geben sich links die Maafse für die Stofswirkungen auf die Axe, nämlich:

$$203b)\quad \begin{cases} Q_{,}.\tau = (w' - w).J_{,}.\left(\frac{y_{,}}{r_{,}^{2}} - \frac{M.Y}{J_{,}}\right) \\ Q_{,,}.\tau = (w' - w).J_{,}.\left(\frac{x_{,}}{r_{,}^{2}} - \frac{M.X}{J_{,}}\right) \\ (Ka)'.\tau = (w' - w).J_{,}.\left(\frac{x_{,}.z_{,}}{r_{,}^{2}} - \frac{\Sigma(dm.x.z)}{J_{,}}\right) \\ (Ka)''.\tau = (w' - w).J_{,}.\left(\frac{y_{,}.z_{,}}{r_{,}^{2}} - \frac{\Sigma(dm.y.z)}{J_{,}}\right). \end{cases}$$

Bedingungen, unter welchen die Stofswirkungen auf die Axe gleich Null sind. — Mittelpunkt des Stofses.

§ 113. Nach dem vorigen Paragraphen hat die fixe Axe eines rotirenden Systems, auf welches ein anderes in einer gegebenen Richtung stöfst, zweierlei Stofswirkungen zu erleiden. Die eine Gruppe dieser Stofswirkungen rührt davon her, dafs bestimmte Komponenten der Geschwindigkeit des stofsenden Systems durch das rotirende System, welches gezwungen ist, nur um die gegebene Axe sich zu drehen, aufgehoben werden; die andere Gruppe von Stofswirkungen ist dadurch bedingt, dafs die Massenelemente des rotirenden Systems ihre Geschwindigkeit plötzlich ändern, dafs dieser Geschwindigkeitsänderung die Massenwiderstände der einzelnen Elemente entgegenwirken, und dafs diese Massenwiderstände im Allgemeinen nicht im Stande sind, die durch den Stofs auf das rotirende System angebrachten Kräfte vollständig zu consumiren.

Die erste Gruppe enthält folgende beiden Stofswirkungen:

1) Eine Stofswirkung in der Richtung der Axe, welche sich ausdrückt nach Gleichung 201a) durch:
$$W^{I} = M^{II}.v.\cos\gamma;$$

2) Eine Stofswirkung in einer Richtung, die in dem getroffenen Punkt radial ist, und welche sich ausdrückt nach Gleichung 201d) durch:
$$W^{II} = \pm M^{II}.\frac{v}{r_{,}}.(\cos\alpha.x_{,} - \cos\beta.y_{,}).$$

Die erstgenannte Wirkung ist auf Verschieben der Axe gerichtet, die zweite wirkt auf Durchbiegen der Axe in einer Richtung, die in dem getroffenen Punkte radial ist.

Die andere Gruppe der auf die Axe erfolgenden Stofswirkungen ist durch die Gleichungen 203b) zu bestimmen.

Wir wollen nunmehr untersuchen, unter welchen Bedingungen alle diese Stofswirkungen Null werden.

Damit die Stofswirkung $W^I$ gleich Null werde, mufs $\cos\gamma = 0$ sein; d. h. die Richtung der Geschwindigkeit des stofsenden Systems mufs in eine Ebene fallen, die normal zur Drehaxe ist.

Damit die Stofswirkung $W^{II}$ gleich Null werde, ist die Bedingung zu erfüllen:

$$\cos\alpha \,.\, x_{,} = \cos\beta \,.\, y_{,}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{y_{,}}{x_{,}}.$$

Nun ist $\frac{y_{,}}{x_{,}}$ die Cotangente des Winkels, welchen die Peripheriegeschwindigkeit des getroffenen Punktes im Augenblick des Stofses mit der Axe der $X$ macht, und wenn wir setzen

$$\operatorname{cotang}\alpha_{,} = \frac{\cos\alpha_{,}}{\sin\alpha_{,}} = \frac{\cos\alpha_{,}}{\cos\beta_{,}},$$

so folgt als Bedingungs-Gleichung:

$$204)\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha_{,}}{\cos\beta_{,}} = \operatorname{cotang}\alpha_{,},$$

das heifst:

Wenn in dem rotirenden System keine Stofswirkung radial in dem getroffenen Punkte wirksam sein soll, so müssen sich die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit des stofsenden Systems mit zwei zur Drehaxe normalen Koordinatenaxen bildet, verhalten, wie die Cosinus der Winkel, welche die Peripheriegeschwindigkeit des rotirenden Systems im Augenblicke des Stofses mit denselben Koordinatenaxen bildet.

