnet. Ist diese, durch die auf das System angebrachten Kräfte bedingte, und nach § 79. S. 145 der Lage nach zu bestimmende Rotationsaxe eine Hauptaxe (§ 88. Schlufs), so wird die Rotation um diese Hauptaxe unmittelbar statt finden; ist jedoch die in angegebener Weise ermittelte Rotationsaxe keine Hauptaxe, so mufs das feste System seine Lage gegen dieselbe so lange ändern, bis eine Hauptaxe des Systems mit dieser gegebenen Rotationsaxe zusammenfällt. Die hierdurch komplizirten Bewegungsverhältnisse sind analog denen in § 87. S. 172 erwähnten Rotationsbewegungen eines freien Systems, dessen resultirende Paaraxe nicht mit einer freien Axe zusammenfällt, und können hier nicht weiter erörtert werden.

Bei weitem gröfsere Wichtigkeit für unsere Zwecke hat die Rotation eines festen Systems um eine fixe Axe, die durch zwei gegebene fixe Punkte geht. Behalten wir die in § 79 und 87 gewählten Bezeichnungen bei, so läſst sich der Fall offenbar zurück führen auf den in § 79 unter No. 2 (S. 148) behandelten Fall, daſs sämmtliche Drucke (die Normalkräfte) in Ebenen liegen, die zur fixen Axe normal sind, wir werden also die Drucke in den fixen Punkten I und II nach zwei Richtungen, die parallel sind, mit zwei durch den ersten fixen Punkt angenommenen zu der fixen Axe und unter einander normalen Koordinatenaxen finden, indem wir in die Gleichung 142b) für $K \cdot \cos\alpha$ und für $K \cdot \cos\beta = K \cdot \sin\alpha$ die auf Seite 170 bestimmten Werthe $w^2 \cdot dm \cdot x$ und $w^2 \cdot dm \cdot y$ setzen. Wir haben sodann:

$$157)\quad \begin{cases} Q_I{}' = w^2 \cdot \dfrac{\Sigma[dm.x.(L-z)]}{L}; & Q_I{}'' = w^2 \cdot \dfrac{\Sigma[dm.y.(L-z)]}{L} \\ Q_{II}{}' = w^2 \cdot \dfrac{\Sigma(dm.x.z)}{L}; & Q_{II}{}'' = w^2 \cdot \dfrac{\Sigma(dm.y.z)}{L}, \end{cases}$$

worin $Q_I{}'$ und $Q_I{}''$ die Drucke im ersten fixen Punkt $Q_{II}{}'$ und $Q_{II}{}''$ die Drucke im zweiten fixen Punkt; z die Abstände der Massenelemente von einer Ebene durch den ersten fixen Punkt, und normal zur Drehaxe, x und y die Ordinaten der Massenelemente auf den Axen gemessen, in deren Richtung die Drucke $Q_I{}'$, $Q_I{}''$ und $Q_{II}{}''$, $Q_{II}{}''$ statt finden, L die Entfernung der beiden fixen Punkte von einander, und w die Winkelgeschwindigkeit des Systems bezeichnen.

Es seien wieder x', y', z' die Koordinaten in Bezug auf ein Koordinatensystem, das mit dem angenommenen parallel ist, und dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt ist; es seien X, Y, Z die Koordinaten des Schwerpunkts in Bezug auf das zuerst angenommene System. Setzt man wieder $x = X + x'$, $y = Y + y'$, $z = Z + z'$ wie auf Seite 170 und beachtet man, daſs $\Sigma(dm \cdot x')$, $\Sigma(dm \cdot y')$, $\Sigma(dm \cdot z')$ einzeln gleich Null sind (§ 81. S. 154), so lassen sich die Werthe für die Drucke durch leichte Rechnung umformen in folgende:

$$157a)\quad \begin{cases} Q_I{}' = w^2 \cdot \dfrac{X \cdot (L-Z) \cdot \Sigma(dm) - \Sigma(dm \cdot x' \cdot z')}{L} \\ Q_{II}{}' = w^2 \cdot \dfrac{X \cdot Z \cdot \Sigma(dm) + \Sigma(dm \cdot x' \cdot z')}{L} \\ Q_I{}'' = w^2 \cdot \dfrac{Y \cdot (L-Z) \cdot \Sigma(dm) - \Sigma(dm \cdot y' \cdot z')}{L} \\ Q_{II}{}'' = w^2 \cdot \dfrac{Y \cdot Z \cdot \Sigma(dm) + \Sigma(dm \cdot y' \cdot z')}{L}. \end{cases}$$

Ist die Rotationsaxe eine Hauptaxe, so ist für die durch den Schwerpunkt gehende mit derselben parallele Axe, welche dann eine freie Axe ist $\Sigma(dm \cdot x' \cdot z') = 0$ und $\Sigma(dm \cdot y' \cdot z') = 0$, folglich hat man für diesen Fall:

$$157\text{b})\quad \begin{cases} Q_I' = w^2 \,.\, \dfrac{X}{L} . (L-Z) . M; & Q_I'' = w^2 \,.\, \dfrac{Y}{L} . (L-Z) . M \\ Q_{II}' = w^2 \,.\, \dfrac{X}{L} . Z . M; & Q_{II}'' = w^2 \,.\, \dfrac{Y}{L} . Z . M . \end{cases}$$

Setzt man Q_I' und Q_I'' im ersten fixen Punkt, und ebenso Q_{II}' Q_{II}'' im zweiten fixen Punkt zu einer Resultirenden zusammen, so hat man nach einer einfachen Umformung mit Hilfe der Gleichung 155), S. 171:

$$157\text{c})\quad \begin{cases} Q_I = w^2 . M . R . \dfrac{L-Z}{L}; & Q_{II} = w^2 . M . R . \dfrac{Z}{L} \\ \quad = Q . \dfrac{L-Z}{L}; & \quad = Q . \dfrac{Z}{L} . \end{cases}$$

worin Q_I den resultirenden Druck auf den ersten fixen Punkt, Q_{II} denjenigen auf den zweiten fixen Punkt, R den Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, M die Gesammtmasse des Systems, Q den resultirenden Druck durch die Normalkraft bezeichnen. Auch ergiebt sich leicht, dafs in diesem Falle Q_I und Q_{II} parallel mit dem kürzesten Abstande R sind. Hieraus folgt:

> Rotirt ein festes System um eine fixe Axe, welche parallel mit einer freien Axe des Systems ist, so kann man die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunkt vereinigt rotirend denken, und findet den Druck auf die fixen Punkte, indem man den Druck der durch den Schwerpunkt gehenden Normalkraft auf die fixen Punkte nach § 79 oder 80 reduzirt. Ist die fixe Axe des Systems nicht parallel mit einer freien Axe, so ist dies nicht zulässig.

Pendelschwingungen eines festen Systems um horizontale und um geneigte Axen.

§ 90. Ein festes System, welches unter dem Einflufs der Schwere um eine fixe Axe schwingt, so dafs es bei dieser Schwingung eine stabile Gleichgewichtslage durchläuft, nennen wir ein körperliches (— zusammengesetztes — physikalisches —) Pendel.

Ist nämlich ein festes System um eine fixe Axe drehbar, so ist jedes Massenelement gezwungen in einem Kreisbogen sich zu bewegen, und es wird, wenn die Bedingungen des § 56 und 57 statt finden, eine schwingende Bewegung machen; es mufs folglich auch das ganze System schwingen. Nun haben aber die einzelnen Massenelemente verschiedene Abstände von der Drehaxe, und auch verschiedene Erhebungswinkel; jedes Massenelement würde also, wenn es frei schwingen könnte, im Allgemeinen eine andere Schwingungsdauer (§ 57) und folglich auch eine audere Winkelgeschwindigkeit besitzen; dies ist nicht möglich, sobald die Massenelemente ein festes System bilden.

Haben wir es nun mit der Untersuchung der Bewegungsverhältnisse eines festen Systems welches um eine fixe Axe schwingt zu thun, so verfahren wir wieder am Besten in der Weise, dafs wir einen Punkt zu ermitteln suchen, der mit dem System fest verbunden ist, und in welchem die Gesammtmasse des System vereinigt, dieselben Einflüsse auf das System ausüben würde, wie die in den einzelnen Punkten vertheilten Massenelemente. Diesen Punkt nennen wir den Mittelpunkt der Schwingung, auch wohl kurz den Schwingungspunkt.

Der Schwingungspunkt mufs offenbar folgende Bedingungen erfüllen:

1) die in dem Schwingungspunkt vereinigte Gesammtmasse mufs denselben Druck auf die fixen Punkte ausüben, welcher aus den einzelnen Massenelementen resultiren würde;
2) wenn das System durch die stabile Gleichgewichtslage geht (§ 54 bis 57), mufs auch der Schwingungspunkt in stabiler Gleichgewichtslage sein, und
3) die in dem Schwingungspunkt vereinigte Gesammtmasse mufs dieselbe Schwingungsdauer haben, welche das körperliche Pendel hat.

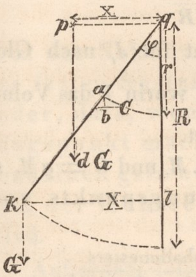
Wir betrachten zunächst den Fall, in welchem die fixe Axe horizontal ist, und dann folgt leicht, dafs zur Erfüllung der ersten Bedingung gehört, dafs der Schwingungspunkt in derselben zur fixen Axe normalen Ebene liegen mufs, in welcher der Schwerpunkt liegt (§ 79) und ebenso leicht folgt aus der zweiten Bedingung, dafs der Schwingungspunkt auch in derjengien Ebene liegen mufs, welche durch die Axe und den Schwerpunkt gelegt werden kann; es folgt also, indem wir die beiden ersten Bedingungen zusammenfassen, dafs der Schwingungspunkt in der Durchschnittslinie zweier Ebenen liegen mufs, von denen die eine durch den Schwerpunkt normal zur Axe, und die andere durch den Schwerpunkt und die Axe gelegt werden kann; hierin liegt der Satz:

> der Schwingungspunkt eines festen Systems liegt in der Linie, welche den kürzesten Abstand des Schwerpunkts von der fixen Axe darstellt.

Zur Untersuchung der dritten Bedingung stellen wir folgende Betrachtungen an:

Es bezeichne r den Abstand des Schwingungspunkts von der Drehaxe, und wir denken in demselben die Gesammtmasse $M = \frac{G}{g}$ des Systems vereinigt, $ac = ds$ sei das Wegelement, welches der Schwingungspunkt bei der Drehung durchläuft $ab = dh$ sei das Wegelement in der Richtung der Schwere, so folgt aus § 52, wenn wir unter f das Aenderungsmaaſs in der Richtung ac verstehen:

$$f \,.\, M \,.\, ds = M \,.\, g \,.\, dh; \quad f = g \,.\, \frac{dh}{ds} = g \,.\, \sin\varphi.$$



Bezeichnet c die Peripheriegeschwindigkeit des Schwingungspunktes, so ist $c = w \,.\, r = f \,.\, dt$, und wenn wir unter f' das Aenderungsmaaſs der Winkelgeschwindigkeit verstehen, so ist $w = f'\,dt$; wir haben also:

$$c = w \,.\, r = f \,.\, dt = f' \,.\, dt \,.\, r.$$

Daher

$$\text{I.} \quad f' = \frac{f}{r} = g \,.\, \frac{\sin\varphi}{r}.$$

Nun ist hier die Schwere als die auf das System angebrachte Kraft anzusehen, und daher das Moment des auf Drehung wirkenden Kräftepaars $\Sigma(dG \,.\, x)$, wenn $x = pq$ der Hebelsarm der in dem betrachteten Massenelement wirkenden Schwerkraft ist; bezeichnet $kl = X$ den Abstand des Schwerpunkts von der durch die Axe gelegten Vertikalebene, so ist nach Gleichung 144a), S. 154:

$$\Sigma(dG \,.\, x) = G \,.\, X$$

und da $X = kl = R \,.\, \sin\varphi$ ist, wenn wir unter R den Abstand qk des Schwerpunkts von der Drehaxe verstehen, so ist das auf Drehung wirkende Moment: $GR \,.\, \sin\varphi$. Substituiren wir für die auf das System angebrachten Kräfte, die in dem System thätigen Kräfte, so ist deren Moment nach Gleichung 145a) $f_{,} J_{,}$ und es ist nach dem Gesetz in § 86. No. 1 und nach Gleichung 154c) zu setzen:

$$G \,.\, R \,.\, \sin\varphi = f_{,} \,.\, J_{,}.$$

$$\text{II.} \quad f_{,} = \frac{G \,.\, R \,.\, \sin\varphi}{J_{,}}.$$

Da nun der Schwingungspunkt ein mit dem System fest verbundener Punkt ist, so hat er in jedem Augenblick dieselbe Winkelgeschwindigkeit, welche das System hat, es muſs daher auch das Aenderungsmaaſs der Winkelgeschwindigkeit des Schwingungspunkts f' gleich demjenigen der Winkelgeschwindigkeit sein, welche die auf das System angebrachten Kräfte bedingen, d. h. es ist zu setzen $f' = f_{,}$ oder

$$g \cdot \frac{\sin\varphi}{r} = \frac{G \cdot R \cdot \sin\varphi}{J_{,}},$$

da nun $\sin\varphi$ auf beiden Seiten der Gleichung identisch ist, insofern der Schwingungspunkt denselben Erbebungswinkel hat, wie der Schwerpunkt, weil beide auf demselben Radius liegen, so folgt der Abstand des Schwingungspunkts von der Drehaxe:

$$158)\quad r = \frac{gJ_{,}}{GR} = \frac{\gamma T_{,}}{GR} = \frac{T_{,}}{VR}$$

indem man nämlich für homogene Systeme setzt für $J_{,}$ nach Gleichung 146c) $\frac{\gamma}{g} \cdot T_{,}$ und für G den Werth γV, worin V das Volum und γ das Gewicht der Volumeinheit bezeichnet.

Setzt man nach Gleichung 147b) $J_{,} = \varrho_{,}^2 \cdot M$ und $G = gM$, so findet man auch den Abstand des Schwingungspunkts vom Drehpunkt:

$$158\text{a})\quad r = \frac{\varrho_{,}^2}{R} = \frac{\text{Quadrat des Drehungshalbmessers}}{\text{Abstand des Schwerpunkts}},$$

und folglich für ein Kreispendel bei geringen Ausschlägen nach Gleichung 190), S. 72 die Schwingungsdauer:

$$158\text{b})\quad T = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{J_{,}}{GR}\right)} = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{T_{,}}{gVR}\right)}$$
$$= \pi \varrho_{,} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{gR}\right)} = 0{,}5620 \cdot \frac{\varrho_{,}}{R} \cdot \sqrt{R}.$$

Der Punkt, in welchem die Axe durch die Ebene geschnitten wird, welche man normal zur Axe durch den Schwingungspunkt legen kann, heifst der Aufhängepunkt des körperlichen Pendels.

Denken wir, das System schwinge um eine andere fixe Axe, welche durch den eben bestimmten Schwingungspunkt geht, und mit der eben betrachteten Axe parallel ist, so dafs der eben ermittelte Schwingungspunkt nun Aufhängepunkt wird. Der Abstand des neuen Schwingungspunkts ist offenbar

$$r' = \frac{\varrho'^2_{,}}{R'}$$

wen $\varrho'_{,}$ den Drehungshalbmesser und R' den Abstand des Schwerpunkts von der neuen Drehaxe bezeichnet. Nun sei ϱ der Drehungshalbmesser für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, so ist, da der Abstand des Schwerpunkts von der ersten Axe R, und da offenbar $r = R + R'$ ist, nach Gleichung 150) und 158a)

$$r = \frac{\varrho^2 + R^2}{R} = R + R', \text{ daher}$$

$$159) \quad R' = \frac{\varrho^2}{R},$$

aufserdem ist offenbar nach derselben Gleichung und mit Benutzung des eben gefundenen Werths

$$r' = \frac{\varrho^2 + R'^2}{R'} = \frac{\varrho^2}{R'} + R' = R + R'$$

also

$$159a) \quad r' = r,$$

d. h. der Schwingungspunkt und der Aufhängepunkt eines festen Systems stehen in solcher Beziehung zu einander, dafs, wenn man den Schwingungspunkt zum Aufhängepunkt macht, und läfst das System um eine durch denselben gehende mit der vorigen parallele Axe schwingen, der frühere Aufhängepunkt nun Schwingungspunkt wird.

Aufserdem folgt aus der Gleichung 159) noch

$$R' \cdot R = \varrho^2,$$

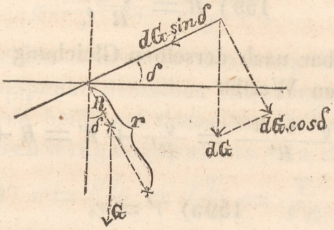
d. h. das Quadrat des Drehungshalbmessers für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe ist gleich dem Produkt aus den Abständen des Schwerpunkts von dem Aufhängepunkt und von dem Schwingungspunkt.

Da nun ferner ϱ^2, d. i. das Quadrat des Drehungshalbmessers für eine bestimmte durch den Schwerpunkt gehende Axe ein konstanter Werth ist, so folgt, dafs auch $R . R'$ ein konstanter Werth ist, und folglich liegt hierin das Gesetz:

> Wenn man in einem festen System beliebig viele horizontale und unter sich parallele Axen denkt, und man denkt für jede Axe den entsprechenden Schwingungspunkt, so ist das Produkt aus dem Abstande des Schwerpunktes von einer beliebigen Axe, und aus dem Abstande des Schwerpunkts von dem zu dieser Axe gehörigen Schwingungspunkte für alle parallelen Axen ein konstanter Werth, und gleich dem Quadrat des Drehungshalbmessers für eine durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe.

Wir haben bis jetzt die Schwingungen eines Systems um eine horizontale Axe betrachtet; nehmen wir nunmehr an, die fixe

Axe sei nicht horizontal, sondern bilde mit der Horizontalen den Winkel δ.



Offenbar lassen sich nun die in den einzelnen Massenelementen wirksamen Drucke der Schwerkraft zerlegen in zwei andere, von denen die einen $dG . \sin\delta$ durch den Widerstand der fixen Punkte aufgehoben werden, die andere $dG . \cos\delta$ aber als lauter gleich grofse in den einzelnen Massenelementen wirksame und konstant wirkende Drucke zu betrachten sind. Wir werden für diese Drucke genau dieselben Betrachtungen anstellen können, die wir zu Anfange dieses Paragraphen für die Drucke angestellt haben, die parallel mit der Schwerkraft waren, und es werden offenbar überall dieselben Resultate gefunden werden, wenn wir nur überall für das Aenderungsmaafs der Schwere g jetzt das Aenderungsmaafs $g . \cos\delta$ einführen. Wir finden dann nach I. und II. (S. 179):

$$f' = g . \cos\delta . \frac{\sin\varphi}{r_0} \qquad f_{,} = \frac{G . \cos\delta . R_0 . \sin\varphi}{J_{,}}$$

worin r_0 den kürzesten Abstand des Schwingungspunkts von der geneigten Drehungsaxe, R_0 den kürzesten Abstand des Schwerpunkts von derselben Axe $J_{,}$ das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe Axe bezeichnet. Durch Gleichsetzung beider Werthe findet man wieder wie in Gleichung 158 und 158a):

$$160)\quad r_0 = \frac{gJ_{,}}{GR_0} = \frac{\gamma T_{,}}{GR_0} = \frac{T_{,}}{VR_0} = \frac{\varrho_{,}^2}{R_0}$$

worin unter r_0 der Abstand eines Punkts von der Drehaxe, der auf der kürzesten Entfernung des Schwerpunkts von der Drehaxe liegt, verstanden ist, welcher, wenn die Gesammtmasse des Systems in demselben vereinigt wäre, mit dem System dieselbe Schwingungsdauer hätte, dieselbe Reaktion in den fixen Punkten hervorrufen, auch mit dem System gleichzeitig die stabile Gleichgewichtslage passiren würde. Die Schwingungsdauer eines solchen Systems findet sich leicht durch Gleichung 90) S. 72, wenn man für g den Werth $g . \cos\delta$ setzt:

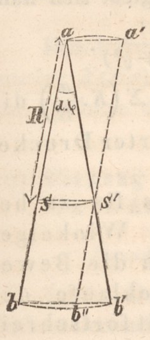
$$160\text{a)}\quad T = \pi \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{g \cdot \cos\delta}\right)} = 0{,}5620 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{\cos\delta}\right)}.$$

Man sieht aus Gleichung 158) und 160), dafs wenn die fixe Axe durch den Schwerpunkt geht, wenn also $R = 0$, oder $R_0 = 0$ ist, der Abstand des Schwingungspunktes und auch die Schwingungsdauer unendlich grofs sein müfste, d. h. dafs ein solches System überhaupt nicht schwingt, ebenso folgt aus Gleichung 160a) dafs wenn $\delta = 90^0$ ist, d. h. wenn die Schwingungsaxe vertikal ist, ebenfalls die Schwingungsdauer unendlich grofs sein müfste, d. h. dafs in diesem Fall keine Pendelschwingungen statt finden können.

Uebrigens gelten, wie leicht zu übersehen ist, die Gesetze der Gleichungen 159 und 159a) auch für geneigte Axen.

Zurückführung eines festen Systems mit fixen Punkten auf ein freies System.

§ 91. Denken wir ein festes System, welches um einen fixen Punkt oder um eine fixe Axe rotirt, und stellen wir uns vor, dafs wir in jedem Augenblicke die Reaktionen (§ 79, S. 144) kennen, welche in den fixen Punkten statt finden müssen, um dieselben als fixe Punkte zu konstituiren. Wenn wir nun das System als freies System betrachten, und wir denken in den Punkten, die wir bisher als fixe Punkte angesehen haben, Kräfte auf das System angebracht, deren Angriffspunkte diese Punkte sind, und die in jedem Augenblick der Richtung und Gröfse nach gleich jenen Reaktionen sind, so mufs offenbar das System genau dieselbe Bewegung haben, die es als System mit fixen Punkten hatte. Es wird sich durch diese Betrachtungsweise jedes System mit fixen Punkten auf ein freies System zurückführen lassen.



Da aber jedes freie System sich so bewegt, als habe der Schwerpunkt eine fortschreitende Bewegung, und als rotirten alle Massenelemente mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht, so mufs dieses Gesetz der obigen Darstellung zufolge auch für ein System mit fixen Punkten gelten. Dafs dem so sei, läfst sich durch folgende Betrachtung veranschaulichen. Es sei a ein fixer Punkt des Systems, S der Schwerpunkt, R der Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, b sei ein beliebiges Massenelement, w die Winkelgeschwindigkeit, und es sei in irgend einem Zeitelement das System aus der Lage aSb durch Drehung um den Winkel $d\varphi$ in die Lage $aS'b'$ gekommen, durch Rotation um den den Punkt a; es läſst sich nun zufolge des Grundsatzes § 24 (S. 29) die Bewegung auch so betrachten, als ob das System in diesem Zeitelement sich so bewegt hätte, daſs zuerst der Schwerpunkt und alle Massenelemente gemeinschaftlich um gleiche und parallele Wegstücken fortgeschritten wären, und daſs dann alle Massenelemente um eine Drehaxe, die parallel mit der Axe durch den fixen Punkt ist, und durch den Schwerpunkt geht, sich um den Winkel $d\varphi$ gedreht hätten, wodurch dann der Punkt a' wieder in den Punkt a, und der Punkt b'' in den Punkt b' rücken, und folglich das System die Lage $aS'b'$, die es auch durch Rotation um die fixe Axe erlangt hat, annehmen würde. Es ist hierbei wieder gleichgiltig, in welcher Reihenfolge wir diese beiden Bewegungen uns vorstellen; jedenfalls finden aber beide Bewegungen während der Dauer desselben Zeitelements dt statt, in dessen Verlauf auch die Drehung um den Punkt a statt finden kann. Hieraus folgt:

1) Die Drehung um die Axe durch den Schwerpunkt muſs man so ansehen, als ob sie mit derselben Winkelgeschwindigkeit erfolgt, wie die Drehung um den fixen Punkt, wie dies durch eine einfache Betrachtung der Figur sich zeigen läſst.

2) Die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunkts ist offenbar gleich der Geschwindigkeit, mit welcher der Schwerpunkt das Bogenelement SS' durchläuft, d. i. gleich wR, folglich ist das Aenderungsmaaſs der fortschreitenden Bewegung $f = f_{\prime}R$, wenn $f_{\prime}$ das Aenderungsmaaſs der Winkelgeschwindigkeit ist.

Mit Anwendung der Gleichung 154c) und 149) ergiebt sich nun:

$$161)\quad f = f_{\prime}R = \frac{\Sigma(Ka)}{J_{\prime}} \cdot R = \frac{\Sigma(Ka)}{R\,.\,M} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + \varrho^2)} \cdot$$

Nach Gleichung 139) (S. 137) ist $\frac{\Sigma(Ka)}{R} = \Sigma\left(K.\frac{a}{R}\right)$ die Summe sämmtlicher auf den Abstand R reduzirter Drucke; hierin liegt folgender Satz:

Wenn ein festes System um eine als fix zu betrachtende Axe mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit w rotirt, so läſst sich die Bewegung auch so betrachten, als durchlaufe der Schwerpunkt in jedem Zeitelement mit fortschreitender Bewegung ein Wegelement, das normal ist zu dem kürzesten Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe, während gleichzeitig sämmtliche Massenelemente um eine durch den Schwerpunkt gehende, mit der fixen Axe parallele Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit w rotiren. Das Aenderungsmaafs jener fortschreitenden Bewegung drückt sich aus durch die Summe aller auf den Abstand des Schwerpunkts reduzirten Drucke, dividirt durch die Masse und multiplizirt mit dem Verhältnifs des Quadrats des kürzesten Abstandes des Schwerpunkts von der fixen Axe zur Summe dieses Quadrates und dem Quadrat des Drehungshalbmessers für die durch den Schwerpunkt gedachte Axe.

Aus der Gleichung 161) folgt, dafs der Druck, der im Schwerpunkt auf fortschreitende Bewegung wirkt, und welcher durch die Reaktion im fixen Punkte aufgehoben werden mufs, indem er mit dieser Reaktion ein Kräftepaar bildet, sich ausdrückt durch:

$$161\text{a})\quad K = fM = \frac{\Sigma(Ka)}{R} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + \varrho^2)}\,.$$

Endlich ist das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung des Schwerpunkts um den fixen Punkt wirkt

$$161\text{b})\quad K \,.\, R = \Sigma(Ka) \cdot \frac{R^2}{R^2 + \varrho^2}$$

und das Moment des Kräftepaars, welches auf Drehung um die durch den Schwerpunkt gehende parallele Axe wirkt, nach Gleichung 145a) und 161):

$$161\text{c})\quad f_{\prime}J = \frac{\Sigma(Ka)}{J_{\prime}} \,.\, J = \Sigma(Ka)\,\frac{\varrho^2}{R^2 + \varrho^2}\,.$$

Durch Addition der Gleichungen 161b) und 161c) ergiebt sich wieder $\Sigma(Ka)$ als die Summe der Momente der Kräftepaare in der zur Drehaxe des Systems normalen Ebene.

d) Wirkung fester Systeme, die von mechanischen Kräften in Anspruch genommen werden, auf einander.

Grundsätze für die Wirkung fester Systeme auf einander.

§ 92. Denken wir zunächst zwei feste Systeme (§ 63) von Massenelementen, so können dieselben sich entweder berühren oder nicht. Berühren sich die festen Systeme, so mufs die Berührung wenigstens in einem Massenelement statt finden, sie kann auch in mehren zugleich erfolgen; in beiden Fällen können wir die sich berührenden Massenelemente als Flächenelemente ansehen, und es wird immer eine beiden gemeinschaftliche Normale denkbar sein. Wenn die beiden Systeme sich nicht berühren, so können sie entweder ihren Abstand von einander gar nicht ändern, oder sie können denselben vergröfsern oder vermindern. Wenn diese Verminderung des Abstandes dauernd erfolgt, oder wenn doch die Verminderung des Abstandes überwiegend ist, gegen die etwa inzwischen eintretende Vergröfserung desselben, so müssen sich die festen Systeme endlich treffen, d. h. es mufs endlich ihr Abstand Null werden, sie müssen endlich sich berühren, und dann ist wieder in jedem Berührungselement eine gemeinschaftliche Normale denkbar.

Wenn die festen Systeme sich nicht berühren, so findet erfahrungsmäfsig gleichwohl eine Einwirkung der einzelnen Massenelemente aufeinander statt (vergl. § 18. S. 20). Diese Art der Einwirkung, welche Folge der allgemeinen Gravitation ist, lassen wir einstweilen ganz aufser Betracht, da sie für die vorliegenden Zwecke, wo wir es immer nur mit Systemen zu thun haben, die verhältnifsmäfsig eine sehr geringe Zahl von Massenelementen besitzen, nur von fast ganz verschwindender Bedeutung ist. Hat man dagegen mit so ausgedehnten Systemen zu thun, wie sie durch ganze Himmelskörper dargestellt werden, so ist allerdings die eben angedeutete Einwirkung dieser Systeme aus der Ferne auf einander von der gröfsten Bedeutung.

Nach der eben vorgetragenen Darstellung haben wir hier nur den Fall zu betrachten, wo sich die beiden festen Systeme berühren; sei es nun, dafs diese Berührung von Hause aus stattgefunden hat, oder dafs sie erst entstanden ist, indem die festen Systeme einander trafen. In beiden Fällen beurtheilen wir die Wirkung der beiden Systeme auf einander nach folgenden Grundsätzen:

Wenn sich zwei feste Systeme berühren, so sind entweder Kräfte vorhanden, welche eine Trennung beider Systeme herbeiführen, oder es sind solche Kräfte nicht vorhanden, und dann bleiben die beiden Systeme während der Dauer der Betrachtung in Berührung. Dieser letzte Fall ist es, den wir hier zunächst voraussetzen.

Die beiden festen Systeme mögen sich während der Dauer der Betrachtung nicht trennen; sie können dabei gleichwohl ihre Berührungspunkte ändern. Hierbei ist es denkbar, dafs sich beide Systeme bewegen, oder, dafs sich nur eines von beiden bewegt. Wenn sich nur eines von beiden Systemen bewegt, das andere aber nicht, so nennen wir dieses das fixe System, das erste das bewegliche System.

Bewegen sich dagegen beide Systeme, indem sie dabei zugleich ihre Berührungspunkte ändern, so können wir im Sinne des Grundsatzes in § 24. No. 1 diese beiden gleichzeitigen Bewegungen immer so auffassen, als ob sie innerhalb der Dauer desselben Zeitelementes nach einander erfolgten, indem wir nämlich annehmen, dafs zuerst beide Systeme nach entsprechenden Richtungen gemeinschaftlich sich bewegen ohne ihre Berührungspunkte zu ändern, und dafs dann das eine System still stände, und das andere sich so bewege, dafs nun die Aenderung der Berührungspunkte erfolge. Es werden durch eine solche Betrachtung die Bewegungen zurückgeführt auf die Bewegung eines zusammenhängenden Gesammtsystems, und auf die Bewegung eines beweglichen Systems gegen ein fixes System.

Hierzu dienen folgende Untersuchungen. Die beiden Systeme werden mit I und II bezeichnet; wir betrachten zunächst alle Bewegungen des Systems II, und nehmen an, dafs das System I sich mit dem System II gemeinschaftlich bewege, ohne dafs die Berührungspunkte sich ändern; dann betrachten wir das System II als fixes System, und untersuchen, welche Bewegungen nun noch das System I. machen müsse, um die bedingte Aenderung der Berührungspunkte herbeizuführen.

Wenn das System II sich bewegt, so hat es im Allgemeinen eine fortschreitende Bewegung und eine drehende Bewegung um irgend eine Axe; soll nun das System I sich nicht von dem System II trennen, und auch die Berührungspunkte nicht ändern, so mufs es sich mit derselben Geschwindigkeit nach derselben Richtung fortschreitend bewegen, und auch mit derselben Winkelgeschwindigkeit um dieselbe Axe rotiren.

Es seien:

K^{I} und K^{II} die Summen der Komponenten der auf die beiden Systeme wirkenden Kräfte für die Richtung der fortschreitenden Bewegung des Systems II.

M^{I} und M^{II} die Massen der beiden Systeme.

f^{I} und f^{II} die Aenderungsmaafse der Geschwindigkeiten, welche die Kräfte K^{I} und K^{II} der Masse M^{I} und M^{II} zu ertheilen streben.

$(Pa)^I$ und $(Pa)^{II}$ die statischen Momente der auf die beiden Systeme wirkenden Kräfte in Bezug auf Drehung um die Axe, um welche sich das System wirklich dreht.

$f_{,}^{I}$ und $f_{,}^{II}$ die Aenderungsmaafse der Winkelgeschwindigkeiten für dieselbe Axe.

$J_{,}^{I}$ und $J_{,}^{II}$ die Trägheitsmomente der beiden Systeme in Bezug auf dieselbe Axe. Nach dem Früheren finden die Beziehungen statt:

$$K^I = M^I . f^I;\ K^I = M^{II} . f^{II};\ (Pa)^I = J_{,}^{I} . f_{,}^{I};\ (Pa)^{II} = J_{,}^{II} . f_{,}^{II}.$$

Indem nun das System I den Bewegungen des Systems II genau folgt, so als ob beide ein System bilden, bewegt es sich mit Geschwindigkeiten, deren Aenderungsmaafse gleich denen des Systems II sind, nämlich gleich f^{II} und $f_{,}^{II}$. Die auf das System I wirkenden Kräfte haben aber das Bestreben, dem System I die Aenderungsmaafse f^I und $f_{,}^{I}$ zu ertheilen, es wird also indem sich beide Systeme gemeinschaftlich bewegen in dem System I noch ein Bestreben auf Bewegung bleiben, dem während der Dauer dieser gemeinschaftlichen Bewegung nicht Genüge gethan ist, und welchem, wenn das System I nach Vollendung jener gemeinschaftlichen Bewegungen frei wird, noch die Aenderungsmaafse $(f^I - f^{II})$ beziehlich $(f_{,}^{I} - f_{,}^{II})$ in dem System I entsprechen würden. Diesem auf die Masse M^I wirkenden Bestreben auf Bewegung entspricht nach § 19. S. 23 ein Druck, und ein statisches Moment, welches wir mit K, beziehlich mit (Pa) bezeichnen wollen, und es ist:

$$162)\quad \begin{cases} K = M^I . (f_{,}^{I} - f_{,}^{II}) = K^I - \dfrac{M^I}{M^{II}} . K^{II} \\ (Pa) = J_{,}^{I} . (f^I - f^{II}) = (Pa) - \dfrac{J_{,}^{I}}{J_{,}^{II}} . (Pa)^{II}. \end{cases}$$

Die Komponenten der Kräfte, welche auf das System I wirken für Richtungen, die zu der Bewegungsrichtung des Systems II normal sind, bleiben dabei ungeändert, ebenso die Kräftepaare für Axen, die zu der Drehaxe des Systems II normal sind.

