absolute Bewegung dieses verschiebbaren Systems die Resultirende aus der Bewegung in der Richtung der Verschiebung, und aus der Bewegung in der Richtung des Ausweichens. Kennt man in jedem Zeitelement die Geschwindigkeiten dieser beiden Bewegungen, so läſst sich der absolute Weg des verschiebbaren Systems leicht konstruiren. Ist umgekehrt der absolute Weg bekannt, und die Richtung, in welcher das ausweichende System sich bewegt, so kann man, wenn man in jedem Augenblicke die Geschwindigkeiten kennt, die Bahn des Gleitens konstruiren, indem man die Bedingung festhält, daſs die Systeme fortwährend in Berührung sein sollen.

Wir werden bei einer spätern Veranlassung auf die Methoden der Verzeichnung des absoluten Weges, und der Bahn des Gleitens näher eingehen.

Stoſs fester Systeme.

Grundgesetze des Stoſses.

§ 110. Wenn zwei feste Systeme, die sich nicht berühren, sich so bewegen, daſs sie in irgend einem Augenblick sich treffen, so übt das eine System auf das andere eine gewisse Wirkung aus, indem es im Allgemeinen der Geschwindigkeit des andern Systems eine Aenderung ertheilt. Erfolgt diese Aenderung plötzlich, so nennen wir die Einwirkung des einen Systems auf das andere einen Stoſs. Die Wirkung des Stoſses ist also immer als die Wirkung einer momentan wirkenden Kraft anzusehen (§ 10).

Wir nennen das eine von beiden Systemen das stoſsende, das andere das gestoſsene, wobei es gleichgiltig ist, welches von beiden Systemen wir als das stoſsende und welches als das gestoſsene betrachten wollen.

Nun nennen wir die Masse des stoſsenden Systems M^I und die Geschwindigkeit, mit welcher dasselbe sich vor dem Stoſse bewegt c, diejenige nach dem Stoſse $c_{\prime}$; ferner möge M^{II} die Masse des gestoſsenen Systems, und v und $v_{\prime}$ die Geschwindigkeiten desselben vor und nach dem Stoſse sein. Zerlegen wir die Geschwindigkeiten c u. $c_{\prime}$ v u. $v_{\prime}$ nach der Richtung dreier angenommenen Koordinatenaxen, und bezeichnen wir die Komponenten durch entsprechende Marken, so ist offenbar die Leistung, welche in dem gestoſsenen System hervorgebracht werden muſs, indem dasselbe aus der Geschwindigkeit c in die Geschwindigkeit $c_{\prime}$ übergeht, für die Richtung der drei Axen, da man es hier mit momentan wirkenden Kräften zu thun hat, nach Gleichung 45):

$$M^I.(c_{\prime}^I - c^I);\quad M^I.(c_{\prime}^{II} - c^{II});\quad M^I.(c_{\prime}^{III} - c^{III}).$$

Diese Leistung erscheint aber als Leistung der Massenwiderstände, die sich der Geschwindigkeitsänderung entgegensetzen, sie mufs nach dem Gesetz No. 4. § 86 (S. 167) mit der Leistung der bewegenden Kräfte in jedem Augenblick im Gleichgewicht sein. Die Leistung der bewegenden Kräfte ist aber nichts anderes, als diejenige Leistung, welche das stofsende System abgiebt, indem es die Geschwindigkeitsänderung von v in $v_{,}$ erleidet, und für die drei Axen hat man diese Leistung:

$$M^{I}.(v_{,}^{I}-v^{I});\quad M^{II}.(v_{,}^{II}-v^{II});\quad M^{II}.(v_{,}^{III}-v^{III}).$$

Hiernach müssen zufolge des eben genannten Gesetzes die Gleichgewichtsbedingungen statt finden:

$$197)\ \left\{\begin{array}{l} M^{I}.(c_{,}^{I}-c^{I})+M^{II}.(v_{,}^{I}-v^{I})=0\\ M^{I}.(c_{,}^{II}-c^{II})+M^{II}.(v_{,}^{II}-v^{II})=0\\ M^{I}.(c_{,}^{III}-c^{III})+M^{II}.(v_{,}^{III}-v^{III})=0. \end{array}\right.$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen durch einfache Entwickelung:

$$197a)\ \left\{\begin{array}{l} M^{I}c^{I}+M^{II}v^{I}=M^{I}c_{,}^{I}+M^{II}v_{,}^{I}\\ M^{I}c^{II}+M^{II}v^{II}=M^{I}c_{,}^{II}+M^{II}v_{,}^{II}\\ M^{I}c^{III}+M^{II}v^{III}=M^{I}c_{,}^{III}+M^{II}v_{,}^{III}. \end{array}\right.$$

Nach § 22. S. 26 nennt man das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit die Gröfse der Bewegung, und es liegt in der Gleichung 197 a) der Satz:

> Wenn zwei feste Systeme stofsend auf einander wirken, und es werden die Komponenten der Geschwindigkeiten für irgend eine der Koordinatenaxen durch den Stofs in beiden Systemen geändert, so ist gleichwohl die Summe der Gröfsen der Bewegung beider Systeme vor der Geschwindigkeitsänderung eben so grofs als nach der Geschwindigkeitsänderung.

