absolute Bewegung dieses verschiebbaren Systems die Resultirende aus der Bewegung in der Richtung der Verschiebung, und aus der Bewegung in der Richtung des Ausweichens. Kennt man in jedem Zeitelement die Geschwindigkeiten dieser beiden Bewegungen, so läfst sich der absolute Weg des verschiebbaren Systems leicht konstruiren. Ist umgekehrt der absolute Weg bekannt, und die Richtung, in welcher das ausweichende System sich bewegt, so kann man, wenn man in jedem Augenblicke die Geschwindigkeiten kennt, die Bahn des Gleitens konstruiren, indem man die Bedingung festhält, dafs die Systeme fortwährend in Berührung sein sollen.

Wir werden bei einer spätern Veranlassung auf die Methoden der Verzeichnung des absoluten Weges, und der Bahn des Gleitens näher eingehen.

Stofs fester Systeme.

Grundgesetze des Stofses.

§ 110. Wenn zwei feste Systeme, die sich nicht berühren, sich so bewegen, dafs sie in irgend einem Augenblick sich treffen, so übt das eine System auf das andere eine gewisse Wirkung aus, indem es im Allgemeinen der Geschwindigkeit des andern Systems eine Aenderung ertheilt. Erfolgt diese Aenderung plötzlich, so nennen wir die Einwirkung des einen Systems auf das andere einen Stofs. Die Wirkung des Stofses ist also immer als die Wirkung einer momentan wirkenden Kraft anzusehen (§ 10).

Wir nennen das eine von beiden Systemen das stofsende, das andere das gestofsene, wobei es gleichgiltig ist, welches von beiden Systemen wir als das stofsende und welches als das gestofsene betrachten wollen.

Nun nennen wir die Masse des stofsenden Systems M^I und die Geschwindigkeit, mit welcher dasselbe sich vor dem Stofse bewegt c, diejenige nach dem Stofse $c_\prime$; ferner möge M^{II} die Masse des gestofsenen Systems, und v und $v_\prime$ die Geschwindigkeiten desselben vor und nach dem Stofse sein. Zerlegen wir die Geschwindigkeiten c u. $c_\prime$ v u. $v_\prime$ nach der Richtung dreier angenommenen Koordinatenaxen, und bezeichnen wir die Komponenten durch entsprechende Marken, so ist offenbar die Leistung, welche in dem gestofsenen System hervorgebracht werden mufs, indem dasselbe aus der Geschwindigkeit c in die Geschwindigkeit $c_\prime$ übergeht, für die Richtung der drei Axen, da man es hier mit momentan wirkenden Kräften zu thun hat, nach Gleichung 45):

$$M^I.(c_\prime^I - c^I);\quad M^I.(c_\prime^{II} - c^{II});\quad M^I.(c_\prime^{III} - c^{III}).$$

Diese Leistung erscheint aber als Leistung der Massenwiderstände, die sich der Geschwindigkeitsänderung entgegensetzen, sie mufs nach dem Gesetz No. 4. § 86 (S. 167) mit der Leistung der bewegenden Kräfte in jedem Augenblick im Gleichgewicht sein. Die Leistung der bewegenden Kräfte ist aber nichts anderes, als diejenige Leistung, welche das stofsende System abgiebt, indem es die Geschwindigkeitsänderung von v in $v_{,}$ erleidet, und für die drei Axen hat man diese Leistung:

$$M^{I}.(v_{,}^{I}-v^{I});\quad M^{II}.(v_{,}^{II}-v^{II});\quad M^{II}.(v_{,}^{III}-v^{III}).$$

Hiernach müssen zufolge des eben genannten Gesetzes die Gleichgewichtsbedingungen statt finden:

$$197)\quad \left\{\begin{array}{l} M^{I}.(c_{,}^{I}-c^{I})+M^{II}.(v_{,}^{I}-v^{I})=0 \\ M^{I}.(c_{,}^{II}-c^{II})+M^{II}.(v_{,}^{II}-v^{II})=0 \\ M^{I}.(c_{,}^{III}-c^{III})+M^{II}.(v_{,}^{III}-v^{III})=0. \end{array}\right.$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen durch einfache Entwickelung:

$$197\text{a})\quad \left\{\begin{array}{l} M^{I}c^{I}+M^{II}v^{I}=M^{I}c_{,}^{I}+M^{II}v_{,}^{I} \\ M^{I}c^{II}+M^{II}v^{II}=M^{I}c_{,}^{II}+M^{II}v_{,}^{II} \\ M^{I}c^{III}+M^{II}v^{III}=M^{I}c_{,}^{III}+M^{II}v_{,}^{III}. \end{array}\right.$$

Nach § 22. S. 26 nennt man das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit die Gröfse der Bewegung, und es liegt in der Gleichung 197 a) der Satz:

> Wenn zwei feste Systeme stofsend auf einander wirken, und es werden die Komponenten der Geschwindigkeiten für irgend eine der Koordinatenaxen durch den Stofs in beiden Systemen geändert, so ist gleichwohl die Summe der Gröfsen der Bewegung beider Systeme vor der Geschwindigkeitsänderung eben so grofs als nach der Geschwindigkeitsänderung.

Nach Vollendung des Stofses können folgende Fälle eintreten:

a) Die Körper trennen sich nach Vollendung des Stofses von einander; oder:

b) die Körper bleiben nach dem Stofse in Berührung mit einander.

