

ziren, die erste Gleichung quadriren, auf Null bringen, von der ersten abziehen und gehörig ordnen, so ergibt sich:

$$M^{II} \cdot M^I \cdot (v^2 + c^2 - 2v \cdot c) - M^{II} \cdot M^I \cdot (v_i^2 + c_i^2 - 2v_i \cdot c_i) = u^2 \cdot M^I \cdot M^{II} \cdot (1 - \varepsilon),$$

oder, wenn wir mit $M^{II} \cdot M^I$ dividiren, und beachten, daß $u^2 = (v - c)^2$ (Gleichung 198) also gleich $v^2 + c^2 - 2v \cdot c$ ist, so ergibt sich:

$$200a) \quad c_i - v_i = u \cdot \sqrt{\varepsilon}.$$

Aus dieser Gleichung und aus der Gleichung 197a)

$$M^I c + M^{II} v = M^I c_i + M^{II} v_i$$

folgt nun:

$$200b) \quad \begin{cases} v_i = \frac{M^I c + M^{II} v}{M^I + M^{II}} - (v - c) \cdot \frac{M^I}{M^I + M^{II}} \cdot \sqrt{\varepsilon} \\ c_i = \frac{M^I c + M^{II} v}{M^I + M^{II}} + (v - c) \cdot \frac{M^{II}}{M^I + M^{II}} \cdot \sqrt{\varepsilon}. \end{cases}$$

Diese Gleichung lehrt die Geschwindigkeiten finden, welche die beiden Systeme in dem Augenblicke besitzen, wo die durch den Stofs bewirkte Veränderung der Form sich wiederhergestellt hat. Ist diese Wiederherstellung vollständig erfolgt, so ist $\varepsilon = 1$ zu setzen, ist sie dagegen gar nicht erfolgt, so ist $\varepsilon = 0$ zu setzen.

Ist die gestofsene Masse M^I gegen M^{II} unendlich groß, und ist dieselbe in Ruhe, also $c = 0$, so ist:

$$200c) \quad v_i = -v \cdot \sqrt{\varepsilon}; \quad \varepsilon = \left(\frac{v_i}{v}\right)^2.$$

Nach *Newton* *) ist:

- für Elfenbein $\varepsilon = \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 0,79$
- Glas $\varepsilon = \left(\frac{1}{16}\right)^2 = 0,879$
- Kork, Stahl, Wolle $\varepsilon = \left(\frac{5}{9}\right)^2 = 0,309,$

wobei vorausgesetzt ist, daß der eine Körper, nämlich der stofsende, die Kugelform, der gestofsene die Plattenform hat.

Im Allgemeinen sind die Gesetze des Stofses und die durch denselben erfolgenden Formveränderungen noch nicht genügend aufgeklärt.

Stofs auf ein festes System, welches um eine fixe Axe rotirt. Maafs für die Stofswirkung.

§ 112. Denken wir ein festes System, welches um eine fixe Axe rotirt; die fixe Axe sei die dritte Axe eines Koordinatensystems, dessen beide anderen Axen in einer Ebene liegen, welche

*) Weisbach, Ingenieur und Maschinen-Mechanik, Theil I. § 278.

normal zur fixen Axe ist. Wir nehmen einen beliebigen Punkt der fixen Axe als Anfangspunkt der Koordinaten, und es seien X, Y, Z die Koordinaten des Schwerpunktes. M^I sei die Masse des rotirenden Systems, w die Winkelgeschwindigkeit, welche das System besitzt in dem Augenblicke, in welchem ein zweites System, dessen Masse M^{II} ist, mit der Geschwindigkeit v auf das rotirende System stößt. Der getroffene Punkt habe die Koordinaten x_i, y_i, z_i und die Richtung der Geschwindigkeit, mit welcher der Stofs erfolgt, mache mit den drei Axen die Winkel α, β, γ .