I. Hieraus folgt, dafs, wenn beide Systeme sich bewegen, man das eine von beiden immer als fixes System betrachten kann, das andere als bewegliches System, indem man vorher oder nachher die Bewegungen untersucht, welche das bewegliche System mit dem fixen gemeinschaftlich macht. Die Summe der Drucke und das Kräftepaar, welches bei jener Betrachtung auf das bewegliche System und zwar parallel mit der Richtung der Bewegung des als fix betrachteten Systems wirkend zu denken sind, bestimmen sich nach Gleichung 162), wobei namentlich die Vorzeichen bei der Bildung der algebraischen Summen zu beachten sind.

Wenn beide Systeme fallen, und es wirken in der Richtnng der Schwere keine andern Kräfte auf die einzelnen Systeme, so ist das Aenderungsmaafs $f^{I} = g$ und $f^{II} = g$, folglich $K = 0$. d. h.

II. Wenn zwei Systeme sich berühren und frei fallen, so ist der aus der Schwere hervorgehende Druck, mit welchem das eine System gegen das andere geprefst wird gleich Null.

Nehmen wir an, dafs das zweite System mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegt. Die gleichförmige Bewegung bedingt nach § 14. S. 16, dafs die Kräfte, welche auf das zweite System angebracht sind, für die Richtung der Bewegung im Gleichgewicht seien, d. h. dafs K^{II} gleich Null sei. In diesem Falle ist auch f^{II} gleich Null, und wenn wir eine drehende Bewegung betrachten, so mufs für eine gleichförmige Winkelgeschwindigkeit auch das Aenderungsmaafs derselben $f_{I}^{II} = 0$ sein. Für diesen Fall nun gehen die Gleichungen 162) über in

$$162\text{a}) \quad K = K^{I}; \quad (Pa) = (Pa)^{I}.$$

III. d. h. Wenn zwei feste Systeme die sich berühren sich gleichzeitig bewegen, und das eine von beiden bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitend oder mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit drehend um eine Axe, so bleibt sowohl die Summe der Komponenten des Druckes der auf das andere System angebrachten Kräfte für diese Richtung, als auch das resultirende Kräftepaar des andern Systems für diese Drehaxe ungeändert.

Nach dem Inhalt dieses Paragraphen läfst sich die Bewegung zweier festen Systeme, die sich berühren im Allgemeinen auf zwei Bewegungen zurückführen, von denen wir die eine, welche beide Systeme gemeinschaftlich haben die gemeinschaftliche Bewegung, die andere dagegen, welche eine Aenderung der Berührungspunkte der beiden Systeme zur Folge hat, die Verschiebung nennen wollen. Ebenso folgt aus den vorigen Untersuchungen, dafs bei der Betrachtung der Verschiebung wir immer das eine von beiden Systemen als fixes, das andere als bewegliches System ansehen können.

Die Berührungspunkte der beiden Systeme sind immer als Punkte zu betrachten, die sowohl dem einen System, wie dem andern

System angehören. Diese Punkte werden aber je nachdem man sie zu dem einen System oder zu dem andern System gehörend betrachtet, verschiedene Wege durchlaufen. Die ursprünglichen Berührungspunkte des als fix betrachteten Systems werden nur Wege durchlaufen, welche der gemeinschaftlichen Bewegung entsprechen; die Berührungspunkte des beweglichen Systems dagegen werden gleichzeitig die Wege beschreiben, die aus der gemeinschaftlichen Bewegung hervorgehen, und diejenigen, welche durch die Verschiebung bedingt werden, sie werden also sich nach einer resultirenden Richtung bewegen, deren Komponenten jene Einzelwege sind. Wir nennen die resultirenden Bewegung, welche diese Punkte jenen beiden Komponenten zufolge machen, die absolute Bewegung der Berührungspunkte des beweglichen Systems.

Nach diesen Auseinandersetzungen haben wir nun folgende Dispositionen; wir handeln:

1) von der Verschiebung,
2) von der gemeinschaftlichen Bewegung,
3) von der absoluten Bewegung.

Von der Verschiebung zweier festen Systeme.

Gesetz über die Möglichkeit der Verschiebung; Kippen, Gleiten.

§ 93. Indem wir von zwei festen Systemen eins als fixes System, das andere als bewegliches System betrachten, setzen wir voraus, dafs beide Systeme stets in Berührung bleiben sollen (§ 92), dafs aber gleichwohl eine Aenderung der Berührungspunkte statt finden kann. Untersuchen wir zunächst, wie diese Aenderung der Berührungspunkte beschaffen sein kann.

Indem sich die Berührungspunkte ändern, bewegt sich das bewegliche System, und da wir wissen, dafs jede Bewegung eines festen Systems sich auf eine fortschreitende und auf eine drehende zurückführen läfst, so wird auch bei der Verschiebung des beweglichen Systems dasselbe entweder fortschreitend sich bewegen, oder drehend, oder beides zugleich.

Wenn das bewegliche System sich fortschreitend verschiebt, so durchlaufen alle Punkte desselben, folglich auch die Berührungspunkte gleich grofse und parallele Wegelemente (§ 65. S. 88). Wenn dagegen das bewegliche System sich drehend verschiebt, so beschreiben die Berührungspunkte im Allgemeinen Kreisbögen um eine gemeinschaftliche Axe.

Wie nun auch die Verschiebung beschaffen sein mag, ob sie fortschreitend oder drehend erfolgt, so dürfen doch niemals die Wegelemente, welche die Berührungspunkte des beweglichen Systems beschreiben, innerhalb des festen Systems fallen denn in diesem Falle würde das bewegliche System entweder in das fixe System eindringen, oder dasselbe verdrängen müssen, beides widerspricht den Voraussetzungen. Es müssen also die von dem Berührungspunkt des **beweglichen Systems** beschriebenen Wegelemente entweder das fixe System in jedem Augenblick **berühren**, oder, wenn sie das fixe System schneiden, sich von demselben **abheben.**

Eine Verschiebung, bei welcher alle Berührungspunkte Wegelemente beschreiben, die sich von dem fixen System abheben würde das bewegliche System zu einem freien machen, und der Bedingung widersprechen, dafs die beiden Systeme sich nicht trennen dürfen. Es ist aber denkbar, dafs eine Anzahl von Berührungspunkten sich von dem fixen System abhebt, während gewisse andere Berührungspunkte mit dem fixen System im Zusammenhange bleiben. Diese eigenthümliche Art der Verschiebung erfolgt immer, wenn das bewegliche System eine Drehung macht um eine Axe, die durch einen der Berührungspunkte geht, und beide Systeme berührt. Die Berührungspunkte, welche in dieser Axe liegen, bleiben bei der Drehung des beweglichen Systems unbewegt, folglich in Berührung mit dem fixen System, die übrigen Berührungspunkte beschreiben Bogenelemente in Ebenen normal zu dieser berührenden Axe, welche also im Allgemeinen das fixe System schneiden, und welche daher, wenn die angegebene Drehung wirklich erfolgt, von dem fixen System sich abheben müssen. Wir nennen eine Drehung des beweglichen Systems um eine Axe die beide Systeme berührt, während alle andern Berührungspunkte des beweglichen Systems, die nicht in diese Axe liegen sich von dem fixen System abheben: „**Kippen.**“

Bewegt sich dagegen das bewegliche System so, dafs alle Berührungspunkte Wegelemente beschreiben, die das fixe System berühren, so nennen wir die Verschiebnng der Berührungspunkte: „**Gleiten.**“ Nach dem Obigen wird es ohne Weiteres verständlich sein, wenn wir unterscheiden „fortschreitendes Gleiten“ und „drehendes Gleiten.“

Grundgesetze über die Widerstände der Verschiebung; Reibungswiderstände.

§ 94. Wenn zwei feste Systeme sich berühren, so wird es von der Form der Berührungsflächen abhängen, ob eine Verschiebung überhaupt möglich ist, und wenn dies der Fall ist, in welchem Sinne und nach welchen Richtungen Verschiebung erfolgen kann. In den meisten Fällen liegt es, auch ohne besondere Untersuchung, nahe, ob und welche Möglichkeit der Verschiebung vorhanden ist, in andern Fällen bedarf es zur Feststellung dieser Möglichkeit einer besondern Betrachtung, für welche das im vorigen Paragraphen ausgesprochene Gesetz einen Anhalt bietet.

Wenn sich zwei feste Systeme, von denen eins als fixes System betrachtet werden kann, berühren, und es ist für gewisse Richtungen die Möglichkeit der fortschreitenden Verschiebung, oder für gewisse Drehaxen die Möglichkeit der drehenden Verschiebung **nicht** vorhanden, so müssen alle auf das System angebrachten Kräfte welche auf Fortschreiten nach dieser Richtung wirken, beziehlich sämmtliche Kräftepaare, welche auf Drehung um diese Axe wirken, im Gleichgewicht sein.

Ergiebt sich nun dieses Gleichgewicht nicht schon aus den auf das bewegliche System angebrachten Kräften, so mufs dasselbe durch den Widerstand des fixen Systems hergestellt werden.

Hieraus folgt, dafs das fixe System nach jeder Richtung, für welche die Möglichkeit des Verschiebens nicht statt findet, einen Widerstand leistet, welcher der Resultirenden aus allen Drucken, die auf Verschieben nach dieser Richtung wirken, gleich und entgegengesetzt ist.

Die Richtigkeit dieser Gesetze erhellt aus den Grundprinzipien der ganzen Mechanik, dafs nämlich eine Kraft, die nicht Bewegung erzeugt, nur durch eine gleich grofse und entgegengesetzt wirkende Gegenkraft aufgehoben werden könne.

Jede Kraft, die durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben wird, äufsert das Bestreben das bewegliche System in das fixe System einzudrängen. Aus diesem Bestreben geht erfahrungsmäfsig ein Widerstand hervor, der jeder Verschiebung in einer Ebene, die normal zu der Richtung jener Kraft ist, widerstrebt. Diesen Widerstand nennen wir den Reibungswiderstand.

Die Reibungswiderstände erscheinen hiernach als eine neue Gruppe von Kräften, die sich der Verschiebung des beweglichen

Systems entgegensetzen. Sie sind verschieden von den auf das bewegliche System angebrachten Kräften, obwohl sie von denselben abhängig sind, und erscheinen daher auch als neue auf das System angebrachte Kräfte; aber da sie immer nur der Verschiebung entgegenwirken, niemals selbst eine Verschiebung bewirken können, so nennt man sie auch passive Widerstände, im Gegensatz zu den auf das System ursprünglich angebrachten Kräften, die man die bewegenden Kräfte des Systems nennt.

Ueber die Wirkung dieser eigenthümlichen Kräfte stellen wir folgende Prinzipien auf:

1) Die Reibungswiderstände erscheinen immer als Drucke, die der Verschiebung des beweglichen Systems entgegenwirken, und da sie niemals selbst Bewegung erzeugen können, so findet keine Verschiebung statt, sobald die Reibungswiderstände gleich, oder gröfser sind, als der auf Verschiebung wirkende resultirende Druck der bewegenden Kräfte, oder sobald ihr statisches Moment gleich oder gröfser ist, als das auf Drehung um eine gegebene Axe wirkende statische Moment der bewegenden Kräfte;

2) die Angriffspunkte der Reibungswiderstände sind stets die Berührungspunkte der beiden Systeme;

3) die Gröfse der Reibungswiderstände ist immer abhängig von der Gröfse derjenigen Komponenten der in den Berührungspunkten wirkenden Drucke, welche durch den Widerstand des festen Systems aufgehoben werden. Wir nennen daher diese Komponenten „Reibung erzeugende Drucke";

4) die Richtung der Reibungswiderstände liegt stets in einer Ebene, die normal zu der Richtung der Reibung erzeugenden Drucke ist. In dieser Ebene kann der Reibungswiderstand jede beliebige Lage haben, doch immer so, dafs, wenn man den Reibungswiderstand zerlegt nach der Richtung, in welcher Verschiebung erfolgt, und normal dazu, die Komponente für die erstgenannte Richtung direkt entgegengesetzt ist der Richtung in welcher Verschiebung erfolgt.

Diese beiden zuletzt aufgestellten Grundsätze sind wohl zu beachten; sie sind verschieden von den bisher üblichen Annahmen; sie erklären aber die Erscheinungen der Reibung vollständig, lassen sich mit allen über die Reibung bestehenden Erfahrungen vereinigen, und führen bei ihrer Anwendung nicht zu Widersprüchen mit andern mechanischen Gesetzen, wie dies der Fall ist, wenn man die Reibungswiderstände ganz allein von den Normaldrucken abhängig macht.

Das Vorhandensein der Widerstände der Reibung ist nicht durch die Voraussetzungen herzuleiten, die wir ganz allgemein über die Wirkung der Kräfte aufgestellt haben; es ist uns nur durch die Erfahrung bekannt. Die Gröfse dieser Widerstände, und die Gesetze ihrer Abhängigkeit sind daher nur durch die Erfahrung festzustellen. Sobald wir aber diese Gesetze kennen, d. h. sobald wir die Gröfse und Eigenschaften dieser Kräfte selbst kennen, werden wir sie den allgemein festgestellten Gesetzen über die Wirkung der Kräfte vollständig unterwerfen können.

Die wichtigsten Versuche über die Reibung sind von Amontons, Coulomb, Vince, G. Rennie, N. Wood, und zuletzt von Morin angestellt worden. Alle diese Versuche haben einen Unterschied in der Reibung herausgestellt, zwischen dem Fall, wo längere Zeit dieselben Punkte beider Systeme in Berührung waren, und es darauf ankam die Verschiebung zu beginnen, und dem Fall, wo die Verschiebung bereits eingetreten war, und fortgesetzt werden sollte. Den ersten Fall bezeichnet man als die Reibung der Ruhe, und den andern als die Reibung der Bewegung.

Die Gesetze der Reibung sind sämmtlich unter folgenden Voraussetzungen ermittelt worden, und gelten folglich auch nur unter diesen Voraussetzungen:

a) dafs die Oberflächen der sich berührenden festen Systeme (Körper) einen gewissen Grad von Glätte und Regelmäfsigkeit besitzen;
b) dafs die Körper sich durch die Bewegung selbst nicht beträchtlich erwärmen;
c) dafs die Oberflächen der Körper durch die Bewegung keine irgend merkliche Abnutzung und Formveränderung erleiden.

Erfahrungsresultate über die Reibung des Gleitens.

§ 95. Die von Morin gemachten Versuche (§ 93. und 94.) über die Reibung des Gleitens (gleitende Reibung) haben folgende Gesetze theils bestätigt, theils herausgestellt:

1) Beziehung zwischen der Reibung der Ruhe und der Reibung der Bewegung.

Die gleitende Reibung der Ruhe ist denselben Gesetzen unterworfen, wie die Reibung der Bewegung, sie ist aber in den meisten praktischen Fällen mit viel geringerer Sicherheit zu bestimmen. Unter denselben Umständen ist die Reibung der Ruhe gröfser, als die Reibung der Bewegung. Jene Unsicherheiten werden für die Praxis in vielen Fällen wenig erheblich durch die Beobachtung Morins, dafs eine geringe Erschütterung der Berührungspunkte des einen Systems, also ein sehr geringer Stofs, im Stande ist, die Reibung der Ruhe in diejenige der Bewegung umzuwandeln. Diese Bemerkung veranlafst, dafs man bei allen Konstruktionen, bei welchen die Reibung vermöge ihres Widerstandes die Stabilität mit bewirkt, und bei denen Erschütterungen zu befürchten sind, die Reibung der Bewegung in die Rechnung einführen mufs.

2) Beziehung zwischen dem Reibungswiderstande und dem Reibung erzeugenden Druck.

Der Werth der gleitenden Reibung ist proportional dem Reibung erzeugenden Druck zwischen beiden Systemen. Das Verhältnifs zwischen dem Werth der Reibung Θ und dem Reibung erzeugenden Druck N nennt man den Reibungs-Koeffizienten; wir bezeichnen künftig den Reibungs-Koeffizienten stets mit μ, und es ist:

$$163)\quad \begin{cases} \mu = \dfrac{\Theta}{N} \\ \Theta = \mu \,.\, N. \end{cases}$$

3) Beziehung zwischen dem Reibungs-Koeffizienten und der Anzahl der Berührungspunkte.

Der Reibungs-Koeffizient ist unabhängig von der Anzahl der Berührungspunkte, sobald sich der Reibung erzeugende Druck mit der Anzahl der Berührungspunkte nicht ändert. Dieses Gesetz erleidet jedoch eine Modifikation von der weiter unten die Rede sein wird, wenn die Zahl der Berührungspunkte (Gröfse der Reibungsfläche) im Verhältnifs zu dem Reibung erzeugenden Druck sehr klein, oder sehr grofs ist.

4) Beziehung zwischen dem Reibungs-Koeffizienten und dem Gesetz, nach welchem die Berührungspunkte aufeinander folgen.

Wenn die Berührungspunkte des einen Systems zwar fortwährend mit anderen Punkten des zweiten Systems in Berührung kommen, diese Punkte des zweiten Systems jedoch immer von Neuem und in einer stetigen Folge von den Punkten des ersten Systems in Anspruch genommen werden, wie dies bei der Drehung von Zapfen in Lagern der Fall ist, so ist der Reibungs-Koeffizient geringer, als bei der gewöhnlichen gleitenden Reibung. Man nennt die Reibung unter den angedeuteten Verhältnissen „Zapfenreibung"; sie erscheint nur als besonderer Fall des drehenden Gleitens, nicht als eine besondere Art der Reibung.

5) Beziehung zwischen dem Reibungs-Koeffizienten und der Geschwindigkeit der Verschiebung.

Der Reibungs-Koeffizient ist unabhängig von der Geschwindigkeit, nnd so lange als konstant anzusehen, so lange der Reibung erzeugende Druck und die Beschaffenheit der Oberflächen sich nicht ändert.

6) Beziehung zwischen dem Reibungs-Koeffizienten und der Beschaffenheit der Oberflächen.

Der Reibungs-Koeffizient ist abhängig von der Natur des Materials, aus welchem das feste System besteht, er ist aufserdem abhängig davon, ob eine schlüpfrige Substanz (Schmiere) zwischen den Berührungspunkten sich befindet, von welcher Art und Beschaffenheit diese Schmiere ist, und von der Menge, in welcher die Schmiere sich zwischen den Berührungspunkten befindet.

Hinsichtlich der Menge der Schmiere sind zwei Fälle zu unterscheiden: a) der Fall, wo die Berührungspunkte mit der Schmiere nur leicht abgerieben werden, und b) der Fall, wo in Folge einer gröfseren Menge und einer angemessenen Konsistenz der Schmiere sich fortwährend eine zusammenhängende Lage von Schmiere zwischen den Berührungspunkten der beiden Systeme befindet, so dafs durch diese Zwischenlage die Berührungsflächen vollständig getrennt sind. Dieser Fall setzt voraus, dafs der Reibung erzeugende Druck in jedem einzelnen Berührungspunkte hinreichend klein sei, um die Schmiere nicht herauszudrängen.

In dem unter a) gedachten Falle ist das Material, aus welchem jedes der beiden Systeme besteht, von wesentlichem Einflufs auf den Werth des Reibungs-Koeffizienten, und es folgen die Resultate der Morin'schen Versuche weiter unten.

In dem unter b) erwähnten Falle ist nach den Versuchen von Morin dagegen der Reibungs-Koeffizient viel mehr abhängig von der Natur der Schmiere, als von der Beschaffenheit des Materials. Morin erwähnt: dafs wenn eine zusammenhängende Lage von Schweinefett oder Baumöl zwischen die Berührungsflächen gebracht wird, der Reibungs-Koeffizient einen ziemlich konstanten Werth zwischen 0,07 und 0,08 behält, gleichviel, ob die reibenden Materialien Holz und Metall, Holz und Holz, oder Metall und Metall sind.

Denselben Reibungs-Koeffizienten fand Morin auch für Talgschmiere, mit Ausnahme des Falles, wo Eisen auf Eisen gleitet, wofür Morin den Reibungs-Koeffizienten im Mittel = 0,10 gefunden hat. Aufserdem empfiehlt Morin Talg, Seife und Graphit als die Schmieren, welche für Hölzer den geringsten Reibungs-Koeffizienten geben, wogegen Oel und Feuchtigkeit für Hölzer einen gröfsern Reibungs-Koeffizienten ergeben. Für Metalle geben Oel und Schweinefett den günstigsten Reibungs-Koeffizienten.

Unter den Resultaten, welche man hinsichtlich der Reibung von Flächen erhalten hat, zwischen denen durch die Zwischenlage einer fettigen Schicht eine vollkommene Trennung der Berührungspunkte bewirkt ist, herrscht nach dem Obigen eine grofse Uebereinstimmung; nicht so ist dies der Fall, wenn man verschiedene Grade der Fettigkeit, die zwischen den oben durch die Fälle a) und b) bezeichneten Grenzzuständen liegen, in Betracht zieht. Die Resultate der Untersuchungen weichen hier vielfach von einander ab, und Moseley *) meint, dafs dies weniger in dem verschiedenen Grade der Fettigkeit, als in dem verschiedenen Verhältnifs der Gröfse der reibenden Flächen zu dem Reibung erzeugenden Drucke, welcher bei den Versuchen obgewaltet hat, begründet sei, eine Ansicht, der wir vollkommen beistimmen. Denn es leuchtet ein, bemerkt Moseley, dafs einer jeden besonderen Art von Fett ein besonderer Druck auf die Flächeneinheit entsprechen mufs, bei welchem eine vollkommene Trennung der beiden Flächen durch die Zwischenlage einer zusammenhängenden Schicht dieses Fettes bewirkt wird, so dafs, wenn der Druck auf die Flächeneinheit jenen Werth überschreitet, die vollkommene Trennung nicht mehr erreicht werden kann, in welcher Fülle man auch die fettige Substanz verwenden mag. Der Druck auf die Flächeneinheit bei welchem noch eine Trennung der beiden Flächen durch die zwischenliegende Schicht des Fettes möglich ist, und der, wenn man ihn allmählich vergröfsert, ein allmähliches Herausdrängen der Schmiere zur Folge hat, ist offenbar von der Natur der Schmiere abhängig; es fehlen über die Bestimmung dieses Druckes noch die nöthigen Versuche, ebenso wie über die Werthe der Reibungs-Koeffizienten für verschiedene Abstufungen, in denen die Schmiere, durch Steigerung jenes Druk-

*) Die mechanischen Prinzipien der Ingenieurkunst nnd Architektur von Heinrich Moseley. Aus dem Englischen übersetzt und mit Erläuterungen versehen von H. Scheffler. I. S. 182.

kes allmählich herausgedrängt wird. Aber selbst wenn der Reibung erzeugende Druck noch kein Herausdrängen der Schmiere und dadurch eine Verminderung der Fettigkeit bedingt, ist es denkbar, dafs bei einer sehr grofsen Ausdehnung der Berührungsflächen der Zusammenhang der einzelnen Elemente der schmierenden Substanz unter einander der Verschiebung auf eine merkliche Weise entgegenwirkt, und daher die Reibung vermehrt, so dafs der Reibungs-Koeffizient bei demselben Reibung erzeugenden Drucke in diesem Falle mit der Berührungsfläche wachsen mufs.

In den beiden eben genannten Fällen, nämlich, wenn der Druck auf die Flächeneinheit entweder so grofs wird, dafs er anfängt die Schmiere herauszudrücken, oder wenn der Druck auf die Flächeneinheit so gering ist, dafs die Konsistenz der Schmiere einen merklichen Werth im Vergleich zu dem Reibung erzeugenden Drucke hat, erleidet hiernach das Gesetz No. 3 eine Modifikation. Es ist zu bemerken, dafs Morin seine Versuche nur mit verhältnifsmäfsig geringer Belastung für die Flächeneinheit (etwa 14 bis 20 Pfund auf den Quadratzoll) angestellt hat; Versuche von G. Rennie zeigen, dafs bei grofsen Belastungen auf die Flächeneinheit der Reibungs-Koeffizient der Ruhe wächst, und zwar so, dafs er bis zu einer gewissen Grenze des Druckes konstant bleibt, dann aber sehr schnell mit dem Druck pro Flächeneinheit zunimmt. Die Resultate der Versuche von Rennie sind weiter unten zusammengestellt; sie zeigen, dafs wenn der Normaldruck einen Werth erreicht, der sich demjenigen nähert, bei welchem die Flächen angegriffen werden, der Reibungs-Koeffizient bis über das Dreifache desjenigen wachsen kann, der bei geringem Drucke konstant ist.

Bestimmung des Reibung erzeugenden Druckes; und Vertheilung desselben.

§ 96. Nach § 95. No. 2 ist die Gröfse der Reibungswiderstände, die dem Gleiten des beweglichen Systems entgegenwirken, proportional den Reibung erzeugenden Drucken, und nach § 94. No. 3 sind die Reibung erzeugenden Drucke diejenigen Komponenten der auf das bewegliche System angebrachten Drucke, welche durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben werden.

Nach dem zweiten Grundsatze in § 94. mufs die Resultirende aus den Komponenten sämmtlicher Kräfte für jede Richtung, nach welcher kein Verschieben statt finden kann, durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben werden; es ist folglich diese Resultirende „der Reibung erzeugende Druck“ und der aus demselben entspringende Reibungswiderstand wirkt in einer Ebene die normal zur Richtung derselben (nach dem Gesetz No. 4 in § 94) ist. Es läſst sich hiernach immer leicht die Gröſse des ganzen Reibung erzeugenden Druckes bestimmen, allein es kommt bei der Bestimmung der statischen Momente der Reibungswiderstände häufig auch darauf an, festzustellen wie groſs der Reibung erzeugende Druck in jedem Elemente der Berührungsfläche sei, da nach § 94. No. 2 jeder Berührungspunkt als Angriffspunkt eines Reibungswiderstandes betrachtet werden kann. Hiernach wird es sich darum handeln, zu ermitteln, wie groſs der Druckantheil von dem gesammten Reibung erzeugenden Drucke sei, der auf jeden einzelnen Berührungspunkt gerechnet werden muſs.

Diese Druckantheile werden in den meisten praktischen Fällen kaum mit der nöthigen Richtigkeit und Schärfe zu bestimmen sein, sie werden bedingt durch die Elastizitätsverhältnisse der gedrückten Oberflächen, durch die Genauigkeit mit welcher die Gestalt dieser Oberflächen den absoluten geometrischen Formen nahe kommt, und durch die Lage der Angriffspunkte der auf das System angebrachten bewegenden Kräfte. Sehen wir, wie bei den vorliegenden Betrachtungen überall, von den Elastizitätsverhältnissen ab, nehmen wir gar keine Formveränderung als zulässig an, und betrachten wir also die beiden Systeme als absolut feste, so läſst sich für die Vertheilung des gesammten Reibung erzeugenden Druckes auf die einzelnen Berührungspunkte kein Gesetz herleiten, und es bleibt nur übrig in bestimmten Fällen darüber Hypothesen aufzustellen. In den meisten Fällen ist die Hypothese zulässig:

> daſs die Druckantheile, welche von dem gesammten Reibung erzeugenden Druck auf die einzelnen Berührungselemente treffen, sich verhalten wie die Projektionen der Berührungselemente auf eine Ebene, die normal ist zu dem Reibung erzeugenden Druck.

Es bezeichne:

λ, $\lambda_{\prime}$, $\lambda_{\prime\prime}$ die Winkel, welche die einzelnen Elemente der Berührungsfläche mit der Richtung des Reibung erzeugenden Druckes machen;

dF, $dF_{\prime}$, $dF_{\prime\prime}$ seien die Gröſsen der Flächenelemente;

$dA = dF \,.\, \sin\lambda$, $dA_{\prime} = dF_{\prime} \,.\, \sin\lambda_{\prime} \ldots$ seien die Gröſsen der Projektionen der Flächenelemente;

$A = \Sigma(dA) = \Sigma(dF \,.\, \sin\lambda)$ sei der Flächeninhalt der Projektion der sämmtlichen Elemente der Berührungsfläche auf eine Ebene, die normal ist zur Richtung des Reibung erzeugenden Druckes;

Q sei der gesammte Reibung erzeugende Druck, und

dQ, $dQ_{\prime}$, $dQ_{\prime\prime} \ldots$ die Druckantheile der Flächenelemente.

Nun hat man nach dem obigen Gesetz:

$$\Sigma(dQ) = Q = dQ + dQ_{\prime} + dQ_{\prime\prime} + \ldots$$

und nach der obigen Hypothese:

$$dQ : dQ_{\prime} : dQ_{\prime\prime} : \ldots = dA : dA_{\prime} : dA_{\prime\prime} : \ldots$$

folglich:

$$dQ : (dQ + dQ_{\prime} + dQ_{\prime\prime} + \ldots) = dA : (dA + dA_{\prime} + dA_{\prime\prime} + \ldots)$$

das ist:

$$164) \quad dQ = \frac{\Sigma(dQ)}{\Sigma(dA)} \,.\, dA = \frac{Q}{A} \,.\, dA = \frac{Q}{A} \,.\, dF \,.\, \sin\lambda.$$

Den Werth $\frac{Q}{A}$ oder den Druck auf die Flächeneinheit der Projektion nennt man den spezifischen Druck der Projektion, und die Gleichung 164) sagt daher:

der Druckantheil, den ein Element der Berührungsfläche von dem gesammten Reibung erzeugenden Druck zu erleiden hat, und welcher in diesem Flächenelement einen Reibungswiderstand erzeugt, der normal zur Richtung dieses Druckes ist, drückt sich aus durch den spezifischen Druck der Projektion der gesammten Berührungsfläche auf eine Ebene, die normal ist zu der Richtung des Reibung erzeugenden Druckes, multiplizirt mit der Projektion dieses Elementes auf dieselbe Ebene.

Es haben also ganz allgemein gleich groſse Projektionen der Berührungsfläche gleiche Druckantheile auszuhalten, und folglich gleich groſse Reibungswiderstände zu erleiden.

In ein und demselben Berührungselement erleiden die einzelnen Punkte gleich groſse Druckelemente, und es sind daher die in den einzelnen Punkten eines Berührungselements wirksamen Reibungswiderstände als gleich groſse und parallele Kräfte anzusehen, so daſs man stets den Angriffspunkt der Reibungswiderstände in den Schwerpunkt des Berührungselementes verlegen kann.

Wenn sämmtliche Berührungselemente in ein und derselben Ebene liegen, oder wenn sie auch in verschiedenen Ebenen liegen, die aber sämmtlich denselben Neigungswinkel λ mit der Richtung des Reibung erzeugenden Druckes bilden, so ist $\sin\lambda$ in Gleichung 164) konstant, und man hat $A = F . \sin\lambda$, folglich geht die Gleichung 164) über in

$$164\text{a)}\quad dQ = \frac{Q}{F} . dF,$$

für diesen Fall ist also der Druckantheil jedes Elementes gleich dem Druck auf die Einheit der ganzen Berührungsfläche, multiplizirt mit der Gröfse des Flächenelementes.

Widerstände gegen fortschreitendes Gleiten; Reibungswinkel.

§ 97. Da die Widerstände der Reibung immer nur dem Gleiten entgegenwirken, so kommen sie überhaupt nur zur Geltung, wenn ein Gleiten, sei es ein fortschreitendes oder drehendes Gleiten möglich ist. Wir haben in § 93 gesehen, dafs die berührenden Oberflächen nur unter gewissen Voraussetzungen die Möglichkeit des Gleitens zulassen. Die folgenden Betrachtungen setzen nun überall die Möglichkeit des Gleitens voraus, und unter diesen Voraussetzungen wollen wir sowohl die Resultirende der Widerstände des fortschreitenden Gleitens, als auch das statische Moment der Widerstände des drehenden Gleitens bestimmen.

Die Richtung des fortschreitenden Gleitens sei gegeben, und die Gröfse und Richtung der Resultirenden aus allen auf das bewegliche System angebrachten Kräften sei bestimmt; der Werth derselben sei Q, und der Winkel, welchen ihre Richtung mit einer Ebene bildet, die normal zu der Richtung des Gleitens ist, sei φ. Wenn wir nun Q nach zwei Richtungen zerlegen, von denen eine nach der gegebenen Richtung des Gleitens, und die andere normal dazu, fällt, so ergeben sich die Komponenten: $Q . \sin\varphi$ und $Q . \cos\varphi$. Nun mufs die Komponente $Q . \cos\varphi$ die in der Richtung normal zur Richtung des Gleitens liegt durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben werden (§ 94.) und folglich bildet diese Komponente den Reibung erzeugenden Druck. Ist nun μ der Reibungs-Koeffizient, so ist die Gröfse des Reibungswiderstandes, welchen wir jetzt und künftig immer mit Θ bezeichnen:

$$165)\quad \Theta = \mu . Q . \cos\varphi,$$

und da der Reibungswiderstand immer der auf Verschieben wirkenden

Komponente entgegenwirkt, so bleibt für den auf fortschreitendes Verschieben wirkenden Druck noch übrig:

165a) $P = Q.\sin\varphi - \Theta = Q.(\sin\varphi - \mu.\cos\varphi) = Q.\cos\varphi.(\tang\varphi - \mu)$.

Hierin liegt folgendes Gesetz:

Wenn ein bewegliches System auf einem fixen System nach irgend einer Richtung fortschreitend gleiten kann, so ist der auf Gleiten wirkende Druck gleich derjenigen Komponenten der Resultirenden aller auf das bewegliche System angebrachten Kräfte, welche in einer zur Richtung des Gleitens normalen Ebene liegt, multiplizirt mit der Differerenz zwischen der Tangente des Neigungswinkels der Resultirenden gegen diese normale Ebene und dem Reibungs-Koeffizienten.

Dieser Druck ist also vollkommen unabhängig:

1) von der Gröfse der Berührungsfläche;

2) von der Form der Berührungsfläche.