Welcher von beiden Fällen aber auch stattfinden möge, so bleiben doch die beiden Systeme während der Zeitdauer, in welcher der Stofs statt findet, in Berührung, und müssen für diese Zeitdauer, man mag dieselbe als unendlich klein, oder nur als sehr klein ansehen, als zwei Systeme betrachtet werden, die sich nicht trennen können. Wenn aber die Systeme während der Dauer der Betrachtung in Berührung bleiben, so kommen die Gesetze des § 92 (S. 186) in Anwendung, und es sind dann die beiden Fälle möglich, dafs das eine System sich auf dem andern verschieben kann, oder dafs eine Verschiebung nicht möglich ist.

Wenn während des Stofses die beiden Systeme sich nicht verschieben können, so müssen sie sich vollkommen gemeinschaftlich bewegen, d. h. sie müssen eine gleich grofse Geschwindigkeit nach derselben Richtung besitzen, und folglich müssen auch die Komponenten dieser Geschwindigkeit für die drei Axen während des Stofses gleich grofs sein. d. h. man hat unter dieser Voraussetzung:

$$v_{\prime}^{I} = c_{\prime}^{I};\quad v_{\prime}^{II} = c_{\prime}^{II};\quad v_{\prime}^{III} = c_{\prime}^{III}$$

und dann folgt aus Gleichung 197 a) für die Komponenten der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit:

$$197b)\quad \left\{ \begin{aligned} v_{\prime}^{I} &= \frac{M^{I}c^{I} + M^{II}v^{I}}{M^{I} + M^{II}} \\ v_{\prime}^{II} &= \frac{M^{I}c^{II} + M^{II}v^{II}}{M^{I} + M^{II}} \\ v_{\prime}^{III} &= \frac{M^{I}c^{III} + M^{II}v^{III}}{M^{I} + M^{II}}. \end{aligned} \right.$$

Aus welchen Gleichungen sich die resultirende Geschwindigkeit der Richtung und Gröfse nach bestimmen läfst.

Wenn dagegen das eine System auf dem andern gleiten kann, so denken wir die Richtung des Gleitens nach früheren Regeln bestimmt, nehmen dieselbe als dritte Axe des Koordinatensystems an, und zerlegen die Geschwindigkeiten des stofsenden und des gestofsenen Systems nach dieser Richtung und nach zwei Axen, die normal dazu sind. Nun findet eine Einwirkung der Körper auf einander (abgesehen von der Reibung) in der Richtung, in welcher ein Gleiten möglich ist, nicht statt, folglich findet auch nach dieser Richtung keine Geschwindigkeitsänderung statt, dagegen müssen beide Systeme nach jeder Richtung, die normal zur Richtung des Gleitens ist, während des Stofses gleiche Geschwindigkeiten besitzen, daher hat man für die beiden Axen, die normal zur Richtung des Gleitens sind:

$$v_{\prime}^{I} = c_{\prime}^{I};\quad v_{\prime}^{II} = c_{\prime}^{II}$$

wogegen für die Richtung des Gleitens die Geschwindigkeiten ungeändert bleiben. Die Gleichungen ergeben also:

$$197c)\quad \left\{ \begin{aligned} c_{\prime}^{I} = v_{\prime}^{I} &= \frac{M^{I}c^{I} + M^{II}v^{I}}{M^{I} + M^{II}} \\ c_{\prime}^{II} = v_{\prime}^{II} &= \frac{M^{I}c^{II} + M^{II}v^{II}}{M^{I} + M^{II}} \\ c_{\prime}^{III} = c^{III};&\quad v_{\prime}^{III} = v^{III}. \end{aligned} \right.$$

Wenn die Richtung des Gleitens in derselben Ebene liegt, welche man durch die Richtungen der beiden Geschwindigkeiten v und c legen kann, und man nimmt die Linie, welche **normal** ist zu dieser Ebene, als **erste** Axe an, die Richtung des Gleitens als dritte Axe, so gehen die Gleichungen über in:

$$197\text{d})\left\{\begin{array}{l} c_{\prime}^{I} = v_{\prime}^{I} = \dfrac{M^{I}c^{I} + M^{II}v^{I}}{M^{I} + M^{II}} \\ c_{\prime}^{II} = 0; \quad v_{\prime}^{II} = 0; \quad c = 0; \quad v = 0 \\ c_{\prime}^{III} = c^{III}; \quad v_{\prime}^{III} = v^{III}. \end{array}\right.$$

Nach den Gleichungen 197b), c), d) sind die Gesetze für die Geschwindigkeiten während des Stofses für jede Koordinatenaxe, in welcher eine Geschwindigkeitsänderung eintritt, vollkommen übereinstimmend, und wir wollen daher im Folgenden nur die Gesetze für **eine** Koordinatenaxe besprechen, indem wir von vorne herein annehmen, dafs die Koordinatenaxen in dem ersten Fall (Gleichung 197b) **beliebig**, in den beiden andern Fällen (Gleichung 197c und d) so angenommen worden sind, wie dort vorausgesetzt worden ist. **Wir verstehen also von jetzt ab unter** $cc_{\prime}$, $vv_{\prime}$ **die Komponenten der Geschwindigkeiten nach der Richtung irgend einer Axe, in welcher Geschwindigkeitsänderung statt findet,** indem wir die Marken I, II, III fortlassen.