Diese Bedingung wird immer erfüllt, wenn die Geschwindigkeit des stofsenden Systems in einer Ebene liegt, welche das im Augenblick des Stofses von dem getroffenen Punkte beschriebene Bogenelement berührt, oder welche normal ist zum kürzesten Abstande des getroffenen Punktes von der Drehaxe.

Man sieht, dafs die Bedingungen, unter welchen die Stofswirkungen $W^I$ und $W^{II}$ gleich Null werden, lediglich von der Richtung der Geschwindigkeit des stofsenden Systems abhängig sind. Aus der Form der Gleichungen 203b) ergiebt sich dagegen sofort, dafs die Bedingungen, unter welchen diejenigen Stofswirkungen, welche aus den in dem gestofsenen System thätigen Kräften hervorgehen, gleich Null werden, ganz allein von der Gruppirung der

Massenelemente und von der Lage des getroffenen Punktes gegen die Drehaxe abhängig sind.

Damit nämlich die Gleichungen 203b) einzeln gleich Null werden, mufs sein:

$$204\text{a)}\ \left\{\begin{array}{l} \frac{y_{,}}{r_{,}^{2}} = \frac{M\,.\,Y}{J_{,}};\quad \frac{x_{,}}{r_{,}^{2}} = \frac{M\,.\,X}{J_{,}} \\ \frac{x_{,}\,.\,z_{,}}{r_{,}^{2}} = \frac{\Sigma(dm\,.\,x\,.\,z)}{J_{,}};\quad \frac{y_{,}\,.\,z_{,}}{r_{,}^{2}} = \frac{\Sigma(dm\,.\,y\,.\,z)}{J_{,}}. \end{array}\right.$$

Indem wir aus den beiden ersten Gleichungen den Werth von $r_{,}^{2}$ eliminiren, ergiebt sich:

$$204\text{b)}\ \frac{x_{,}}{y_{,}} = \frac{X}{Y},$$

da nun $\frac{x_{,}}{y_{,}}$ die Tangente des Winkels ist, welchen der kürzeste Abstand des getroffenen Punktes mit der Axe der $X$ bildet, und $\frac{X}{Y}$ die Tangente des Winkels ist, welchen der kürzeste Abstand des Schwerpunktes mit derselben Axe bildet, so ergiebt sich als erste Bedingung, unter welcher die Wirkung der Massenwiderstände auf die Axe gleich Null ist, dafs diese beiden Abstände parallel sein müssen, oder mit andern Worten, dafs der getroffene Punkt in einer Ebene liegen müsse, die durch den Schwerpunkt und durch die Drehaxe geht.

Indem wir die Gleichungen

$$\frac{x_{,}}{r_{,}^{2}} = \frac{M\,.\,X}{J_{,}} \text{ und } \frac{y_{,}}{r_{,}^{2}} = \frac{M\,.\,Y}{J_{,}}$$

quadriren, addiren und beachten, dafs $x_{,}^{2} + y_{,}^{2} = r_{,}^{2}$ und $X^{2} + Y^{2} = R^{2}$ ist, wenn wir unter $R$ den kürzesten Abstand des Schwerpunktes von der Drehaxe verstehen, ergiebt sich:

$$204\text{c)}\ r_{,} = \frac{J_{,}}{M\,.\,R}.$$

Nun ist $M.R$ offenbar das statische Moment des rotirenden Systems in Bezug auf die Drehaxe, und folglich ist nach Gleichung 158a) der Quotient:

$\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}$ gleich dem Abstand des Schwingungspunktes.

Hiernach ergiebt sich als zweite Bedingung, unter welcher die Wirkung der Massenwiderstände auf die Drehaxe gleich Null ist,

> dafs der getroffene Punkt einen Abstand von der Drehaxe haben müsse, welcher gleich dem Abstand des Schwingungspunktes des rotirenden Systems von derselben Axe ist.

Es folgt hieraus ferner, dafs wenn die Drehaxe durch den

Schwerpunkt geht, unter allen Umständen eine Einwirkung der Massenwiderstände auf die Axe ausgeübt wird.