Bei Gradführungen in Koulissen ist es z. B. unter sonst gleichen Verhältnissen in Bezug auf die Reibungswiderstände gleichgiltig, ob diese Koulissen prismatisch, cylindrisch oder flach gestaltet sind.

Ist der Reibungswiderstand Θ gröfser; als der auf Gleiten wirkende Druck, so findet kein Gleiten statt (§ 94. No. 1). Wir sagen dann, das bewegliche System befinde sich innerhalb des Gleichgewichts gegen Gleiten.

Wenn der Reibungswiderstand kleiner ist, als der auf Verschieben wirkende Druck, so findet Gleiten statt, und zwar ist das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit, mit der das bewegliche System in diesem Augenblick gleitet (§ 86. Gleichung 154b), S. 160):

165b) $f = \frac{\text{Druck}}{\text{Masse}} = \frac{Q}{M} \cdot (\sin\varphi - \mu.\cos\varphi)$,

wenn M die Masse des beweglichen Systems bezeichnet.

Wir sagen in diesem Fall, das bewegliche System befinde sich aufserhalb des Gleichgewichts gegen Gleiten.

In dem Falle endlich, wo der Reibungswiderstand gleich dem auf Verschieben wirkenden Druck ist, findet zwar auch noch Gleichgewicht gegen Gleiten statt, allein jede Verminderung des Reibungswiderstandes bringt das System aufserhalb, und jede Vermehrung desselben innerhalb des Gleichgewichts gegen Gleiten. Wir nennen dieses Verhältnifs den Grenzzustand des Gleichgewichts gegen Gleiten, oder wir sagen, das bewegliche System befinde sich an der Grenze des Gleitens.

Das bewegliche System befindet sich hiernach innerhalb, aufserhalb oder an der Grenze des fortschreitenden Gleitens, wenn

$$\Theta > Q \,.\, \sin\varphi; \quad \Theta < Q \,.\, \sin\varphi; \quad \Theta = Q \,.\, \sin\varphi,$$

oder nach Gleichung 165), wenn

$$\mu \,.\, \cos\varphi \,.> \sin\varphi; \quad \mu \,.\, \cos\varphi \,.< \sin\varphi; \quad \mu \,.\, \cos\varphi = \sin\varphi$$

ist. Dividiren wir mit $\cos\varphi$, so gehen diese Bedingungen über in

$$166) \quad \mu \,.> \operatorname{tang}\varphi; \quad \mu \,.< \operatorname{tang}\varphi; \quad \mu = \operatorname{tang}\varphi.$$

Hieraus folgt, dafs die Zustände des Gleitens, und die Grenze des Gleitens abhängig sind von dem Verhältnifs des Reibungs-Koeffizienten zu der Tangente des Neigungswinkels der Resultirenden gegen eine Ebene, die normal ist zur Richtung des Gleitens.

Bei demselben Reibungs-Koeffizienten werden diese Zustände also nicht von der Gröfse der Resultirenden, sondern nur von ihrer Richtung abhängig sein; die Grenze des Gleitens wird bei einem bestimmten Werth des Neigungswinkels erreicht sein, und diesen besonderen Werth des Neigungungswinkels, welcher der Grenze des Gleitens entspricht, nennen wir den Reibungswinkel, Gleitwinkel, Ruhewinkel. Wir bezeichnen diesen besondern Werth von φ künftig immer mit ϑ und wir haben nach Gleichung 166) die Beziehung:

$$166\text{a}) \quad \operatorname{tang}\vartheta = \mu,$$

d. h. die Tangente des Gleitwinkels ist gleich dem Reibungs-Koeffizienten.

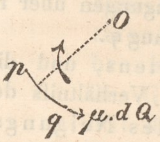
Widerstände gegen drehendes Gleiten, Reibungsmoment; Hebelsarm der Reibung.

§ 98. Um nun das statische Moment der Reibungswiderstände zu bestimmen, nehmen wir an, dafs das bewegliche System sich um eine gegebene Axe drehen könne; diese Axe ist entweder eine fixe Axe, oder sie kann doch für einen Augenblick als fixe Axe betrachtet werden.

Die Resultirende der fortschreitenden Bewegung aus allen auf das bewegliche System angebrachten Kräften ist dann durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben, und folglich ist diese Resultirende der Reibung erzeugende Druck.

In der umstehenden Figur sei die Drehaxe O normal zur Ebene des Papiers. Damit überhaupt Drehung erfolgen könne müssen (nach

§ 93) die Richtungen der von den Berührungspunkten des beweglichen Systems beschriebenen Wegelemente die Elemente der Berührungsfläche berühren, d. h. sie müssen in die Berührungsfläche jedes einzelnen Berührungselementes fallen, zugleich müssen diese Wegelemente in Ebenen liegen, die normal zur Drehaxe sind, sie werden also mit der Durchschnittslinie zusammenfallen, welche die Drehungsebene (Ebene des Papiers) mit den Berührungsebenen der einzelnen Elemente bildet.



pq sei ein Wegelement in dieser Durchschnittslinie für irgend einen Berührungspunkt. Die Richtung der Resultirenden Q bilde mit den einzelnen Berührungselementen den Winkel λ. Es ist dann der Druckantheil jedes Elementes nach Gleichung 164):

$$dQ = \frac{Q}{A} \cdot dF \cdot \sin\lambda$$

und die daraus hervorgehende Reibung:

$$\mu \cdot dQ = \frac{\mu \cdot Q}{A} \cdot dF \cdot \sin\lambda.$$

Dieser Widerstand liegt in einer Ebene, die normal zur Richtung von Q ist. Die Richtung desselben in dieser Ebene ist immer nach dem Grunsatz 4) in § 94. zu bestimmen.

Nun sind aber zwei Fälle möglich, nämlich:

I. die Ebene, in welcher der Reibungswiderstand liegt, fällt mit der Drehungsebene zusammen, oder:

II. die Ebene, in welcher der Reibungswiderstand liegt, schneidet die Drehungsebene.

I. Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Derselbe tritt ein, wenn die Richtung des resultirenden Druckes mit der Drehaxe parallel ist. In diesem Falle mufs die Richtung des Reibungswiderstandes in jedem Berührungselement offenbar der Richtung in welcher die Drehung erfolgt entgegengesetzt sein, d. h. sie fällt mit der Richtung pq zusammen, und folglich ist das Moment des Reibungswiderstandes, wenn wir den Schwerpunktsabstand des Elementes von der Drehaxe mit r bezeichnen:

$$\mu \cdot dQ \cdot r = \mu \cdot \frac{Q}{A} \cdot dA \cdot r,$$

und daher die Summe der Momente sämmtlicher Reibungswiderstände, oder das statische Moment der Gesammtreibung, welches wir künftig mit (Θa) bezeichnen wollen:

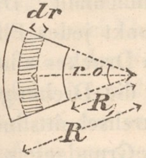
$$167)\ (\Theta a) = \Sigma\left[\mu \cdot \frac{Q}{A} \cdot dA \cdot r\right] = \mu \cdot Q \cdot \frac{\Sigma(dA \cdot r)}{A}.$$

Hieraus folgt:

Wenn ein festes System auf einem andern um eine gegebene Axe drehend gleitet, und wenn dabei die Richtung der Resultirenden aller auf das bewegliche System angebrachten Kräfte mit der Drehaxe zusammenfällt, so ist das statische Moment der Reibungswiderstände gleich dem Produkt, welches man erhält, wenn man den resultirenden Druck mit dem Reibungs-Koeffizienten und mit einem Quotienten multiplizirt, dessen Zähler gleich der Summe der Produkte aus der Projektion jedes Berührungselementes (auf eine zur Drehaxe normale Ebene) in den Abstand dieses Elementes von der Drehaxe, und dessen Nenner die Summe der Projektionen sämmtlicher Berührungselemente ist.

Man sieht, dafs in diesem Falle das statische Moment der Reibungswiderstände nur abhängig ist von der Gröfse und Lage der Projektionen der einzelnen Elemente, und nicht abhängig ist von der Form der Berührungsfläche; es werden also kegelförmige, kugelförmige, ebene etc. Zapfen unter der Voraussetzung, dafs die Richtung des Druckes mit der Drehaxe zusammenfällt, gleiche Reibungsmomente haben, wenn ihre Projektionen kongruent sind, und wenn die resultirenden Drucke sowohl, als die Reibungs-Koeffizienten gleich sind.

Der Ausdruck $\frac{\Sigma(dA \cdot r)}{A}$ ist nur von der Gestalt und Lage der Projektion abhängig; er ist ein rein geometrischer, wir nennen ihn den Hebelsarm der Reibung, und bezeichnen denselben mit $\mathfrak{R}$. Der Hebelsarm der Reibung ist hiernach derjenige Werth, mit welchem μQ, d. i. der gesammte Reibungswiderstand multiplizirt werden mufs, um das statische Moment der Reibung zu erhalten, und man hat:



$$167a)\ (\Theta a) = \mu Q \cdot \mathfrak{R}.$$

Ist die Projektion der Berührungsfläche auf eine Ebene normal zur Drehaxe ein ringförmiger Sektor, welcher einem Winkel o angehört, so ist:

$$dA = o \,.\, r \,.\, dr; \quad \Sigma(dA) = \int o \,.\, r \,.\, dr = \tfrac{1}{2} \,.\, o \,.\, r^2 + C,$$

$$dA \,.\, r = o \,.\, r^2 \,.\, dr; \quad \Sigma(dA.r) = \int o \,.\, r^2 \,.\, dr = \tfrac{1}{3} \,.\, o \,.\, r^3 + C.$$

und wenn wir die Integrale zwischen den Grenzen $r = R_\prime$ und $r = R$ nehmen, so ist der Hebelsarm der Reibung:

$$167\text{b)} \quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3} \,.\, \frac{R^3 - R_\prime^3}{R^2 - R_\prime^2}\,.$$

Es ist also der Hebelsarm der Reibung eines ringförmigen Sektors unabhängig von dem Werthe des Winkels, welchem er angehört, und nur abhängig von dem Werthe des gröfsten und kleinsten Radius. Ist $R_\prime = 0$, so hat man den Hebelsarm der Reibung für eine Fläche, deren Projektion ein Kreis von Radius R oder jeder beliebige Sektor dieses Kreises ist:

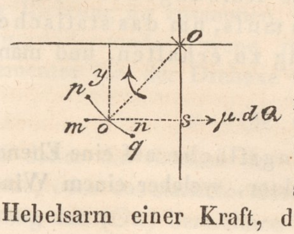
$$167\text{c)} \quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3} \,.\, R.$$

Ist die Berührungsoberfläche eine krumme Fläche, so ist die Möglichkeit der Drehung nur vorhanden, wenn diese krumme Fläche eine Rotationsfläche ist, deren Axe mit der Drehaxe zusammenfällt. Ist dagegen die Berührungsfläche eine Ebene, so mufs dieselbe normal zur Drehaxe sein, wenn die Möglichkeit der Drehung vorhanden sein soll. Die Form der Berührungsfläche, d. h. die Gestalt der ebenen Figur, welche die sämmtlichen Berührungspunkte enthält, ist dabei gleichgiltig, der Hebelsarm der Reibung ist immer durch die Gleichung:

$$167\text{d)} \quad \mathfrak{R} = \frac{\Sigma(dA \,.\, r)}{A},$$

sei es durch Integriren, oder durch ein Näherungsverfahren zu berechnen.

II. Es bleibt noch der Fall zu erledigen, wo die Richtung des resultirenden Druckes nicht mit der Drehaxe zusammenfällt. Die Reibungswiderstände, welche auch hier im Schwerpunkt jedes Flächenelementes normal zur Richtung des resultirenden Druckes sind,



liegen in Ebenen, welche die Drehungsebenen schneiden. Die Durchschnittslinie sei *mn*, so mufs nach dem Grundgesetz 4 in § 94 die Richtung *mn* auch die Richtung des Reibungswiderstandes $\mu \,.\, \frac{Q}{A} . dF \,.\, \sin\lambda$ sein, wie sich leicht übersehen läfst. Der Hebelsarm einer Kraft, deren Richtung *mn* ist, wird durch *Os* dargestellt, und setzen wir $Os = y$, so ist das Moment der im Elemente pq wirksamen Reibung:

$$168)\quad \mu \cdot \frac{Q}{A} \cdot dF \cdot \sin\lambda \cdot y.$$

Nehmen wir drei Koordinatenaxen an. Die erste Axe sei die Drehaxe, die zweite falle mit der Projektion von Q auf die Drehungsebene zusammeu; die dritte Axe OZ ist dann parallel mit der Durchschnittslinie mn, was sich durch eine einfache Betrachtung zeigen läfst.

Nun denken wir in jedem Berührungselement die Normale zu der Berührungsebene, in welcher dieses Element liegt. Diese Normale bildet mit der Richtung von Q den Komplementswinkel von λ, da λ den Winkel bezeichnete, den die Richtung von Q mit der Berührungsebene selbst bildet. Wenn nun diese Normale mit den Richtungen der drei Axen die Winkel φ, χ, ψ macht, und wenn die Richtung von Q mit denselben Axen die Winkel A, B, Γ bildet, so ist nach einem bekannten geometrischen Gesetz der Winkel, den die beiden Richtungen (Q und die Normale) mit einander bilden, nämlich $(90^0 - \lambda)$ durch die Gleichung zu bestimmen:

$$\cos(90^0 - \lambda) = \cos A \cdot \cos\varphi + \cos B \cdot \cos\chi + \cos\Gamma \cdot \cos\psi = \sin\lambda$$

und da $\Gamma = 90^0$ ist, so hat man $\cos A = \sin B$, und daher:

$$\sin\lambda = \sin B \cdot \cos\varphi + \cos B \cdot \cos\chi.$$

Hiernach geht nun die Gleichung 168) über in:

$$\mu Q \cdot \frac{(dF \cdot \sin B \cdot \cos\varphi + dF \cdot \cos B \cdot \cos\chi) \cdot y}{A}$$

und da auch $A = \Sigma(dF \cdot \sin\lambda)$ ist, so hat man zu setzen:

$$A = \Sigma(dF \cdot \sin B \cdot \cos\varphi + dF \cdot \cos B \cdot \cos\chi)$$
$$= \sin B \cdot \Sigma(dF \cdot \cos\varphi) + \cos B \cdot \Sigma(dF \cdot \cos\chi).$$

Man bemerke, dafs φ und χ die Winkel sind, welche die Normalen in den Elementen der Berührungsflächen mit der Axe der X und derjenigen der Y bilden, dafs folglich φ und χ auch die Winkel sind, welche je zwei Ebenen, die einzeln normal sind, auf einer der Axen und auf einer der Normalen mit einander einschliefsen. Die Ebenen normal auf der Normalen ist das Element der Berührungsfläche; die Ebene normal auf der ersten Axe ist die Drehungsebene, und die Ebene normal auf der zweiten Axe ist die Ebene parallel mit mn (zweite Projektionsebene). Hiernach ist $dF \cdot \cos\varphi$ die Projektion eines Berührungselementes auf die Drehungsebene, und $dF \cdot \cos\chi$ die Projektion eines Berührungselementes auf die zweite Koordinatenebene. Bezeichnen wir diese Elemente der Projektionen mit $dA_{\prime}$ und $dA_{\prime\prime}$ so ist das Moment des Reibungswiderstandes in einem Berührungselement:

$$d(\Theta a) = \mu Q . \left[\frac{dA_{,} . \sin B + dA_{,,} . \cos B}{\Sigma(dA_{,}) . \sin B + \Sigma(dA_{,,}) . \cos B}\right] . y$$

und daher ist die Summe der Momente der Reibungswiderstände:

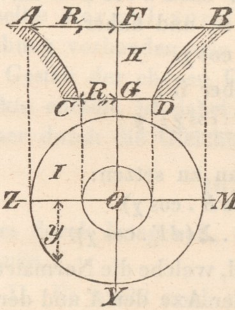
$$168\text{a)} \begin{cases} (\Theta a) = \mu Q . \Sigma \left[\dfrac{dA_{,} . \sin B . y + dA_{,,} . \cos B . y}{\Sigma(dA_{,}) . \sin B + \Sigma(dA_{,,}) . \cos B}\right] \\ \quad\;\; = \mu Q . \left[\dfrac{\sin B . \Sigma(dA_{,} . y) + \cos B . \Sigma(dA_{,,} . y)}{\sin B . \Sigma(dA_{,}) + \cos B . \Sigma(dA_{,,})}\right] . \end{cases}$$

Für den Fall, dafs die Richtung des resultirenden Druckes parallel mit der Drehungsebene ist, hat man $B = o$, folglich ist dann das Moment der Reibung:

$$169\text{b)}\ (\Theta a) = \mu Q . \frac{\Sigma(dA_{,,} . y)}{\Sigma(dA_{,,})} .$$

Der Ausdruck in den Klammern ist auch hier der Hebelsarm der Reibung.

Gewöhnlich sind die reibenden Oberflächen Rotationsflächen, deren Erzeugungsaxe die Drehaxe ist. Denkt man durch die Richtung des Druckes und die Axe eine Ebene, und eine zweite Ebene normal zu dieser ebenfalls durch die Axe, so wird durch beide Ebenen die Rotationsfläche in Linien geschnitten, welche der Erzeugungslinie der Rotationsfläche kongruent sind. Um nun die Werthe der Gleichung 169a) zu bestimmen, sei in nebenstehender Figur:



I die Projektion der Rotationsfläche auf die Drehungsebene $= \Sigma(dA_{,})$,

II die Projektion der Rotationsfläche auf eine Ebene, die durch die Drehaxe geht, und normal zur Projektion OY des resultirenden Drucks auf die Drehungsebene YZ ist $= \Sigma(dA_{,,})$.

Die Projektion I ist immer eine Ringfläche oder ein voller Kreis, und der Ausdruck $\Sigma(dA_{,} . y)$ ist nichts anderes, als die Summe der statischen Momente sämmtlicher Elemente dieses Ringstückes in Bezug auf die Axe OZ. Ist Y der Abstand des Schwerpunkts des halben Ringstückes $\frac{1}{2}\Sigma(dA)$ von der Axe OZ, so ist offenbar:

$$\Sigma(dA_{,} . y) = 2 . (Y . \tfrac{1}{2}\Sigma(dA)).$$

Nun ist der Schwerpunkt der Halbkreisfläche von dem Mittelpunkt entfernt um $Y = \frac{4R}{3\pi}$, daher ist das statische Moment der Halbkreisfläche $Y . \frac{1}{2}\Sigma(dA) = \frac{4R}{3\pi} . \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{2}{3}R^3$, und wenn man mit $R_{\prime}$ und $R_{\prime\prime}$ den gröfsten und kleinsten Durchmesser der Rotationsfläche bezeichnet, so ist:

$$\Sigma(dA_{\prime}\,.\,y) = \tfrac{4}{3}(R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3).$$

Die Komponente, welche normal zur Drehaxe ist $Q\,.\cos B$ erzeugt offenbar nur in dem Theil der Berührungsfläche Reibung, gegen den sie gerichtet ist, d. i. der Theil, welcher dem Bogen ZYM entspricht. Die Projektion dieses Theils auf die Ebene II ist die Figur $ABCD$. Betrachtet man den Ausdruck $\Sigma(dA_{\prime\prime}\,.\,y)$ so ist derselbe die Summe der Produkte aller Elemente der Fläche $ABCD$ in ihre Abstände von der Rotationsfläche, und diese Summe ist nichts anderes, als der kubische Inhalt des Theiles des Rotationskörpers, welcher zwischen der Ebene $ABCD$ und der vordern Berührungsfläche ZYM liegt; d. i. der halbe Inhalt des Rotationskörpers, den die ganze Berührungsfläche umschliefst. Dieser Rotationskörper läfst sich aber auch nach der ersten Guldin'schen Regel ausdrücken (S. 155). Bezeichnet nämlich S den Flächeninhalt des Stückes $ACGF$, und Z den Abstand des Schwerpunktes dieses Stückes von der Drehaxe, so ist auch der Inhalt des halben Rotationskörpers:

$$\Sigma(dA_{\prime\prime}\,.\,y) = S\,.\,\pi\,.\,Z,$$

und hiernach geht die Gleichung 168a) über in:

$$168\text{c})\quad (\Theta a) = \mu Q\,.\,\frac{\sin B\,.\,\frac{4}{3}(R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3) + \cos B\,.\,S\,.\,\pi\,.\,Z}{\sin B\,.\,\pi\,.\,(R_{\prime}^2 - R_{\prime\prime}^2) + 2\cos B\,.\,S},$$

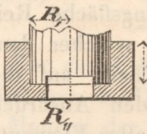
worin bezeichnet:

- Θa das statische Moment der Reibung einer Rotationsfläche;
- μ den Reibungs-Koeffizienten;
- Q den resultirenden Druck der auf das bewegliche System wirkenden Kräfte;
- B den Neigungswinkel der Richtung dieses Druckes gegen die Drehungsebene;
- $R_{\prime}$ den gröfsten, $R_{\prime\prime}$ den kleinsten Halbmesser der Berührungsfläche;
- S den Flächeninhalt der ebenen Figur, durch deren Rotation die Reibungsfläche entstanden ist;
- Z den Abstand des Schwerpunktes dieser Figur von der Drehaxe; folglich
- SZ das statische Moment der erzeugenden Figur in Bezug auf die Drehaxe.

Der Hebelsarm der Reibung drückt sich aus nach Gleichung 168c) durch:

$$168\text{d})\ \mathfrak{R} = \frac{\sin B \cdot \frac{4}{3}(R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3) + \cos B \cdot S \cdot \pi \cdot Z}{\sin B \cdot \pi \cdot (R_{\prime}^2 - R_{\prime\prime}^2) + 2\cos B \cdot S}$$

$$= \frac{4 \operatorname{tang} B \cdot (R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3) + 3\pi \cdot SZ}{3\pi \cdot \operatorname{tang} B \cdot (R_{\prime}^2 - R_{\prime\prime}^2) + 6S} \cdot \cos B.$$



Es möge hier die Bestimmung des Hebelsarms der Reibung für verschiedene Zapfenformen folgen:

a) Cylindrische Zapfen von der Länge l. Es ist $S = l \cdot R_{\prime}$; $Z = \frac{1}{2}R_{\prime}$ folglich der Hebelsarm der Reibung:

$$169)\ \mathfrak{R} = \frac{8 \operatorname{tang} B \cdot (R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3) + 3\pi \cdot l \cdot R_{\prime}^2}{6\pi \cdot \operatorname{tang} B \cdot (R_{\prime}^2 - R_{\prime\prime}^2) + 12 l \cdot R_{\prime}} \cdot \cos B.$$

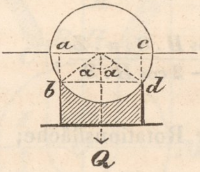
Setzen wir $R_{\prime\prime} = m \cdot R_{\prime}$ und $l = n \cdot R_{\prime}$ so ist:

$$169\text{a})\ \mathfrak{R} = R_{\prime} \cdot \cos B \cdot \frac{8 \operatorname{tang} B \cdot (1 - m^3) + 3\pi \cdot n}{6\pi \cdot \operatorname{tang} B \cdot (1 - m^2) + 12n},$$

und wenn der Druck normal zur Axe ist:

$$169\text{b})\ \mathfrak{R} = \frac{\pi}{4} \cdot R_{\prime}.$$

Dies setzt voraus, daſs der cylindrische Zapfen wenigstens zur Hälfte umschlossen ist. Wenn dagegen der Zapfen nur auf eine Bogenlänge gleich 2α umschlossen ist, und zwar so, daſs dieselbe gegen die Richtung des resultirenden Druckes symmetrisch vertheilt ist, so hat man den Inhalt des Körpers $a\,b\,c\,d$ oder den Werth:



$$\Sigma(dA_{\prime\prime} \cdot y) = l \cdot R_{\prime}^2 \cdot (\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha),$$

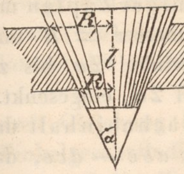
und $\Sigma(dA_{\prime\prime}) = 2l \cdot R_{\prime} \cdot \sin\alpha$, folglich:

$$169\text{c})\ \mathfrak{R} = \tfrac{1}{2}R_{\prime} \cdot \left(\frac{\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = R_{\prime} \cdot \frac{\alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha}{2 \cdot \sin\alpha}$$

$$= \tfrac{1}{2}R_{\prime} \cdot \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha\right).$$

Man sieht leicht, daſs wenn der Zapfen nur auf die Bogenlänge α umschlossen wäre, diese aber auf einer Seite der Richtung des resultirenden Druckes von der Mittellinie an gerechnet läge, mit andern Worten, daſs wenn man die halbe Umschlieſsung fortlieſse, der Werth $\Sigma(dA_{\prime\prime} \cdot y)$ sowohl, als $\Sigma(dA_{\prime\prime})$ jeder halb so groſs werden würde, daſs also $\mathfrak{R}$ ungeändert bliebe. Diese Bemerkung trifft immer zu, wenn der Druck normal zur Axe ist, gleichviel welche Form der Zapfen hat.

Wenn α sehr klein wird, so ist $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ nahezu gleich 1, und



auch $\cos\alpha$ nahezu gleich 1, und wenn α gleich Null wird, so werden diese Werthe genau erreicht. Man hat daher für einen cylindrischen Zapfen, der nur in einer Seite aufliegt, oder, der doch nur eine sehr kleine Berührungsfläche hat, falls der Druck normal zur Axe ist:

$$169\text{d})\quad \mathfrak{R} = R_{\prime}.$$

b) Konischer Zapfen von der Länge l.

Es ist $S = \frac{R_{\prime} + R_{\prime\prime}}{2} \cdot l$;

$$S \cdot Z = \tfrac{1}{2} l \cdot R_{\prime\prime}^2 + \tfrac{1}{6} l \cdot (R_{\prime} - R_{\prime\prime}) \cdot (R_{\prime} + 3R_{\prime\prime}) = \tfrac{1}{6} l \cdot R_{\prime} \cdot (R_{\prime} + 2R_{\prime\prime}),$$

folglich der Hebelsarm der Reibung:

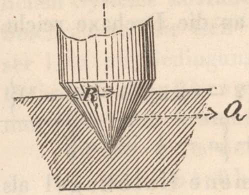
$$170)\quad \mathfrak{R} = \frac{8 \cdot \operatorname{tang} B \cdot (R_{\prime}^3 - R_{\prime\prime}^3) + \pi l \cdot R_{\prime} \cdot (R_{\prime} + 2R_{\prime\prime})}{6\pi \cdot \operatorname{tang} B \cdot (R_{\prime}^2 - R_{\prime\prime}^2) + 6l \cdot (R_{\prime} + R_{\prime\prime})} \cdot \cos B.$$

Setzen wir wieder $R_{\prime\prime} = m \cdot R_{\prime}$ und $l = n \cdot R_{\prime}$ so geht der Ausdruck über in:

$$170\text{a})\quad \mathfrak{R} = \tfrac{1}{6} R_{\prime} \cdot \cos B \cdot \frac{8 \cdot \operatorname{tang} B \cdot (1 - m^3) + \pi n \cdot (1 + 2m)}{\pi \cdot \operatorname{tang} B \cdot (1 - m^2) + n \cdot (1 + m)},$$

und wenn der Druck normal zur Drehaxe ist:

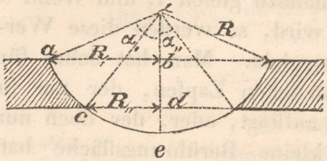
$$\mathfrak{R} = \frac{\pi}{6} R \cdot \frac{1 + 2m}{1 + m}.$$



Dieser Ausdruck wird um so kleiner, je kleiner m ist, und daher am kleinsten, wenn $m = 0$ ist, d. h. wenn der Zapfen ein voller Kegel ist, der vom Halbmesser $R_{\prime}$ bis zur Spitze aufliegt. Man hat dann:

$$\mathfrak{R} = \frac{\pi}{6} R_{\prime}.$$

Es folgt auch aus diesen Gleichungen, daſs, wenn der Druck normal zur Axe gerichtet ist, es bei einem kegelförmigen Zapfen gar nicht auf den Neigungswinkel des Kegels ankommt, sondern nur auf den gröſsten und kleinsten Radius der Berührungsfläche, und daſs ein konischer Zapfen in diesem Fall immer ein geringeres Reibungsmoment haben müsse, als ein cylindrischer Zapfen, dessen Durchmesser gleich dem gröſsten Durchmesser des Kegels ist. Endlich ersieht man, daſs wenn der Zapfen von einem gewissen Durchmesser $R_{\prime}$ ab nach der Spitze hin um ein gewisses Stück aufliegt, das Moment der Reibung um so geringer ist, je länger dieser aufliegende Theil ist.



c) Kugelförmiger Zapfen mit einem Kugelhalbmesser $= R$ und von dem Centriwinkel $2\alpha_{,}$ bis zu dem Centriwinkel $2\alpha_{,,}$ eingesenkt.

Es ist der Flächeninhalt des Stückes $abcd = abe - dce$, daher ist:

$$S = \tfrac{1}{2}R^2 \,.\left\{\alpha_{,} - \alpha_{,,} - \sin\alpha_{,} \,.\, \cos\alpha_{,} + \sin\alpha_{,,} \,.\, \cos\alpha_{,,}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}R^2 \,.\left\{\alpha_{,} - \alpha_{,,} - \tfrac{1}{2}\,.\,(\sin 2\alpha_{,} - \sin 2\alpha_{,,})\right\},$$

ferner ist das statische Moment des Stückes $abcd$ durch eine einfache Rechnung zu finden:

$$SZ = \tfrac{1}{3}R^3 \,.\left\{1 - \cos\alpha_{,}\,.\,(1 + \tfrac{1}{2}\sin\alpha_{,}^2) - 1 + \cos\alpha_{,,}\,.\,(1 + \tfrac{1}{2}\sin\alpha_{,,}^2)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{6}R^3 \,.\left\{\cos\alpha_{,,}\,.\,(3 - \cos\alpha_{,,}^2) - \cos\alpha_{,}\,.\,(3 - \cos\alpha_{,}^2)\right\}.$$

Nun ist noch $R_{,} = R\,.\,\sin\alpha_{,}$; $R_{,,} = R\,.\,\sin\alpha_{,,}$ und man hat nach Gleichung 168d) den Hebelsarm der Reibung:

171) $\mathfrak{R} =$

$$\tfrac{1}{6}R\,.\cos B\,.\,\frac{8\,.\,\mathrm{tang}\,B\,.\,(\sin\alpha_{,}^3 - \sin\alpha_{,,}^3) + \pi\,.\left\{3\,.\,(\cos\alpha_{,,} - \cos\alpha_{,}) - (\cos\alpha_{,,}^3 - \cos\alpha_{,}^3)\right\}}{\pi\,.\,\mathrm{tang}\,B\,.\,(\sin\alpha_{,}^2 - \sin\alpha_{,,}^2) + \left\{(\alpha_{,} - \alpha_{,,}) - \tfrac{1}{2}\,.\,(\sin 2\alpha_{,} - \sin 2\alpha_{,,})\right\}}.$$

Für den Fall, daſs die Begrenzung bis an die Drehaxe reicht, ist $\alpha_{,,} = 0$, und man hat:

$$171\text{a})\quad \mathfrak{R} = \tfrac{1}{6}R\,.\,\cos B\,.\,\frac{8\,.\,\mathrm{tang}\,B\,.\,\sin\alpha_{,}^3 + \pi\,.\left\{2 - \cos\alpha_{,}\,.\,(3 - \cos\alpha_{,}^2)\right\}}{\pi\,.\,\mathrm{tang}\,B\,.\,\sin\alpha_{,}^2 + \left\{\alpha_{,} - \tfrac{1}{2}\,.\,\sin 2\alpha_{,}\right\}}.$$

und für den Fall, daſs man eine vollkommene Halbkugel als reibende Fläche hat, ist $\alpha_{,} = \tfrac{1}{2}\pi$, und man hat:

$$171\text{b})\quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3}R\,.\,\cos B\,.\,\frac{\frac{4}{\pi}\,.\,\mathrm{tang}\,B + 1}{2\,.\,\mathrm{tang}\,B + 1}.$$

Wenn hierbei der Druck normal zur Drehaxe ist, so geht der Hebelsarm der Reibung für die Halbkugel über in:

$$171\text{c})\quad \mathfrak{R} = \tfrac{2}{3}\mathrm{R},$$

d. h. der Hebelsarm der Reibung für eine Halbkugel ist derselbe, gleichviel ob der Druck parallel mit der Drehaxe, oder normal zur Drehaxe wirkt.

Wenn nun ganz allgemein (Θa) das statische Moment der Reibung, und Pr das statische Moment der auf Drehung wirkenden bewegenden Kräfte, beides für eine gegebene Axe, bezeichnet, so ist immer (Θa) dem Moment Pr entgegengesetzt, folglich hat man als Moment der wirklich Drehung erzeugenden Kräfte:

$$172)\ (Pr - \Theta a) = f_{,} \cdot J_{,}$$

(nach Gleichung 154a, S. 167, wenn $f_{,}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit, und $J_{,}$ das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf dieselbe Axe bezeichnet) folglich ist:

$$172\mathrm{a})\ f_{,} = \frac{Pr - (\Theta a)}{J_{,}}.$$

Je nachdem nun wieder $Pr > \Theta a$; $Pr = \Theta a$, oder $Pr < \Theta a$ ist, befindet sich das bewegliche System aufserhalb der Grenze des drehenden Gleitens, an der Grenze, oder innerhalb der Grenze desselben, und es lassen sich ähnliche Betrachtungen anstellen, wie am Schlusse des § 95.

Widerstände gegen Kippen; Stabilität; Rollen.

§ 99. Wir haben noch in § 93. derjenigen Veränderung der Lage des beweglichen Systems gegen ein fixes System gedacht, welche wir „Kippen" nannten. Bei dem Kippen berührt die Drehungsaxe des beweglichen Systems beide Systeme, und nimmt einen oder mehre Punkte der Berührungsfläche auf. Diese in der Axe des Kippens liegenden Punkte bleiben bei der Bewegung des beweglichen Systems in Ruhe, während alle andern Punkte Bogenelemente beschreiben, die sich von dem fixen System abheben. Aus dieser letzten Bedingung folgt, dafs, wenn wir die Begrenzungslinie der Berührungsfläche denken (die Berührungsfläche mag nun eben oder krumm sein):

1) die Axe des Kippens immer diese Begrenzungslinie berühren mufs;

und aus der ersten Bedingung folgt:

2) dafs die Axe des Kippens in derjenigen Berührungsebene beider Systeme liegen mufs, die dem Punkte angehört, in welchem diese Axe die Begrenzungslinie berührt.