Wenn das stofsende System vor dem Stofse die Geschwindigkeit v und nach dem Stofse die Geschwindigkeit $v_{\prime}$ hat, so hat dasselbe durch den Stofs eine lebendige Kraft **abgegeben**, welche sich ausdrückt durch:

$$M^{II}.(v^2 - v_{\prime}^2).$$

Diese von dem stofsenden System abgegebene lebendige Kraft geht im Augenblick des Stofses nur **zum Theil** an das gestofsene System über, denn dasselbe bewegt sich, nachdem der Stofs erfolgt ist, mit der Geschwindigkeit $c_{\prime} = v_{\prime}$, hat also einen Zuwachs an lebendiger Kraft erhalten, der gleich $M^{I}.(v_{\prime}^2 - c^2)$ ist; der **Rest** der lebendigen Kraft also, der Werth:

$$M^{II}.(v^2 - v_{\prime}^2) - M^{I}.(v_{\prime}^2 - c^2)$$
$$= M^{II}.(v + v_{\prime}).(v - v_{\prime}) - M^{I}.(v_{\prime} + c).(v_{\prime} - c)$$

mufs irgend eine andere Arbeit verrichten, und durch dieselbe verbraucht werden. Diese Arbeit besteht im Allgemeinen in der **Formveränderung** der beiden Systeme, und wenn wir dieselbe Arbeit mit $\Sigma(K.ds)$ bezeichnen, so ist sie nach Gleichung 49) gleich der halben lebendigen Kraft, welche darauf verwendet worden ist. Wir haben also zu setzen:

$$2\Sigma(K.ds) = M^{II}.(v + v_{\prime}).(v - v_{\prime}) - M^{I}.(v + c).(v_{\prime} - c),$$

da nun nach Gleichung 197) $M^{I}.(v_{,}-c)=M^{II}.(v-v_{,})$, und indem wir $v_{,}=\frac{M^{I}c+M^{II}v}{M^{I}+M^{II}}$ nach Gleichung 197b) setzen, auch $M^{I}.(v_{,}-c)=\frac{M^{II}.M^{I}}{M^{II}+M^{I}}.(v-c)$ ist, so folgt, die auf Formveränderung wirkende Arbeit oder die verlorne lebendige Kraft:

$$2\Sigma(K.ds)=\frac{M^{II}.M^{I}}{M^{II}+M^{I}}.(v-c).[(v+v_{,})-(v_{,}+c)]$$

$$198)\quad 2\Sigma(K.ds)=\frac{M^{II}.M^{I}}{M^{II}+M^{I}}.(v-c)^{2}=\frac{M^{II}.M^{I}}{M^{II}+M^{I}}.u^{2},$$

worin wir nämlich unter u die Differenz der Komponenten der Geschwindigkeiten der beiden Systeme, nach der Richtung der betrachteten Koordinatenaxe verstehen. Hierin liegt der Satz:

> Wenn zwei Systeme stofsend auf einander wirken, und es erleiden für irgend eine Koordinatenaxe die Komponenten der Geschwindigkeiten Aenderungen, so ist die lebendige Kraft, welche in der Richtung dieser Axe auf Formveränderung der beiden Systeme wirkt, gleich dem Produkt aus dem Quadrat der Differenz der Komponenten der Geschwindigkeiten, welche die beiden Systeme vor dem Stofse besafsen, multiplizirt mit dem Verhältnifs zwischen dem Produkt und der Summe der Massen.

Dies Verhältnifs nennt man das harmonische Mittel der Massen.

Die beiden Gleichungen 197a) und 198), und die aus denselben hergeleiteten Gesetze sind die Grundgesetze für die Wirkung zweier festen Systeme aufeinander, wenn dieselben stofsend zusammentreffen.

Bestimmung der lebendigen Kraft, welche durch den Stofs auf Formveränderung der Systeme wirkt — Geschwindigkeiten nach Wiederherstellung der Formveränderung.

§ 111. Untersuchen wir nunmehr die auf Formveränderung der beiden Systeme wirkende Arbeit. Es seien λ^{I} und λ^{II} die linearen Verlängerungen oder Verkürzungen, welche die beiden Systeme in dem Augenblick erlitten haben, in welchem dieselben nach der Richtung der betrachteten Koordinatenaxe die gemeinschaftlichen Geschwindigkeiten $v_{,}=c_{,}$ angenommen haben, und zwar sind λ^{I} und λ^{II} in der Richtung derselben Axe gemessen. Nun ist offenbar das Wegelement ds, welches der Druck der sich der Formveränderung widersetzt, durchläuft

$$ds = d\lambda^{I} + d\lambda^{II}.$$

Nach den im ersten Theile dieses Werkes S. 193 entwickelten Gesetzen, besteht aber die Gleichung:

$$E = \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{\lambda},$$

wenn E den Elasticitäts-Modulus,
P den Druck, welcher auf Verlängerung oder Verkürzung wirkt,
F den Querschnitt des Systems normal zum Druck P,
l die ursprüngliche Länge, und
λ die Verlängerung oder Verkürzung
bezeichnet.