Nach Vollendung des Stofses können folgende Fälle eintreten:

a) Die Körper trennen sich nach Vollendung des Stofses von einander; oder:

b) die Körper bleiben nach dem Stofse in Berührung mit einander.

Welcher von beiden Fällen aber auch stattfinden möge, so bleiben doch die beiden Systeme während der Zeitdauer, in welcher der Stofs statt findet, in Berührung, und müssen für diese Zeitdauer, man mag dieselbe als unendlich klein, oder nur als sehr klein ansehen, als zwei Systeme betrachtet werden, die sich nicht trennen können. Wenn aber die Systeme während der Dauer der Betrachtung in Berührung bleiben, so kommen die Gesetze des § 92 (S. 186) in Anwendung, und es sind dann die beiden Fälle möglich, dafs das eine System sich auf dem andern verschieben kann, oder dafs eine Verschiebung nicht möglich ist.

Wenn während des Stofses die beiden Systeme sich nicht verschieben können, so müssen sie sich vollkommen gemeinschaftlich bewegen, d. h. sie müssen eine gleich grofse Geschwindigkeit nach derselben Richtung besitzen, und folglich müssen auch die Komponenten dieser Geschwindigkeit für die drei Axen während des Stofses gleich grofs sein. d. h. man hat unter dieser Voraussetzung:

$$v_{,}^{I} = c_{,}^{I};\quad v_{,}^{II} = c_{,}^{II};\quad v_{,}^{III} = c_{,}^{III}$$

und dann folgt aus Gleichung 197 a) für die Komponenten der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit:

$$197\text{b})\quad \left\{ \begin{aligned} v_{,}^{I} &= \frac{M^{I} c^{I} + M^{II} v^{I}}{M^{I} + M^{II}} \\ v_{,}^{II} &= \frac{M^{I} c^{II} + M^{II} v^{II}}{M^{I} + M^{II}} \\ v_{,}^{III} &= \frac{M^{I} c^{III} + M^{II} v^{III}}{M^{I} + M^{II}}. \end{aligned} \right.$$

Aus welchen Gleichungen sich die resultirende Geschwindigkeit der Richtung und Gröfse nach bestimmen läfst.

Wenn dagegen das eine System auf dem andern gleiten kann, so denken wir die Richtung des Gleitens nach früheren Regeln bestimmt, nehmen dieselbe als dritte Axe des Koordinatensystems an, und zerlegen die Geschwindigkeiten des stofsenden und des gestofsenen Systems nach dieser Richtung und nach zwei Axen, die normal dazu sind. Nun findet eine Einwirkung der Körper auf einander (abgesehen von der Reibung) in der Richtung, in welcher ein Gleiten möglich ist, nicht statt, folglich findet auch nach dieser Richtung keine Geschwindigkeitsänderung statt, dagegen müssen beide Systeme nach jeder Richtung, die normal zur Richtung des Gleitens ist, während des Stofses gleiche Geschwindigkeiten besitzen, daher hat man für die beiden Axen, die normal zur Richtung des Gleitens sind:

$$v_{,}^{I} = c_{,}^{I};\quad v_{,}^{II} = c_{,}^{II}$$

wogegen für die Richtung des Gleitens die Geschwindigkeiten ungeändert bleiben. Die Gleichungen ergeben also:

$$197\text{c})\quad \left\{ \begin{aligned} c_{,}^{I} = v_{,}^{I} &= \frac{M^{I} c^{I} + M^{II} v^{I}}{M^{I} + M^{II}} \\ c_{,}^{II} = v_{,}^{II} &= \frac{M^{I} c^{II} + M^{II} v^{II}}{M^{I} + M^{II}} \\ c_{,}^{III} = c^{III};&\quad v_{,}^{III} = v^{III}. \end{aligned} \right.$$

Wenn die Richtung des Gleitens in derselben Ebene liegt, welche man durch die Richtungen der beiden Geschwindigkeiten v und c legen kann, und man nimmt die Linie, welche normal ist zu dieser Ebene, als erste Axe an, die Richtung des Gleitens als dritte Axe, so gehen die Gleichungen über in:

$$197\text{d})\left\{\begin{aligned} & c_{\prime}^{I} = v_{\prime}^{I} = \frac{M^{I}c^{I} + M^{II}v^{I}}{M^{I} + M^{II}} \\ & c_{\prime}^{II} = 0; \quad v_{\prime}^{II} = 0; \quad c = 0; \quad v = 0 \\ & c_{\prime}^{III} = c^{III}; \quad v_{\prime}^{III} = v^{III}. \end{aligned}\right.$$

Nach den Gleichungen 197b), c), d) sind die Gesetze für die Geschwindigkeiten während des Stofses für jede Koordinatenaxe, in welcher eine Geschwindigkeitsänderung eintritt, vollkommen übereinstimmend, und wir wollen daher im Folgenden nur die Gesetze für eine Koordinatenaxe besprechen, indem wir von vorne herein annehmen, dafs die Koordinatenaxen in dem ersten Fall (Gleichung 197b) beliebig, in den beiden andern Fällen (Gleichung 197c und d) so angenommen worden sind, wie dort vorausgesetzt worden ist. Wir verstehen also von jetzt ab unter $cc_{\prime}$, $vv_{\prime}$ die Komponenten der Geschwindigkeiten nach der Richtung irgend einer Axe, in welcher Geschwindigkeitsänderung statt findet, indem wir die Marken I, II, III fortlassen.