Die Bedingung 1) ist sofort ersichtlich, wenn man bemerkt, dafs für jede Axe, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfläche schneidet, unmittelbar benachbarte Berührungspunkte existiren, die auf verschiedenen Seiten dieser Axe liegen. Bei der Drehung des Systems um diese Axe würden nun zwar die Punkte auf der einen Seite sich von der Berührungsebene, in welcher die Axe liegt abheben können, die Punkte der andern Seite müfsten dann aber in diese Ebene einschneiden, und das widerspricht nach den Bedingungen des § 93 der Möglichkeit des Kippens.

Will man nun untersuchen, ob ein bewegliches System im Gleichgewicht gegen Kippen sei, so hat man nach dem Satz No. 1. nur nöthig, diese Untersuchungen für solche Axen anzustellen, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfläche berühren.

Welche von allen den Linien, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfläche unter den gemachten Bedingungen berühren, diejenige Axe sei, um die ein System, das nicht im Gleichgewicht gegen Kippen ist wirklich kippt, ist von der Form der Berührungsfläche und von der Lage und Gröfse der auf das fixe System angebrachten bewegenden Kräfte abhängig, und läfst sich in vielen Fällen ohne Weiteres angeben, in andern Fällen dagegen bedarf es einer besondern Untersuchung. Ist die Axe des Kippens entweder durch direkte Bestimmung festgestellt, oder zufolge einer Schätzung angenommen, so hat man die Momente sämmtlicher auf das bewegliche System angebrachten Kräfte für diese Axe zu bestimmen, und zwar so, dafs man die Momentensumme bildet für diejenigen Kräfte, welche auf Kippen wirken, und dann die Momentensumme derjenigen Kräfte, welche dem Kippen entgegenwirken. Die Momentensumme, welche auf Kippen wirkt, sei $\Sigma(Ka)$, und die Momentensumme, welche dem Kippen entgegenwirkt, sei $-\Sigma(Pb)$, dann ist das Moment, welches wirkliche Drehung erzeugt (QR):

$$173)\quad (QR) = \Sigma(Ka) - \Sigma(Pb).$$

Ist nun $\Sigma(Ka) > \Sigma(Pb)$, so erfolgt Kippen, und wir sagen, das bewegliche System sei aufserhalb des Gleichgewichtes gegen Kippen; ist dagegen $\Sigma(Ka) < \Sigma(Pb)$, so kann kein Kippen erfolgen, denn nach der Voraussetzung müfste nun das bewegliche System in entgegengesetztem Sinne des Kippens Bewegung erlangen, d. h. es müfsten die einzelnen Berührungspunkte anstatt sich abzuheben, in das fixe System eindringen, was nicht möglich ist. Wir bezeichnen diesen Zustand, als „innerhalb des Gleichgewichtes gegen Kippen"; ist endlich

$$\Sigma(Ka) = \Sigma(Pb),$$

so ist das bewegliche System an der Grenze des Gleichgewichts gegen Kippen, oder „an der Grenze des Kippens" denn jeder unendlich kleine Zuwachs von $\Sigma(Ka)$ bringt das System aufserhalb, und jeder unendlich kleine Zuwachs von $\Sigma(Pb)$ innerhalb der Grenze des Kippens.

Die Momentensumme $\Sigma(Pb)$ der Kräfte, welche dem Kippen entgegenwirken in Bezug auf irgend eine Axe nennt man die Stabilität des beweglichen Systems in Bezug auf Kippen um diese Axe, und das Verhältnifs

$$173\text{a)}\quad \frac{\Sigma(Pb)}{\Sigma(Ka)} = S$$

nennen wir die Sicherheit gegen Kippen, oder das Maafs der Stabilität des beweglichen Systems.

Je nachdem das bewegliche System an der Grenze, innerhalb, oder aufserhalb der Grenze des Kippens ist, ist das Maafs der Stabilität $S = 1$; $S > 1$; $S < 1$.

Wenn ein bewegliches System aufserhalb des Gleichgewichts gegen Kippen ist, so ändert es seine Lage gegen das fixe System indem es sich um eine Axe dreht, die beide Systeme berührt. Diese Axe enthält einen oder mehrere Berührungspunkte, welche an der Drehung keinen Theil nehmen. Nun ist aber der Fall denkbar, dafs diese Berührungspunkte, welche nicht kippen, sich dennoch gleitend verschieben; dann wird die Axe des Kippens zwar ihre Lage gegen das fixe System ändern, aber sie wird nicht ihre Lage gegen das bewegliche System ändern, und wir werden die gleichzeitig erfolgenden Bewegungen nach dem Grundsatz in § 24. No. 1 einzeln als gleitende Bewegung und als kippende Bewegung betrachten können. Wir nennen diese Bewegung „gleitendes Kippen".

Es ist nun ferner noch der Fall denkbar, dafs die Oberflächen der beiden sich berührenden festen Systeme so beschaffen sind, dafs sie sich auf einander abwickeln können, und dafs die kippende Bewegung gerade in einer solchen Weise erfolgt, dafs durch dieselbe eine Abwickelung bedingt wird. Treffen diese beiden Bedingungen zusammen, so werden in demselben Zeitelement, in welchem das bewegliche System um eine bestimmte Axe kippt, in beiden Systemen die dieser Axe benachbarten Punkte, welche bis dahin noch nicht sich berührten, Berührungspunkte werden; dadurch heben sich diejenigen Punkte, die bis dahin in der Drehaxe lagen von einander ab, und es bildet sich eine neue Drehaxe, welche die der frühern Drehaxe benachbarten Punkte sowohl des fixen, als auch des beweglichen Systems enthält. Bei jeder neuen kippenden Bewegung des beweglichen Systems findet derselbe Vorgang statt, und es erfolgt also ein fortwährendes Kippen immer um neue, stetig auf einander folgende Drehaxen, wobei sich die Oberfläche des beweglichen Systems auf derjenigen des fixen Systems abwickelt. Diese Bewegung nennen wir Rollen oder Wälzen. Die Möglichkeit des Rollens ist also dadurch bedingt, dafs sich die Oberfläche des beweglichen Systems auf derjenigen des fixen Systems abwickeln könne, und hierzu gehört, dafs die Berührung fortwährend in einer geraden Linie, oder in einem Punkte statt finde.

Es ist übrigens denkbar, dafs während das bewegliche System rollt, während es also immer um eine neue Axe kippt, dieses Kippen ein gleitendes Kippen sein könne, d. h. dafs in demselben Augenblick, wo das Kippen um eine bestimmte Axe erfolgt, diese Axe selbst gleitend fortrückt, und im nächsten Augenblick zwar die der eben vorhandenen Drehaxe benachbarten Punkte des beweglichen Systems, aber nicht die derselben benachbarten Punkte des fixen Systems, sondern entfernter liegende Punkte desselben zur Berührung gelangen, und die neue Drehaxe bilden. Diese Bewegung nennen wir „gleitendes Rollen". Sie läfst sich immer zurückführen auf ein Gleiten und auf ein Rollen.

Wie aber auch das Kippen beschaffen sein mag, so wird man in dem Augenblick, in welchem das bewegliche System kippt, allemal die Axe des Kippens als fixe Axe betrachten und auf dieselbe die Gesetze der Drehung eines festen Systems um eine fixe Axe anwenden können (§ 79).

Gesetze des einfachen und des gleitenden Kippens; Bestimmung der Axe des Kippens.

§ 100. Nehmen wir an, die Berührungspunkte zweier festen Systeme liegen sämmtlich in ein und derselben Ebene; wir wollen untersuchen, unter welchen Verhältnissen das bewegliche System kippen, unter welchen es gleitend kippen wird, und wie die Axe des Kippens zu finden sei.

Wir denken drei Koordinatenaxen, deren Anfangspunkt vorläufig der Schwerpunkt des beweglichen Systems sei; und von denen die erste Axe normal zur Berührungsebene der beiden Systeme sei, die beiden andern Axen also parallel mit dieser Berührungsebene liegen müssen.

Wir bilden aus den auf das bewegliche System angebrachten Kräften die drei Drucksummen:

$$\Sigma(K \,.\, \cos\alpha); \quad \Sigma(K \,.\, \cos\beta); \quad \Sigma(K \,.\, \cos\gamma).$$

Die Drucksumme $\Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$ wird durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben, ist also der Reibung erzeugende Druck, und die daraus hervorgehende Reibung ist $\mu \,.\, \Sigma(K \,.\, \cos\alpha)$. Die beiden andern Drucksummen haben eine Resultirende:

$$Q = \sqrt{\left\{[\Sigma(K.\cos\beta)]^2 + [\Sigma(K.\cos\gamma)]^2\right\}},$$

welche mit den beiden in der Berührungsebene liegenden Axen die Winkel B und Γ bildet, und man hat bekanntlich:

$$\cos B = \sin\Gamma = \frac{\Sigma(K.\cos\beta)}{Q}$$

$$\cos\Gamma = \sin B = \frac{\Sigma(K.\cos\gamma)}{Q}.$$

Die Resultirende Q wirkt auf Verschieben, sie bewirkt ein Gleiten des beweglichen Systems nach der Richtung Q mit einem Druck, der sich ausdrückt durch:

$$174)\quad P = Q - \mu.\Sigma(K.\cos\alpha).$$

Nun können wir auch die Momente der Kräftepaare für die drei Axen bilden. Dieselben sind (Gleichung 141, S. 142):

$$(P'a') = \Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y)$$
$$(P''a'') = \Sigma(K.\cos\alpha.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.x)$$
$$(P'''a''') = \Sigma(K.\cos\alpha.y) + \Sigma(K.\cos\beta.x).$$

Das Kräftepaar $(P'a')$ wirkt auf Drehung in einer Ebene, welche parallel ist mit der Berührungsebene und deren Axe, folglich normal ist zur Berührungsebene Durch welchen Punkt der Berührungsebene diese Axe geht, ist von der Natur des betrachteten Falles abhängig. Da nun auch der Reibung erzeugende Druck $\Sigma(K.\cos\alpha)$ auf derselben Ebene normal ist, so ist das Moment des Reibungswiderstandes nach Gleichung 167) zu bestimmen, und es ist dasselbe

$$(\Theta a) = \mu.\Sigma(K.\cos\alpha).\frac{\Sigma(dF.r)}{\Sigma(dF)}$$
$$= \mu.\Sigma(K.\cos\alpha).\mathfrak{R}$$

(wenn $\mathfrak{R}$ den Hebelsarm der Reibung bezeichnet).

Hiernach erleidet das System eine Drehung um eine zu der Berührungsebene normale Axe, und es ist das wirksame Moment der Drehung:

$$174a)\quad P'a' - \Theta a = \Sigma(K.\cos\beta.z) + \Sigma(K.\cos\gamma.y) - \mu.\Sigma(K.\cos\alpha).\mathfrak{R}.$$

Die Kräftepaare $(P''a'')$ und $(P'''a''')$ lassen sich zu einem einzigen Kräftepaar zusammensetzen. Nach Gleichung 140) und 140a) ist das Moment (Pa) dieses Kräftepaars:

$$Pa = \sqrt{\left\{(P''a'')^2 + (P'''a''')^2\right\}}$$

und die Winkel, welche die Paarebene dieses Paars (die übrigens normal ist zur Berührungsebene) mit den beiden Axen in dieser Ebene bildet $B_{\prime}$ und $\Gamma_{\prime}$ sind durch die Gleichungen (140a) zu bestimmen:

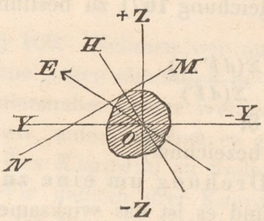
$$\cos B_{,} = \sin \Gamma_{,} = \frac{P''.a''}{Pa}$$

$$\cos \Gamma_{,} = \sin B_{,} = \frac{P'''.a'''}{Pa}.$$

Die Ebene des Kräftepaars Pa ist diejenige, in welcher ein Bestreben auf Drehung des beweglichen Systems vorhanden ist; konstruiren wir diese Paarebene, so steht dieselbe normal auf der Berührungsebene, schneidet diese in einer geraden Linie, und diese Durchschnittslinie schneidet im Allgemeinen die Begrenzungslinie der Berührungsfigur; nun wissen wir aus dem vorigen Paragraphen, dafs die Axe des Kippens in der Berührungsebene liegen, und die Begrenzungsfigur berühren mufs. Da nun aber die Axe des Kippens auch normal zur Paarebene sein mufs, so mufs sie auf der obigen Durchschnittslinie normal, und zwar diejenige Normale sein, welche die Begrenzungslinie der Berührungsfigur berührt, und dabei so liegt, dafs sie der Richtung in welcher das resultirende Kräftepaar Pa auf Drehung wirkt entspricht.

Hierdurch ist nun im Allgemeinen die Lage der Axe des Kippens bestimmt.

In nebenstehender Skizze sei die schraffirte Figur die ebene Berührungsfläche. OY, OZ seien die zweite und dritte Axe durch den Schwerpunkt des beweglichen Systems gehend, OE sei die Richtung von Q, nach welcher das System gleitet; OH sei die Durchschnittslinie der Ebene des auf Kippen wirkenden Kräftepaars mit der Berührungsebene, dann ist MN die Axe des Kippens. Soll nun die Axe des Kippens für jeden Augenblick als fixe Axe betrachtet werden können, so müssen nach § 79



die auf Verschieben der Axe wirkenden Drucke durch die Reaktion in der fixen Axe im Gleichgewicht gehalten werden. Der auf Verschieben der Axe wirkende Druck wird gefunden, wenn man den rerultirenden Druck Q in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine normal zu $MN_{,}$ ist, die andere mit MN zusammenfällt. Da der Winkel HOE, welchen die Richtung OE mit der zur Axe normalen OH bildet, offenbar gleich $(B_{,} - B)$ ist, so ist die Komponente, welche auf Verschieben der Axe nach der Richtung OH wirkt:

$$Q.\cos(B_{,} - B)$$

und die Komponente, welche auf Verschieben nach der Richtung MN wirkt:

$$Q \, . \sin(B_{\prime} - B).$$

Die Drucke nun, welche dem Verschieben der Axe entgegenwirken, sind keine andern, als die Komponenten der Reibung, und da der Reibungswiderstand der Richtung von Q entgegengesetzt zu denken ist, so sind die Komponenten des Reibungswiderstandes für die Richtungen OH und MN

$$-\mu \, . \Sigma(K \, . \cos\alpha) \, . \cos(B_{\prime} - B) \text{ und } -\mu \, . \Sigma(K \, . \cos\alpha) \, . \sin(B_{\prime} - B).$$

Je nachdem nun:

$$Q \, . \cos(B_{\prime} - B) \leqq \mu \, . \Sigma(K \, . \cos\alpha) \, . \cos(B_{\prime} - B)$$

$$\text{d. h.: } Q \, . \leqq \mu \, . \Sigma(K \, . \cos\alpha), \text{ oder}$$

$$Q \, . \cos(B_{\prime} - B) > \mu \, . \Sigma(K \, . \cos\alpha) \, . \cos(B_{\prime} - B)$$

$$\text{d. h.: } Q > \mu \, . \Sigma(K \, . \cos\alpha)$$

ist, wird die Axe MN als fixe Axe oder als verschiebbare Axe zu betrachten sein; im ersten Falle wird das System einfach kippen ohne zu gleiten; im andern Falle wird ein gleitendes Kippen erfolgen.

Bestimmen wir nun das Moment sämmtlicher auf das bewegliche System angebrachten Kräfte für diese Axe MN, so ist dasselbe das auf Kippen wirkende Kräftepaar, und wenn wir dasselbe mit (Ka) bezeichnen, so ist das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit des Kippens:

$$174\text{b}) \quad f_{\prime} = \frac{Ka}{J_{\prime}},$$

worin $J_{\prime}$ das Trägheitsmoment des beweglichen Systems in Bezug auf die Axe des Kippens bedeutet; das Aenderungsmaafs des fortschreitenden Gleitens ist aber nach Gleichung 165b) (S. 202) und 174) (S. 217):

$$f = \frac{P}{M} = \frac{Q - \mu \, . \Sigma(\cos\alpha)}{M} \, .$$

$$174\text{c}) \quad f = \frac{\sqrt{\{[\Sigma(K \, . \cos\beta)]^2 + [\Sigma(K \, . \cos\gamma)]^2\}} - \mu \, . \Sigma(K \, . \cos\alpha)}{M}$$

Das bewegliche System kippt nun mit einer Winkelgeschwindigkeit deren Aenderungsmaafs $f_{\prime}$ ist, sobald das Moment Ka gröfser als Null ist, es ist dabei im Gleichgewicht gegen Gleiten, wenn $Q < \mu \, . \Sigma(K \, . \cos\alpha)$ ist; wenn dagegen $Q > \mu \, . \Sigma(K \, . \cos\alpha)$ ist, so gleitet es zugleich mit einer Geschwindigkeit, deren Aenderungsmaafs f (Gleichung 174c) ist.

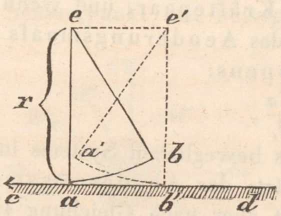
Diese Bestimmungen gelten, so lange das bewegliche System um eine Axe kippt, die stets durch dieselben Punkte des beweglichen Systems geht. Anders ist es, wenn die Möglichkeit des Rollens vorhanden ist.

Gesetze des Rollens; cylindrisches und konisches Rollen. Einfaches und gleitendes Rollen.

§ **101.** Wir wollen nunmehr die Gesetze des Rollens untersuchen.

Das Rollen ist, wie im Paragraphen 99. angedeutet worden, eine besondere Art des Kippens, es setzt also immer eine Axe voraus, um welche die Drehung des beweglichen Systems erfolgt, und welche in der Berührungsebene beider Systeme liegt, sowie ein auf Drehung um diese Axe wirkendes Kräftepaar, endlich ist das Rollen durch die Möglichkeit bedingt, dafs das bewegliche System auf dem fixen System sich abwickeln könne. Bevor wir hiernach die mechanischen Gesetze dieser Bewegung betrachten, wollen wir folgende Bemerkung hervorheben.

Es sei ab ein Kurvenelement, welches sich auf der Linie cd abwickeln soll, $ae = eb$ sei der Krümmungshalbmesser des Kurvenelements; und nach der Abwickelung sei das Bogenelement in die Lage $a'b'$ gekommen.



Offenbar ist die Länge $ab' = ab$ gleich der Länge des Kurvenelements, und es steht sowohl der Krümmungshalbmesser ae, als auch der Krümmungshalbmesser $b'e'$ normal auf cd, da in beiden Lagen und bei dem Uebergange von der einen Lage in die andere das Bogenelement ab fortwährend die Linie cd berühren soll. Hieraus folgt, dafs ee' der Weg, den der Krümmungsmittelpunkt bei der Abwickelung beschrieben hat, nicht nur eine äquidistante Kurve von cd ist, sondern auch gleich der Länge ab' d. i. gleich der Länge des Bogenelementes ab ist. Nun sieht man, dafs das Bogenelement aus der Lage abe, die es vor der Abwickelung hatte, in die Lage $a'b'e'$, in die es durch die Abwickelung gelangt ist, auch dadurch gebracht werden kann, dafs man sich vorstellt, der Krümmungsmittelpunkt e und alle Punkte des Systems aeb haben zuerst fortschreitend den Weg ee' beschrieben, dessen Länge gleich der Länge des Bogenelementes ab, und dessen Richtung äquidistant der Grundkurve ist, und dann habe das System eine Drehung gemacht nach einer Richtung, die entgegengesetzt der fortschreitenden Bewegung, und um einen Winkel der gleich demjenigen ist, welchen das Bogenelement einschliefst. Hieraus folgt:

Jede Abwälzung eines Kurvenelementes auf einer Grundkurve kann zurückgeführt werden auf eine fortschreitende Bewegung, welche der Krümmungsmittelpunkt mit allen Punkten gemeinschaftlich macht, und auf eine nach entgegengesetzter Richtung erfolgende Drehung um den Krümmungsmittelpunkt, wobei der Berührungspunkt sich mit einer Peripheriegeschwindigkeit drehend bewegt, die gleich der Geschwindigkeit ist, mit welcher das ganze System sich fortschreitend bewegt.

Ist f das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung, $f_{\prime}$ das Aenderungsmaafs der drehenden Bewegung um den Krümmungsmittelpunkt, r der Krümmungshalbmesser, so mufs zufolge der letzten Bedingung bei vollständiger Abwälzung sein:

$$175)\ f = -r . f_{\prime} .$$

Ist $f \gtreqless -f_{\prime} . r$, so findet ein gleitendes Rollen statt, denn wir können uns immer vorstellen, das bewegliche System bewege sich gleitend ohne zu rollen mit einer Geschwindigkeit, deren Aenderungsmaafs dem Ueberschufs von f über $-f_{\prime} . r$ entspricht, und dann erfolge die Abwickelung mit dem Aenderungsmaafs $-f_{\prime} . r$.

Betrachten wir die drehende Bewegung, welche bei der Abwälzung statt finden mufs, und beachten wir, dafs wenn ein festes System eine drehende Bewegung macht, dies nur um eine allen Elementen gemeinschaftliche gradlinige Axe und mit einer gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit erfolgen kann, so ergiebt sich sofort aus dem obigen Satze, dafs eine Abwälzung eines festen Systems nur möglich ist, wenn die Mittelpunkte der Krümmungskreise sämmtlicher berührenden Kurvenelemente in ein und derselben geraden Linie liegen.

Diese gerade Linie ist entweder parallel mit der Berührungslinie, oder sie schneidet dieselbe, denn: aus dem Begriff der Berührung folgt, dafs die beiden festen Systeme eine gemeinschaftliche Berührungsebene haben; die Axe des Rollens liegt in dieser Berührungsebene; die Normalen auf der Berührungsebene, welche in den einzelnen Punkten der Axe des Rollens errichtet sind, sind auch normal zu dem rollenden System, gehen also durch die Krümmungsmittelpunkte der berührenden Kurvenelemente dieses Systems, und da diese Normalen alle in ein und derselben Ebene liegen (die zur Berührungsebene normal ist, und durch die Axe des Rollens geht), so liegen die Krümmungsmittelpunkte sämmtlich mit der Axe des Rollens in ein und derselben Ebene, da sie nun auch alle in gerader Linie liegen müssen, so mufs diese gerade Linie der Axe des Rollens entweder parallel sein, oder dieselbe schneiden.

Ist die gerade Linie, welche die sämmtlichen Krümmungsmittelpunkte aufnimmt und welche wir als Krümmungsaxe bezeichnen wollen, parallel mit der Axe des Rollens, so ist der Krümmungshalbmesser (r) für sämmtliche Berührungspunkte konstant und wir nennen diesen Fall des Rollens cylindrisches Rollen; wenn dagegen die Krümmungsaxe die Axe des Rollens schneidet, so bezeichnen wir das Abwälzen des beweglichen Systems als konisches Rollen. Bei dem konischen Rollen ist der Krümmungshalbmesser r nicht konstant, sondern veränderlich, aber es ist, unter $r, r', r'' \ldots$ die Krümmungsradien verschiedener Berührungselemente, und unter $a, a', a'' \ldots$ die Abstände dieser Elemente von dem Durchschnittspunkte zwischen der Axe des Rollens und der Krümmungsaxe verstanden:

$$r : r' : r'' \ldots = a : a' : a'' \ldots$$

Da nun ferner das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit $f_{\prime}$ mit welcher die Elemente um die Krümmungsaxe sich drehen für alle Elemente denselben Werth haben mufs, so folgt aus Gleichung 175), dafs das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung f für die einzelnen Berührungselemente verschieden sein mufs. Nun gehören aber diese sämmtlichen Berührungselemente einem System an, und es bedingt daher der Fall, dafs die einzelnen Elemente mit verschiedener Geschwindigkeit fortschreiten, eine Drehung um eine gemeinschaftliche Axe (§ 65). Diese gemeinschaftliche Axe ist normal zur Berührungsebene, da in der Berührungsebene sämmtliche Wegelemente liegen. Ist $f_{\prime\prime}$ das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit für die Drehung um diese Axe, und R der (veränderliche) Abstand der einzelnen Berührungselemente von dieser Axe, so ist offenbar

$$f = f_{\prime\prime} . R = - r . f_{\prime}$$

$$175\text{a)} \quad \frac{f_{\prime}}{f_{\prime\prime}} = - \frac{R}{r},$$

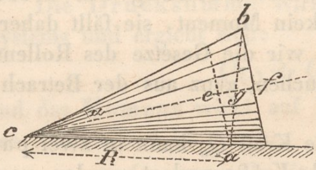
d. h. wenn ein System **konisch** rollt, so verhalten sich die Aenderungsmaafse der Winkelgeschwindigkeiten, mit denen das System um die Krümmungsaxe und um eine zur Berührungsebene normale Axe rotirt, umgekehrt wie der Krümmungshalbmesser irgend eines Punktes zu dem Abstande dieses Punktes von der letztgenannten Axe.

Da nun dies Verhältnifs für alle Elemente in irgend einem Augenblicke denselben Werth hat, so ist:

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'} = \frac{R''}{r''};\ r : r' : r'' = R : R' : R'' \ldots = a : a' : a'' \ldots$$

und hieraus folgt, dafs die zur Berührungsebene normale Axe, um welche das System rotirt, durch den Punkt gehen müsse, in welchem die Krümmungsaxe die Axe des Rollens schneidet.

Für den geraden Kegel mit kreisförmiger Grundfläche sei ab die Normale zur Berührungsebene in irgend einem Punkte;



der Schnitt des Kegels durch eine Ebene, welche durch ab geht und zur Axe des Rollens ac normal ist, ist eine Ellipse, das berührende Kurvenelement ein elliptisches, und zwar dasjenige, welches dem Endpunkt der langen Axe ab entspricht. Für dieses Kurvenelement ist der Krümmungshalbmesser:

$$r = \frac{p^2}{q}$$

wenn p die halbe kurze, q die halbe lange Axe ist. Es ist aber auch $p^2 = mn$, wenn m und n die Radien der die Ellipse begrenzenden Kreise des Kegels sind. Man hat also:

$$r = \frac{ae\,.\,bf}{\frac{1}{2}ab} = \frac{R\,.\sin\alpha}{\frac{1}{2}ab} \cdot \frac{\frac{1}{2}ab}{\cos\alpha} = R\,.\,\text{tang}\,\alpha = ag,$$

folglich ist die Axe cf die Krümmungsaxe des Kegels, und es ist für den Kegel:

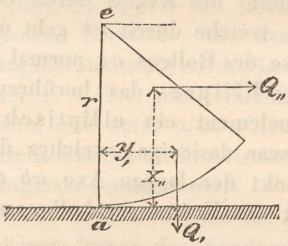
$$175\text{b})\quad \frac{f_{\prime}}{f_{\prime\prime}} = -\frac{R}{r} = -\,\text{cotang}\,\alpha = -\frac{ce}{ae} = -\frac{h}{m},$$

worin α den Winkel bezeichnet, unter welchem die Krümmungsaxe die Axe des Rollens schneidet, m der Radius des Kegels in irgend einem Berührungspunkt, h die Höhe des Kegels für die Kreisebene, deren Radius m ist.

Denken wir nunmehr ein bewegliches System, für welches die Möglichkeit des cylindrischen Rollens vorhanden ist, und untersuchen wir, wie die Drucksumme zu bestimmen ist, welche auf Fortschreiten des Krümmungsmittelpunktes wirkt, und wie das Moment des Kräftepaars zu finden ist, welches auf Drehung des Systems um die Krümmungsaxe wirkt.

Im Allgemeinen werden die auf das bewegliche System angebrachten Kräfte sich nach § 76. A. No. 1 (S. 119) zurückführen lassen auf drei einzelne Kräfte, die einzeln parallel sind mit drei angenommenen Axen (Gleichung 126). Die Richtung ae normal zur Berührungsebene sei die erste, die Richtung cd (Figur auf S. 220), d. i. die in der Berührungsebene liegende zur Axe des Rollens normale Richtung sei die zweite, und die Axe des Rollens sei die dritte Koordinatenaxe; $Q_{\prime}$ $Q_{\prime\prime}$ $Q_{\prime\prime\prime}$ seien die mit den drei Axen parallelen Kräfte, deren Angriffspunkte durch die Koordinaten-Gleichungen 126) zu bestimmen sind.

Die Kraft $Q_{\prime\prime\prime}$ parallel mit der Axe des Rollens wirkt auf Verschieben des Systems nach der Richtung dieser Axe, hat aber in Bezug auf Drehung um diese Axe kein Moment, sie fällt daher, indem wir die Gesetze des Rollens untersuchen, ganz aus der Betrachtung.



Die Kraft $Q_{\prime\prime}$ kann in zwei parallele Kräfte zerlegt werden, von denen die eine durch die Krümmungsaxe e, die andere durch die Axe des Rollens a geht, und welche sich bestimmen durch die Gleichungen:

$$Q_{\prime\prime}^{(a)} = Q_{\prime\prime} \cdot \frac{(r - X_{\prime\prime})}{r}; \quad Q_{\prime\prime}^{(e)} = Q_{\prime\prime} \cdot \frac{X_{\prime\prime}}{r},$$

beide Kräfte wirken auf Fortschreiten des ganzen Systems.

Die Kraft $Q_{\prime}$ welche normal ist zur Berührungsebene, kann keine fortschreitende Bewegung in der Richtung des Rollens $ab_{\prime}$ erzeugen, dagegen kann sie auf Drehung in der Ebene des Rollens wirken, sie giebt das auf Kippen wirkende Kräftepaar, und das Moment desselben drückt sich aus durch $Q_{\prime} \cdot Y_{\prime}$. Dieses Kräftepaar können wir immer verwandeln in ein anderes, dessen Kräfte durch die Axen e und a gehen, und die sich daher bestimmen nach Gleichung 139), S. 137 durch die Werthe:

$$+ \frac{Q_{\prime} \cdot Y_{\prime}}{r} \text{ und } - \frac{Q_{\prime} \cdot Y_{\prime}}{r},$$

wobei übrigens auf das Vorzeichen von $Y_{\prime}$ wohl zu achten ist.

Endlich wirkt noch in der Axe a die Komponente der gleitenden Reibung, welche wir mit Θ bezeichnen wollen, dieselbe ist immer der Richtung der Kraft $Q_{\prime\prime}$, welche auf Fortschreiten des Systems wirkt, entgegengesetzt.

Nun haben wir in der Axe e die Kräfte wirkend:

$$176)\quad \frac{Q_{\prime\prime} \cdot X_{\prime\prime}}{r} + \frac{Q_{\prime} \cdot Y_{\prime}}{r} = Q_{(e)}$$

und in der Axe a die Kräfte:

$$176\text{a})\quad Q_{\prime\prime} \cdot \frac{(r - X_{\prime\prime})}{r} - \frac{Q_{\prime} \cdot Y_{\prime}}{r} - \Theta = Q_{(a)}.$$

Denken wir nun in dem Angriffspunkte der Kraft $Q_{(e)}$ zwei Kräfte angetragen, die parallel mit der Richtung des Fortschreitens und gleich $+ Q_{(a)}$ und $- Q_{(a)}$ sind, so hat man die Kräfte des beweglichen Systems zurückgeführt auf eine Drucksumme $Q_{(e)} + Q_{(a)}$ und auf ein Kräftepaar dessen Kräfte $+ Q_{(a)}$ in der Axe a und $- Q_{(a)}$ in der Axe e wirkend, den Hebelsarm $ae = r$ haben.

Die Drucksumme wirkt auf fortschreitende Bewegung des Systems und ergiebt sich:

$$Q_{(e)} + Q_{(a)} = Q_{\prime\prime} - \Theta$$

und das Moment wirkt auf Drehung des Systems in der Ebene des Rollens und ist gleich:

$$Q_{(a)} \cdot r = Q_{\prime\prime} \cdot (r - X_{\prime\prime}) - Q_{\prime} \cdot Y_{\prime} - r \cdot \Theta.$$

Bezeichnet nun $J_{\prime} = \varrho_{\prime}^{2} . M$ das Trägheitsmoment des beweglichen Systems in Bezug auf eine Axe, die parallel mit der Axe des Rollens durch den Krümmungsmittelpunkt geht, so hat man das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit für Drehung um diese Axe:

$$176\text{b})\quad f_{\prime} = \frac{Q_{(a)} \cdot r}{J_{\prime}} = \frac{Q_{\prime\prime} \cdot (r - X_{\prime\prime}) - Q_{\prime} \cdot Y_{\prime} - r \cdot \Theta}{J_{\prime}}$$

und das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung:

$$176\text{c})\quad f = \frac{Q_{\prime\prime} - \Theta}{M}.$$

Da nun die Bedingung des cylindrischen Rollens nach dem Obigen sich darstellte durch (Gleichung 175):

$$f = - f_{\prime} \cdot r,$$

so folgt die Komponente der gleitenden Reibung, welche in der Axe a wirksam sein mufs, durch Entwickelung aus den Gleichungen 176b) und 176c), indem wir erst mit r multipliziren und die Werthe gleichsetzen:

$$176\text{d})\begin{cases}\Theta = \dfrac{Q_{\prime\prime}\cdot[J_{\prime} + Mr\,.(r - X_{\prime\prime})] - Mr\,.\,Q_{\prime}\,.\,Y_{\prime}}{J_{\prime} + Mr^2}\\[2mm] \quad = Q_{\prime\prime} - \dfrac{r\,.\,M}{J_{\prime} + Mr^2}\cdot(Q_{\prime\prime}\cdot X_{\prime\prime} + Q_{\prime}\cdot Y_{\prime})\\[2mm] \quad = Q_{\prime\prime} - \dfrac{Mr^2}{J_{\prime} + Mr^2}\cdot Q_{(e)}\end{cases}$$

folglich durch Einsetzung dieses Werths in die Gleichungen 176b) und 176c), nach gehöriger Reduktion:

$$177)\begin{cases}f_{\prime} = -\dfrac{Q_{\prime\prime}\cdot X_{\prime\prime} + Q_{\prime}\cdot Y_{\prime}}{J_{\prime} + Mr^2} = -Q_{(e)}\cdot\dfrac{r}{J_{\prime} + Mr^2}\\[2mm] f = r\,.\,\dfrac{Q_{\prime\prime}\cdot X_{\prime\prime} + Q_{\prime}\cdot Y_{\prime}}{J_{\prime} + M\,.\,r^2} = Q_{(e)}\cdot\dfrac{r^2}{J_{\prime} + Mr^2}\end{cases}$$

worin $J_{\prime}$ das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf Drehung um eine mit der Axe des Rollens parallele durch den Krümmungsmittelpunkt gehende Axe, und M die Gesammtmasse des Systems bezeichnet.