Hiernach ist:

$$P = \frac{E \cdot F}{l} . \lambda$$

und das Arbeitselement dieser Formveränderung:

$$P . d\lambda = \frac{E \cdot F}{l} . \lambda . d\lambda,$$

folglich die Gesammtleistung, die der Formveränderung von 0 bis λ entspricht:

$$\int_{\lambda}^{0} P . d\lambda = \frac{E}{l} . \int_{\lambda}^{0} F . \lambda . d\lambda.$$

Wenn F konstant ist können wir integriren, und es folgt:

$$199) \int_{\lambda}^{0} P . d\lambda = \frac{E \cdot F}{l} \cdot \tfrac{1}{2}\lambda^2 = \frac{E \cdot F}{l} . \lambda . \tfrac{1}{2}\lambda = \tfrac{1}{2} P . \lambda.$$

Hieraus folgt:

Die Arbeit, welche einer gewissen linearen Verlängerung oder Verkürzung eines festen Systems entspricht, ist gleich dem halben Produkt aus dem Druck, welcher der durch diese Formveränderung entstehenden gröfsten Spannung das Gleichgewicht hält in den Werth der Verlängerung oder Verkürzung.

Da aber die Gleichung

$$199a) \quad E = \frac{P}{F} \cdot \frac{l}{\lambda}$$

nur gilt für Verlängerungen oder Verkürzungen innerhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität, so gilt auch das entwickelte Gesetz nur innerhalb dieser Grenzen.

Nun würden wir für vollkommen elastische Systeme, oder so lange überhaupt die Formveränderungen sich innerhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität befinden, die Arbeit, welche auf Formveränderung der beiden Systeme wirkt, setzen können

$$\Sigma(K.ds) = \tfrac{1}{2}(P^I.\lambda^I + P^{II}.\lambda^{II}).$$

Da aber der Druck P^I, welcher die Verkürzung λ^I bewirkt, offenbar derselbe ist, welcher die Verkürzung λ^{II} bewirkt, so ist $P^I = P^{II}$ und wenn wir diesen Druck allgemein mit P bezeichnen, so ist:

$$199\text{b})\quad \Sigma(Kds) = \tfrac{1}{2}P.(\lambda^I + \lambda^{II}).$$

Wenn wir nach der Gleichung für E (199a) die Werthe von λ^I und λ^{II} entwickeln, so ergiebt sich, indem wir die den beiden Systemen entsprechen Werthe mit Marken bezeichnen:

$$199\text{c})\quad \Sigma(K.ds) = \tfrac{1}{2}P^2.\left(\frac{l^I}{E^I F^I} + \frac{l^{II}}{E^{II}F^{II}}\right)$$

und vermöge der Gleichung 198 ergiebt sich:

$$199\text{d})\quad P = u.\sqrt{\left(\frac{M^{II}.M^I}{M^{II}+M^I}\right)}.\sqrt{\left[\frac{E^I F^I.E^{II}F^{II}}{l^I.E^I F^I + l^{II}.E^{II}F^{II}}\right]}.$$

Durch diese Gleichung ist man im Stande, den gröfsten Druck zu bestimmen, welcher, durch den Stofs hervorgerufen, auf Formveränderung der beiden Systeme wirksam ist, so lange man die beiden Systeme als vollkommen elastisch betrachtet.

Ist das eine von beiden Systemen, z. B. das System II, vollkommen hart, so dafs es gar keine Formveränderung erleidet, so ist $\lambda^{II} = 0$, und die Entwickelung würde ergeben:

$$199\text{e})\quad P = u.\sqrt{\left(\frac{M^I.M^{II}}{M^I+M^{II}}\right)}.\sqrt{\left(\frac{E^I.F^I}{l^I}\right)}.$$

Wenn dagegen beide Systeme als absolut hart angenommen werden, so würde sich der auf Formveränderung wirkende Druck als unendlich grofs ergeben.

Denken wir nunmehr zwei Systeme, die nicht vollkommen elastisch sind, oder setzen wir allgemeiner voraus, die Formveränderungen überschreiten die Grenzen der vollkommenen Elastizität, und es entstehen bleibende Formveränderungen. In diesem Falle werden allerdings auch die Verlängerungen und Verkürzungen Funktionen der Drucke sein, durch welche sie erzeugt werden; aber es ist nicht mehr zulässig, dieselben, wie wir es vermöge der Glei-

17 *

chung $\lambda = P \cdot \frac{l}{F \cdot E}$ gethan haben, einfach proportinal diesen Drukken zu setzen. So lange nun die Abhängigkeit dieser Formveränderungen von den Drucken nicht bekannt ist, kann man auch die Gleichung

$$K \cdot ds = P \cdot (d\lambda^{I} + d\lambda^{II})$$

nicht integriren, und die Aufgabe, den auf Formverändernng wirkenden Druck zu bestimmen, bleibt ungelöst.

Näherungsweise mag es zulässig sein die Voraussetzung, dafs die Verkürzungen in direktem Verhältnifs zu den Drucken stehen, auch noch für Formveränderungen gelten zu lassen, die aufserhalb der Grenze der vollkommenen Elastizität liegen, und nur unter dieser Annahme gelten die Gleichungen 199) bis 199e) auch für nicht vollkommen elastische Systeme.

Sobald durch den Zusammenstofs zweier festen Systeme Formveränderung entweder in beiden oder nur in einem von beiden Systemen erfolgt ist, bleibt entweder diese Formveränderung bestehen, oder die Systeme stellen wieder ihre ursprüngliche Form ganz oder theilweise her. Wenn die Formveränderung bestehen bleibt, so ist das auf Formveränderung wirkende Arbeitsmoment durch dieselbe konsumirt, wenn dagegen die Systeme sich wieder ausdehnen, so wird durch diese Ausdehnung eine gewisse Kraft frei und wirkt auf Erzeugung von Geschwindigkeit.