Der Abstand des getroffenen Punktes von der Drehaxe ist:

$$a) \quad r_i = \sqrt{(x_i^2 + y_i^2)}.$$

Ist J_i das Trägheitsmoment des rotirenden Systems in Bezug auf die Drehaxe, so ist die auf den Abstand r reduzierte Masse nach Gleichung 147c), S. 161:

$$b) \quad M_i^I = \frac{J_i}{r_i^2}.$$

Die Peripheriegeschwindigkeit in dem getroffenen Punkte ist $w r$, die Richtung derselben bilde mit den drei Axen die Winkel $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, dann ist:

$$c) \quad \begin{cases} \cos \alpha_i = \sin \beta_i = \frac{y_i}{r_i} \\ \cos \beta_i = \sin \alpha_i = \frac{x_i}{r_i} \\ \cos \gamma_i = 0; \quad \gamma_i = 90. \end{cases}$$

Nun denken wir den Stofs in derselben Weise erfolgend, als ob in dem Augenblick des Stofses die reduzierte Masse M_i^I frei mit der Masse M^{II} zusammenstieße. Die Komponenten der Geschwindigkeiten der gestofsenen Masse M_i^I sind nun für die drei Axen:

$$d) \quad \begin{cases} c^I = w r \cdot \cos \alpha_i; & c^{II} = w r \cdot \cos \beta_i; & c^{III} = 0 \\ c^I = w \cdot y_i; & c^{II} = w \cdot x_i. \end{cases}$$

Die Komponenten der stofsenden Masse M^{II} sind für dieselben Axen:

$$e) \quad v^I = v \cdot \cos \alpha; \quad v^{II} = v \cdot \cos \beta; \quad v^{III} = v \cdot \cos \gamma.$$

Wir behandeln nur den Fall, daß die beiden Systeme sich während des Stofses vollkommen gemeinschaftlich bewegen müssen, daß folglich während des Stofses eine Verschiebung der beiden Systeme nicht möglich sei. Dann ergeben sich nach Gleichung 197b) die gemeinschaftlichen Geschwindigkeiten, welche beide Systeme annehmen müßten, wenn sie beide vollkommen frei wären:

$$201) \left\{ \begin{array}{l} v_i^I = \frac{M_i^I \cdot w \cdot y_i + M^{II} \cdot v \cdot \cos \alpha}{M_i^I + M^{II}} \\ v_i^{II} = \frac{M_i^I \cdot w \cdot x_i + M^{II} \cdot v \cdot \cos \beta}{M_i^I + M^{II}} \\ v_i^{III} = \frac{M^{II} \cdot v \cdot \cos \gamma}{M_i^I + M^{II}} \end{array} \right.$$

Nun ist aber das gestoßene System im Augenblick des Stoßes nicht wirklich frei, sondern es ist gezwungen sich um eine Axe zu drehen, die durch die beiden fixen Punkte geht, es kann also nach der Richtung der fixen Axe gar nicht ausweichen, und es folgt daraus, daß durch die fixen Punkte eine Stoßwirkung in der Richtung der Drehaxe aufgehoben werden muß, welche dem Stoß der Massen $M^I + M^{II}$ mit der Geschwindigkeit v_i^{III} entspricht. Die durch die fixen Punkte in der Richtung der ersten Axe aufgehobene Stoßwirkung ist also:

$$201a) W^I = (M_i^I + M^{II}) \cdot v^{III} = M^{II} \cdot v \cdot \cos \gamma.$$

Die beiden andern Komponenten v_i^I und v_i^{II} würden eine resultirende Geschwindigkeit geben, welche sich ausdrückt durch:

$$v_u = \sqrt{(v_i^{I2} + v_i^{II2})}$$

und welche mit den beiden Axen die Winkel bildet: α_u und β_u ; es ist:

$$\cos \alpha_u = \frac{v_i^I}{v_u} = \sin \beta_u;$$

$$\cos \beta_u = \frac{v_i^{II}}{v_u} = \sin \alpha_u.$$

Diese resultirende Geschwindigkeit bilde mit der Peripherie des Kreises, in welchem der getroffene Punkt gezwungen ist sich zu bewegen, den Winkel ε ; es ist nach einem bekannten Gesetz der analytischen Geometrie:

$$\cos \varepsilon = \cos \alpha_i \cdot \cos \alpha_u + \cos \beta_i \cdot \cos \beta_u + \cos \gamma_i \cdot \cos \gamma_u$$

oder durch Einsetzung der oben bestimmten Werthe:

$$f) \left\{ \begin{array}{l} \cos \varepsilon = \frac{y_i}{r_i} \cdot \frac{v_i^I}{v_u} - \frac{x_i}{r_i} \cdot \frac{v_i^{II}}{v_u} \\ \sin \varepsilon = \sqrt{(1 - \cos^2 \varepsilon)} = \pm \left(\frac{x_i \cdot v_i^I}{r_i \cdot v_u} - \frac{y_i \cdot v_i^{II}}{r_i \cdot v_u} \right). \end{array} \right.$$

Wenn wir nun die resultirende Geschwindigkeit in zwei Komponenten p und q zerlegen, von denen die eine p in der Richtung der wirklich möglichen Bewegung, d. i. in der Richtung der Peripherie liegt, die andere aber normal dazu ist, so erhalten wir die Werthe:

$$p = v_u \cdot \cos \varepsilon = \frac{y_i}{r_i} \cdot v_i^I + \frac{x_i}{r_i} \cdot v_i^{II},$$

die andere Komponente:

$$q = v_u \cdot \sin \varepsilon = \pm \left(\frac{x_i}{r_i} \cdot v_i^I - \frac{y_i}{r_i} \cdot v_i^{II} \right)$$

oder wenn wir für v_i^I und v_i^{II} die obigen Werthe setzen, so ergibt sich, mit Berücksichtigung dafs $x_i^2 + y_i^2 = r_i^2$ (Gleichung a) ist:

$$201b) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{M_i^I \cdot w r_i + M^{II} \cdot \frac{v}{r_i} \cdot (\cos \alpha \cdot y_i + \cos \beta \cdot x_i)}{M_i^I + M^{II}} \\ q = \pm \frac{M^{II}}{M_i^I + M^{II}} \cdot \frac{v}{r_i} \cdot (\cos \alpha \cdot x_i - \cos \beta \cdot y_i). \end{array} \right.$$

Nennen wir den Winkel, welchen die Richtung der Stofsgeschwindigkeit mit der Richtung der Peripherie bildet, in welcher der getroffene Punkt gezwungen ist, sich zu bewegen δ , so ist

$$g) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \delta = \cos \alpha \cdot \cos \alpha_i + \cos \beta \cdot \cos \beta_i + \cos \gamma \cdot \cos \gamma_i \\ = \cos \alpha \cdot \frac{y_i}{r_i} + \cos \beta \cdot \frac{x_i}{r_i}, \end{array} \right.$$

und daher ist auch:

$$201c) \quad p = \frac{M_i^I \cdot w \cdot r_i + M^{II} \cdot v \cdot \cos \delta}{M_i^I + M^{II}}.$$

Da nun aber das rotirende System auch im Augenblick des Stofses sich nur nach der Richtung der Peripheriegeschwindigkeit bewegen kann, da es also keine Komponente normal zu dieser Richtung besitzen kann, so muß durch die Bedingung, dafs dafs das System eine fixe Axe haben soll die Komponente q durch die Reaktion dieser fixen Axe aufgehoben werden, und die fixe Axe muß also einer Stofswirkung, die dieser Komponente q entspricht, das ist einer Stofswirkung

$$201d) \quad W^{II} = \pm q \cdot (M_i^I + M^{II}) = \pm M^{II} \cdot \frac{v}{r_i} \cdot (\cos \alpha \cdot x_i - \cos \beta \cdot y_i)$$

Widerstand leisten. Diese Stofswirkung ist in dem getroffenen Punkte normal zur Peripherie, also radial zu denken.