Da der Werth Θ durch die gleitende Reibung bedingt ist, so ist der gröfste Werth, welchen Θ haben kann, offenbar:

$$\Theta = \mu\,.\,Q_{\prime}.$$

So lange nun der aus der Bedingung des Rollens berechnete Werth der Komponente der gleitenden Reibung Θ kleiner ausfällt, als dieser Maximalwerth $\mu\,Q_{\prime}$, wird ein vollständiges Rollen erfolgen, sobald aber Θ gröfser ausfällt als $\mu\,Q_{\prime}$, kann die Bedingung der Gleichung 175) nicht mehr erfüllt werden, und es entsteht ein gleitendes Rollen.

Man hat für diesen Fall, indem man in Gleichung 176b) für Θ den Werth $\mu\,Q_{\prime}$ setzt:

$$177\text{a})\;\; f_{\prime} = \frac{Q_{\prime\prime}\cdot(r - X_{\prime\prime}) - Q_{\prime}\,.\,(Y + r\,.\,\mu)}{J_{\prime}}$$

und aus Gleichung 176c):

$$177\text{b})\;\; f = \frac{Q_{\prime\prime} - \mu\,.\,Q_{\prime}}{M}$$

d. h. es ist das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung wie beim gleitenden Kippen (Gleichung 174c).

Erfahrungsmäfsig giebt es auch beim Rollen gewisse Widerstände, die sich dem Abwickeln der Berührungspunkte entgegensetzen und die, wie die Reibung, als passive Widerstände zu betrachten sind. Man pflegt diese Widerstände, deren Natur noch nicht gehörig aufgeklärt ist, die wälzende Reibung zu nennen. Man kann die wälzende Reibung immer als ein Kräftepaar denken, welches der Drehung des beweglichen Systems entgegenwirkt. Nennen wir das Moment dieses Kräftepaars $\mathfrak{W}$, so ist der Werth $\mathfrak{W}$ in den Gleichungen 176) bis 177) überall als ein Kräftepaar mit entgegengesetztem Zeichen hinzuzufügen. Wenn man die Kräfte dieses Kräftepaars auf den Abstand r reduzirt, so sind dieselben offenbar $+\frac{\mathfrak{W}}{r}$ und $-\frac{\mathfrak{W}}{r}$ und es gehen die Gleichungen 176) und 176a) mit Berücksichtigung der wälzenden Reibung über in folgende:

$$178)\quad \begin{cases} Q_{(e)} = \dfrac{Q_{\prime\prime} \cdot X_{\prime\prime}}{r} + \dfrac{Q_{\prime} \cdot Y_{\prime}}{r} - \dfrac{\mathfrak{W}}{r} \\ Q_{(a)} = \dfrac{Q_{\prime\prime} \cdot (r - X_{\prime\prime})}{r} - \dfrac{Q_{\prime} \cdot Y_{\prime}}{r} - \Theta + \dfrac{\mathfrak{W}}{r}. \end{cases}$$

Worin $Q_{(e)}$ den Druck bezeichnet, welcher in der Krümmungsaxe auf Fortschreiten derselben wirksam bleibt, $Q_{(a)}$ aber die Drucksumme bedeutet, welche in der Axe des Rollens wirksam zu denken ist. Nach (freilich ziemlich zweifelhaften) Versuchen von Coulomb mufs man schliesfen, dafs das Moment $\mathfrak{W}$ proportional sei der Drucksumme $Q_{\prime}$, welche normal gegen die Bahn des Rollens gerichtet ist, und dafs betrage:

beim Rollen von Pockholz	auf Eichenholz	$\mathfrak{W}$	$= 0{,}0184\, Q_{\prime}$
- - -	Ulmenholz - -		$= 0{,}0311\, Q_{\prime}$
- - -	Gufseisen auf Gufseisen		$= 0{,}0178\, Q_{\prime}$
	(*Weisbach und Rittinger*) bis		$= 0{,}0187\, Q_{\prime}$
- - -	Eisenbahnräder auf Schienen		$= 0{,}019\, Q_{\prime}$
	(*de Pambour*) bis		$= 0{,}021\, Q_{\prime}$.

Im Allgemeinen ist also zu setzen:

$$178a)\quad \mathfrak{W} = \chi \cdot Q_{\prime}$$

und man hat daher:

$$178b)\quad \begin{cases} Q_{(e)} = \dfrac{Q_{\prime\prime} \cdot X_{\prime\prime}}{r} + \dfrac{Q_{\prime} \cdot (Y_{\prime} - \chi)}{r} \\ Q_{(a)} = \dfrac{Q_{\prime\prime} \cdot (r - X_{\prime\prime})}{r} - \dfrac{Q_{\prime} \cdot (Y_{\prime} - \chi)}{r} - \Theta. \end{cases}$$

Hiernach ist in sämmtlichen Gleichungen von 176) bis 177a), in welchen $Y_{\prime}$ (die Ordinate der Drucksumme $Q_{\prime}$) vorkommt, diese Ordinate um den Werth χ zu vermindern, wenn man die wälzende Reibung berücksichtigen will.

Die Gesetze des konischen Rollens in derselben Allgemeinheit zu entwickeln, wie die des cylindrischen Rollens führt auf sehr komplizirte Ausdrücke. In besonderen Fällen werden sich diese Gesetze nach Analogie der eben durchgeführten Untersuchungen und mit Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichung 175a), S. 222 ohne grofse Schwierigkeiten ermitteln lassen.

Anwendungen der Reibungsgesetze: Balkenschub — Quetschwalzen — Axenreibung.

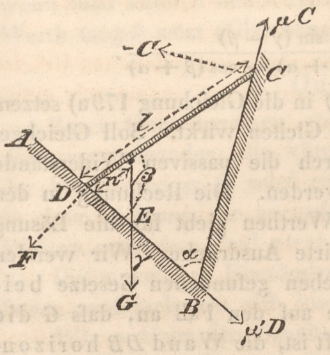
§ 102. Die in dem vorigen Paragraphen entwickelten Gesetze wollen wir auf einige bestimmte Fälle anwenden, indem wir einige der am häufigsten vorkommenden Aufgaben besprechen.

1. Balkenschub.

Ein Stab oder ein Balken ist zwischen zwei Wände gelegt, die den Winkel $ABC = \alpha$ einschliefsen; die Länge des Stabes ist l, und in dem Abstande n von dem einen Ende wirke eine Kraft G auf den Stab; gegeben ist die Neigung des Stabes gegen die eine Wand AB durch den Winkel $CDB = \beta$ und die Richtung der Kraft G durch den Winkel $BEG = \gamma$, welchen die Kraftrichtung G mit derselben Wand macht; zu ermitteln ist:

1) wie kann sich der Stab verschieben?
2) welche Kraft ist parallel mit der Wand AB erforderlich, um den Stab im Gleichgewicht zu halten? und
3) welchen Werth mufs der Winkel β haben, damit der Stab durch die Reibungswiderstände und den Widerstand des fixen Systems allein im Gleichgewicht gehalten werde?

Die Verschiebung des Stabes kann nur durch die bewegende Kraft G erfolgen, und zwar dadurch, dafs der Angriffspunkt dieser Kraft in dem Sinne desselben fortrückt; man sieht, dafs dabei der Stab mit seinen beiden Enden gleiten mufs, und zwar das Ende D nach A hin, das Ende C nach B hin. Durch den Widerstand des fixen Systems werden dabei in den Punkten C und D Kräfte aufgehoben, welche normal zu den Richtungen des Gleitens, und die daher Reibung erzeugende Drucke sind; diese Kräfte bezeichnen wir mit C und D, dann entstehen in den Punkten C und D die Reibungswiderstände μC und $\mu' D$, wenn μ und μ' die betreffenden Reibungs-Koeffizienten sind. Diese Reibungswiderstände wirken in Richtungen, die der Verschiebung entgegengesetzt sind. Offenbar wird in dem Zustande des Systems nichts geändert, wenn wir in dem Punkte C das fixe System fortgenommen, und dafür die durch dasselbe herbeigeführten Widerstände, nämlich die Reibung μC und den, dem aufgehobenen Druckantheil gleichen und entgegengesetzten Widerstand $-C$ als angebrachte Kräfte wirksam denken. Nun verfahren wir nach der Methode des § 97, indem wir die sämmtlichen Kräfte nach der Richtung des Gleitens des Punktes D und normal dazu zerlegen. Die Summe der Normaldrucke giebt den Reibung erzeugenden Druck D.



Indem wir die Richtung DA als positiven Zweig der ersten Axe, die Richtung DF als positiven Zweig der zweiten Axe ansehen, und die Winkel bestimmen, welche nach § 77 die Kraftrichtungen mit der Richtung DA bilden, finden wir als auf das bewegliche System angebrachten Kräfte:

1) die bewegende Kraft G unter dem Winkel $(180^\circ - \gamma)$;

2) den Widerstand des fixen Systems in dem andern Stützpunkte als Kraft C unter dem Winkel $(90^\circ - \alpha)$;

3) den Reibungswiderstand μC unter dem Winkel $(360^\circ - \alpha)$.

Es ist mithin der in dem Punkte D Reibung erzeugende Normaldruck:

$$D = G . \sin(180^\circ - \gamma) + C . \sin(90^\circ - \alpha) + \mu C . \sin(360^\circ - \alpha).$$

$$179) \begin{cases} D = G . \sin\gamma + C . \cos\alpha - \mu C . \sin\alpha \\ \quad = G . \sin\gamma + C . \sin\alpha . (\operatorname{cotang}\alpha - \mu) \end{cases}$$

und der auf Gleiten des Punktes D wirkende Druck:

$$K = G . \cos(180^\circ - \gamma) + C . \cos(90 - \alpha) + \mu C . \cos(360^\circ - \alpha) - \mu' D.$$

$$179\text{a)} \begin{cases} K = -G . \cos\gamma + C . \sin\alpha + \mu . C . \cos\alpha - \mu' D \\ \quad = -G . (\cos\gamma + \mu' . \sin\gamma) + C . \sin\alpha . [1 + \operatorname{cotang}\alpha . (\mu - \mu') + \mu . \mu']. \end{cases}$$

Hierdurch würde der Druck K, der auf Gleiten des Punktes D wirkt bestimmt, und folglich auch der gleich grofse aber entgegengesetzt im Punkte D, parallel mit AB anzubringende Druck, der erforderlich ist, um das System im Gleichgewicht zu halten, bekannt sein, wenn der Druck C bekannt wäre. Um den Druck C zu ermitteln dient die Momenten-Gleichung. Denn nehmen wir den Punkt D als Anfangspunkt des Koordinatensystems, so haben die Koordinaten der Angriffspunkte von G, C und μC folgende Werthe:

Die Koordinaten des Angriffspunktes von G sind

$$x = n . \cos\beta; \quad y = n . \sin\beta,$$

die Koordinaten des Punktes C sind

$$x' = l . \cos\beta; \quad y = l . \sin\beta,$$

und folglich hat man für das Gleichgewicht gegen Kippen:

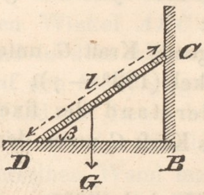
$$G . \sin\gamma . x - G . \cos\gamma . y + (C . \cos\alpha - \mu . C . \sin\alpha) . x' \\ + (C . \sin\alpha + \mu . C . \cos\alpha) . y' = 0$$

$$G . n . (\sin\gamma . \cos\beta - \cos\gamma . \sin\beta) + C . l . (\cos\alpha . \cos\beta - \mu . \sin\alpha . \cos\beta \\ + \sin\alpha . \sin\beta + \mu . \cos\alpha . \sin\beta) = 0,$$

folglich:

$$179\text{b})\quad C = \frac{n}{l} \cdot G \cdot \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\mu \cdot \sin(\beta + \alpha) - \cos(\beta + \alpha)}.$$

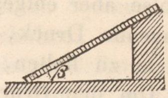
Indem wir nun den Werth 179b) in die Gleichung 179a) setzen, ergiebt sich der Druck, welcher auf Gleiten wirkt. Soll Gleichgewicht vorhanden sein, lediglich durch die passiven Widerstände allein, so mufs dieser Druck Null werden. Die Rechnung in den allgemeinen Werthen giebt für die Lösung sehr komplizirte Ausdrücke. Wir wenden dagegen die eben gefundenen Gesetze beispielsweise auf den Fall an, dafs G die Schwerkraft ist, die Wand DB horizontal, die Wand BC vertikal und $\mu = \mu'$ ist; dann ist $\alpha = 90^0$; $\gamma = 90^0$ folglich:



$$180)\quad \begin{cases} C = \frac{n}{l} \cdot G \cdot \frac{1}{\operatorname{tang}\beta + \mu} \\ D = G \cdot \left(1 - \frac{n}{l} \cdot \frac{\mu}{\operatorname{tang}\beta + \mu}\right) \\ K = G \cdot \left(\frac{n}{l} \cdot \frac{1 + \mu^2}{\operatorname{tang}\beta + \mu} - \mu\right). \end{cases}$$

Soll nun das System durch die passiven Widerstände allein im Gleichgewicht sein, so ist $K = 0$, folglich:

$$180\text{a})\quad \operatorname{tang}\beta = \frac{n}{l} \cdot \frac{1 + \mu^2}{\mu} - \mu.$$



Wenn dagegen der Balken l in den Punkt C nur aufliegen soll, nicht angestützt ist, so ist in den obigen Gleichungen zu setzen $\alpha = 180^0 - \beta$ und man hat nach Gleichung 179), 179a) und 179b):

$$181)\quad \begin{cases} C = \frac{n}{l} \cdot G \cdot \cos\beta \\ D = G \cdot \left\{1 - \frac{n}{l}\ (\cos\beta^2 + \mu \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta)\right\} \\ K = G \cdot \left\{\frac{n}{l} \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta \cdot (1 + \mu^2) - \mu\right\}. \end{cases}$$

Wenn Gleichgewicht durch die passiven Widerstände allein statt finden soll, so mufs $K = 0$ sein, und dann folgt:

$$181\text{a})\quad \begin{cases} \sin\beta \cdot \cos\beta = \tfrac{1}{2}\sin 2\beta = \frac{l}{n} \cdot \frac{\mu}{1 + \mu^2} \\ \sin 2\beta = \frac{l}{n} \cdot \sin 2\vartheta, \end{cases}$$

wenn man unter ϑ den **Reibungswinkel** versteht, und für μ den Werth tang ϑ setzt (Gleichung 166a, S. 203).

2. Quetschwalzen.

Zwei Quetschwalzen von gleichen Halbmessern r bewegen sich gegen einander; die kürzeste Entfernung der Peripherien beider Walzen sei e; es wird ein Stück A, dessen Dicke $ab = \delta$ ist in einer Richtung, die normal zur Centrallinie ist gegen die beiden Walzen geschoben, und zwar mit einem Druck P.

Unter welchen Umständen werden die Walzen das Stück erfassen, und zwischen sich hindurchziehen?

Wir zerlegen den Druck P in zwei parallele Drucke, die durch die Berührungspunkte a und b gehen, und von denen jeder $= \frac{1}{2}P$ ist. Nun haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

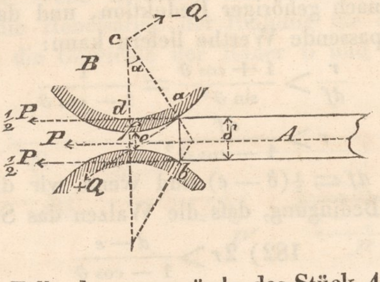
a) entweder das Stück A ist absolut fest, und unterliegt keiner Formveränderung, oder:

b) das Stück A läfst sich komprimiren, und die Dicke desselben ab kann vermindert werden.

Im **ersten** Falle ist gar keine Vorwärtsbewegung des Stückes A gegen die Walzen möglich, der ganze Druck $\frac{1}{2}P$ wird in jedem Berührungspunkt aufgehoben, und es bildet sich ein Reibungswerth $\mu \cdot \frac{1}{2}P$, in a und b normal zur Richtung von P, dessen Hebelsarm $r \cdot \sin\alpha$ ist, und welcher also mit dem Moment:

$$\mu \cdot \tfrac{1}{2}P \cdot r \cdot \sin\alpha$$

der Drehung jeder Walze entgegenwirkt.



Im **andern** Falle dagegen würde das Stück A in der Richtung aQ gegen die Walze (selbst wenn dieselbe still stände) abgleiten können; der Druck W, welcher sich der Formveränderung des Stückes in der Richtung ab entgegensetzt ist also nach dieser Richtung und normal dazu zu zerlegen in die beiden Drucke $W.\sin\alpha$ und $W.\cos\alpha$. Dieser letztgenannte Druck wird durch den Widerstand der Walze aufgehoben, erzeugt daher die Reibung $\mu . W . \cos \alpha$, und es bleibt folglich ein Bestreben auf Gleiten, welches sich ausdrückt durch:

$$W . \sin \alpha - \mu . W . \cos \alpha = W . \cos \alpha . (\text{tang}\, \alpha - \mu).$$

Ist $\text{tang}\, \alpha > \mu$ so wird das System A mit einem der Richtung aQ entgegengesetzten Druck gegen die Walzen sich verschieben, wenn aber $\text{tang}\, \alpha \overline{\overline{<}} \mu$ ist, so wird eine Verschiebung des Stückes A gegen die Walze nicht statt finden, das Stück A wird mit der Walze fest zusammenhängen, und es wird daher das Stück A in Ruhe sein, wenn die Walze in Ruhe ist: dagegen mufs das Stück A der Bewegung der Walze folgen, wenn die Walze sich bewegt. Die Bedingung also, unter welcher das Stück A der Bewegung der Walze folgt, ist gegeben durch die Bedingung, dafs

$$\text{tang}\, \alpha < \mu \text{ oder } \text{cotang}\, \alpha > \frac{1}{\mu}$$

sei. Nun ist:

$$\text{cotang}\, \alpha = \frac{cd}{da} = \frac{r - df}{\sqrt{[(2r - df).df}}.$$

Setzen wir diesen Werth für $\text{cotang}\, \alpha$ ein, so ergiebt sich als Bedingungs-Gleichung:

$$(r - df)^2 > \frac{1}{\mu^2} . (2r . df - df^2)$$

$$r^2 - 2r . df . \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) > - df^2 . \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right),$$

und daraus:

$$\frac{r}{df} > \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) . \left\{1 \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \mu^2}}\right\}.$$

Führen wir anstatt μ den Reibungswinkel ϑ ein, indem wir setzen:

$$\mu = \text{tang}\, \vartheta,$$

so ergiebt sich nach gehöriger Reduktion, und da nur das positive Zeichen passende Werthe liefern kann:

$$\frac{r}{df} > \frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta^2} = \frac{1}{1 - \cos \vartheta}$$

$$r > \frac{df}{1 - \cos \vartheta},$$

nun ist offenbar $df = \frac{1}{2}(\delta - e)$ und wenn wir dies einsetzen, so ergiebt sich als Bedingung, dafs die Walzen das Stück A mitziehen.

$$182)\quad 2r > \frac{d - e}{1 - \cos \vartheta}$$

d. h. Wenn die Quetschwalzen ein gegen dieselben geführtes Stück erfassen und durchführen sollen, so mufs der Durchmesser der Quetschwalzen gröfser sein, als die Differenz zwischen der Dicke des Stückes und der kürzesten Entfernung der Peripherieen der Walzen, dividirt durch den Sinus versus des Reibungswinkels.

Setzen wir voraus, dafs kein Gleiten zwischen den Berührungspunkten a und b und den Walzen statt finden kann, so ist das Stück A und die Walzen als ein zusammenhängendes System zu betrachten; reduziren wir nun das Kräftepaar, welches auf Drehen jeder Walze wirkt auf die beiden Kräfte $+Q$ und $-Q$, so würden die Punkte a und b als Angriffspunkte der Kräfte $+Q$ auf das Stück A zu betrachten sein, und wenn wir die Kraft Q in dem Punkte a in die beiden Komponenten $Q.\cos\alpha$ und $Q.\sin\alpha$ zerlegen, so wirkt in dem Punkte A die Kraft:

$$Q.\cos\alpha + \tfrac{1}{2}P$$

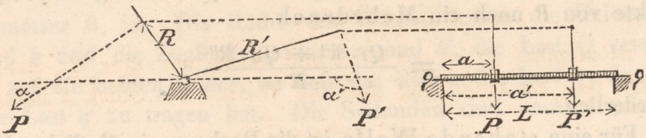
auf unterziehen des Stückes A nach der Richtung der Walzen, und die Kraft:

$$Q.\sin\alpha,$$

welche durch die ihr gleiche und entgegengesetzte Kraft $-Q.\sin\alpha$ in dem Punkte b im Gleichgewicht gehalten wird, nimmt die Festigkeit des Stückes auf Zerdrücken in Anspruch. Diese Kraft mufs gröfser sein, als die Kraft mit welcher das System A einer Formveränderung widersteht.

3. Axenreibung.

Auf einer liegenden Welle, die in zwei Lagern geht, und deren Länge l ist, sitzen zwei Räder von den Halbmessern R und R' in Entfernungen a und a' von dem einen Endpunkte; an den Peripherieen der Räder wirken die Drucke P und P' in Ebenen, die normal zur Welle sind, aber so, dafs die Drucke mit einer horizontalen, zu der Welle normalen Koordinatenaxe die Winkel α und α' bilden; die Hebelsarme der Reibung für die Wellenzapfen sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$; die Gewichte der Räder G und G', das Gewicht der Welle G''.



Das System soll sich im Sinne des Druckes P drehend bewegen, welches ist das statische Moment der Reibung? welches das auf Drehung wirkende Moment?

Wir haben es hier mit einem System mit fixer Axe zu thun und reduziren die Drucke zunächst auf die fixen Punkte, indem wir durch den ersten fixen Punkt eine horizontale (erste) zur Welle normale und eine vertikale (zweite) Axe annehmen. Wir haben mit Rücksicht auf Gleichung 142b), § 79:

$$183)\quad \begin{cases} Q_I' = \dfrac{P\,.\cos\alpha\,.(L-a) + P'\,.\cos\alpha'\,.(L-a')}{L} \\ Q_I'' = \dfrac{(P\,.\sin\alpha + G)\,.(L-a) + (P'\,.\sin\alpha' + G')\,.(L-a')}{L} + \tfrac{1}{2}G''. \end{cases}$$

$$183\,a)\quad \begin{cases} Q_{II}' = \dfrac{P\,.\cos\alpha\,.\,a + P'\,.\cos\alpha'\,.\,a'}{L} \\ Q_{II}'' = \dfrac{(P\,.\sin\alpha + G)\,.\,a + (P'\,.\sin\alpha' + G')\,.\,a'}{L} + \tfrac{1}{2}G. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dafs der resultirende Druck im ersten fixen Punkt ist:

$$183\,b)\quad Q_I = \sqrt{(Q_I'^2 + Q_I''^2)}$$

und im zweiten fixen Punkt:

$$183\,c)\quad Q_{II} = \sqrt{(Q_{II}'^2 + Q_{II}''^2)}.$$

Hiernach ist das statische Moment der Reibung:

$$183\,d)\quad \mathfrak{R}'\,.\,Q_I + \mathfrak{R}'\,.\,Q_{II}$$

und das auf Drehung wirkende Moment:

$$184)\quad P\,.\,R - (P'\,.\,R' + Q_I\,.\,\mathfrak{R}' + Q_{II}\,.\,\mathfrak{R}'').$$

An der Grenze des drehenden Gleitens ist dies Moment gleich Null, wir nennen den Werth von P, welcher dem Grenzzustand des Gleitens entspricht P_0, und es ergiebt sich demnach:

$$184\,a)\quad \begin{cases} P_0 = \dfrac{P'\,.\,R' + Q_I\,.\,\mathfrak{R}' + Q_{II}\,.\,\mathfrak{R}''}{R} \\ = P'\,.\,\dfrac{R'}{R} + \dfrac{Q_I\,.\,\mathfrak{R}' + Q_{II}\,.\,\mathfrak{R}''}{R}. \end{cases}$$

Mit Vernachlässigung der Zapfenreibung würde man nur haben für den Zustand des Gleichgewichts:

$$P_0 = P'\,.\,\frac{R'}{R}$$

es ist folglich zur Ueberwindung der Zapfenreibung im Angriffspunkte von P noch ein Mehrdruck

$$= \frac{Q_I\,.\,\mathfrak{R}'' + Q_{II}\,.\,\mathfrak{R}''}{R}$$

erforderlich.

Für eine stehende Welle ist die Rechnung in ähnlicher Weise durchzuführen. Man hat anzunehmen, dafs der untere Zapfen den ganzen Vertikaldruck auszuhalten hat.

Wenn die Richtungen von P und P' vertikal, und die Hebelsarme der Reibung für beide Zapfen gleich grofs sind, so hat man $\alpha = \alpha' = 90^\circ$, und man hat in den beiden fixen Punkten nur Vertikaldrucke, nämlich:

$$184\text{a)}\quad \begin{cases} Q_I = \dfrac{(P+G).(L-a)+(P'+G').(L-a')}{L} + \frac{1}{2}G'' \\ Q_{II} = \dfrac{(P+G).a+(P'+G').a'}{L} + \frac{1}{2}G'' \end{cases}$$

$$\text{und } Q_I + Q_{II} = P + P' + G + G' + G'' = Q,$$

folglich:

das statische Moment der Reibung:

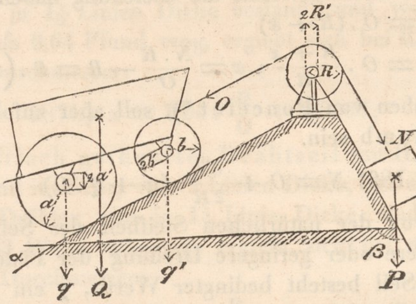
$$\mathfrak{R}.Q,$$

und daher der Werth von P an der Grenze des Gleichgewichts:

$$P = P'.\frac{R'}{R} + Q.\frac{\mathfrak{R}}{R}.$$

Gleichgewicht an der Rolle — Steifheit der Seile; Gleichgewicht auf zwei geneigten Ebenen — Wagenrollen.

§ 103. Es seien zwei geneigte Ebenen gegeben, deren Neigungswinkel gegen die Horizontale α und β sind, auf der einen bewegt sich ein Wagen, dessen Ladung Q ist, auf der andern ein gleitendes Gewicht P. Beide sind durch ein Seil verbunden, das über eine Rolle vom Halbmesser R geht, die in Zapfen ruht, deren



Halbmesser $R_{\prime}$ ist. Die Räder des Wagens haben die Halbmesser a und b und die Zapfenhalbmesser a' und b', die Last Q vertheilt sich auf die beiden Räder, so daſs das Rad a die Last q, das Rad b die Last q' zu tragen hat. Die Seilenden sind parallel mit den geneigten Ebenen.

Unter welchen Bedingungen ist das System im Grenzzustande des Gleichgewichts?

1. Gleichgewicht an der Rolle.

Die Spannungen der Seilenden seien N und O. Wir wollen annehmen, daſs die Bewegung im Sinne des Gewichtes P oder der

Spannung N eintreten könne, und nennen dann die Spannung N die **Kraft**, die Spannung O dagegen die **Last**.

Wäre das Seil vollkommen biegsam, so würde die Kraft und die Last jede an einem Hebelsarm wirken, der gleich R ist. Erfahrungsmäfsig aber bewirkt der Widerstand, den die Steifheit des Seils bei dem Auflegen auf die Rolle darbietet, dafs sich dasselbe ein wenig von der Rolle absperrt und auf diese Weise den Hebelsarm der Last vergröfsert. Dieser gröfsere Werth des Hebelsarms der Last sei $(R + x)$. Nach Versuchen von Eytelwein ist $x = \frac{\delta^2}{2}$ zu setzen, wenn man unter δ den Durchmesser des Seils in Zollen, unter R den Halbmesser der Rolle in Fufsen versteht, oder

$$185)\quad x = \frac{1}{3500} \cdot \delta^2$$

wenn δ in preufsischen Linien,
R in preufsischen Fufsen

genommen wird.

Man würde also mit Vernachlässigung der Zapfenreibung für den Zustand des Gleichgewichts die Gleichung haben:

$$185\text{a})\quad \begin{cases} N.R = O.(R + x) \\ N = O.\frac{R+x}{R};\ x = \frac{N.R}{O} - R = R.\left(\frac{N}{O} - 1\right). \end{cases}$$

Nach Angaben von Poncelet*), soll aber zufolge von Versuchen von Coulomb sein.

$$186)\quad N = O + \frac{\delta^\psi}{2R} \cdot (\varphi + \chi \cdot O)$$

worin φ ein von der natürlichen Steifheit des Seils abhängiger, durch die gröfsere oder geringere Drehung der Fäden und Litzen aus denen das Seil besteht bedingter Werth, χ ein ebenfalls konstanter, auf die Zunahme der Steifheit durch die Belastung O sich beziehender Koeffizient, und ψ ein Exponent der sich mit dem augenblicklichen Zustande des Seils ändert, sein soll. Hiernach würde man haben, indem man den Werth N in die Gleichung:

$$x = R.\left(\frac{N}{O} - 1\right)$$

einsetzt:

$$186\text{a})\quad x = \frac{\delta^\psi}{2} \cdot \left(\frac{\varphi}{O} + \chi\right).$$

---

*) Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen von J. V. Poncelet, deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse I, § 197.

Wenn man δ in preufsischen Linien und R in preufsischen Fufsen, O in preufsischen Pfunden nimmt, so ergiebt sich nach den Coulomb'schen Versuchen:

$$\text{für neue Seile } x = \delta^{1,74} . \left(\frac{1,19}{O} + 0,05\right)$$

$$\text{für alte Seile } x = \delta^{1,4} . \left(\frac{0,57}{O} + 0,012\right).$$

Nach den Versuchen von Weisbach, welche derselbe in seiner Ingenieur und Maschinen-Mechanik Th. I, § 181 mittheilt, berechnet sich unter denselben Voraussetzungen der Maafs- und Gewichtseinheiten:

1) Für ein getheertes Hanfseil von 19,2 Linien Stärke, gelegt um Scheiben von 4 bis 6 Fufs Durchmesser:

$$187)\quad x = 3,2 . \frac{R}{O} + 0,018;$$

2) für ein neues ungetheertes Hanfseil von 9 Linien Stärke und eine Rolle von $1\frac{3}{4}$ Fufs Durchmesser:

$$187\text{a})\quad x = 0,18 . \frac{R}{O} + 0,0052;$$

3) für ein Drahtseil von 8 Linien Dicke, welches aus 16 Drähten von je $1\frac{1}{2}$ Linien Dicke bestand, und wovon jeder laufende Fufs 0,64 Pfund wog, ergiebt sich bei Rollen von 4 bis 6 Fufs Durchmesser:

$$187\text{b})\quad x = 1,04 . \frac{R}{O} + 0,0067;$$

4) für ein frisch getheertes Drahtseil mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile, von 7 Linien Dicke, bestehend aus 4 mal 4 = 16 Drähten von je $1\frac{1}{5}$ Linie Dicke, und pro laufenden Fufs 0,63 Pfund wiegend, ergiebt sich bei einer Rolle von $1\frac{3}{4}$ Fufs Durchmesser:

$$187\text{c})\quad x = 1,30 . \frac{R}{O} + 0,00022.$$

Nachdem auf die eine oder die andere Weise der Werth von x bestimmt ist, ergiebt sich das Moment der Last $= O(\mathfrak{R} + x)$.