Wenn das stofsende System vor dem Stofse die Geschwindigkeit v und nach dem Stofse die Geschwindigkeit $v_{\prime}$ hat, so hat dasselbe durch den Stofs eine lebendige Kraft abgegeben, welche sich ausdrückt durch:

$$M^{II}.(v^2 - v_{\prime}^2).$$

Diese von dem stofsenden System abgegebene lebendige Kraft geht im Augenblick des Stofses nur zum Theil an das gestofsene System über, denn dasselbe bewegt sich, nachdem der Stofs erfolgt ist, mit der Geschwindigkeit $c_{\prime} = v_{\prime}$, hat also einen Zuwachs an lebendiger Kraft erhalten, der gleich $M^{I}.(v_{\prime}^2 - c^2)$ ist; der Rest der lebendigen Kraft also, der Werth:

$$\begin{aligned} & M^{II}.(v^2 - v_{\prime}^2) - M^{I}.(v_{\prime}^2 - c^2) \\ & = M^{II}.(v + v_{\prime}).(v - v_{\prime}) - M^{I}.(v_{\prime} + c).(v_{\prime} - c) \end{aligned}$$

mufs irgend eine andere Arbeit verrichten, und durch dieselbe verbraucht werden. Diese Arbeit besteht im Allgemeinen in der Formveränderung der beiden Systeme, und wenn wir dieselbe Arbeit mit $\Sigma(K.ds)$ bezeichnen, so ist sie nach Gleichung 49) gleich der halben lebendigen Kraft, welche darauf verwendet worden ist. Wir haben also zu setzen:

$$2\Sigma(K.ds) = M^{II}.(v + v_{\prime}).(v - v_{\prime}) - M^{I}.(v + c).(v_{\prime} - c),$$

da nun nach Gleichung 197) $M^{I}.(v_{,}-c)=M^{II}.(v-v_{,})$, und indem wir $v_{,}=\frac{M^{I}c+M^{II}v}{M^{I}+M^{II}}$ nach Gleichung 197b) setzen, auch $M^{I}.(v_{,}-c)=\frac{M^{II}.M^{I}}{M^{II}+M^{I}}.(v-c)$ ist, so folgt, die auf Formveränderung wirkende Arbeit oder die verlorne lebendige Kraft:

$$2\Sigma(K.ds)=\frac{M^{II}.M^{I}}{M^{II}+M^{I}}.(v-c).[(v+v_{,})-(v_{,}+c)]$$

$$198)\quad 2\Sigma(K.ds)=\frac{M^{II}.M^{I}}{M^{II}+M^{I}}.(v-c)^2=\frac{M^{II}.M^{I}}{M^{II}+M^{I}}.u^2,$$

worin wir nämlich unter u die Differenz der Komponenten der Geschwindigkeiten der beiden Systeme, nach der Richtung der betrachteten Koordinatenaxe verstehen. Hierin liegt der Satz:

> Wenn zwei Systeme stofsend auf einander wirken, und es erleiden für irgend eine Koordinatenaxe die Komponenten der Geschwindigkeiten Aenderungen, so ist die lebendige Kraft, welche in der Richtung dieser Axe auf Formveränderung der beiden Systeme wirkt, gleich dem Produkt aus dem Quadrat der Differenz der Komponenten der Geschwindigkeiten, welche die beiden Systeme vor dem Stofse besafsen, multiplizirt mit dem Verhältnifs zwischen dem Produkt und der Summe der Massen.

Dies Verhältnifs nennt man das harmonische Mittel der Massen.

Die beiden Gleichungen 197a) und 198), und die aus denselben hergeleiteten Gesetze sind die Grundgesetze für die Wirkung zweier festen Systeme aufeinander, wenn dieselben stofsend zusammentreffen.

Bestimmung der lebendigen Kraft, welche durch den Stofs auf Formveränderung der Systeme wirkt — Geschwindigkeiten nach Wiederherstellung der Formveränderung.

§ 111. Untersuchen wir nunmehr die auf Formveränderung der beiden Systeme wirkende Arbeit. Es seien λ^{I} und λ^{II} die linearen Verlängerungen oder Verkürzungen, welche die beiden Systeme in dem Augenblick erlitten haben, in welchem dieselben nach der Richtung der betrachteten Koordinatenaxe die gemeinschaftlichen Geschwindigkeiten $v_{,}=c_{,}$ angenommen haben, und zwar sind λ^{I} und λ^{II} in der Richtung derselben Axe gemessen. Nun ist offen-