Der getroffene Punkt kann also in dem Augenblick des Stofses nur die Komponente p wirklich annehmen; die derselben entsprechende Winkelgeschwindigkeit ist $w_i = \frac{p}{r_i}$, das ist:

$$201e) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_i = \frac{M_i^I \cdot w + M^{II} \cdot \frac{v}{r_i} \cdot \cos \delta}{M_i^I + M^{II}} \\ = \frac{M_i^I \cdot w + M^{II} \cdot \frac{v}{r_i^2} \cdot (\cos \alpha \cdot y_i + \cos \beta \cdot x_i)}{M_i^I + M^{II}}. \end{array} \right.$$

Es ist mithin der Zuwachs an Winkelgeschwindigkeit, welchen das System erhält:

$$201f) \left\{ \begin{aligned} w' - w &= \frac{M_i^I \cdot w + M^{II} \cdot \frac{v}{r_i} \cdot \cos \delta}{M_i^I + M^{II}} - w \\ &= \frac{M^{II}}{M_i^I + M^{II}} \cdot \left(\frac{v}{r_i} \cdot \cos \delta - w \right). \end{aligned} \right.$$

Die Zeitdauer, in welcher diese Aenderung der Winkelgeschwindigkeit erfolgt mag sehr klein sein, wir mögen dieselbe mit τ bezeichnen; wir wollen ferner das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit für diese kurze Zeit als konstant ansehen, und dasselbe mit f_i bezeichnen, dann ist nach Gleichung 28):

$$w' - w = \int_{\tau}^0 f_i \cdot d\tau = f_i \cdot \tau,$$

$$202) \text{ folglich } f_i = \frac{w' - w}{\tau} = \frac{M^{II}}{M_i^I + M^{II}} \cdot \left(\frac{v}{r_i} \cdot \cos \delta - w \right) \cdot \frac{1}{\tau}.$$

Nun können wir uns die Aenderung der Winkelgeschwindigkeit auch durch einen Druck hervorgebracht denken, der anstatt des Stofses in dem gestofsenen Punkt während der Zeitdauer τ nach der Richtung die Peripherie wirksam gedacht, dieselbe Aenderung der Winkelgeschwindigkeit bedingen würde. Nennen wir diesen Druck P , so ist sein statisches Moment $P \cdot r_i$ und wenn J_i das Trägheitsmoment des Systems ist, so ist auch nach Gleichung 154) und 202):

$$202a) f_i = \frac{P \cdot r_i}{J_i}; \quad P = \frac{f_i \cdot J_i}{r_i} = \frac{w' - w}{\tau} \cdot \frac{f_i}{r_i}.$$

Multiplizieren wir den letzten Werth im Zähler und Nenner mit r_i , so ergibt sich:

$$202b) P = \frac{w' r_i - w r_i}{\tau} \cdot \frac{J_i}{r_i^2}; \quad P \cdot \tau = (w' r_i - w r_i) \cdot M_i^I.$$

Nun ist $w' r_i - w r_i$ die Geschwindigkeitsänderung, welche der getroffene Punkt erleidet, $\frac{J_i}{r_i^2}$ ist die auf den getroffenen Punkt reduzierte Masse (Gleichung b); es ist folglich die Kraft, welche dieselbe Geschwindigkeitsänderung in dem getroffenen System bedingen würde, welche der Stofs erzeugt, proportional dem Produkt aus der Differenz der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stofse in die auf den getroffenen Punkt reduzierte Masse. Man nennt dies Produkt das **Maafs für die Stofswirkung**.

Nach der obigen Gleichung ist auch das Maafs für die Stofs-

wirkung gleich dem Produkt aus der Kraft, welche dieselbe Geschwindigkeitsänderung in dem gestofsenen System bedingen würde in die Zeitdauer des Stofses. Unter diesen Modifikationen und Bedingungen lassen sich die Gesetze, welche für Drucke gelten auch für Stofswirkungen anwenden.

Die Kraft P zerlegen wir nach der Richtung der Axen der X und der Y in die beiden Komponenten:

$$h) \quad P \cdot \cos \alpha_i = P \cdot \frac{y_i}{r_i} \quad \text{und} \quad P \cdot \cos \beta_i = P \cdot \frac{x_i}{r_i}.$$

Die Momente dieser Komponenten sind für die beiden Axen der X und der Y :

$$i) \quad P \cdot \frac{x_i \cdot z_i}{r_i} \quad \text{und} \quad P \cdot \frac{y_i \cdot z_i}{r_i}.$$

Nun erscheint die Kraft P als eine auf das System angebrachte Kraft, und es müssen daher ihre Komponenten für die Axen der X und der Y sowohl, als ihre Momente für dieselben Axen gleich den Kräftesummen und Momenten der in dem System thätigen Kräfte sein.