Die Spannung N hat aber aufser dem Moment der Last O noch dasjenige der Reibung zu überwinden. Nennen wir den, aus der Form des Zapfens und des Bogens zu bestimmenden, Hebelsarm der Reibung $\mathfrak{R}$ (§ 98, S. 203), und den Reibungswerth Θ, so ist das Moment der Reibung $\Theta\mathfrak{R}$, folglich haben wir die Gleichung für den Grenzzustand der Bewegung:

$$188)\quad NR = O(R + x) + \Theta\mathfrak{R},$$

oder da offenbar die Resultirende aus dem Druck N und dem Druck

O der „Reibung erzeugende Druck" ist, die Richtungen von N und O, wie eine leichte Betrachtung der Figur zeigt, einen Winkel einschliefsen, der gleich $(\beta - \alpha)$ ist, so ist:

$$188\text{a)}\quad \Theta = \mu \,.\, \sqrt{\left\{N^2 + O^2 + 2N.O.\cos(\beta - \alpha)\right\}}\,.$$

Indem wir diesen Werth in die vorige Gleichung einsetzen, $O\,(R + x)$ auf die linke Seite schaffen, dann beide Seiten quadriren und nach N auflösen, ergiebt sich:

$$188\text{b)}\quad N = O.\frac{R.(R+x)+\mu^2.\mathfrak{R}^2.\cos(\beta-\alpha)}{R^2-\mu^2.\mathfrak{R}^2}.\left\{1 \pm \sqrt{\left[1-\frac{[R^2-\mu^2.\mathfrak{R}^2].[(R+x)^2-\mu^2.\mathfrak{R}^2]}{[R.(R+x)+\mu^2.\mathfrak{R}^2.\cos(\alpha+\beta)]^2}\right]}\right\}.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen wird in dem am häufigsten vorkommenden Fällen sehr klein, so dafs man ihn vernachlässigen kann. Die Gleichung für N geht dann über in:

$$188\text{c)}\quad N = O\,.\,\frac{R\,.\,(R + x) + \mu^2\,.\,\mathfrak{R}^2\,.\,\cos(\beta - \alpha)}{R^2 - \mu^2\,.\,\mathfrak{R}^2}.$$

Diese Gleichung giebt das Verhältnifs zwischen N und O für den Grenzzustand des Gleichgewichts. Nun ist aber offenbar:

$$N = P\,.\,[\sin(180 - \beta) - \mu\,.\,\cos(180 - \beta)].$$

$$188\text{d)}\quad N = P\,.\,(\sin\beta + \mu\,.\,\cos\beta) = P\,.\,\cos\beta\,.\,(\operatorname{tang}\beta + \mu)$$

und O ist durch folgende Betrachtung zu finden:

2. Gleichgewicht des Wagens auf der geneigten Ebene.

Die Drucke q und q', welche jede der Wagenaxen zu tragen hat, zerlegen wir parallel mit der geneigten Ebene und normal dazu; es ergiebt sich:

parallel mit der geneigten Ebene

$$q\,.\,\sin\alpha \text{ und } q'\,.\,\sin\alpha,$$

normal zu derselben

$$q\,.\,\cos\alpha \text{ und } q'\,.\,\cos\alpha.$$

Die letztgenannten Drucke werden durch den Widerstand des fixen Systems aufgehoben, sie erzeugen aber Reibungswiderstände in den Axen, deren Momente (wenn man den Hebelsarm der Reibung nach Gleichung 169d, S. 211, gleich dem Halbmesser der Rollen setzt), sich ausdrücken durch:

$$\mu'\,.\,q\,.\,\cos\alpha\,.\,a' \text{ und } \mu'\,.\,q'\,.\,\cos\alpha\,.\,b'$$

indem man nämlich unter μ' den Reibungs-Koeffizienten für die Axreibung versteht. Die Kräftepaare, die durch diese Momente dargestellt werden, lassen sich auf zwei parallele und entgegengesetzte Kräfte zurückführen, die parallel mit der betreffenden geneigten Ebene sind, und von denen die eine durch den Mittelpunkt der Räder, die andere durch den Berührungspunkt derselben geht. Diese Drucke wirken dem Rollen entgegen, müssen also von der Spannung O überwunden werden, sie sind, absolut betrachtet:

$$\mu' . q . \cos\alpha . \frac{a'}{a} \text{ und } \mu' . q' . \cos\alpha . \frac{b'}{b} .$$

Wenden wir nun die Gesetze des Rollens an, so ist der Druck, welcher im Mittelpunkt der Axe wirksam, parallel mit der geneigten Ebene dem Aufwärtsrollen widersteht, nach Gleichung 178b S. 227, und wenn wir die Richtung aufwärts als positiv betrachten, in jedem Rade:

$$189)\quad -\frac{q . \sin\alpha . a}{a} - \frac{q . \cos\alpha . \chi}{a} \text{ und } -\frac{q' . \sin\alpha . b}{b} - \frac{q' . \cos\alpha . \chi}{b},$$

wobei die rollende Reibung, die dem Rollen immer entgegenwirkt, mit entsprechendem Vorzeichen genommen ist. Soll nun der Druck O dem Grenzzustande für eine Bewegung des Wagens aufwärts entsprechen, so mufs sein:

$$189\text{a})\quad O - \Big(\mu' . q . \cos\alpha . \frac{a'}{a} + \mu' . q' . \cos\alpha . \frac{b'}{b} + \frac{q . \sin\alpha . a}{a} + \frac{q . \cos\alpha . \chi}{a} + \frac{q' . \sin\alpha . b}{b} + \frac{q' . \cos\alpha . \chi}{b}\Big) = 0.$$

Daher:

$$189\text{b})\quad O = \frac{q}{a} . [\cos\alpha . (\mu' . a' + \chi) + a . \sin\alpha] + \frac{q'}{b} . [\cos\alpha . (\mu' . b' + \chi) + b . \sin\alpha].$$

Wenn sämmtliche Räder gleiche Halbmesser und gleiche Zapfenhalbmesser haben, so folgt, mit Rücksicht darauf, dafs $q + q' = Q$ ist:

$$189\text{c})\quad O = \frac{Q}{a} . [\cos\alpha\,(\mu' . a' + \chi) + a . \sin\alpha].$$

Setzt man diesen letzten Werth, den wir der Kürze wegen beibehalten wollen, in den Werth für N (Gleichung 188c), so ergiebt sich schliefslich, mit Rücksicht auf Gleichung 188d):

$$190)\quad \frac{P}{Q} = \frac{[\cos\alpha . (\mu' . a' + \chi) + a . \sin\alpha]\ [R . (R + x) + \mu^2 . \mathfrak{R}^2 . \cos(\beta - \alpha)]}{a . (R^2 - \mu^2 . \mathfrak{R}^2) . \cos\beta . (\operatorname{tang}\beta + \mu)}.$$

Mit Vernachlässigung aller passiven Widerstände würde sich ergeben:

$$190\text{a})\quad \frac{P}{Q} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Wäre der Wagen auf der geneigten Ebene frei, und könnte durch seine Ladung Q herabrollen, so wäre der Druck, welcher auf Herabrollen wirkt, wie sich leicht entwickeln läfst, indem man die Gesetze des Rollens (§ 101) und die vorige Entwickelung beachtet:

$$191)\begin{cases} Q_{(e)} = \frac{Q}{a}\,.\,[a.\sin\alpha - \cos\alpha\,.\,(\mu'.a' + \chi)] \\ \quad = Q\,.\cos\alpha\,.\left(\operatorname{tang}\alpha - \frac{\mu'.\alpha + \chi}{a}\right). \end{cases}$$

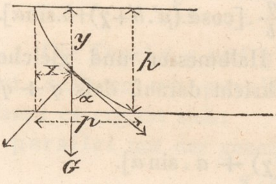
Ist nun $J_{,} = M'.\varrho_{,}^{2}$ das Trägheitsmoment der Räder, und M die Gesammtmasse des ganzen Systems, so ist nach Gleichung 177) das Aenderungsmaafs der fortschreitenden Bewegung:

$$191\,a)\begin{cases} f = Q\,.\cos\alpha\,.\left(\operatorname{tang}\alpha - \frac{\mu'.a' + \chi}{a}\right).\frac{a^2}{J_{,} + M\,.\,a^2} \\ \quad = g\,.\,\frac{\cos\alpha\,.\left(\operatorname{tang}\alpha - \frac{\mu'.a' + \chi}{a}\right)}{1 + \frac{J_{,}}{M\,.\,a^2}} \end{cases}$$

indem man nämlich $Q = Mg$ setzt.

Reibungswiderstände beim Gleiten eines festen Systems auf einer Kurve, unter Einwirkung der Schwere.

§ 104. Denken wir ein festes System, welches durch die Schwere gleitet. Die Gleichung der Kurve sei für horizontale und vertikale Koordinatenaxen gegeben, und es mögen y die vertikalen Ordinaten bedeuten. Zerlegen wir das Gewicht des Systems nach der Tangente zur Kurve und normal dazu, so ist die Kraft, mit welcher das Stück gleitet nach § 97. S. 202



$$G\,.\cos\alpha - \mu\,.\,G\,.\sin\alpha,$$

wenn α der Winkel ist, welcher die Tangente zur Kurve mit der Richtung der Schwere macht. Es ist folglich die Arbeit, welche die Schwere verrichtet, indem das Stück das Kurvenelement ds durchläuft:

$$G\,.\,(ds\,.\cos\alpha - \mu\,.\,ds\,.\sin\alpha).$$

Nun ist aber offenbar $ds\,.\cos\alpha = dy$ und $ds\,.\sin\alpha$, ist die Projektion des Kurvenelementes auf die Horizontalebene; bezeichnen wir dieses Projektionselement mit dp, so ist das Leistungselement:

$$G\,.\,(dy - \mu\,.\,dp),$$

folglich die Gesammtleistung:

$$G\int(dy - \mu\,.\,dp),$$

welches Integral zwischen den entsprechenden zusammengehörigen Werthen von y und p zu nehmen ist. Sind x' und p' und x'' und

p'' solche zusammengehörigen Werthe, so ist die Leistung der Schwere auf das bewegliche System, indem dasselbe aus der einen Lage in die andere übergeht.

$$192)\quad G\int(dy - \mu . dp) = G.(y' - y'') - \mu . G.(p' - p'')$$
$$= G.[y' - y'' - \mu . (p' - p'')].$$

Diese Gleichung drückt folgendes merkwürdige Gesetz aus:

Wenn ein festes System durch die Schwere bewegt aus einer horizontalen Ebene in eine andere übergeht, indem es auf einer beliebigen Kurve gleitet, so ist die Arbeit der gleitenden Reibung immer gleich dem Produkt aus dem Gewicht, multiplizirt mit dem Reibungs-Koeffizienten und der Projektion des durchlaufenen Kurvenstückes auf eine Horizontalebene.

Ist v'' die Geschwindigkeit, welche das System in dem Punkte besitzt, dessen vertikale Ordinate y'' ist, und v' die Geschwindigkeit des Systems in dem Punkte, dessen vertikale Ordinate y' ist, so hat man nach Gleichung 49):

$$G . (y' - y'') - \mu . G . (p' - p'') = \tfrac{1}{2} M . (v'^2 - v''^2),$$

folglich (da $G = Mg$ ist):

$$192\text{a})\quad \begin{cases} (y' - y'') = \dfrac{v'^2 - v''^2}{2g} + \mu . (p' - p'') \\ v' = \sqrt{\{2g . [y' - y'' - \mu . (p' - p'')] + v''^2\}}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen kann man die Höhe finden $(y' - y'')$, welche einer gegebenen Endgeschwindigkeit v' entspricht, oder die Endgeschwindigkeit v', welche einer gewissen Fallhöhe $(y' - y'')$ entspricht.

Die Höhe $y' - y''$ pflegt man die Geschwindigkeitshöhe zu nennen; durch die Reibung wird die Geschwindigkeitshöhe um das Stück $\mu(p' - p'')$ vermindert. Dieses Stück nennt man den Verlust an Geschwindigkeitshöhe, und es folgt hieraus der Satz:

Wenn ein System durch die Schwere bewegt gleitend von einem höher gelegenen Punkte in einen tiefer gelegenen hinabsinkt, so ist der Verlust an Geschwindigkeitshöhe gleich dem Reibungs-Koeffizienten multiplizirt mit der Horizontalprojektion des gleitend durchlaufenen Weges, und es ist dabei ganz gleichgiltig, welche Form dieser Weg selbst hat.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeitshöhe oder den Vertikal-abstand der beiden Punkte mit h, die Projektion des durchlaufenen Weges auf eine Horizontalebene mit p, so gehen die Gleichungen über in:

$$192b)\left\{\begin{array}{l} L\ (\text{Leistung}) = G.(h - \mu p) \\ h = \frac{v'^2 - v''^2}{2g} + \mu p \\ v' = \sqrt{\left\{2g.(h - \mu p) + v''^2\right\}}. \end{array}\right.$$

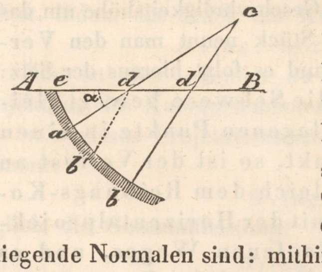
Wenn dagegen ein festes System der Schwere entgegen sich mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit v'' aufwärts bewegt, so ergiebt sich leicht die Steighöhe:

$$192c)\left\{\begin{array}{l} h = \frac{v''^2 - v'^2}{2g} - \mu p \\ \text{und die Geschwindigkeit in einer gewissen Höhe} \\ v' = \sqrt{\left\{v''^2 - 2g.(h + \mu p)\right\}}. \end{array}\right.$$

Reibungswiderstände beim Gleiten eines festen Systems auf einer Kurve, wenn dasselbe mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit sich bewegt, und sonst keine bewegenden Kräfte auf dasselbe einwirken.

§ 105. Gestalten wir nunmehr die Aufgabe anders: Es bewege sich ein festes System ohne Einwirkung der Schwere auf einer beliebigen Kurve, indem es in irgend einem Punkte der Kurve die Tangentialgeschwindigkeit c hat: welchen Einfluſs hat die Reibung auf die Aenderung der Geschwindigkeit c, wenn auch sonst keine bewegenden Kräfte auf das System einwirken?

Es sei in nebenstehender Figur $ds = ab$ ein beliebiges Element der Kurve; ac und bc seien Normalen im Anfangs- und Endpunkte dieses unendlich kleinen Elementes, so ist der Durchschnittspunkt dieser beiden Normalen der Mittelpunkt des Krümmungskreises des Elementes; den veränderlichen Winkel, welchen die Normalen zur Kurve mit einer beliebigen Axe z. B. AB bilden, nennen wir α, dann ist Winkel $ed'b = edb' = \alpha + d\alpha$, da ad und bd zwei unendlich nahe liegende Normalen sind: mithin ist Winkel $adb' = acb = d\alpha$. Nun können wir die Bewegung in dem Kurvenelement hervorgebracht denken durch eine Normalkraft, welche das gleitende Stück gegen die Kurve preſst, durch den Widerstand derselben aufgehoben



wird, folglich Reibung erzeugt, und durch eine Tangentialkraft. Die Normalkraft ist $\frac{M.c^2}{r}$ folglich die Reibung $= \frac{\mu M.c^2}{r}$, wenn r den Krümmungshalbmesser der Kurve bezeichnet. Dieser Reibungswerth ist als eine, normal zum Krümmungshalbmesser, also tangential wirkende, und die Geschwindigkeit c im Kurvenelement verzögernde Kraft zu denken, das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit, welches diese Kraft bedingt, ist daher in Bezug auf die Geschwindigkeit c negativ zu nehmen, und es ist also

$$f = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = -\frac{\mu.c^2}{r}.$$

Nun ist aber das Element der Geschwindigkeitsänderung auch gleich $f.dt$, und folglich haben wir

$$dc = f.dt = -\frac{\mu.c^2}{r}.dt,$$

da aber $dt = \frac{ds}{c}$, ferner $ds = r.d\alpha$ ist, so ergiebt sich, durch Einsetzung und nach gehöriger Umformung:

$$\frac{dc}{c} = -\mu.d\alpha,$$

und indem wir auf beiden Seiten integriren, ergiebt sich:

$$\int\frac{dc}{c} = -\mu\int d\alpha.$$

Nehmen wir das Integral rechts zwischen bestimmten Grenzen, so mufs auch das Integral links zwischen entsprechenden Grenzen gelten.

Wenn nun in irgend einem Punkte der Kurve, dessen Normale mit einer beliebig angenommenen Linie den Winkel α' bildet, die Geschwindigkeit des beweglichen Systems c' ist, und in irgend einem andern Punkte der Kurve bilde die Normale mit derselben Linie den Winkel α'', so findet sich die in diesem Punkte statt findende Geschwindigkeit durch die Gleichung:

$$\int_{c=c''}^{c=c'}\frac{dc}{c} = -\mu\int_{\alpha=\alpha''}^{\alpha=\alpha'} da$$

$$\log\text{nat}\,c'' - \log\text{nat}\,c' = -\mu.(\alpha'' - \alpha')$$

$$193)\quad\begin{cases}\log\text{nat}\,\dfrac{c'}{c''} = \mu.(\alpha'' - \alpha')\\[2ex] \dfrac{c'}{c''} = e^{\mu.(\alpha''-\alpha')}\\[2ex] c'' = \dfrac{c'}{e^{\mu.(\alpha''-\alpha')}}\end{cases}$$

In diesen Gleichungen bezeichnet c' die Geschwindigkeit in der Tangente zur Kurve in einem Punkte dessen Normale den Winkel α' mit einer beliebigen Linie macht; c'' die Geschwindigkeit, welche das gleitende System in einem andern Punkte besitzt, dessen Normale mit derselben Linie den Winkel α'' macht, wenn die Geschwindigkeitsänderung lediglich durch die Reibung bewirkt worden ist; e die Basis der natürlichen Logarithmen.

Ist die Kurve eine ebene Kurve, und nimmt man die Linie von welcher aus die Winkel α' und α'' gemessen sind in derselben Ebene, so ist $\alpha''-\alpha'$ der Winkel, welchen die beiden Normalen zur Kurve am Anfange und am Ende des betrachteten Weges mit einander bilden.

Die Arbeit der Reibung drückt sich offenbar aus durch

193a) $$\begin{cases} \tfrac{1}{2}M.(c''^2-c'^2) = -\tfrac{1}{2}M.(c'^2-c''^2) \\ \text{und indem wir für } c'' \text{ den oben gefundenen Werth setzen} \\ = -\tfrac{1}{2}M.c'^2.\left(1-\dfrac{1}{e^{2\mu.(\alpha''-\alpha')}}\right) = -\tfrac{1}{2}M.c'^2.\dfrac{e^{2\mu.(\alpha''-\alpha')}-1}{e^{2\mu.(\alpha''-\alpha')}}. \end{cases}$$

Hierin liegt folgendes Gesetz:

Wenn ein festes System in einer Kurve gleitet, ohne dafs bewegende Kräfte auf dasselbe ferner einwirken, so ist die durch die Reibung konsumirte Arbeit, indem das System einen gegebenen Bogen der Kurve durchläuft proportional der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit zu Anfang dieses Bogens und aufserdem eine logarithmische Funktion des Produkts aus dem Reibungs-Koeffizienten und der Differenz der Winkel, welche die Normalen im Anfangs- und im Endpunkt des Bogens mit einer gegebenen Linie bilden; im Uebrigen aber unabhängig von der Form der Kurve.

Aus der Gleichung $\dfrac{c'}{c''} = e^{\mu.(\alpha''-\alpha')}$

folgt auch, dafs bei einer gegebenen Kurve das Verhältnifs der Anfangsgeschwindigkeit zur Endgeschwindigkeit ein konstanter Werth ist, unabhängig von dem Werthe der Geschwindigkeiten, und nur abhängig von den Winkeln, welche die erste und letzte Normale mit einer gegebenen Linie bilden. Sind diese Normalen der Lage nach gegeben, so ist für alle äquidistanten Kurven zwischen denselben Krümmungsradien dies Verhältnifs constant.

Es versteht sich übrigens ganz von selbst, dafs diese Betrachtungen nur Giltigkeit haben können für solche Kurvenstücke, für welche die Integrationen zulässig sind, und dafs sie daher **nicht gelten können, wenn innerhalb des betrachteten Bogenstücks ein Wendepunkt der Kurve liegt.**

Die Untersuchungen der §§ **104** u. **105**, welche, soviel dem Verfasser bekannt ist, zwei bisher noch nicht aufgestellte Gesetze ergeben haben, dürften geeignet sein, auf die Theorie der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen, namentlich in gekrümmten Röhren Anwendung zu finden.

Tabellen über die Reibungs-Koeffizienten.

§ 106. I. Reibung ebener Flächen, nachdem sie einige Zeit mit einander in Berührung gewesen sind.

Berührungsflächen.	Lage der Fasern.	Zustand der Flächen.	Reibungs-Koeffizient μ.	Reibungswinkel ϑ.
Versuche von Morin.				
Eichenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,62	31° 48′
	parallel	mit trockener Seife abgerieben	0,44	23 45
	rechtwinklig	trocken	0,54	28 22
	rechtwinklig	mit Wasser benetzt	0,71	35 23
	Hirnholz des einen auf dem Längenholze des anderen	trocken	0,43	23 16
Eichenholz auf Ulmenholz	parallel	trocken	0,38	20 49
Ulmenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,69	34 37
	parallel	mit trockener Seife abgerieben	0,41	22 18
	rechtwinklig	trocken	0,57	29 41
Eschen-, Tannen-, Buchen- und Ebereschenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,53	27 56
Lohgares Leder auf Eichenholz	das Leder platt	trocken	0,61	31 23
	das Leder auf der hohen Kante	trocken	0,43	23 16
		mit Wasser benetzt	0,79	38 19
Schwarzes Riemenleder auf einer ebenen Fläche von Eichenholz	parallel	trocken	0,74	36 30
Schwarzes Riemenleder auf einer Trommel von Eichenholz	rechtwinklig	trocken	0,47	25 11
Geflochtener Hanf auf Eichenholz	parallel	trocken	0,50	26 34
	parallel	mit Wasser benetzt	0,87	41 2
Hanfne Seile auf Eichenholz	parallel	trocken	0,80	38 40
Schmiedeeisen auf Eichenholz	parallel	trocken	0,62	31 48
	parallel	mit Wasser benetzt	0,65	33 2
Gufseisen auf Eichenholz	parallel	mit Wasser benetzt	0,65	33 2
Messing auf Eichenholz	parallel	trocken	0,62	31 48
Liderung eines Kolbens von Rindleder auf Gufseisen	platt oder auf der hohen Kante	mit Wasser benetzt	0,62	31 48
		mit Oel, Talg oder Schweinefett	0,12	6 51
Schwarzes Riemenleder auf einer gufseisernen Rolle	platt	trocken	0,28	15 39
		mit Wasser benetzt	0,38	20 49
Gufseisen auf Gufseisen	....	trocken	0,16 *	9 6
Schmiedeeisen auf Gufseisen	....	trocken	0,19	10 46
Eichenholz, Ulmenholz, Hainbuchenholz, Schmiedeeisen, Gufseisen und Bronze, je zwei aufeinander.	....	mit Talg	0,10 **	5 43
		mit Oel oder Schweinefett	0,15 †	8 32

*) Die Flächen blieben etwas fettig.
**) Wenn die Berührung nicht lange genug gedauert hatte, um das Fett auszupressen.
†) Wenn die Berührung so lange gedauert hatte, dafs das Fett ausgeprefst war.

Berührungsflächen.	Reibungs-Koeffizient μ.	Reibungswinkel ϑ.
Versuche von Morin.		
Oolith auf Oolith	0,74	36° 30′
Muschelkalk auf Oolith	0,75	36 52
Ziegelstein auf Oolith	0,67	33 50
Eichenholz auf Oolith, das Holz vor Hirn	0,63	32 13
Schmiedeeisen auf Oolith	0,49	26 7
Muschelkalk auf Muschelkalk	0,70	35 0
Oolith auf Muschelkalk	0,75	36 52
Ziegelstein auf Muschelkalk	0,67	33 50
Schmiedeeisen auf Muschelkalk	0,42	22 47
Eichenholz auf Muschelkalk	0,64	32 38
Oolith auf Oolith, mit einer Zwischenlage von Mörtel, bestehend aus drei Theilen feinem Sande und einem Theile hydraulischem Kalk	0,74 *)	36 30
Weicher Kalkstein auf weichem Kalksteine, gut behauen	0,74	36 30
Harter Kalkstein auf dito, dito	0,75	36 52
Gewöhnlicher Ziegelstein auf dito, dito	0,67	33 50
Eichenholz, vor Hirn, auf dito, dito	0,63	32 13
Schmiedeeisen auf dito, dito	0,49	26 7
Harter Kalkstein auf hartem Kalksteine, gut behauen	0,70	35 0
Weicher Kalkstein auf dito, dito	0,75	36 52
Gewöhnlicher Ziegelstein auf dito, dito	0,67	33 50
Eichenholz, vor Hirn, auf dito, dito	0,64	32 37
Schmiedeeisen auf dito, dito	0,42	22 47
Weicher Kalkstein auf weichem Kalksteine mit frischem Mörtel	0,74	36 30
Versuche von verschiedenen anderen Beobachtern.		
Weicher Quadersandstein auf demselben (Rennie)	0,71	35 23
derselbe auf demselben, mit frischem Mörtel (Rennie)	0,66	33 26
Harter, polirter Kalkstein auf demselben	0,58	30 7
Kalkstein auf Kalkstein, beide Flächen mit dem Meifsel rauh gemacht (Bonchardi)	0,78	37 58
Gut bearbeiteter Granit auf rauhem Granit (Rennie)	0,66	33 26
derselbe mit frischem Mörtel (Rennie)	0,49	26 7
Hölzerner Kasten auf Steinpflaster (Regnier)	0,58	30 7
derselbe auf geschlagener Erde (Herbert)	0,33	18 16
Grob behauener Werkstein auf einer Unterlage von Thon	0,51	27 2
dito dito der Thon feucht und milde	0,34	18 47
dito dito der Thon feucht und mit dickem Sande bedeckt (Grève)	0,40	21 48

*) Nach einer Berührung von 10 bis 15 Minuten.

II. Reibung der Zapfen oder Axen auf ihren Lagern im Zustande der Bewegung.

Nach den Versuchen von Morin.

Berührungsflächen.	Zustand der Flächen.	Reibungs-Koeffizient μ, wenn die Schmiere erneuert wird: in der gewöhnlichen Weise.	ununterbrochen.	Reibungswinkel ϑ.
Gufseiserne Axen auf gufseisernen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett, Talg u. dünner Wagenschmiere bestrichen	0,07 bis 0,08	0,054	4° 0′ 4 35 3 6
	mit denselben Fetten u. Wasser	0,08	0,28	4 35 15 39 3 6
	mit Asphalt	0,054	0,19	10 46
	fettig	0,14	—	7 58
	fettig und angefeuchtet	0,14	—	7 58
Gufseiserne Axen auf bronzenen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett, Talg und dünner Wagenschmiere	0,07 bis 0,08	0,054	4 0 4 35 3 6
	fettig	0,16	—	9 6
	fettig und angefeuchtet	0,16	—	9 6
	kaum fettig	0,19	—	10 46
Gufseiserne Axen auf Lagern von Pockholz (lignum sanctum)	trocken	0,18	—	10 12
	mit Oel od. Schweinefett	—	0,09	5 9
	mit dergl. abgerieben .	0,10	—	5 43
	mit einer Mischung aus Schweinefett u. Molybden abgerieben	0,14	—	7 58
Schmiedeeiserne Axen auf gufseisernen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett, Talg oder dünner Wagenschmiere	0,07 bis 0,08	0,054	4 0 4 35 3 6
Schmiedeeiserne Axen auf bronzenen Lagern	mit Baumöl, Schweinefett oder Talg	0,07 bis 0,08	0,054	4 0 4 35 3 6
	m. dicker Wagenschmiere	0,09	—	5 9
	fettig und angefeuchtet	0,19	—	10 46
	kaum fettig	0,25	—	14 2
Schmiedeeiserne Axen auf Lagern von Pockholz (lignum sanctum)	mit Oel oder Schweinefett geschmiert	0,11	—	6 17
	fettig	0,19	—	10 46
Bronzene Axen auf bronzenen Lagern	mit Oel	0,10	—	5 43
	mit Schweinefett . . .	0,09	—	5 9
Bronzene Axen auf gufseisernen Lagern	mit Oel oder Talg . .	—	0,045 bis 0,052	2 35 2 59
Axen von Pockholz auf gufseisernen Lagern	mit Schweinefett . .	0,12	—	6 51
	fettig	0,15	—	8 32
Axen von Pockholz auf Lagern von Pockholz	mit Schweinefett . .	—	0,07	4 0

Von der gemeinschaftlichen Bewegung fester Systeme.

d'Alembert'sches Prinzip und Beispiele für die Anwendung desselben.

§ 107. Denken wir verschiedene feste Systeme, die auf irgend eine Weise mit einander zusammenhängen, so, dafs sie sich gemeinschaftlich bewegen müssen, ohne dafs wir gerade die Bedingung stellen, dafs sie fest verbunden seien. Wir betrachten die Bewegung eines dieser Systeme, und bemerken, dafs der Zusammenhang mit den andern Systemen von Einflufs auf die Bewegung dieses Systems ist; wir wollen die Kräfte, welche den Einflufs dieses Zusammenhanges darstellen mit $Q_{,}, Q_{,,}, Q_{,,,}\ldots$ und die auf das betrachtete System aufserdem angebrachten bewegenden Kräfte mit $K_{,}, K_{,,}, K_{,,,}$ bezeichnen. Die Kräfte $K_{,}, K_{,,}\ldots$ und $Q_{,}, Q_{,,}\ldots$ geben eine Resultirende, und die Gröfse und Richtung dieser Resultirenden ist maafsgebend für die Bewegung des betrachteten Systems. Es sei P die Resultirende aus sämmtlichen auf das betrachtete System angebrachten und aus sämmtlichen durch die Einwirkung der verbundenen Systeme herrührenden Kräften, es sei ferner Q die Resultirende aus sämmtlichen durch die Einflüsse der verbundenen Systeme herrührenden Kräften, und K die Resultirende aus sämmtlichen auf das betrachtete System angebrachten bewegenden Kräften.

Nun denken wir K zerlegt in zwei Komponenten, von denen die eine der Gröfse und Richtung nach gleich P, die andere normal zu P ist, und mit V bezeichnet werden mag; hierdurch haben wir die sämmtlichen auf die Bewegung des betrachteten Systems Einflufs habenden Kräfte auf drei Kräfte gebracht, nämlich 1) die Komponente P, 2) die Komponente V und 3) die Resultirende aus den Einflüssen der verbundenen Systeme Q. Diese drei Kräfte erzeugen vereinigt dieselbe Bewegung, welche auch die Kraft P, die der Richtung und Gröfse nach gleich der Resultirenden aus allen Kräften ist, dem System ertheilen würde, folglich müssen die Kräfte V und Q im Gleichgewicht sein, d. h. es mufs sein:

$$194)\quad V + Q = 0;\ V = -Q.$$

Zerlegen wir diese Kräfte nach drei zu einander normalen Koordinatenaxen und bezeichnen wir die Komponenten mit entsprechenden Marken, so mufs sein:

$$V_I + Q_I = 0;\ V_{II} + Q_{II} = 0;\ V_{III} + Q_{III} = 0.$$

Da aber P die Resultirende aus den Kräften K und Q ist, so ist auch:

$$P_I = K_I + Q_I;\ P_{II} = K_{II} + Q_{II};\ P_{III} = K_{III} + Q_{III}$$

und durch Kombination dieser beiden Gruppen von Gleichungen ergiebt sich:

$$194\text{a)}\quad V_I = -Q_I = K_I - P_I;\quad V_{II} = -Q_{II} = K_{II} - P_{II};$$
$$V_{III} = -Q_{III} = K_{III} - P_{III}.$$

Die Kräfte V_I, V_{II}, V_{III} nennt man die verlornen Kräfte des Systems, sie werden erhalten, wenn man die auf das System angebrachten bewegenden Kräfte K_I, K_{II}... zerlegt nach der Richtung, in welcher das System sich wirklich bewegt und normal dazu. Die Kräfte P_I, P_{II}, P_{III} nennt man die reservirten Kräfte des betrachteten Systems, und es folgt aus dieser Darstellung folgendes Gesetz:

1) Die verlornen Kräfte eines festen Systems, welches sich gemeinschaftlich mit andern verbundenen Systemen bewegt, sind in jedem Augenblick mit den Kräften, die durch den Einflufs der verbundenen Systeme bedingt werden, im Gleichgewicht.

2) Die Komponenten der verlornen Kräfte für drei beliebige Koordinatenaxen sind in jedem Augenblick gleich der Differenz der Komponenten der auf das betrachtete System angebrachten und der reservirten Kräfte auf dieselben Axen bezogen.

Diese Gesetze pflegt man das d'Alembert'sche Prinzip zu nennen.

Als Beispiel für die Anwendung des d'Alembert'schen Prinzips wollen wir die Aufgabe in § 103 benutzen, indem wir die Figur und die Bezeichnungen vollständig beibehalten, und annehmen, dafs die Räder des Wagens sämmtlich gleich grofs sind, gleiche Zapfenhalbmesser haben, gleiche Belastungen tragen und gleiche Trägheitsmomente haben. Für den Grenzzustand des Gleichgewichts gegen Bewegung im Sinne des Druckes P gilt die Bedingungs-Gleichung 190):

$$P = kQ,$$

wenn wir mit k die rechte Seite jener Gleichung bezeichnen. Sobald P gröfser wird, etwa den Werth $P + P' = kQ + P' = K$ bekommt, ist die bewegende Kraft, welche auf das gleitende System einwirkt offenbar:

$$P' \,.\, (\sin\beta + \mu \,.\, \cos\beta) = (K - kQ) \,.\, (\sin\beta + \mu \,.\, \cos\beta).$$

Bewegt sich das System, dessen Gewicht nun K ist mit einer Geschwindigkeit, deren Aenderungsmaafs gleich f ist, so ist die reservirte Kraft offenbar Mf und folglich die verlorene Kraft:

$$195)\quad V = (K - kQ) \cdot (\sin\beta + \mu \cdot \cos\beta) - Mf.$$

Diese verlorene Kraft mufs gleich und entgegengesetzt sein den Kräften, welche durch den Einflufs der beiden andern beweglichen Systeme, nämlich der Rolle und des Wagens entstehen, und welche durch das Seil auf das betrachtete System übertragen werden. Ist das Trägheitsmoment der Rolle $J_{\prime}$, so ist die Kraft, welche am Umfange der Rolle wirksam sein mufs, um derselben ein Aenderungsmaafs der Peripheriegeschwindigkeit gleich f oder ein solches der Winkelgeschwindigkeit $= \frac{f}{R}$ zu ertheilen gleich $\frac{J_{\prime} \cdot f}{R^2}$, und da diese Kraft offenbar der Bewegung des Systems K entgegenwirkt, so ist der Einflufs der Rolle auf die Bewegung dieses Systems:

$$\frac{-J_{\prime}}{R^2} \cdot f.$$

Die Masse des Wagens M' bewegt sich mit demselben Aenderungsmaafs f aufwärts. Der Druck, welcher dieses Aenderungsmaafs in der Masse bewirkt, und welcher parallel mit der geneigten Ebene durch den Mittelpunkt der Räder zu denken ist, findet sich durch Gleichung 177):

$$Q_{(e)} = \frac{f \cdot (J_{\prime\prime} + M_{\prime\prime} \cdot a^2)}{a^2},$$

wenn $J_{\prime\prime}$ das Trägheitsmoment der Räder, $M_{\prime\prime}$ die Masse des ganzen Wagens, und a den Halbmesser der Räder bezeichnet. Dieser Druck wirkt, mit Berücksichtigung der Steifheit des Seiles an dem Hebelsarm $R + x$ (Gleichung 185a) und entspricht, auf den Hebelsarm R reduzirt, einen Druck $Q_{(e)} \cdot \frac{R + x}{R}$, welcher der Bewegung des Systems K entgegenwirkt, und dessen Einflufs auf dieses System also durch:

$$195\text{a})\quad -f \cdot \frac{(J_{\prime\prime} + M_{\prime\prime} \cdot a^2)}{a^2} \cdot \frac{R + x}{R}$$

auszudrücken ist.