Damit nun endlich die Kräftepaare gleich Null werden, ist zufolge der Gleichung 204a) noch zu setzen:

$$204\,d)\quad \left\{ \begin{array}{l} z_{,} = \dfrac{r_{,}^2}{x_{,}} \cdot \dfrac{\Sigma(dm\,.\,x\,.\,z)}{J_{,}} \text{ und auch} \\ z_{,} = \dfrac{r_{,}^2}{y_{,}} \cdot \dfrac{\Sigma(dm\,.\,y\,.\,z)}{J_{,}}. \end{array} \right.$$

Diese beiden Bedingungen für $z_{,}$ müssen gleichzeitig erfüllt werden; es ist aber nicht unter allen Umständen möglich, sie gleichzeitig zu erfüllen; die Möglichkeit der Erfüllung beider Bedingungen, und folglich die Möglichkeit, dafs die Kräftepaare, welche durch die Massenwiderstände sich bilden, und welche auf Kippen der fixen Axe wirken, gleich Null seien, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{x_{,}}{y_{,}} = \frac{\Sigma(dm.x.z)}{\Sigma(dm.y.z)}.$$

Diese Bedingung findet unter andern statt:

1) wenn $x_{,} = y_{,}$ und $\Sigma(dm.x.z) = \Sigma(dm.y.z)$ ist; und dies wird erfüllt, wenn das rotirende System zwei Ebenen der Symmetrie hat, welche sich in der Drehaxe schneiden, und so liegen, dafs der getroffene Punkt gleich weit von beiden entfernt ist. $z$ ist für diesen Fall unbestimmt.

2) wenn $\Sigma(dm.x.z) = 0$ und $\Sigma(dm.y.z) = 0$ ist; in diesem Falle ist $z$ gleich Null, d. h. der getroffene Punkt mufs in der Ebene liegen, in welcher die Koordinatenaxen liegen, für welchen die eben genannten Werthe gleich Null sind. Dieser Fall findet statt, wenn die Drehungsaxe eine Hauptaxe des Systems ist (§ 88. S. 175), und wenn der getroffene Punkt in derjengen zur Drehaxe normalen Ebene liegt, in welcher auch der Schwerpunkt liegt. Denn nehmen wir den Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der Drehungsaxe als Anfangspunkt der Koordinaten, so ist $z_{,} = 0$ und nach § 88. S. 174 auch

$$\Sigma(dm.x.z) = 0 \text{ und } (\Sigma dm.y.z) = 0.$$

Derjenige Punkt eines rotirenden Systems, welcher, wenn er von einem stofsenden System getroffen wird, keine Stofswirkungen durch die Massenwiderstände auf die Drehaxe bedingt, heifst der Mittelpunkt des Stofses. Damit ein Mittelpunkt des Stofses vorhanden sei, müssen die

Bedingungen der Gleichung 204 d) gleichzeitig erfüllt werden; aufserdem gilt für die Lage des Mittelpunktes des Stofses Folgendes:

1) derselbe liegt in einer Ebene, die durch die Drehaxe und durch den Schwerpunkt gelegt werden kann (Gleichung 204 b);
2) in dieser Ebene hat er von der Drehaxe denselben Abstand, welchen der Schwingungsmittelpunkt des Systems besitzt (Gleichung 204 c);
3) ist die Drehungsaxe eine Hauptaxe, so fällt der Mittelpunkt des Stofses mit dem Schwingungsmittelpunkt zusammen, d. h. er liegt in der kürzesten Entfernung des Schwerpunktes von der Drehungsaxe (Gleichung 204 d).

Damit überhaupt keine Stofswirkung auf die Drehaxe erfolge, müssen für die Richtung der Geschwindigkeit des stofsenden Systems folgende Bedingungen erfüllt werden:

1) die Richtung der Geschwindigkeit mufs durch den Mittelpunkt des Stofses gehen;
2) dieselbe mufs normal sein zu der Ebene, welche durch die Drehaxe und durch den Schwerpunkt gelegt werden kann. Dies folgt aus den Gesetzen, welche wir für die Bedingungen hergeleitet haben, unter welchen $W^{I}$ und $W^{II}$ gleich Null werden (S. 268).