Die in dem System thätigen Kräfte sind zunächst die in jedem Massenelement wirksam zu denkenden Drucke, welche ein Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit des betrachteten Massenelementes in der Richtung des bei der Drehung durchlaufenen Weges bedingen. Dieses Aenderungsmaafs ist gleich $f_i \cdot r$, wenn f_i das Aenderungsmaafs der gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit, und r den kürzesten Abstand des Massenelementes von der Drehaxe bezeichnet, und folglich sind diese Drucke $dm \cdot f_i \cdot r$. Nennen wir die Koordinaten der betrachteten Massenelemente x, y, z und die Winkel, welche die Richtung der von denselben durchlaufenen Bogenelemente mit den Axen der X und der Y bilden α' und β' , so ist offenbar wie in Gleichung c):

$$k) \quad \cos \alpha' = \sin \beta' = \frac{y}{r}; \quad \cos \beta' = \sin \alpha' = \frac{x}{r}$$

und es sind folglich die Drucksummen der in den einzelnen Massenelementen thätigen Kräfte für die Richtung der beiden Axen, mit Berücksichtigung der Gleichung 144), S. 153:

$$l) \quad \begin{cases} \Sigma (dm \cdot f_i \cdot r \cdot \frac{y}{r}) = f_i \cdot \Sigma (dm \cdot y) = f_i \cdot M \cdot Y, \text{ und} \\ \Sigma (dm \cdot f_i \cdot r \cdot \frac{x}{r}) = f_i \cdot \Sigma (dm \cdot x) = f_i \cdot M \cdot X, \end{cases}$$

und die Momente für diese beiden Axen:

$$f_i \cdot \Sigma (dm \cdot x \cdot z) \quad \text{und} \quad f_i \cdot \Sigma (dm \cdot y \cdot z).$$

Nun sieht man, dass sowohl die Drucksummen als die Momente der in den einzelnen Massenelementen thätigen Kräfte hier nur abhängig sind von der Gruppierung der Massenelemente, während die Komponenten der auf das System angebrachten Kraft P und deren Momente nur abhängig sind von P und von den Koordinaten des gestossenen Punktes. Es ist also nicht nothwendiger Weise Gleichheit zwischen diesen Werthen vorhanden, und es müssen daher in dem System noch gewisse andere Kräfte als thätige Kräfte vorhanden sein, welche mit den in den einzelnen Massenelementen thätigen Kräfte jene Gleichheit herstellen. Diese Kräfte erscheinen als Wirkungen des Stosses auf die Drehaxe.

Wir wollen die Drucksumme dieser Stosswirkung nach der Richtung der ersten Axe mit Q_i und nach der Richtung der zweiten Axe mit Q_{ii} bezeichnen, während wir die Momente der Kräftepaare dieser Wirkungen für Drehung in einer Ebene, die normal zur ersten Axe ist mit $(Ka)'$ und für die Drehung in einer Ebene, die normal zur zweiten Axe ist, mit $(Ka)''$ bezeichnen. Nun haben wir zufolge der Bedingung, dass die auf das feste System angebrachten Kräfte mit den in dem System thätigen Kräften im Gleichgewicht sein müssen (§§ 66. und 86.) folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$203) \left\{ \begin{array}{l} P \cdot \frac{y_i}{r_i} = f_i \cdot M \cdot Y + Q_i \\ P \cdot \frac{x_i}{r_i} = f_i \cdot M \cdot X + Q_{ii} \\ P \cdot \frac{x_i \cdot z_i}{r_i} = f_i \cdot \Sigma(dm \cdot x \cdot z) + (Ka)' \\ P \cdot \frac{y_i \cdot z_i}{r_i} = f_i \cdot \Sigma(dm \cdot y \cdot z) + (Ka)'' \end{array} \right.$$