Wenn die durch die Herstellung der ursprünglichen Form wieder frei gewordene Arbeit (wiedergewonnene lebendige Kraft) ein gewisser Theil, etwa ε, der auf die Formveränderung verwandten Arbeit ist, so würde die nach Verlauf einer Zeitdauer, welche die Zusammendrückung und Ausdehnung umfafst (Dauer des Stofses) verlorene Arbeit sich ausdrücken nach Gleichung 198 durch:

$$200)\ \tfrac{1}{2}\left(u^2 \cdot \frac{M^{I} \cdot M^{II}}{M^{I} + M^{II}} - \varepsilon \cdot u^2 \cdot \frac{M^{I} \cdot M^{II}}{M^{I} + M^{II}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} u^2 \cdot \frac{M^{I} \cdot M^{II}}{M^{I} + M^{II}} \cdot (1 - \varepsilon).$$

folglich gelten zur Bestimmung der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stofse die Bedingungs-Gleichungen (197 und 198):

$$M^{I} c + M^{II} v = M^{I} c_{\prime} + M^{II} v_{\prime}$$

$$M^{II} \cdot (v^2 - v_{\prime}^{2}) - M^{I} \cdot (c_{\prime}^{2} - c^2) = u^2 \cdot \frac{M^{I} \cdot M^{II}}{M^{I} + M^{II}} \cdot (1 - \varepsilon).$$

Wenn wir nun die zweite Gleichung mit $M^{I} + M^{II}$ multipliziren, die erste Gleichung quadriren, auf Null bringen, von der ersten abziehen und gehörig ordnen, so ergiebt sich:

$$M^{II}.M^{I}.(v^2+c^2-2v.c)-M^{II}.M^{I}.(v_{,}^2+c_{,}^2-2v_{,}.c_{,})$$
$$=u^2.M^{I}.M^{II}.(1-\varepsilon),$$

oder, wenn wir mit $M^{II}.M^{I}$ dividiren, und beachten, daſs $u^2=(v-c)^2$ (Gleichung 198) also gleich $v^2+c^2-2v.c$ ist, so ergiebt sich:

$$200\text{a)}\quad c_{,}-v_{,}=u.\sqrt{\varepsilon}.$$

Aus dieser Gleichung und aus der Gleichung 197a)

$$M^{I}c+M^{II}v=M^{I}c_{,}+M^{II}v_{,}$$

folgt nun:

$$200\text{b)}\quad \begin{cases} v_{,}=\dfrac{M^{I}c+M^{II}v}{M^{I}+M^{II}}-(v-c).\dfrac{M^{I}}{M^{I}+M^{II}}.\sqrt{\varepsilon} \\[2ex] c_{,}=\dfrac{M^{I}c+M^{II}v}{M^{I}+M^{II}}+(v-c).\dfrac{M^{II}}{M^{I}+M^{II}}.\sqrt{\varepsilon}. \end{cases}$$

Diese Gleichung lehrt die Geschwindigkeiten finden, welche die beiden Systeme in dem Augenblicke besitzen, wo die durch den Stoſs bewirkte Veränderung der Form sich wiederhergestellt hat. Ist diese Wiederherstellung vollständig erfolgt, so ist $\varepsilon=1$ zu setzen, ist sie dagegen gar nicht erfolgt, so ist $\varepsilon=0$ zu setzen.

Ist die gestoſsene Masse M^{I} gegen M^{II} unendlich groſs, und ist dieselbe in Ruhe, also $c=0$, so ist:

$$200\text{c)}\quad v_{,}=-v.\sqrt{\varepsilon};\quad \varepsilon=\left(\frac{v_{,}}{v}\right)^2.$$

Nach *Newton* *) ist:

für Elfenbein . . . . . $\varepsilon=(\frac{8}{9})^2=0{,}79$
- Glas . . . . $\varepsilon=(\frac{15}{16})^2=0{,}879$
- Kork, Stahl, Wolle $\varepsilon=(\frac{5}{9})^2=0{,}309$,

wobei vorausgesetzt ist, daſs der eine Körper, nämlich der stoſsende, die Kugelform, der gestoſsene die Plattenform hat.

Im Allgemeinen sind die Gesetze des Stoſses und die durch denselben erfolgenden Formveränderungen noch nicht genügend aufgeklärt.

Stoſs auf ein festes System, welches um eine fixe Axe rotirt. Maaſs für die Stoſswirkung.

§ 112. Denken wir ein festes System, welches um eine fixe Axe rotirt; die fixe Axe sei die dritte Axe eines Koordinatensystems, dessen beide anderen Axen in einer Ebene liegen, welche

---

*) Weisbach, Ingenieur und Maschinen-Mechanik, Theil I. § 278.

normal zur fixen Axe ist. Wir nehmen einen beliebigen Punkt der fixen Axe als Anfangspunkt der Koordinaten, und es seien X, Y, Z die Koordinaten des Schwerpunktes. M^I sei die Masse des rotirenden Systems, w die Winkelgeschwindigkeit, welche das System besitzt in dem Augenblicke, in welchem ein zweites System, dessen Masse M^{II} ist, mit der Geschwindigkeit v auf das rotirende System stöfst. Der getroffene Punkt habe die Koordinaten $x_,, y_,, z_,$ und die Richtung der Geschwindigkeit, mit welcher der Stofs erfolgt, mache mit den drei Axen die Winkel α, β, γ.