Demnach sind die Einflüsse der beiden andern beweglichen Systeme auf das betrachtete System zusammen:

$$195\text{b})\quad -f \cdot \left\{ \frac{J_{\prime}}{R^2} + \frac{J_{\prime\prime} + M_{\prime\prime} \cdot a^2}{a^2} \cdot \frac{R + x}{R} \right\}$$

und wir haben folglich nach No. 1 des oben entwickelten Gesetzes:

$$195\text{c})\quad V - f \cdot \left\{ \frac{J_{\prime}}{R^2} + \frac{J_{\prime\prime} + M_{\prime\prime} \cdot a^2}{a^2} \cdot \frac{R + x}{R} \right\} = 0,$$

und indem wir für V den oben bezeichneten Werth setzen und entwickeln:

$$195\mathrm{d})\ f = \frac{(K - kQ) \cdot (\sin\beta + \mu \cdot \cos\beta)}{M + \frac{J_{\prime}}{R^2} + \left(M_{\prime\prime} + \frac{J_{\prime\prime}}{a^2}\right) \cdot \frac{R + x}{R}}.$$

worin f das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit ist, mit welcher das System K abwärts gleitet;

$K = Mg$ das Gewicht dieses Systems;

$Q = M_{\prime\prime}g$ das Gewicht des Wagens mit den Rädern;

$J_{\prime}$ das Trägheitsmoment, R der Halbmesser der Rolle;

$J_{\prime\prime}$ das Trägheitsmoment, a der Halbmesser der Wagenräder;

β der stumpfe Winkel, welchen die geneigte Ebene auf der K gleitet, mit der Horizontalen macht;

k das Verhältnifs des Gewichtes, welches auf der Seite von K wirksam sein mufs, um das ganze System in den Grenzzustand des Gleitens nach K hin zu bringen, zu dem Gewicht des Wagens Q (Gleichung 190), endlich

x die Vergröfserung des Hebelsarms der Last vermöge der Steifheit des Seils (Gleichung 185a).

Prinzip der Uebertragung der Arbeit.

§ 108. Kehren wir zu den Betrachtungen des § 92 zurück. Wir denken wiederum zwei feste Systeme, welche wir mit I und II bezeichnen wollen. Das System I kann auf dem System II sich verschieben, aber das System II bewegt sich dabei gleichzeitig nach irgend einer gegebenen Richtung. Wir haben gesehen, dafs dann nach dieser Richtung das erste System auf das zweite einen Druck ausübt, welcher durch Gleichung 162):

$$K = M^{I} \cdot (f^{I} - f^{II})$$

zu bestimmen ist, wenn M^{I} die Masse des ersten (gleitenden) Systems, f^{I} das Aenderungsmaafs des auf dieses System einwirkenden Drucks für die Richtung der gemeinschaftlichen Bewegung, und f^{II} das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit des zweiten (ausweichenden) Systems bezeichnen. Wenn während der gemeinschaftlichen Bewegung in der Richtung dieser Bewegung das Wegelement da durchlaufen wird, so ist die Leistung dieses Druckes

$$K \cdot da = M^{I} \cdot (f^{I} - f^{II}) \cdot da.$$

Wenn das ausweichende System sich allein bewegte, ohne dafs eine Einwirkung des gleitenden Systems statt fände, so würde bei Durchlaufung des Wegelementes da nun die Leistung $da \cdot K^{II}$ verrichtet worden sein, durch die Einwirkung des gleitenden Systems aber ist nach dieser Richtung noch die Arbeit $K . da$ hinzugekommen, und wir nennen diese Arbeit $K . da$, daher die von dem gleitenden System auf das ausweichende System **übertragene Arbeit.**

Es bezeichne U die übertragene Arbeit, so besteht die Gleichung:

$$196) \quad d\,U = M^{I} . (f^{I} - f^{II}) . da = K . da.$$

Die übertragene Arbeit ist gleich Null, entweder wenn da gleich Null ist, oder wenn $f^{I} - f^{II} = 0$ ist, der erste Fall setzt voraus, daſs überhaupt kein Wegelement von beiden Systemen gemeinschaftlich durchlaufen wird, daſs folglich das System II ein fixes System sei, der andere Fall setzt voraus, daſs das ausweichende System mit derselben Geschwindigkeit ausweicht, welche auch durch den Druck der auf das gleitende System wirkenden Kräfte nach dieser Richtung bedingt werden würde. Zwischen diesen beiden Grenzen kann es Werthe von f^{II} und da geben, welche die übertragene Arbeit zu einem Maximum machen; die Bestimmung dieser Werthe ist von der Natur des vorliegenden Falles abhängig.

Die Gleichung für U kann auch so geschrieben werden:

$$d\,U = (M^{I} f^{I} - M^{I} f^{II}) . da.$$

Nun ist aber $M^{I} f^{I}$ die Komponente der Resultirenden aller auf das System angebrachten Kräfte für die Richtung der Bewegung, f^{II} dagegegen das Aenderungsmaaſs der Geschwindigkeit, mit welcher das System sich nach dieser Richtung wirklich bewegt, folglich $M^{I} f^{II}$ die Komponente des Druckes, welcher die Bewegung des Systems wirklich bedingt, d. i. nach dem vorigen Paragraphen die Komponente der reservirten Kraft für diese Richtung, daher ist $M^{I} f^{I} - M^{I} f^{II}$ nichts anderes als die Komponente der verlornen Kraft des beweglichen Systems, und daher $d\,U = (M^{I} f^{I} - M^{I} f^{II}) . da$ nichts anderes, als die Arbeit der verlornen Kraft. Hierin liegt der Satz:

> Wenn zwei materielle Systeme sich bewegen, so daſs das eine auf dem andern sich verschiebt, so ist die Arbeit der verlornen Kraft des einen Systems für die Richtung der gemeinschaftlichen Bewegung gleich der an das andere System übertragenen Arbeit.

Von der absoluten Bewegung.

Verzeichnung des absoluten Weges.

§ 109. Wenn zwei feste Systeme sich gemeinschaftlich bewegen, während das eine sich auf dem andern verschiebt, so ist die absolute Bewegung dieses verschiebbaren Systems die Resultirende aus der Bewegung in der Richtung der Verschiebung, und aus der Bewegung in der Richtung des Ausweichens. Kennt man in jedem Zeitelement die Geschwindigkeiten dieser beiden Bewegungen, so läfst sich der absolute Weg des verschiebbaren Systems leicht konstruiren. Ist umgekehrt der absolute Weg bekannt, und die Richtung, in welcher das ausweichende System sich bewegt, so kann man, wenn man in jedem Augenblicke die Geschwindigkeiten kennt, die Bahn des Gleitens konstruiren, indem man die Bedingung festhält, dafs die Systeme fortwährend in Berührung sein sollen.

Wir werden bei einer spätern Veranlassung auf die Methoden der Verzeichnung des absoluten Weges, und der Bahn des Gleitens näher eingehen.

Stofs fester Systeme.

Grundgesetze des Stofses.

§ 110. Wenn zwei feste Systeme, die sich nicht berühren, sich so bewegen, dafs sie in irgend einem Augenblick sich treffen, so übt das eine System auf das andere eine gewisse Wirkung aus, indem es im Allgemeinen der Geschwindigkeit des andern Systems eine Aenderung ertheilt. Erfolgt diese Aenderung plötzlich, so nennen wir die Einwirkung des einen Systems auf das andere einen Stofs. Die Wirkung des Stofses ist also immer als die Wirkung einer momentan wirkenden Kraft anzusehen (§ 10).

Wir nennen das eine von beiden Systemen das stofsende, das andere das gestofsene, wobei es gleichgiltig ist, welches von beiden Systemen wir als das stofsende und welches als das gestofsene betrachten wollen.

Nun nennen wir die Masse des stofsenden Systems M^I und die Geschwindigkeit, mit welcher dasselbe sich vor dem Stofse bewegt c, diejenige nach dem Stofse $c_{,}$; ferner möge M^{II} die Masse des gestofsenen Systems, und v und $v_{,}$ die Geschwindigkeiten desselben vor und nach dem Stofse sein. Zerlegen wir die Geschwindigkeiten c u. $c_{,}$ v u. $v_{,}$ nach der Richtung dreier angenommenen Koordinatenaxen, und bezeichnen wir die Komponenten durch entsprechende Marken, so ist offenbar die Leistung, welche in dem gestofsenen System hervorgebracht werden mufs, indem dasselbe aus der Geschwindigkeit c in die Geschwindigkeit $c_{,}$ übergeht, für die Richtung der drei Axen, da man es hier mit momentan wirkenden Kräften zu thun hat, nach Gleichung 45):

$$M^I.(c_{,}^I - c^I); \quad M^I.(c_{,}^{II} - c^{II}); \quad M^I.(c_{,}^{III} - c^{III}).$$

Diese Leistung erscheint aber als Leistung der Massenwiderstände, die sich der Geschwindigkeitsänderung entgegensetzen, sie mufs nach dem Gesetz No. 4. § 86 (S. 167) mit der Leistung der bewegenden Kräfte in jedem Augenblick im Gleichgewicht sein. Die Leistung der bewegenden Kräfte ist aber nichts anderes, als diejenige Leistung, welche das stofsende System abgiebt, indem es die Geschwindigkeitsänderung von v in $v_{\prime}$ erleidet, und für die drei Axen hat man diese Leistung:

$$M^{I}.(v_{\prime}^{I}-v^{I});\quad M^{II}.(v_{\prime}^{II}-v^{II});\quad M^{II}.(v_{\prime}^{III}-v^{III}).$$

Hiernach müssen zufolge des eben genannten Gesetzes die Gleichgewichtsbedingungen statt finden:

$$197)\quad \begin{cases} M^{I}.(c_{\prime}^{I}-c^{I})+M^{II}.(v_{\prime}^{I}-v^{I})=0 \\ M^{I}.(c_{\prime}^{II}-c^{II})+M^{II}.(v_{\prime}^{II}-v^{II})=0 \\ M^{I}.(c_{\prime}^{III}-c^{III})+M^{II}.(v_{\prime}^{III}-v^{III})=0. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen durch einfache Entwickelung:

$$197a)\quad \begin{cases} M^{I}c^{I}+M^{II}v^{I}=M^{I}c_{\prime}^{I}+M^{II}v_{\prime}^{I} \\ M^{I}c^{II}+M^{II}v^{II}=M^{I}c_{\prime}^{II}+M^{II}v_{\prime}^{II} \\ M^{I}c^{III}+M^{II}v^{III}=M^{I}c_{\prime}^{III}+M^{II}v_{\prime}^{III}. \end{cases}$$

Nach § 22. S. 26 nennt man das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit die Gröfse der Bewegung, und es liegt in der Gleichung 197a) der Satz:

> Wenn zwei feste Systeme stofsend auf einander wirken, und es werden die Komponenten der Geschwindigkeiten für irgend eine der Koordinatenaxen durch den Stofs in beiden Systemen geändert, so ist gleichwohl die Summe der Gröfsen der Bewegung beider Systeme vor der Geschwindigkeitsänderung eben so grofs als nach der Geschwindigkeitsänderung.

Nach Vollendung des Stofses können folgende Fälle eintreten:

a) Die Körper trennen sich nach Vollendung des Stofses von einander; oder:

b) die Körper bleiben nach dem Stofse in Berührung mit einander.

Welcher von beiden Fällen aber auch stattfinden möge, so bleiben doch die beiden Systeme während der Zeitdauer, in welcher der Stofs statt findet, in Berührung, und müssen für diese Zeitdauer, man mag dieselbe als unendlich klein, oder nur als sehr klein ansehen, als zwei Systeme betrachtet werden, die sich nicht trennen können. Wenn aber die Systeme während der Dauer der Betrachtung in Berührung bleiben, so kommen die Gesetze des § 92 (S. 186) in Anwendung, und es sind dann die beiden Fälle möglich, daſs das eine System sich auf dem andern verschieben kann, oder daſs eine Verschiebung nicht möglich ist.

Wenn während des Stoſses die beiden Systeme sich nicht verschieben können, so müssen sie sich vollkommen gemeinschaftlich bewegen, d. h. sie müssen eine gleich groſse Geschwindigkeit nach derselben Richtung besitzen, und folglich müssen auch die Komponenten dieser Geschwindigkeit für die drei Axen während des Stoſses gleich groſs sein. d. h. man hat unter dieser Voraussetzung:

$$v_{,}^{I} = c_{,}^{I};\quad v_{,}^{II} = c_{,}^{II};\quad v_{,}^{III} = c_{,}^{III}$$

und dann folgt aus Gleichung 197 a) für die Komponenten der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit:

$$197\text{b})\quad \left\{ \begin{aligned} v_{,}^{I} &= \frac{M^{I}c^{I} + M^{II}v^{I}}{M^{I} + M^{II}} \\ v_{,}^{II} &= \frac{M^{I}c^{II} + M^{II}v^{II}}{M^{I} + M^{II}} \\ v_{,}^{III} &= \frac{M^{I}c^{III} + M^{II}v^{III}}{M^{I} + M^{II}}. \end{aligned} \right.$$

Aus welchen Gleichungen sich die resultirende Geschwindigkeit der Richtung und Gröſse nach bestimmen läſst.

Wenn dagegen das eine System auf dem andern gleiten kann, so denken wir die Richtung des Gleitens nach früheren Regeln bestimmt, nehmen dieselbe als dritte Axe des Koordinatensystems an, und zerlegen die Geschwindigkeiten des stoſsenden und des gestoſsenen Systems nach dieser Richtung und nach zwei Axen, die normal dazu sind. Nun findet eine Einwirkung der Körper auf einander (abgesehen von der Reibung) in der Richtung, in welcher ein Gleiten möglich ist, nicht statt, folglich findet auch nach dieser Richtung keine Geschwindigkeitsänderung statt, dagegen müssen beide Systeme nach jeder Richtung, die normal zur Richtung des Gleitens ist, während des Stoſses gleiche Geschwindigkeiten besitzen, daher hat man für die beiden Axen, die normal zur Richtung des Gleitens sind:

$$v_{,}^{I} = c_{,}^{I};\quad v_{,}^{II} = c_{,}^{II}$$

wogegen für die Richtung des Gleitens die Geschwindigkeiten ungeändert bleiben. Die Gleichungen ergeben also:

$$197\text{c})\quad \left\{ \begin{aligned} c_{,}^{I} &= v_{,}^{I} = \frac{M^{I}c^{I} + M^{II}v^{I}}{M^{I} + M^{II}}. \\ c_{,}^{II} &= v_{,}^{II} = \frac{M^{I}c^{II} + M^{II}v^{II}}{M^{I} + M^{II}} \\ c_{,}^{III} &= c^{III};\quad v_{,}^{III} = v^{III}. \end{aligned} \right.$$

Wenn die Richtung des Gleitens in derselben Ebene liegt, welche man durch die Richtungen der beiden Geschwindigkeiten v und c legen kann, und man nimmt die Linie, welche normal ist zu dieser Ebene, als erste Axe an, die Richtung des Gleitens als dritte Axe, so gehen die Gleichungen über in:

$$197\text{d)}\quad \begin{cases} c_{\prime}^{I} = v_{\prime}^{I} = \dfrac{M^{I}c^{I} + M^{II}v^{I}}{M^{I} + M^{II}} \\ c_{\prime}^{II} = 0;\quad v_{\prime}^{II} = 0;\quad c = 0;\quad v = 0 \\ c_{\prime}^{III} = c^{III};\quad v_{\prime}^{III} = v^{III}. \end{cases}$$

Nach den Gleichungen 197b), c), d) sind die Gesetze für die Geschwindigkeiten während des Stofses für jede Koordinatenaxe, in welcher eine Geschwindigkeitsänderung eintritt, vollkommen übereinstimmend, und wir wollen daher im Folgenden nur die Gesetze für eine Koordinatenaxe besprechen, indem wir von vorne herein annehmen, dafs die Koordinatenaxen in dem ersten Fall (Gleichung 197b) beliebig, in den beiden andern Fällen (Gleichung 197c und d) so angenommen worden sind, wie dort vorausgesetzt worden ist. Wir verstehen also von jetzt ab unter $cc_{\prime}$, $vv_{\prime}$ die Komponenten der Geschwindigkeiten nach der Richtung irgend einer Axe, in welcher Geschwindigkeitsänderung statt findet, indem wir die Marken I, II, III fortlassen.

Wenn das stofsende System vor dem Stofse die Geschwindigkeit v und nach dem Stofse die Geschwindigkeit $v_{\prime}$ hat, so hat dasselbe durch den Stofs eine lebendige Kraft abgegeben, welche sich ausdrückt durch:

$$M^{II}.(v^2 - v_{\prime}^2).$$

Diese von dem stofsenden System abgegebene lebendige Kraft geht im Augenblick des Stofses nur zum Theil an das gestofsene System über, denn dasselbe bewegt sich, nachdem der Stofs erfolgt ist, mit der Geschwindigkeit $c_{\prime} = v_{\prime}$, hat also einen Zuwachs an lebendiger Kraft erhalten, der gleich $M^{I}.(v_{\prime}^2 - c^2)$ ist; der Rest der lebendigen Kraft also, der Werth:

$$\begin{aligned} &M^{II}.(v^2 - v_{\prime}^2) - M^{I}.(v_{\prime}^2 - c^2) \\ &= M^{II}.(v + v_{\prime}).(v - v_{\prime}) - M^{I}.(v_{\prime} + c).(v_{\prime} - c) \end{aligned}$$

mufs irgend eine andere Arbeit verrichten, und durch dieselbe verbraucht werden. Diese Arbeit besteht im Allgemeinen in der Formveränderung der beiden Systeme, und wenn wir dieselbe Arbeit mit $\Sigma(K.ds)$ bezeichnen, so ist sie nach Gleichung 49) gleich der halben lebendigen Kraft, welche darauf verwendet worden ist. Wir haben also zu setzen:

$$2\Sigma(K.ds) = M^{II}.(v + v_{\prime}).(v - v_{\prime}) - M^{I}.(v + c).(v_{\prime} - c),$$

da nun nach Gleichung 197) $M^I.(v_, - c) = M^{II}.(v - v_,)$, und indem wir $v_, = \frac{M^I c + M^{II} v}{M^I + M^{II}}$ nach Gleichung 197b) setzen, auch $M^I.(v_, - c) = \frac{M^{II}.M^I}{M^{II} + M^I}.(v - c)$ ist, so folgt, die auf Formveränderung wirkende Arbeit oder die verlorne lebendige Kraft:

$$2\Sigma(K.ds) = \frac{M^{II}.M^I}{M^{II} + M^I}.(v - c).[(v + v_,) - (v_, + c)]$$

$$198)\ 2\Sigma(K.ds) = \frac{M^{II}.M^I}{M^{II} + M^I}.(v - c)^2 = \frac{M^{II}.M^I}{M^{II} + M^I}.u^2,$$

worin wir nämlich unter u die Differenz der Komponenten der Geschwindigkeiten der beiden Systeme, nach der Richtung der betrachteten Koordinatenaxe verstehen. Hierin liegt der Satz:

> Wenn zwei Systeme stofsend auf einander wirken, und es erleiden für irgend eine Koordinatenaxe die Komponenten der Geschwindigkeiten Aenderungen, so ist die lebendige Kraft, welche in der Richtung dieser Axe auf Formveränderung der beiden Systeme wirkt, gleich dem Produkt aus dem Quadrat der Differenz der Komponenten der Geschwindigkeiten, welche die beiden Systeme vor dem Stofse besafsen, multiplizirt mit dem Verhältnifs zwischen dem Produkt und der Summe der Massen.

Dies Verhältnifs nennt man das harmonische Mittel der Massen.

Die beiden Gleichungen 197a) und 198), und die aus denselben hergeleiteten Gesetze sind die Grundgesetze für die Wirkung zweier festen Systeme aufeinander, wenn dieselben stofsend zusammentreffen.

Bestimmung der lebendigen Kraft, welche durch den Stofs auf Formveränderung der Systeme wirkt — Geschwindigkeiten nach Wiederherstellung der Formveränderung.

§ 111. Untersuchen wir nunmehr die auf Formveränderung der beiden Systeme wirkende Arbeit. Es seien λ^I und λ^{II} die linearen Verlängerungen oder Verkürzungen, welche die beiden Systeme in dem Augenblick erlitten haben, in welchem dieselben nach der Richtung der betrachteten Koordinatenaxe die gemeinschaftlichen Geschwindigkeiten $v_, = c_,$ angenommen haben, und zwar sind λ^I und λ^{II} in der Richtung derselben Axe gemessen. Nun ist offenbar das Wegelement ds, welches der Druck der sich der Formveränderung widersetzt, durchläuft

$$ds = d\lambda^{I} + d\lambda^{II}.$$

Nach den im ersten Theile dieses Werkes S. 193 entwickelten Gesetzen, besteht aber die Gleichung:

$$E = \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{\lambda},$$

wenn E den Elasticitäts-Modulus,
P den Druck, welcher auf Verlängerung oder Verkürzung wirkt,
F den Querschnitt des Systems normal zum Druck P,
l die ursprüngliche Länge, und
λ die Verlängerung oder Verkürzung
bezeichnet.

Hiernach ist:

$$P = \frac{E \cdot F}{l} \cdot \lambda$$

und das Arbeitselement dieser Formveränderung:

$$P \cdot d\lambda = \frac{E \cdot F}{l} \cdot \lambda \cdot d\lambda,$$

folglich die Gesammtleistung, die der Formveränderung von 0 bis λ entspricht:

$$\int_{\lambda}^{0} P \cdot d\lambda = \frac{E}{l} \cdot \int_{\lambda}^{0} F \cdot \lambda \cdot d\lambda.$$

Wenn F konstant ist können wir integriren, und es folgt:

199) $$\int_{\lambda}^{0} P \cdot d\lambda = \frac{E \cdot F}{l} \cdot \tfrac{1}{2}\lambda^2 = \frac{E \cdot F}{l} \cdot \lambda \cdot \tfrac{1}{2}\lambda = \tfrac{1}{2} P \cdot \lambda.$$

Hieraus folgt:

Die Arbeit, welche einer gewissen linearen Verlängerung oder Verkürzung eines festen Systems entspricht, ist gleich dem halben Produkt aus dem Druck, welcher der durch diese Formveränderung entstehenden gröfsten Spannung das Gleichgewicht hält in den Werth der Verlängerung oder Verkürzung.

Da aber die Gleichung

199a) $$E = \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{\lambda}$$

nur gilt für Verlängerungen oder Verkürzungen innerhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität, so gilt auch das entwickelte Gesetz nur innerhalb dieser Grenzen.

Nun würden wir für vollkommen elastische Systeme, oder so lange überhaupt die Formveränderungen sich innerhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität befinden, die Arbeit, welche auf Formveränderung der beiden Systeme wirkt, setzen können

$$\Sigma(K.ds) = \tfrac{1}{2}(P^I.\lambda^I + P^{II}.\lambda^{II}).$$

Da aber der Druck P^I, welcher die Verkürzung λ^I bewirkt, offenbar derselbe ist, welcher die Verkürzung λ^{II} bewirkt, so ist $P^I = P^{II}$ und wenn wir diesen Druck allgemein mit P bezeichnen, so ist:

$$199\text{b)}\quad \Sigma(Kds) = \tfrac{1}{2}P.(\lambda^I + \lambda^{II}).$$

Wenn wir nach der Gleichung für E (199a) die Werthe von λ^I und λ^{II} entwickeln, so ergiebt sich, indem wir die den beiden Systemen entsprechen Werthe mit Marken bezeichnen:

$$199\text{c)}\quad \Sigma(K.ds) = \tfrac{1}{2}P^2.\left(\frac{l^I}{E^I F^I} + \frac{l^{II}}{E^{II}F^{II}}\right)$$

und vermöge der Gleichung 198 ergiebt sich:

$$199\text{d)}\quad P = u.\sqrt{\left(\frac{M^{II}.M^I}{M^{II}+M^I}\right)}.\sqrt{\left[\frac{E^I F^I.E^{II}F^{II}}{l^I.E^I F^I + l^{II}.E^{II}F^{II}}\right]}.$$

Durch diese Gleichung ist man im Stande, den gröfsten Druck zu bestimmen, welcher, durch den Stofs hervorgerufen, auf Formveränderung der beiden Systeme wirksam ist, so lange man die beiden Systeme als vollkommen elastisch betrachtet.

Ist das eine von beiden Systemen, z. B. das System II, vollkommen hart, so dafs es gar keine Formveränderung erleidet, so ist $\lambda^{II} = 0$, und die Entwickelung würde ergeben:

$$199\text{e)}\quad P = u.\sqrt{\left(\frac{M^I.M^{II}}{M^I+M^{II}}\right)}.\sqrt{\left(\frac{E^I.F^I}{l^I}\right)}.$$

Wenn dagegen beide Systeme als absolut hart angenommen werden, so würde sich der auf Formveränderung wirkende Druck als unendlich grofs ergeben.

Denken wir nunmehr zwei Systeme, die nicht vollkommen elastisch sind, oder setzen wir allgemeiner voraus, die Formveränderungen überschreiten die Grenzen der vollkommenen Elastizität, und es entstehen bleibende Formveränderungen. In diesem Falle werden allerdings auch die Verlängerungen und Verkürzungen Funktionen der Drucke sein, durch welche sie erzeugt werden; aber es ist nicht mehr zulässig, dieselben, wie wir es vermöge der Gleichung $\lambda = P \cdot \frac{l}{F \cdot E}$ gethan haben, einfach proportinal diesen Drukken zu setzen. So lange nun die Abhängigkeit dieser Formveränderungen von den Drucken nicht bekannt ist, kann man auch die Gleichung

$$K \cdot ds = P \cdot (d\lambda^{I} + d\lambda^{II})$$

nicht integriren, und die Aufgabe, den auf Formveränderung wirkenden Druck zu bestimmen, bleibt ungelöst.

Näherungsweise mag es zulässig sein die Voraussetzung, dafs die Verkürzungen in direktem Verhältnifs zu den Drucken stehen, auch noch für Formveränderungen gelten zu lassen, die aufserhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität liegen, und nur unter dieser Annahme gelten die Gleichungen 199) bis 199e) auch für nicht vollkommen elastische Systeme.

Sobald durch den Zusammenstofs zweier festen Systeme Formveränderung entweder in beiden oder nur in einem von beiden Systemen erfolgt ist, bleibt entweder diese Formveränderung bestehen, oder die Systeme stellen wieder ihre ursprüngliche Form ganz oder theilweise her. Wenn die Formveränderung bestehen bleibt, so ist das auf Formveränderung wirkende Arbeitsmoment durch dieselbe konsumirt, wenn dagegen die Systeme sich wieder ausdehnen, so wird durch diese Ausdehnung eine gewisse Kraft frei und wirkt auf Erzeugung von Geschwindigkeit.

Wenn die durch die Herstellung der ursprünglichen Form wieder frei gewordene Arbeit (wiedergewonnene lebendige Kraft) ein gewisser Theil, etwa ε, der auf die Formveränderung verwandten Arbeit ist, so würde die nach Verlauf einer Zeitdauer, welche die Zusammendrückung und Ausdehnung umfafst (Dauer des Stofses) verlorene Arbeit sich ausdrücken nach Gleichung 198 durch:

$$200)\ \tfrac{1}{2}\left(u^2 \cdot \frac{M^I \cdot M^{II}}{M^I + M^{II}} - \varepsilon \cdot u^2 \cdot \frac{M^I \cdot M^{II}}{M^I + M^{II}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} u^2 \cdot \frac{M^I \cdot M^{II}}{M^I + M^{II}} \cdot (1 - \varepsilon).$$

folglich gelten zur Bestimmung der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stofse die Bedingungs-Gleichungen (197 und 198):

$$M^I c + M^{II} v = M^I c_{,} + M^{II} v_{,}$$

$$M^{II} \cdot (v^2 - v_{,}^2) - M^I \cdot (c_{,}^2 - c^2) = u^2 \cdot \frac{M^I \cdot M^{II}}{M^I + M^{II}} \cdot (1 - \varepsilon).$$

Wenn wir nun die zweite Gleichung mit $M^I + M^{II}$ multipliziren, die erste Gleichung quadriren, auf Null bringen, von der ersten abziehen und gehörig ordnen, so ergiebt sich:

$$M^{II}.M^{I}.(v^2+c^2-2v.c)-M^{II}.M^{I}.(v_{,}^2+c_{,}^2-2v_{,}.c_{,})$$
$$=u^2.M^{I}.M^{II}.(1-\varepsilon),$$

oder, wenn wir mit $M^{II}.M^{I}$ dividiren, und beachten, dafs $u^2=(v-c)^2$ (Gleichung 198) also gleich $v^2+c^2-2v.c$ ist, so ergiebt sich:

$$200\text{a})\quad c_{,}-v_{,}=u.\sqrt{\varepsilon}.$$

Aus dieser Gleichung und aus der Gleichung 197a)

$$M^{I}c+M^{II}v=M^{I}c_{,}+M^{II}v_{,}$$

folgt nun:

$$200\text{b})\quad\left\{\begin{aligned} v_{,}&=\frac{M^{I}c+M^{II}v}{M^{I}+M^{II}}-(v-c).\frac{M^{I}}{M^{I}+M^{II}}.\sqrt{\varepsilon}\\ c_{,}&=\frac{M^{I}c+M^{II}v}{M^{I}+M^{II}}+(v-c).\frac{M^{II}}{M^{I}+M^{II}}.\sqrt{\varepsilon}.\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichung lehrt die Geschwindigkeiten finden, welche die beiden Systeme in dem Augenblicke besitzen, wo die durch den Stofs bewirkte Veränderung der Form sich wiederhergestellt hat. Ist diese Wiederherstellung vollständig erfolgt, so ist $\varepsilon=1$ zu setzen, ist sie dagegen gar nicht erfolgt, so ist $\varepsilon=0$ zu setzen.

Ist die gestofsene Masse M^{I} gegen M^{II} unendlich grofs, und ist dieselbe in Ruhe, also $c=0$, so ist:

$$200\text{c})\quad v_{,}=-v.\sqrt{\varepsilon};\quad \varepsilon=\left(\frac{v_{,}}{v}\right)^2.$$

Nach *Newton* *) ist:

für Elfenbein . . . . $\varepsilon=(\frac{8}{9})^2=0{,}79$
- Glas . . . . $\varepsilon=(\frac{15}{16})^2=0{,}879$
- Kork, Stahl, Wolle $\varepsilon=(\frac{5}{9})^2=0{,}309$,

wobei vorausgesetzt ist, dafs der eine Körper, nämlich der stofsende, die Kugelform, der gestofsene die Plattenform hat.

Im Allgemeinen sind die Gesetze des Stofses und die durch denselben erfolgenden Formveränderungen noch nicht genügend aufgeklärt.

Stofs auf ein festes System, welches um eine fixe Axe rotirt. Maafs für die Stofswirkung.

§ 112. Denken wir ein festes System, welches um eine fixe Axe rotirt; die fixe Axe sei die dritte Axe eines Koordinatensystems, dessen beide anderen Axen in einer Ebene liegen, welche

---

*) Weisbach, Ingenieur und Maschinen-Mechanik, Theil I. § 278.

normal zur fixen Axe ist. Wir nehmen einen beliebigen Punkt der fixen Axe als Anfangspunkt der Koordinaten, und es seien X, Y, Z die Koordinaten des Schwerpunktes. M^I sei die Masse des rotirenden Systems, w die Winkelgeschwindigkeit, welche das System besitzt in dem Augenblicke, in welchem ein zweites System, dessen Masse M^{II} ist, mit der Geschwindigkeit v auf das rotirende System stöfst. Der getroffene Punkt habe die Koordinaten $x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime}$ und die Richtung der Geschwindigkeit, mit welcher der Stofs erfolgt, mache mit den drei Axen die Winkel α, β, γ.