Setzen wir für f_i den Werth der Gleichung 202a), so lassen sich die Werthe von Q_i , Q_{ii} , $(Ka)'$ und $(Ka)''$ entwickeln, nämlich:

$$203a) \left\{ \begin{array}{l} Q_i = P \cdot r_i \cdot \left(\frac{y_i}{r_i^2} - \frac{M \cdot Y}{J_i} \right) \\ Q_{ii} = P \cdot r_i \cdot \left(\frac{x_i}{r_i^2} - \frac{M \cdot X}{J_i} \right) \\ (Ka)' = P \cdot r_i \cdot \left(\frac{x_i \cdot z_i}{r_i^2} - \frac{\Sigma(dm \cdot x \cdot z)}{J_i} \right) \\ (Ka)'' = P \cdot r_i \cdot \left(\frac{y_i \cdot z_i}{r_i^2} - \frac{\Sigma(dm \cdot y \cdot z)}{J_i} \right) \end{array} \right.$$

Setzen wir in diese Gleichungen den Werth von P aus Gleichung 202a) und multiplizieren wir auf beiden Seiten mit τ , so er-

geben sich links die Maasse für die Stofswirkungen auf die Axe, nämlich:

$$203b) \left\{ \begin{array}{l} Q_I \cdot \tau = (w' - w) \cdot J_I \cdot \left(\frac{y_I}{r_I^2} - \frac{M \cdot Y}{J_I} \right) \\ Q_{II} \cdot \tau = (w' - w) \cdot J_I \cdot \left(\frac{x_I}{r_I^2} - \frac{M \cdot X}{J_I} \right) \\ (Ka)' \cdot \tau = (w' - w) \cdot J_I \cdot \left(\frac{x_I \cdot z_I}{r_I^2} - \frac{\Sigma(dm \cdot x \cdot z)}{J_I} \right) \\ (Ka)'' \cdot \tau = (w' - w) \cdot J_I \cdot \left(\frac{y_I \cdot z_I}{r_I^2} - \frac{\Sigma(dm \cdot y \cdot z)}{J_I} \right). \end{array} \right.$$

Bedingungen, unter welchen die Stofswirkungen auf die Axe gleich Null sind. — Mittelpunkt des Stofses.

§ 113. Nach dem vorigen Paragraphen hat die fixe Axe eines rotirenden Systems, auf welches ein anderes in einer gegebenen Richtung stößt, zweierlei Stofswirkungen zu erleiden. Die eine Gruppe dieser Stofswirkungen rührt davon her, daß bestimmte Komponenten der Geschwindigkeit des stofsenden Systems durch das rotirende System, welches gezwungen ist, nur um die gegebene Axe sich zu drehen, aufgehoben werden; die andere Gruppe von Stofswirkungen ist dadurch bedingt, daß die Massenelemente des rotirenden Systems ihre Geschwindigkeit plötzlich ändern, daß dieser Geschwindigkeitsänderung die Massenwiderstände der einzelnen Elemente entgegenwirken, und daß diese Massenwiderstände im Allgemeinen nicht im Stande sind, die durch den Stofs auf das rotirende System angebrachten Kräfte vollständig zu consumiren.

Die erste Gruppe enthält folgende beiden Stofswirkungen:

- 1) Eine Stofswirkung in der Richtung der Axe, welche sich ausdrückt nach Gleichung 201a) durch:

$$W^I = M^{II} \cdot v \cdot \cos \gamma;$$

- 2) Eine Stofswirkung in einer Richtung, die in dem getroffenen Punkt radial ist, und welche sich ausdrückt nach Gleichung 201d) durch:

$$W^{II} = \pm M^{II} \cdot \frac{v}{r_I} \cdot (\cos \alpha \cdot x_I - \cos \beta \cdot y_I).$$

Die erstgenannte Wirkung ist auf Verschieben der Axe gerichtet, die zweite wirkt auf Durchbiegen der Axe in einer Richtung, die in dem getroffenen Punkte radial ist.

Die andere Gruppe der auf die Axe erfolgenden Stofswirkungen ist durch die Gleichungen 203b) zu bestimmen.