da nun nach Gleichung 197) $M^I.(v_{,}-c)=M^{II}.(v-v_{,})$, und indem wir $v_{,}=\frac{M^I c+M^{II} v}{M^I+M^{II}}$ nach Gleichung 197b) setzen, auch $M^I.(v_{,}-c)=\frac{M^{II}.M^I}{M^{II}+M^I}.(v-c)$ ist, so folgt, die auf Formveränderung wirkende Arbeit oder die verlorne lebendige Kraft:

$$2\Sigma(K.ds)=\frac{M^{II}.M^I}{M^{II}+M^I}.(v-c).[(v+v_{,})-(v_{,}+c)]$$

$$198)\quad 2\Sigma(K.ds)=\frac{M^{II}.M^I}{M^{II}+M^I}.(v-c)^2=\frac{M^{II}.M^I}{M^{II}+M^I}.u^2,$$

worin wir nämlich unter u die Differenz der Komponenten der Geschwindigkeiten der beiden Systeme, nach der Richtung der betrachteten Koordinatenaxe verstehen. Hierin liegt der Satz:

Wenn zwei Systeme stofsend auf einander wirken, und es erleiden für irgend eine Koordinatenaxe die Komponenten der Geschwindigkeiten Aenderungen, so ist die lebendige Kraft, welche in der Richtung dieser Axe auf Formveränderung der beiden Systeme wirkt, gleich dem Produkt aus dem Quadrat der Differenz der Komponenten der Geschwindigkeiten, welche die beiden Systeme vor dem Stofse besafsen, multiplizirt mit dem Verhältnifs zwischen dem Produkt und der Summe der Massen.

Dies Verhältnifs nennt man das harmonische Mittel der Massen.

Die beiden Gleichungen 197a) und 198), und die aus denselben hergeleiteten Gesetze sind die Grundgesetze für die Wirkung zweier festen Systeme aufeinander, wenn dieselben stofsend zusammentreffen.

Bestimmung der lebendigen Kraft, welche durch den Stofs auf Formveränderung der Systeme wirkt — Geschwindigkeiten nach Wiederherstellung der Formveränderung.

§ 111. Untersuchen wir nunmehr die auf Formveränderung der beiden Systeme wirkende Arbeit. Es seien λ^I und λ^{II} die linearen Verlängerungen oder Verkürzungen, welche die beiden Systeme in dem Augenblick erlitten haben, in welchem dieselben nach der Richtung der betrachteten Koordinatenaxe die gemeinschaftlichen Geschwindigkeiten $v_{,}=c_{,}$ angenommen haben, und zwar sind λ^I und λ^{II} in der Richtung derselben Axe gemessen. Nun ist offenbar das Wegelement ds, welches der Druck der sich der Formveränderung widersetzt, durchläuft

$$ds = d\lambda^{I} + d\lambda^{II}.$$

Nach den im ersten Theile dieses Werkes S. 193 entwickelten Gesetzen, besteht aber die Gleichung:

$$E = \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{\lambda},$$

wenn E den Elasticitäts-Modulus,
P den Druck, welcher auf Verlängerung oder Verkürzung wirkt,
F den Querschnitt des Systems normal zum Druck P,
l die ursprüngliche Länge, und
λ die Verlängerung oder Verkürzung
bezeichnet.

Hiernach ist:

$$P = \frac{E \cdot F}{l} . \lambda$$

und das Arbeitselement dieser Formveränderung:

$$P . d\lambda = \frac{E \cdot F}{l} . \lambda . d\lambda,$$

folglich die Gesammtleistung, die der Formveränderung von 0 bis λ entspricht:

$$\int_{\lambda}^{0} P . d\lambda = \frac{E}{l} . \int_{\lambda}^{0} F . \lambda . d\lambda.$$

Wenn F konstant ist können wir integriren, und es folgt:

$$199)\quad \int_{\lambda}^{0} P . d\lambda = \frac{E \cdot F}{l} \cdot \tfrac{1}{2}\lambda^2 = \frac{E \cdot F}{l} . \lambda . \tfrac{1}{2}\lambda = \tfrac{1}{2} P . \lambda.$$

Hieraus folgt:

Die Arbeit, welche einer gewissen linearen Verlängerung oder Verkürzung eines festen Systems entspricht, ist gleich dem halben Produkt aus dem Druck, welcher der durch diese Formveränderung entstehenden gröfsten Spannung das Gleichgewicht hält in den Werth der Verlängerung oder Verkürzung.

Da aber die Gleichung

$$199a)\quad E = \frac{P}{F} . \frac{l}{\lambda}$$

nur gilt für Verlängerungen oder Verkürzungen innerhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität, so gilt auch das entwickelte Gesetz nur innerhalb dieser Grenzen.