Der Abstand des getroffenen Punktes von der Drehaxe ist:

$$\text{a)} \quad r_{\prime} = \sqrt{(x_{\prime}^2 + y_{\prime}^2)}.$$

Ist $J_{\prime}$ das Trägheitsmoment des rotirenden Systems in Bezug auf die Drehaxe, so ist die auf den Abstand r reduzirte Masse nach Gleichung 147c), S. 161:

$$\text{b)} \quad M_{\prime}^I = \frac{J_{\prime}}{r_{\prime}^2}.$$

Die Periphериegeschwindigkeit in dem getroffenen Punkte ist wr, die Richtung derselben bilde mit den drei Axen die Winkel $\alpha_{\prime}, \beta_{\prime}, \gamma_{\prime}$, dann ist:

$$\text{c)} \quad \begin{cases} \cos\alpha_{\prime} = \sin\beta_{\prime} = \dfrac{y_{\prime}}{r_{\prime}} \\ \cos\beta_{\prime} = \sin\alpha_{\prime} = \dfrac{x_{\prime}}{r_{\prime}} \\ \cos\gamma_{\prime} = 0; \quad \gamma_{\prime} = 90. \end{cases}$$

Nun denken wir den Stofs in derselben Weise erfolgend, als ob in dem Augenblick des Stofses die reduzirte Masse $M_{\prime}^I$ frei mit der Masse M^{II} zusammenstiefse. Die Komponenten der Geschwindigkeiten der gestofsenen Masse $M_{\prime}^I$ sind nun für die drei Axen:

$$\text{d)} \quad \begin{cases} c^I = wr \,.\, \cos\alpha_{\prime}; \quad c^{II} = wr \,.\, \cos\beta_{\prime}; \quad c^{III} = 0 \\ c^I = w \,.\, y_{\prime}; \quad c^{II} = w \,.\, x_{\prime}. \end{cases}$$

Die Komponenten der stofsenden Masse M^{II} sind für dieselben Axen:

$$\text{e)} \quad v^I = v \,.\, \cos\alpha; \quad v^{II} = v \,.\, \cos\beta; \quad v^{III} = v \,.\, \cos\gamma.$$

Wir behandeln nur den Fall, dafs die beiden Systeme sich während des Stofses vollkommen gemeinschaftlich bewegen müssen, dafs folglich während des Stofses eine Verschiebung der beiden Systeme nicht möglich sei. Dann ergeben sich nach Gleichung 197b) die gemeinschaftlichen Geschwindigkeiten, welche beide Systeme annehmen müfsten, wenn sie beide vollkommen frei wären:

$$201)\left\{\begin{aligned} v_{\prime}^{I} &= \frac{M_{\prime}^{I}\,.\,w\,.\,y_{\prime} + M^{II}\,.\,v\,.\cos\alpha}{M_{\prime}^{I} + M^{II}} \\ v_{\prime}^{II} &= \frac{M_{\prime}^{I}\,.\,w\,.\,x_{\prime} + M^{II}\,.\,v\,.\cos\beta}{M_{\prime}^{I} + M^{II}} \\ v_{\prime}^{III} &= \frac{M^{II}\,.\,v\,.\cos\gamma}{M_{\prime}^{I} + M^{II}}. \end{aligned}\right.$$

Nun ist aber das gestoſsene System im Augenblick des Stoſses nicht wirklich frei, sondern es ist gezwungen sich um eine Axe zu drehen, die durch die beiden fixen Punkte geht, es kann also nach der Richtung der fixen Axe gar nicht ausweichen, und es folgt daraus, daſs durch die fixen Punkte eine Stoſswirkung in der Richtung der Drehaxe aufgehoben werden muſs, welche dem Stoſs der Massen $M^{I} + M^{II}$ mit der Geschwindigkeit $v_{\prime}^{III}$ entspricht. Die durch die fixen Punkte in der Richtung der ersten Axe aufgehobene Stoſswirkung ist also:

$$201\,a)\quad W^{I} = (M_{\prime}^{I} + M^{II})\,.\,v^{III} = M^{II}\,.\,v\,.\cos\gamma.$$

Die beiden andern Komponenten $v_{\prime}^{I}$ und $v_{\prime}^{II}$ würden eine resultirende Geschwindigkeit geben, welche sich ausdrückt durch:

$$v_{\prime\prime} = \sqrt{(v_{\prime}^{I2} + v_{\prime}^{II2})}$$

und welche mit den beiden Axen die Winkel bildet: $\alpha_{\prime\prime}$ und $\beta_{\prime\prime}$; es ist:

$$\cos\alpha_{\prime\prime} = \frac{v_{\prime}^{I}}{v_{\prime\prime}} = \sin\beta_{\prime\prime};$$

$$\cos\beta_{\prime\prime} = \frac{v_{\prime}^{II}}{v_{\prime\prime}} = \sin\alpha_{\prime\prime}.$$

Diese resultirende Geschwindigkeit bilde mit der Peripherie des Kreises, in welchem der getroffene Punkt gezwungen ist sich zu bewegen, den Winkel ε; es ist nach einem bekannten Gesetz der analytischen Geometrie:

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha_{\prime}\,.\cos\alpha_{\prime\prime} + \cos\beta_{\prime}\,.\cos\beta_{\prime\prime} + \cos\gamma_{\prime}\,.\cos\gamma_{\prime\prime}$$

oder durch Einsetzung der oben bestimmten Werthe:

$$f)\left\{\begin{aligned} \cos\varepsilon &= \frac{y_{\prime}}{r_{\prime}}\,.\,\frac{v_{\prime}^{I}}{v_{\prime\prime}} - \frac{x_{\prime}^{I}}{r_{\prime}}\,.\,\frac{v_{\prime}^{II}}{v_{\prime\prime}} \\ \sin\varepsilon &= \sqrt{(1-\cos\varepsilon^2)} = \pm\left(\frac{x_{\prime}\,.\,v_{\prime}^{I}}{r_{\prime}\,.\,v_{\prime\prime}} - \frac{y_{\prime}\,.\,v_{\prime}^{II}}{r_{\prime}\,.\,v_{\prime\prime}}\right). \end{aligned}\right.$$

Wenn wir nun die resultirende Geschwindigkeit in zwei Komponenten p und q zerlegen, von denen die eine p in der Richtung der wirklich möglichen Bewegung, d. i. in der Richtung der Peripherie liegt, die andere aber normal dazu ist, so erhalten wir die Werthe:

$$p = v_{,,} . \cos \varepsilon = \frac{y_,}{r_,} . v_,^I + \frac{x_,}{r_,} . v_,^{II},$$

die andere Komponente:

$$q = v_{,,} . \sin \varepsilon = \pm \left(\frac{x_,}{r_,} . v_,^I - \frac{y_,}{r_,} . v_,^{II} \right)$$

oder wenn wir für $v_,^I$ und $v_,^{II}$ die obigen Werthe setzen, so ergiebt sich, mit Berücksichtigung dafs $x_,^2 + y_,^2 = r_,^2$ (Gleichung a) ist:

$$\text{201 b)} \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{M_,^I . w r_, + M^{II} . \frac{v}{r_,} . (\cos \alpha . y_, + \cos \beta . x_,)}{M_,^I + M^{II}} \\ q &= \pm \frac{M^{II}}{M_,^I + M^{II}} . \frac{v}{r_,} . (\cos \alpha . x_, - \cos \beta . y_,). \end{aligned} \right.$$

Nennen wir den Winkel, welchen die Richtung der Stofsgeschwindigkeit mit der Richtung der Peripherie bildet, in welcher der getroffene Punkt gezwungen ist, sich zu bewegen δ, so ist

$$\text{g)} \left\{ \begin{aligned} \cos \delta &= \cos \alpha . \cos \alpha_, + \cos \beta . \cos \beta_, + \cos \gamma . \cos \gamma_, \\ &= \cos \alpha . \frac{y_,}{r_,} + \cos \beta . \frac{x_,}{r_,}, \end{aligned} \right.$$

und daher ist auch:

$$\text{201 c)} \quad p = \frac{M_,^I . w . r_, + M^{II} . v . \cos \delta}{M_,^I + M^{II}}.$$

Da nun aber das rotirende System auch im Augenblick des Stofses sich nur nach der Richtung der Peripheriegeschwindigkeit bewegen kann, da es also keine Komponente normal zu dieser Richtung besitzen kann, so mufs durch die Bedingung, dafs dafs das System eine fixe Axe haben soll die Komponente q durch die Reaktion dieser fixen Axe aufgehoben werden, und die fixe Axe mufs also einer Stofswirkung, die dieser Komponente q entspricht, das ist einer Stofswirkung

$$\text{201 d)} \quad W^{II} = \pm q \cdot (M_,^I + M^{II}) = \pm M^{II} . \frac{v}{r_,} . (\cos \alpha . x_, - \cos \beta . y_,)$$

Widerstand leisten. Diese Stofswirkung ist in dem getroffenen Punkte normal zur Peripherie, also radial zu denken.

Der getroffene Punkt kann also in dem Augenblick des Stofses nur die Komponente p wirklich annehmen; die derselben entsprechende Winkelgeschwindigkeit ist $w_, = \frac{p}{r_,}$, das ist:

$$\text{201 e)} \left\{ \begin{aligned} w_, &= \frac{M_,^I . w + M^{II} . \frac{v}{r_,} . \cos \delta}{M_,^I + M^{II}} \\ &= \frac{M_,^I . w + M^{II} . \frac{v}{r_,^2} . (\cos \alpha . y_, + \cos \beta . x_,)}{M_,^I + M^{II}}. \end{aligned} \right.$$

Es ist mithin der Zuwachs an Winkelgeschwindigkeit, welchen das System erhält:

$$201\text{f)}\quad \left\{\begin{aligned} w'-w &= \frac{M_{\prime}^{I}\,.\,w+M^{II}\,.\,\frac{v}{r_{\prime}}\,.\cos\delta}{M_{\prime}^{I}+M^{II}}-w\\ &= \frac{M^{II}}{M_{\prime}^{I}+M^{II}}\,.\left(\frac{v}{r_{\prime}}\,.\cos\delta-w\right).\end{aligned}\right.$$

Die Zeitdauer, in welcher diese Aenderung der Winkelgeschwindigkeit erfolgt mag sehr klein sein, wir mögen dieselbe mit τ bezeichnen; wir wollen ferner das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit für diese kurze Zeit als konstant ansehen, und dasselbe mit $f_{\prime}$ bezeichnen, dann ist nach Gleichung 28):

$$w'-w=\int_{\tau}^{0}.f_{\prime}\,.\,d\tau=f_{\prime}\,.\,\tau,$$

$$202)\ \text{folglich}\ f_{\prime}=\frac{w'-w}{\tau}=\frac{M^{II}}{M_{\prime}^{I}+M^{II}}\,.\left(\frac{v}{r_{\prime}}\,.\cos\delta-w\right).\,\frac{1}{\tau}.$$

Nun können wir uns die Aenderung der Winkelgeschwindigkeit auch durch einen Druck hervorgebracht denken, der anstatt des Stofses in dem gestofsenen Punkt während der Zeitdauer τ nach der Richtung die Peripherie wirksam gedacht, dieselbe Aenderung der Winkelgeschwindigkeit bedingen würde. Nennen wir diesen Druck P, so ist sein statisches Moment $P.r_{\prime}$ und wenn $J_{\prime}$ das Trägheitsmoment des Systems ist, so ist auch nach Gleichung 154) und 202):

$$202\text{a)}\ f_{\prime}=\frac{P\,.\,r_{\prime}}{J_{\prime}};\ P=\frac{f_{\prime}\,.\,J_{\prime}}{r_{\prime}}=\frac{w'-w}{\tau}\,.\,\frac{f_{\prime}}{r_{\prime}}.$$

Multipliziren wir den letzten Werth im Zähler und Nenner mit $r_{\prime}$ so ergiebt sich:

$$202\text{b)}\ P=\frac{w'\,r_{\prime}-w\,r_{\prime}}{\tau}\,.\,\frac{J_{\prime}}{r_{\prime}^{2}};\ P.\tau=(w'r_{\prime}-w\,r_{\prime})\,.\,M_{\prime}^{I}.$$

Nun ist $w'r_{\prime}-w\,r_{\prime}$ die Geschwindigkeitsänderung, welche der getroffene Punkt erleidet, $\frac{J_{\prime}}{r_{\prime}^{2}}$ ist die auf den getroffenen Punkt reduzirte Masse (Gleichung b); es ist folglich die Kraft, welche dieselbe Geschwindigkeitsänderung in dem getroffenen System bedingen würde, welche der Stofs erzeugt, proportional dem Produkt aus der Differenz der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stofse in die auf den getroffenen Punkt reduzirte Masse. Man nennt dies Produkt das **Maafs für die Stofswirkung.**

Nach der obigen Gleichung ist auch das Maafs für die Stofswirkung gleich dem Produkt aus der Kraft, welche dieselbe Geschwindigkeitsänderung in dem gestofsenen System bedingen würde in die Zeitdauer des Stofses. Unter diesen Modifikationen und Bedingungen lassen sich die Gesetze, welche für Drucke gelten auch für Stofswirkungen anwenden.

Die Kraft P zerlegen wir nach der Richtung der Axen der X und der Y in die beiden Komponenten:

$$\text{h)}\quad P.\cos\alpha_{\prime} = P.\frac{y_{\prime}}{r_{\prime}} \text{ und } P.\cos\beta = P.\frac{x_{\prime}}{r_{\prime}}.$$

Die Momente dieser Komponenten sind für die beiden Axen der X und der Y:

$$\text{i)}\quad P.\frac{x_{\prime}.z_{\prime}}{r_{\prime}} \text{ und } P.\frac{y_{\prime}.z_{\prime}}{r_{\prime}}.$$

Nun erscheint die Kraft P als eine auf das System angebrachte Kraft, und es müssen daher ihre Komponenten für die Axen der X und der Y sowohl, als ihre Momente für dieselben Axen gleich den Kräftesummen und Momenten der in dem System thätigen Kräfte sein.

Die in dem System thätigen Kräfte sind zunächst die in jedem Massenelement wirksam zu denkenden Drucke, welche ein Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit des betrachteten Massenelementes in der Richtung des bei der Drehung durchlaufenen Wegelementes bedingen. Dieses Aenderungsmaafs ist gleich $f_{\prime}.r$, wenn $f_{\prime}$ das Aenderungsmaafs der gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit, und r den kürzesten Abstand des Massenelementes von der Drehaxe bezeichnet, und folglich sind diese Drucke $dm.f_{\prime}.r$. Nennen wir die Koordinaten der betrachteten Massenelemente x, y, z und die Winkel, welche die Richtung der von denselben durchlaufenen Bogenelemente mit den Axen der X und der Y bilden α' und β', so ist offenbar wie in Gleichung c):

$$\text{k)}\quad \cos\alpha' = \sin\beta' = \frac{y}{r};\quad \cos\beta' = \sin\alpha' = \frac{x}{r}$$

und es sind folglich die Drucksummen der in den einzelnen Massenelementen thätigen Kräfte für die Richtung der beiden Axen, mit Berücksichtigung der Gleichung 144), S. 153:

$$\text{l)}\quad \begin{cases} \Sigma\left(dm.f_{\prime}.r.\frac{y}{r}\right) = f_{\prime}.\Sigma(dm.y) = f_{\prime}.M.Y, \text{ und} \\ \Sigma\left(dm.f_{\prime}.r.\frac{x}{r}\right) = f_{\prime}.\Sigma(dm.x) = f_{\prime}.M.X, \end{cases}$$

und die Momente für diese beiden Axen:

$$f_{\prime}.\Sigma(dm.x.z) \text{ und } f_{\prime}.\Sigma(dm.y.z).$$

Nun sieht man, dafs sowohl die Drucksummen als die Momente der in den einzelnen Massenelementen thätigen Kräfte hier nur abhängig sind von der Gruppirung der Massenelemente, während die Komponenten der auf das System angebrachten Kraft P und deren Momente nur abhängig sind von P und von den Koordinaten des gestofsenen Punktes. Es ist also nicht nothwendiger Weise Gleichheit zwischen diesen Werthen vorhanden, und es müssen daher in dem System noch gewisse andere Kräfte als thätige Kräfte vorhanden sein, welche mit den in den einzelnen Massenelementen thätigen Kräfte jene Gleichheit herstellen. Diese Kräfte erscheinen als Wirkungen des Stofses auf die Drehaxe.

Wir wollen die Drucksumme dieser Stofswirkung nach der Richtung der ersten Axe mit $Q_{\prime}$ und nach der Richtung der zweiten Axe mit $Q_{\prime\prime}$ bezeichnen, während wir die Momente der Kräftepaare dieser Wirkungen für Drehung in einer Ebene, die normal zur ersten Axe ist mit $(Ka)'$ und für die Drehung in einer Ebene, die normal zur zweiten Axe ist, mit $(Ka)''$ bezeichnen. Nun haben wir zufolge der Bedingung, dafs die auf das feste System angebrachten Kräfte mit den in dem System thätigen Kräften im Gleichgewicht sein müsssn (§§ 66. und 86.) folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$
203)\left\{\begin{aligned}
P\cdot\frac{y_{\prime}}{r_{\prime}} &= f_{\prime}\cdot M\cdot Y + Q_{\prime}\\
P\cdot\frac{x_{\prime}}{r_{\prime}} &= f_{\prime}\cdot M\cdot X + Q_{\prime\prime}\\
P\cdot\frac{x_{\prime}\cdot z_{\prime}}{r_{\prime}} &= f_{\prime}\cdot\Sigma(dm\,.\,x\,.\,z) + (Ka)'\\
P\cdot\frac{y_{\prime}\cdot z_{\prime}}{r_{\prime}} &= f_{\prime}\cdot\Sigma(dm\,.\,y\,.\,z) + (Ka)''.
\end{aligned}\right.
$$

Setzen wir für $f_{\prime}$ den Werth der Gleichung 202a), so lassen sich die Werthe von $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, $(Ka)'$ und $(Ka)''$ entwickeln, nämlich:

$$
203\text{a})\left\{\begin{aligned}
Q_{\prime} &= P\cdot r_{\prime}\cdot\left(\frac{y_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} - \frac{M\cdot Y}{J_{\prime}}\right)\\
Q_{\prime\prime} &= P\cdot r_{\prime}\cdot\left(\frac{x_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} - \frac{M\cdot X}{J_{\prime}}\right)\\
(Ka)' &= P\cdot r_{\prime}\cdot\left(\frac{x_{\prime}\cdot z_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} - \frac{\Sigma(dm\,.\,x\,.\,z)}{J_{\prime}}\right)\\
(Ka)'' &= P\cdot r_{\prime}\cdot\left(\frac{y_{\prime}\cdot z_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} - \frac{\Sigma(dm\,.\,y\,.\,z)}{J_{\prime}}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Setzen wir in diese Gleichungen den Werth von P aus Gleichung 202a) und multipliziren wir auf beiden Seiten mit τ, so ergeben sich links die Maafse für die Stofswirkungen auf die Axe, nämlich:

$$203b)\quad \begin{cases} Q_{\prime}.\tau = (w' - w).J_{\prime}.\left(\dfrac{y_{\prime}}{r_{\prime}^2} - \dfrac{M.Y}{J_{\prime}}\right) \\ Q_{\prime\prime}.\tau = (w' - w).J_{\prime}.\left(\dfrac{x_{\prime}}{r_{\prime}^2} - \dfrac{M.X}{J_{\prime}}\right) \\ (Ka)'.\tau = (w' - w).J_{\prime}.\left(\dfrac{x_{\prime}.z_{\prime}}{r_{\prime}^2} - \dfrac{\Sigma(dm.x.z)}{J_{\prime}}\right) \\ (Ka)''.\tau = (w' - w).J_{\prime}.\left(\dfrac{y_{\prime}.z_{\prime}}{r_{\prime}^2} - \dfrac{\Sigma(dm.y.z)}{J_{\prime}}\right). \end{cases}$$

Bedingungen, unter welchen die Stofswirkungen auf die Axe gleich Null sind. — Mittelpunkt des Stofses.

§ 113. Nach dem vorigen Paragraphen hat die fixe Axe eines rotirenden Systems, auf welches ein anderes in einer gegebenen Richtung stöfst, zweierlei Stofswirkungen zu erleiden. Die eine Gruppe dieser Stofswirkungen rührt davon her, dafs bestimmte Komponenten der Geschwindigkeit des stofsenden Systems durch das rotirende System, welches gezwungen ist, nur um die gegebene Axe sich zu drehen, aufgehoben werden; die andere Gruppe von Stofswirkungen ist dadurch bedingt, dafs die Massenelemente des rotirenden Systems ihre Geschwindigkeit plötzlich ändern, dafs dieser Geschwindigkeitsänderung die Massenwiderstände der einzelnen Elemente entgegenwirken, und dafs diese Massenwiderstände im Allgemeinen nicht im Stande sind, die durch den Stofs auf das rotirende System angebrachten Kräfte vollständig zu consumiren.

Die erste Gruppe enthält folgende beiden Stofswirkungen:

1) Eine Stofswirkung in der Richtung der Axe, welche sich ausdrückt nach Gleichung 201a) durch:

$$W^{I} = M^{II}.v.\cos\gamma;$$

2) Eine Stofswirkung in einer Richtung, die in dem getroffenen Punkt radial ist, und welche sich ausdrückt nach Gleichung 201d) durch:

$$W^{II} = \pm M^{II}.\frac{v}{r_{\prime}}.(\cos\alpha.x_{\prime} - \cos\beta.y_{\prime}).$$

Die erstgenannte Wirkung ist auf Verschieben der Axe gerichtet, die zweite wirkt auf Durchbiegen der Axe in einer Richtung, die in dem getroffenen Punkte radial ist.

Die andere Gruppe der auf die Axe erfolgenden Stofswirkungen ist durch die Gleichungen 203b) zu bestimmen.

Wir wollen nunmehr untersuchen, unter welchen Bedingungen alle diese Stofswirkungen Null werden.

Damit die Stofswirkung W^I gleich Null werde, mufs $\cos\gamma = 0$ sein; d. h. die Richtung der Geschwindigkeit des stofsenden Systems mufs in eine Ebene fallen, die normal zur Drehaxe ist.

Damit die Stofswirkung W^{II} gleich Null werde, ist die Bedingung zu erfüllen:

$$\cos\alpha \,.\, x_{,} = \cos\beta \,.\, y_{,}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{y_{,}}{x_{,}}.$$

Nun ist $\frac{y_{,}}{x_{,}}$ die Cotangente des Winkels, welchen die Peripheriegeschwindigkeit des getroffenen Punktes im Augenblick des Stofses mit der Axe der X macht, und wenn wir setzen

$$\operatorname{cotang} \alpha_{,} = \frac{\cos\alpha_{,}}{\sin\alpha_{,}} = \frac{\cos\alpha_{,}}{\cos\beta_{,}},$$

so folgt als Bedingungs-Gleichung:

$$204)\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha_{,}}{\cos\beta_{,}} = \operatorname{cotang} \alpha_{,},$$

das heifst:

Wenn in dem rotirenden System keine Stofswirkung radial in dem getroffenen Punkte wirksam sein soll, so müssen sich die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit des stofsenden Systems mit zwei zur Drehaxe normalen Koordinatenaxen bildet, verhalten, wie die Cosinus der Winkel, welche die Peripheriegeschwindigkeit des rotirenden Systems im Augenblicke des Stofses mit denselben Koordinatenaxen bildet.

Diese Bedingung wird immer erfüllt, wenn die Geschwindigkeit des stofsenden Systems in einer Ebene liegt, welche das im Augenblick des Stofses von dem getroffenen Punkte beschriebene Bogenelement berührt, oder welche normal ist zum kürzesten Abstande des getroffenen Punktes von der Drehaxe.

Man sieht, dafs die Bedingungen, unter welchen die Stofswirkungen W^I und W^{II} gleich Null werden, lediglich von der Richtung der Geschwindigkeit des stofsenden Systems abhängig sind. Aus der Form der Gleichungen 203b) ergiebt sich dagegen sofort, dafs die Bedingungen, unter welchen diejenigen Stofswirkungen, welche aus den in dem gestofsenen System thätigen Kräften hervorgehen, gleich Null werden, ganz allein von der Gruppirung der

Massenelemente und von der Lage des getroffenen Punktes gegen die Drehaxe abhängig sind.

Damit nämlich die Gleichungen 203 b) einzeln gleich Null werden, mufs sein:

$$204\text{a})\quad \begin{cases} \dfrac{y_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} = \dfrac{M \,.\, Y}{J_{\prime}}; \quad \dfrac{x_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} = \dfrac{M \,.\, X}{J_{\prime}} \\[2ex] \dfrac{x_{\prime} \,.\, z_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} = \dfrac{\Sigma(dm \,.\, x \,.\, z)}{J_{\prime}}; \quad \dfrac{y_{\prime} \,.\, z_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} = \dfrac{\Sigma(dm \,.\, y \,.\, z)}{J_{\prime}}. \end{cases}$$

Indem wir aus den beiden ersten Gleichungen den Werth von $r_{\prime}^{2}$ eliminiren, ergiebt sich:

$$204\text{b})\quad \frac{x_{\prime}}{y_{\prime}} = \frac{X}{Y},$$

da nun $\dfrac{x_{\prime}}{y_{\prime}}$ die Tangente des Winkels ist, welchen der kürzeste Abstand des getroffenen Punktes mit der Axe der X bildet, und $\dfrac{X}{Y}$ die Tangente des Winkels ist, welchen der kürzeste Abstand des Schwerpunktes mit derselben Axe bildet, so ergiebt sich als erste Bedingung, unter welcher die Wirkung der Massenwiderstände auf die Axe gleich Null ist, dafs diese beiden Abstände parallel sein müssen, oder mit andern Worten, dafs der getroffene Punkt in einer Ebene liegen müsse, die durch den Schwerpunkt und durch die Drehaxe geht.

Indem wir die Gleichungen

$$\frac{x_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} = \frac{M \,.\, X}{J_{\prime}} \text{ und } \frac{y_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} = \frac{M \,.\, Y}{J_{\prime}}$$

quadriren, addiren und beachten, dafs $x_{\prime}^{2} + y_{\prime}^{2} = r_{\prime}^{2}$ und $X^2 + Y^2 = R^2$ ist, wenn wir unter R den kürzesten Abstand des Schwerpunktes von der Drehaxe verstehen, ergiebt sich:

$$204\text{c})\quad r_{\prime} = \frac{J_{\prime}}{M \,.\, R}.$$

Nun ist $M.R$ offenbar das statische Moment des rotirenden Systems in Bezug auf die Drehaxe, und folglich ist nach Gleichung 158 a) der Quotient:

$\dfrac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}$ gleich dem Abstand des Schwingungspunktes.

Hiernach ergiebt sich als zweite Bedingung, unter welcher die Wirkung der Massenwiderstände auf die Drehaxe gleich Null ist,

> dafs der getroffene Punkt einen Abstand von der Drehaxe haben müsse, welcher gleich dem Abstand des Schwingungspunktes des rotirenden Systems von derselben Axe ist.

Es folgt hieraus ferner, dafs wenn die Drehaxe durch den

Schwerpunkt geht, unter allen Umständen eine Einwirkung der Massenwiderstände auf die Axe ausgeübt wird.

Damit nun endlich die Kräftepaare gleich Null werden, ist zufolge der Gleichung 204a) noch zu setzen:

$$204\text{d)}\quad \left\{ \begin{aligned} z_, &= \frac{r_,^2}{x_,} \cdot \frac{\Sigma(dm \,.\, x \,.\, z)}{J_,} \text{ und auch} \\ z_, &= \frac{r_,^2}{y_,} \cdot \frac{\Sigma(dm \,.\, y \,.\, z)}{J_,}. \end{aligned} \right.$$

Diese beiden Bedingungen für $z_,$ müssen gleichzeitig erfüllt werden; es ist aber nicht unter allen Umständen möglich, sie gleichzeitig zu erfüllen; die Möglichkeit der Erfüllung beider Bedingungen, und folglich die Möglichkeit, daſs die Kräftepaare, welche durch die Massenwiderstände sich bilden, und welche auf Kippen der fixen Axe wirken, gleich Null seien, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{x_,}{y_,} = \frac{\Sigma(dm.x.z)}{\Sigma(dm.y.z)}.$$

Diese Bedingung findet unter andern statt:

1) wenn $x_, = y_,$ und $\Sigma(dm.x.z) = \Sigma(dm.y.z)$ ist; und dies wird erfüllt, wenn das rotirende System zwei Ebenen der Symmetrie hat, welche sich in der Drehaxe schneiden, und so liegen, daſs der getroffene Punkt gleich weit von beiden entfernt ist. z ist für diesen Fall unbestimmt.

2) wenn $\Sigma(dm.x.z) = 0$ und $\Sigma(dm.y.z) = 0$ ist; in diesem Falle ist z gleich Null, d. h. der getroffene Punkt muſs in der Ebene liegen, in welcher die Koordinatenaxen liegen, für welchen die eben genannten Werthe gleich Null sind. Dieser Fall findet statt, wenn die Drehungsaxe eine Hauptaxe des Systems ist (§ 88. S. 175), und wenn der getroffene Punkt in derjengen zur Drehaxe normalen Ebene liegt, in welcher auch der Schwerpunkt liegt. Denn nehmen wir den Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der Drehungsaxe als Anfangspunkt der Koordinaten, so ist $z_, = 0$ und nach § 88. S. 174 auch

$$\Sigma(dm.x.z) = 0 \text{ und } (\Sigma dm.y.z) = 0.$$

Derjenige Punkt eines rotirenden Systems, welcher, wenn er von einem stoſsenden System getroffen wird, keine Stoſswirkungen durch die Massenwiderstände auf die Drehaxe bedingt, heiſst der Mittelpunkt des Stoſses. Damit ein Mittelpunkt des Stoſses vorhanden sei, müssen die

Bedingungen der Gleichung 204d) gleichzeitig erfüllt werden; aufserdem gilt für die Lage des Mittelpunktes des Stofses Folgendes:

1) derselbe liegt in einer Ebene, die durch die Drehaxe und durch den Schwerpunkt gelegt werden kann (Gleichung 204b);
2) in dieser Ebene hat er von der Drehaxe denselben Abstand, welchen der Schwingungsmittelpunkt des Systems besitzt (Gleichung 204c);
3) ist die Drehungsaxe eine Hauptaxe, so fällt der Mittelpunkt des Stofses mit dem Schwingungsmittelpunkt zusammen, d. h. er liegt in der kürzesten Entfernung des Schwerpunktes von der Drehungsaxe (Gleichung 204d).

Damit überhaupt keine Stofswirkung auf die Drehaxe erfolge, müssen für die Richtung der Geschwindigkeit des stofsenden Systems folgende Bedingungen erfüllt werden:

1) die Richtung der Geschwindigkeit mufs durch den Mittelpunkt des Stofses gehen;
2) dieselbe mufs normal sein zu der Ebene, welche durch die Drehaxe und durch den Schwerpunkt gelegt werden kann. Dies folgt aus den Gesetzen, welche wir für die Bedingungen hergeleitet haben, unter welchen W^I und W^{II} gleich Null werden (S. 268).

Von der Verbindung der Maschinentheile.

Allgemeine Anordnung der verbindenden Maschinentheile.

§ 114. Wenn wir eine Maschine in Bewegung betrachten, so bemerken wir, dafs immer nur gewisse Theile derselben in Bewegung sind, während die unterstützenden Maschinentheile in Bezug auf jene relativ in Ruhe sich befinden. Diejenigen Theile nun, welche den Uebergang zwischen den in Bewegung befindlichen und den in Ruhe befindlichen Theilen vermitteln, müssen zwar selbst in Ruhe sein, indessen doch eine solche Beschaffenheit haben, dafs sie die Bewegung der aktiven Theile zulassen, und im Allgemeinen auch diese Bewegung sicher stellen. Es folgt hieraus, dafs die aktiven Maschinentheile gegen diese eben erwähnten Theile eine relative Bewegung machen müssen, dafs diese relative Bewegung indessen nicht nach allen Richtungen hin wird statt finden dürfen, und dafs folglich die aktiven Maschinentheile mit den ruhenden Maschinentheilen in solcher Weise zusammenhängen, dafs dadurch der Begriff der „Verbindung“, wie wir ihn im ersten Theile dieses Werkes aufgestellt, und auf S. 3 dieses Theiles wiederholt haben, erfüllt wird.

Die verbindenden Maschinentheile oder Maschinen-Verbindungen kommen daher überall vor, wo zwei Maschinentheile so mit einander zusammenhängen, dafs der eine sich gegen den andern zwar in irgend einer Weise verschieben kann, der Zusammenhang aber zwischen beiden Theilen bestehen bleibt.

Da bei diesen Verschiebungen immer die beiden Theile mit einem gewissen Druck gegen einander geprefst werden, so mufs, wenn dieser Druck durch den Widerstand des relativ in Ruhe be findlichen Theiles aufgehoben wird, zwischen beiden Theilen Reibung statt finden, und es kommen daher bei den verbindenden Maschinentheile im Allgemeinen diejenigen Gesetze zur Anwendung, welche wir in § 93. der Grundlehren der Mechanik entwikkelt haben. Auch ergeben sich aus dem Umstande, dafs zwischen den mit einander verbundenen Maschinentheilen während der Bewegung immer Reibungswiderstände statt finden, welche mit einer gewissen Geschwindigkeit überwunden werden müssen, und daraus dafs das Arbeits-Moment dieser Reibung immer auf Kosten der nutzbaren Arbeit von der bewegenden Kraft überwunden werden mufs, für die Konstruktion der verbindenden Maschinentheile im Allgemeinen die folgenden Regeln:

1) Alle verbindenden Maschinentheile mufs man so anordnen, dafs der Druck, welcher durch den Widerstand des ruhenden Theils aufgehoben wird, möglichst gering sei.
2) Die reibenden Oberflächen müssen sich möglichst vollständig berühren, und daher in ihrer geometrischen Form möglichst kongruent sein.
3) Die reibenden Oberflächen müssen aus solchen Materialien gewählt sein, welche der Abnutzung durch die Reibung so vollständig als möglich widerstehen, und zugleich einen möglichst geringen Reibungs-Koeffizienten haben.
4) Die Konstruktion mufs so angeordnet sein, dafs man mit Sicherheit, und auf möglichst bequeme Weise Schmiere zwischen die reibenden Oberflächen bringen kann.

In vielen Fällen tritt auch hier, wie bei den Befestigungs-Konstruktionen (Th. I. § 5. S. 7) noch die Bedingung hinzu, dafs die Fuge, d. h. die Oberfläche, in welcher sich die beiden Maschinentheile berühren, und welche die Reibung auszuhalten hat, wasser-, luft- oder dampfdicht sei.

Diese Bedingungen sind für die Konstruktion der verbindenden Maschinentheile maafsgebend, es tritt denselben noch hinzu das als allgemeines Prinzip aufgestellte Erfordernifs, dafs die verbindenden Maschinentheile hinreichend stark sein müssen, um unter Einwirkung der Drucke nicht allein nicht zerstört zu werden, sondern auch keine bleibende Form-Veränderung zu erleiden.

Wenn dies die allgemeinen Rücksichten sind, die man bei der Anordnung der Verbindungstheile zu nehmen hat, so kommen dazu noch eine Menge anderer Rücksichten und Erfordernisse, die aus der Natur des einzelnen Falles hervorgehen, und vorzugsweise von der Art der relativen Bewegung abhängig sind, welche der bewegte Maschinentheil gegen den ruhenden erleidet. In dieser Beziehung haben wir bei den am häufigsten vorkommenden Verbindungstheilen vorzugsweise zwei Arten der Bewegung zu unterscheiden, und zwar die drehende Bewegung um eine als unwandelbar zu betrachtende Axe, und die gradlinige Bewegung. Demgemäfs wollen wir bei der Besprechung der verbindenden Maschinentheile dieselben in die beiden folgenden Hauptgruppen ordnen:

A. Verbindende Maschinentheile, welche eine rotirende Bewegung vermitteln, und

B. Verbindende Maschinentheile, welche eine gradlinige Bewegung vermitteln.

A. Verbindende Maschinentheile, welche eine rotirende Bewegung vermitteln.

Allgemeines.

§ 115. Da bei den Maschinen die rotirende Bewegung im Allgemeinen viel häufiger vorkommt, als die gradlinige Bewegung, so sind auch die Verbindungstheile, welche diese Bewegung zulassen viel umfassender und häufiger in der Anwendung, als diejenigen, welche eine gradlinige Bewegung vermitteln. Die rotirende Bewegung geschieht fast überall um eine als fix zu betrachtende Drehaxe; sie ist entweder kontinuirlich, und zwar so, dafs der rotirende Maschinentheil wenigstens eine ganze Umdrehung nach einer bestimmten Richtung macht, oder so, dafs der rotirende Maschinentheil nur einen Theil der ganzen Peripherie in dem einen Sinne durchläuft, und dann zurückkehrt, um einen ebenso grofsen Theil der Peripherie im entgegengesetzten Sinne zu durchlaufen. Die erste Art der Bewegung ist den Drehaxen oder Wellen vorzugsweise eigenthümlich, die andere Art der Bewegung kommt dagegen unter Andern vor, wenn zwei stangenförmige Körper den Winkel, den ihre Längenrichtungen mit einander bilden, zeitweise ändern. Die verbindenden Maschinentheile für diese beiden Arten der rotirenden Bewegung charakterisiren sich in ihrer Konstruktion:

a) als Zapfenlager,

b) als Charniere oder Gelenke.