Der Abstand des getroffenen Punktes von der Drehaxe ist:

$$\text{a)} \quad r_, = \sqrt{(x_,^2 + y_,^2)}.$$

Ist $J_,$ das Trägheitsmoment des rotirenden Systems in Bezug auf die Drehaxe, so ist die auf den Abstand r reduzirte Masse nach Gleichung 147c), S. 161:

$$\text{b)} \quad M_,^I = \frac{J_,}{r_,^2}.$$

Die Peripheriegeschwindigkeit in dem getroffenen Punkte ist wr, die Richtung derselben bilde mit den drei Axen die Winkel $\alpha_,, \beta_,, \gamma_,$, dann ist:

$$\text{c)} \quad \begin{cases} \cos\alpha_, = \sin\beta_, = \dfrac{y_,}{r_,} \\ \cos\beta_, = \sin\alpha_, = \dfrac{x_,}{r_,} \\ \cos\gamma_, = 0; \quad \gamma_, = 90. \end{cases}$$

Nun denken wir den Stofs in derselben Weise erfolgend, als ob in dem Augenblick des Stofses die reduzirte Masse $M_,^I$ frei mit der Masse M^{II} zusammenstiefse. Die Komponenten der Geschwindigkeiten der gestofsenen Masse $M_,^I$ sind nun für die drei Axen:

$$\text{d)} \quad \begin{cases} c^I = wr \,.\, \cos\alpha_,; & c^{II} = wr \,.\, \cos\beta_,; \quad c^{III} = 0 \\ c^I = w \,.\, y_,; & c^{II} = w \,.\, x_,. \end{cases}$$

Die Komponenten der stofsenden Masse M^{II} sind für dieselben Axen:

$$\text{e)} \quad v^I = v \,.\, \cos\alpha; \quad v^{II} = v \,.\, \cos\beta; \quad v^{III} = v \,.\, \cos\gamma.$$

Wir behandeln nur den Fall, dafs die beiden Systeme sich während des Stofses vollkommen gemeinschaftlich bewegen müssen, dafs folglich während des Stofses eine Verschiebung der beiden Systeme nicht möglich sei. Dann ergeben sich nach Gleichung 197b) die gemeinschaftlichen Geschwindigkeiten, welche beide Systeme annehmen müfsten, wenn sie beide vollkommen frei wären:

$$201) \begin{cases} v_{\prime}^{I} = \dfrac{M_{\prime}^{I} \cdot w \cdot y_{\prime} + M^{II} \cdot v \cdot \cos\alpha}{M_{\prime}^{I} + M^{II}} \\ v_{\prime}^{II} = \dfrac{M_{\prime}^{I} \cdot w \cdot x_{\prime} + M^{II} \cdot v \cdot \cos\beta}{M_{\prime}^{I} + M^{II}} \\ v_{\prime}^{III} = \dfrac{M^{II} \cdot v \cdot \cos\gamma}{M_{\prime}^{I} + M^{II}}. \end{cases}$$

Nun ist aber das gestofsene System im Augenblick des Stofses nicht wirklich frei, sondern es ist gezwungen sich um eine Axe zu drehen, die durch die beiden fixen Punkte geht, es kann also nach der Richtung der fixen Axe gar nicht ausweichen, und es folgt daraus, dafs durch die fixen Punkte eine Stofswirkung in der Richtung der Drehaxe aufgehoben werden mufs, welche dem Stofs der Massen $M^{I} + M^{II}$ mit der Geschwindigkeit $v_{\prime}^{III}$ entspricht. Die durch die fixen Punkte in der Richtung der ersten Axe aufgehobene Stofswirkung ist also:

$$201\,a) \quad W^{I} = (M_{\prime}^{I} + M^{II}) \cdot v^{III} = M^{II} \cdot v \cdot \cos\gamma.$$

Die beiden andern Komponenten $v_{\prime}^{I}$ und $v_{\prime}^{II}$ würden eine resultirende Geschwindigkeit geben, welche sich ausdrückt durch:

$$v_{\prime\prime} = \sqrt{(v_{\prime}^{I2} + v_{\prime}^{II2})}$$

und welche mit den beiden Axen die Winkel bildet: $\alpha_{\prime\prime}$ und $\beta_{\prime\prime}$; es ist:

$$\cos\alpha_{\prime\prime} = \frac{v_{\prime}^{I}}{v_{\prime\prime}} = \sin\beta_{\prime\prime};$$

$$\cos\beta_{\prime\prime} = \frac{v_{\prime}^{II}}{v_{\prime\prime}} = \sin\alpha_{\prime\prime}.$$

Diese resultirende Geschwindigkeit bilde mit der Peripherie des Kreises, in welchem der getroffene Punkt gezwungen ist sich zu bewegen, den Winkel ε; es ist nach einem bekannten Gesetz der analytischen Geometrie:

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha_{\prime} \cdot \cos\alpha_{\prime\prime} + \cos\beta_{\prime} \cdot \cos\beta_{\prime\prime} + \cos\gamma_{\prime} \cdot \cos\gamma_{\prime\prime}$$

oder durch Einsetzung der oben bestimmten Werthe:

$$f) \begin{cases} \cos\varepsilon = \dfrac{y_{\prime}}{r_{\prime}} \cdot \dfrac{v_{\prime}^{I}}{v_{\prime\prime}} - \dfrac{x_{\prime}^{I}}{r_{\prime}} \cdot \dfrac{v_{\prime}^{II}}{v_{\prime\prime}} \\ \sin\varepsilon = \sqrt{(1 - \cos\varepsilon^2)} = \pm \left(\dfrac{x_{\prime} \cdot v_{\prime}^{I}}{r_{\prime} \cdot v_{\prime\prime}} - \dfrac{y_{\prime} \cdot v_{\prime}^{II}}{r_{\prime} \cdot v_{\prime\prime}} \right). \end{cases}$$