Nun würden wir für vollkommen elastische Systeme, oder so lange überhaupt die Formveränderungen sich innerhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität befinden, die Arbeit, welche auf Formveränderung der beiden Systeme wirkt, setzen können

$$\Sigma(K.ds) = \tfrac{1}{2}(P^{I}.\lambda^{I} + P^{II}.\lambda^{II}).$$

Da aber der Druck P^{I}, welcher die Verkürzung λ^{I} bewirkt, offenbar derselbe ist, welcher die Verkürzung λ^{II} bewirkt, so ist $P^{I} = P^{II}$ und wenn wir diesen Druck allgemein mit P bezeichnen, so ist:

$$199\text{b)}\quad \Sigma(Kds) = \tfrac{1}{2}P.(\lambda^{I} + \lambda^{II}).$$

Wenn wir nach der Gleichung für E (199a) die Werthe von λ^{I} und λ^{II} entwickeln, so ergiebt sich, indem wir die den beiden Systemen entsprechen Werthe mit Marken bezeichnen:

$$199\text{c)}\quad \Sigma(K.ds) = \tfrac{1}{2}P^{2}.\left(\frac{l^{I}}{E^{I}F^{I}} + \frac{l^{II}}{E^{II}F^{II}}\right)$$

und vermöge der Gleichung 198 ergiebt sich:

$$199\text{d)}\quad P = u.\sqrt{\left(\frac{M^{II}.M^{I}}{M^{II}+M^{I}}\right)}.\sqrt{\left[\frac{E^{I}F^{I}.E^{II}F^{II}}{l^{I}.E^{I}F^{I}+l^{II}.E^{II}F^{II}}\right]}.$$

Durch diese Gleichung ist man im Stande, den gröfsten Druck zu bestimmen, welcher, durch den Stofs hervorgerufen, auf Formveränderung der beiden Systeme wirksam ist, so lange man die beiden Systeme als vollkommen elastisch betrachtet.

Ist das eine von beiden Systemen, z. B. das System II, vollkommen hart, so dafs es gar keine Formveränderung erleidet, so ist $\lambda^{II} = 0$, und die Entwickelung würde ergeben:

$$199\text{e)}\quad P = u.\sqrt{\left(\frac{M^{I}.M^{II}}{M^{I}+M^{II}}\right)}.\sqrt{\left(\frac{E^{I}.F^{I}}{l^{I}}\right)}.$$

Wenn dagegen beide Systeme als absolut hart angenommen werden, so würde sich der auf Formveränderung wirkende Druck als unendlich grofs ergeben.

Denken wir nunmehr zwei Systeme, die nicht vollkommen elastisch sind, oder setzen wir allgemeiner voraus, die Formveränderungen überschreiten die Grenzen der vollkommenen Elastizität, und es entstehen bleibende Formveränderungen. In diesem Falle werden allerdings auch die Verlängerungen und Verkürzungen Funktionen der Drucke sein, durch welche sie erzeugt werden; aber es ist nicht mehr zulässig, dieselben, wie wir es vermöge der Gleichung $\lambda = P \cdot \frac{l}{F \cdot E}$ gethan haben, einfach proportinal diesen Drukken zu setzen. So lange nun die Abhängigkeit dieser Formveränderungen von den Drucken nicht bekannt ist, kann man auch die Gleichung

$$K \cdot ds = P \cdot (d\lambda^{I} + d\lambda^{II})$$

nicht integriren, und die Aufgabe, den auf Formverändernng wirkenden Druck zu bestimmen, bleibt ungelöst.

Näherungsweise mag es zulässig sein die Voraussetzung, dafs die Verkürzungen in direktem Verhältnifs zu den Drucken stehen, auch noch für Formveränderungen gelten zu lassen, die aufserhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität liegen, und nur unter dieser Annahme gelten die Gleichungen 199) bis 199e) auch für nicht vollkommen elastische Systeme.

Sobald durch den Zusammenstofs zweier festen Systeme Formveränderung entweder in beiden oder nur in einem von beiden Systemen erfolgt ist, bleibt entweder diese Formveränderung bestehen, oder die Systeme stellen wieder ihre ursprüngliche Form ganz oder theilweise her. Wenn die Formveränderung bestehen bleibt, so ist das auf Formveränderung wirkende Arbeitsmoment durch dieselbe konsumirt, wenn dagegen die Systeme sich wieder ausdehnen, so wird durch diese Ausdehnung eine gewisse Kraft frei und wirkt auf Erzeugung von Geschwindigkeit.

Wenn die durch die Herstellung der ursprünglichen Form wieder frei gewordene Arbeit (wiedergewonnene lebendige Kraft) ein gewisser Theil, etwa ε, der auf die Formveränderung verwandten Arbeit ist, so würde die nach Verlauf einer Zeitdauer, welche die Zusammendrückung und Ausdehnung umfafst (Dauer des Stofses) verlorene Arbeit sich ausdrücken nach Gleichung 198 durch:

$$200)\ \tfrac{1}{2}\left(u^2 \cdot \frac{M^I \cdot M^{II}}{M^I + M^{II}} - \varepsilon . u^2 \cdot \frac{M^I \cdot M^{II}}{M^I + M^{II}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} u^2 \cdot \frac{M^I \cdot M^{II}}{M^I + M^{II}} \cdot (1 - \varepsilon).$$

folglich gelten zur Bestimmung der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stofse die Bedingungs-Gleichungen (197 und 198):

$$M^I c + M^{II} v = M^I c_{\prime} + M^{II} v_{\prime}$$

$$M^{II} \cdot (v^2 - v_{\prime}^{\,2}) - M^I \cdot (c_{\prime}^{\,2} - c^2) = u^2 \cdot \frac{M^I \cdot M^{II}}{M^I + M^{II}} \cdot (1 - \varepsilon).$$

Wenn wir nun die zweite Gleichung mit $M^I + M^{II}$ multipliziren, die erste Gleichung quadriren, auf Null bringen, von der ersten abziehen und gehörig ordnen, so ergiebt sich:

$$M^{II}.M^{I}.(v^2 + c^2 - 2v.c) - M^{II}.M^{I}.(v_{,}^2 + c_{,}^2 - 2v_{,}.c_{,})$$
$$= u^2.M^{I}.M^{II}.(1-\varepsilon),$$

oder, wenn wir mit $M^{II}.M^{I}$ dividiren, und beachten, dafs $u^2 = (v-c)^2$ (Gleichung 198) also gleich $v^2 + c^2 - 2v.c$ ist, so ergiebt sich:

$$200\text{a)}\quad c_{,} - v_{,} = u.\sqrt{\varepsilon}.$$

Aus dieser Gleichung und aus der Gleichung 197 a)

$$M^{I}c + M^{II}v = M^{I}c_{,} + M^{II}v_{,}$$

folgt nun:

$$200\text{b)}\quad \begin{cases} v_{,} = \dfrac{M^{I}c + M^{II}v}{M^{I} + M^{II}} - (v-c).\dfrac{M^{I}}{M^{I}+M^{II}}.\sqrt{\varepsilon} \\[2ex] c_{,} = \dfrac{M^{I}c + M^{II}v}{M^{I} + M^{II}} + (v-c).\dfrac{M^{II}}{M^{I}+M^{II}}.\sqrt{\varepsilon}. \end{cases}$$

Diese Gleichung lehrt die Geschwindigkeiten finden, welche die beiden Systeme in dem Augenblicke besitzen, wo die durch den Stofs bewirkte Veränderung der Form sich wiederhergestellt hat. Ist diese Wiederherstellung vollständig erfolgt, so ist $\varepsilon = 1$ zu setzen, ist sie dagegen gar nicht erfolgt, so ist $\varepsilon = 0$ zu setzen.

Ist die gestofsene Masse M^{I} gegen M^{II} unendlich grofs, und ist dieselbe in Ruhe, also $c = 0$, so ist:

$$200\text{c)}\quad v_{,} = -v.\sqrt{\varepsilon};\quad \varepsilon = \left(\frac{v_{,}}{v}\right)^2.$$

Nach *Newton* *) ist:

für Elfenbein . . . . . $\varepsilon = (\frac{8}{9})^2 = 0{,}79$
- Glas . . . . $\varepsilon = (\frac{15}{16})^2 = 0{,}879$
- Kork, Stahl, Wolle $\varepsilon = (\frac{5}{9})^2 = 0{,}309$,

wobei vorausgesetzt ist, dafs der eine Körper, nämlich der stofsende, die Kugelform, der gestofsene die Plattenform hat.

Im Allgemeinen sind die Gesetze des Stofses und die durch denselben erfolgenden Formveränderungen noch nicht genügend aufgeklärt.

Stofs auf ein festes System, welches um eine fixe Axe rotirt. Maafs für die Stofswirkung.

§ 112. Denken wir ein festes System, welches um eine fixe Axe rotirt; die fixe Axe sei die dritte Axe eines Koordinatensystems, dessen beide anderen Axen in einer Ebene liegen, welche

---

*) Weisbach, Ingenieur und Maschinen-Mechanik, Theil I. § 278.