Wenn wir nun die resultirende Geschwindigkeit in zwei Komponenten p und q zerlegen, von denen die eine p in der Richtung der wirklich möglichen Bewegung, d. i. in der Richtung der Peripherie liegt, die andere aber normal dazu ist, so erhalten wir die Werthe:

$$p = v_{\prime\prime} . \cos \varepsilon = \frac{y_\prime}{r_\prime} . v_\prime^{I} + \frac{x_\prime}{r_\prime} . v_\prime^{II},$$

die andere Komponente:

$$q = v_{\prime\prime} . \sin \varepsilon = \pm \left(\frac{x_\prime}{r_\prime} . v_\prime^{I} - \frac{y_\prime}{r_\prime} . v_\prime^{II} \right)$$

oder wenn wir für $v_\prime^{I}$ und $v_\prime^{II}$ die obigen Werthe setzen, so ergiebt sich, mit Berücksichtigung dafs $x_\prime^2 + y_\prime^2 = r_\prime^2$ (Gleichung a) ist:

$$\text{201b)} \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{M_\prime^{I} . w r_\prime + M^{II} . \frac{v}{r_\prime} . (\cos \alpha . y_\prime + \cos \beta . x_\prime)}{M_\prime^{I} + M^{II}} \\ q &= \pm \frac{M^{II}}{M_\prime^{I} + M^{II}} . \frac{v}{r_\prime} . (\cos \alpha . x_\prime - \cos \beta . y_\prime). \end{aligned} \right.$$

Nennen wir den Winkel, welchen die Richtung der Stofsgeschwindigkeit mit der Richtung der Peripherie bildet, in welcher der getroffene Punkt gezwungen ist, sich zu bewegen δ, so ist

$$\text{g)} \left\{ \begin{aligned} \cos \delta &= \cos \alpha . \cos \alpha_\prime + \cos \beta . \cos \beta_\prime + \cos \gamma . \cos \gamma_\prime \\ &= \cos \alpha . \frac{y_\prime}{r_\prime} + \cos \beta . \frac{x_\prime}{r_\prime}, \end{aligned} \right.$$

und daher ist auch:

$$\text{201 c)} \quad p = \frac{M_\prime^{I} . w . r_\prime + M^{II} . v . \cos \delta}{M_\prime^{I} + M^{II}}.$$

Da nun aber das rotirende System auch im Augenblick des Stofses sich nur nach der Richtung der Peripheriegeschwindigkeit bewegen kann, da es also keine Komponente normal zu dieser Richtung besitzen kann, so mufs durch die Bedingung, dafs dafs das System eine fixe Axe haben soll die Komponente q durch die Reaktion dieser fixen Axe aufgehoben werden, und die fixe Axe mufs also einer Stofswirkung, die dieser Komponente q entspricht, das ist einer Stofswirkung

$$\text{201 d)} \quad W^{II} = \pm q \cdot (M_\prime^{I} + M^{II}) = \pm M^{II} . \frac{v}{r_\prime} . (\cos \alpha . x_\prime - \cos \beta . y_\prime)$$

Widerstand leisten. Diese Stofswirkung ist in dem getroffenen Punkte normal zur Peripherie, also radial zu denken.

Der getroffene Punkt kann also in dem Augenblick des Stofses nur die Komponente p wirklich annehmen; die derselben entsprechende Winkelgeschwindigkeit ist $w_\prime = \frac{p}{r_\prime}$, das ist:

$$\text{201 e)} \left\{ \begin{aligned} w_\prime &= \frac{M_\prime^{I} . w + M^{II} . \frac{v}{r_\prime} . \cos \delta}{M_\prime^{I} + M^{II}} \\ &= \frac{M_\prime^{I} . w + M^{II} . \frac{v}{r_\prime^2} . (\cos \alpha . y_\prime + \cos \beta . x_\prime)}{M_\prime^{I} + M^{II}}. \end{aligned} \right.$$

Es ist mithin der Zuwachs an Winkelgeschwindigkeit, welchen das System erhält:

$$201f)\left\{\begin{aligned} w'-w &= \frac{M_{\prime}^{I}.w+M^{II}.\frac{v}{r_{\prime}}.\cos\delta}{M_{\prime}^{I}+M^{II}}-w \\ &= \frac{M^{II}}{M_{\prime}^{I}+M^{II}}.\left(\frac{v}{r_{\prime}}.\cos\delta-w\right).\end{aligned}\right.$$

Die Zeitdauer, in welcher diese Aenderung der Winkelgeschwindigkeit erfolgt mag sehr klein sein, wir mögen dieselbe mit τ bezeichnen; wir wollen ferner das Aenderungsmaafs der Winkelgeschwindigkeit für diese kurze Zeit als konstant ansehen, und dasselbe mit $f_{\prime}$ bezeichnen, dann ist nach Gleichung 28):

$$w'-w=\int_{\tau}^{0}.f_{\prime}.d\tau=f_{\prime}.\tau,$$

$$202)\text{ folglich } f_{\prime}=\frac{w'-w}{\tau}=\frac{M^{II}}{M_{\prime}^{I}+M^{II}}.\left(\frac{v}{r_{\prime}}.\cos\delta-w\right).\frac{1}{\tau}.$$

Nun können wir uns die Aenderung der Winkelgeschwindigkeit auch durch einen Druck hervorgebracht denken, der anstatt des Stofses in dem gestofsenen Punkt während der Zeitdauer τ nach der Richtung die Peripherie wirksam gedacht, dieselbe Aenderung der Winkelgeschwindigkeit bedingen würde. Nennen wir diesen Druck P, so ist sein statisches Moment $P.r_{\prime}$ und wenn $J_{\prime}$ das Trägheitsmoment des Systems ist, so ist auch nach Gleichung 154) und 202):

$$202a)\ f_{\prime}=\frac{P.r_{\prime}}{J_{\prime}};\ P=\frac{f_{\prime}.J_{\prime}}{r_{\prime}}=\frac{w'-w}{\tau}.\frac{f_{\prime}}{r_{\prime}}.$$

Multipliziren wir den letzten Werth im Zähler und Nenner mit $r_{\prime}$ so ergiebt sich:

$$202b)\ P=\frac{w'r_{\prime}-wr_{\prime}}{\tau}.\frac{J_{\prime}}{r_{\prime}^{2}};\ P.\tau=(w'r_{\prime}-wr_{\prime}).M_{\prime}^{I}.$$

Nun ist $w'r_{\prime}-wr_{\prime}$ die Geschwindigkeitsänderung, welche der getroffene Punkt erleidet, $\frac{J_{\prime}}{r_{\prime}^{2}}$ ist die auf den getroffenen Punkt reduzirte Masse (Gleichung b); es ist folglich die Kraft, welche dieselbe Geschwindigkeitsänderung in dem getroffenen System bedingen würde, welche der Stofs erzeugt, proportional dem Produkt aus der Differenz der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stofse in die auf den getroffenen Punkt reduzirte Masse. Man nennt dies Produkt das **Maafs für die Stofswirkung.**

Nach der obigen Gleichung ist auch das Maafs für die Stofswirkung gleich dem Produkt aus der Kraft, welche dieselbe Geschwindigkeitsänderung in dem gestofsenen System bedingen würde in die Zeitdauer des Stofses. Unter diesen Modifikationen und Bedingungen lassen sich die Gesetze, welche für Drucke gelten auch für Stofswirkungen anwenden.

Die Kraft P zerlegen wir nach der Richtung der Axen der X und der Y in die beiden Komponenten:

$$\text{h)}\quad P.\cos\alpha_{\prime} = P.\frac{y_{\prime}}{r_{\prime}} \text{ und } P.\cos\beta = P.\frac{x_{\prime}}{r_{\prime}}.$$

Die Momente dieser Komponenten sind für die beiden Axen der X und der Y:

$$\text{i)}\quad P.\frac{x_{\prime}.z_{\prime}}{r_{\prime}} \text{ und } P.\frac{y_{\prime}.z_{\prime}}{r_{\prime}}.$$

Nun erscheint die Kraft P als eine auf das System angebrachte Kraft, und es müssen daher ihre Komponenten für die Axen der X und der Y sowohl, als ihre Momente für dieselben Axen gleich den Kräftesummen und Momenten der in dem System thätigen Kräfte sein.

Die in dem System thätigen Kräfte sind zunächst die in jedem Massenelement wirksam zu denkenden Drucke, welche ein Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit des betrachteten Massenelementes in der Richtung des bei der Drehung durchlaufenen Wegelementes bedingen. Dieses Aenderungsmaafs ist gleich $f_{\prime}.r$, wenn $f_{\prime}$ das Aenderungsmaafs der gemeinschaftlichen Winkelgeschwindigkeit, und r den kürzesten Abstand des Massenelementes von der Drehaxe bezeichnet, und folglich sind diese Drucke $dm.f_{\prime}.r$. Nennen wir die Koordinaten der betrachteten Massenelemente x, y, z und die Winkel, welche die Richtung der von denselben durchlaufenen Bogenelemente mit den Axen der X und der Y bilden α' und β', so ist offenbar wie in Gleichung c):

$$\text{k)}\quad \cos\alpha' = \sin\beta' = \frac{y}{r};\quad \cos\beta' = \sin\alpha' = \frac{x}{r}$$

und es sind folglich die Drucksummen der in den einzelnen Massenelementen thätigen Kräfte für die Richtung der beiden Axen, mit Berücksichtigung der Gleichung 144), S. 153:

$$\text{l)}\quad \begin{cases} \Sigma\left(dm.f_{\prime}.r.\frac{y}{r}\right) = f_{\prime}.\Sigma(dm.y) = f_{\prime}.M.Y, \text{ und} \\ \Sigma\left(dm.f_{\prime}.r.\frac{x}{r}\right) = f_{\prime}.\Sigma(dm.x) = f_{\prime}.M.X, \end{cases}$$

und die Momente für diese beiden Axen:

$$f_{\prime}.\Sigma(dm.x.z) \text{ und } f_{\prime}.\Sigma(dm.y.z).$$

Nun sieht man, dafs sowohl die Drucksummen als die Momente der in den einzelnen Massenelementen thätigen Kräfte hier nur abhängig sind von der Gruppirung der Massenelemente, während die Komponenten der auf das System angebrachten Kraft P und deren Momente nur abhängig sind von P und von den Koordinaten des gestofsenen Punktes. Es ist also nicht nothwendiger Weise Gleichheit zwischen diesen Werthen vorhanden, und es müssen daher in dem System noch gewisse andere Kräfte als thätige Kräfte vorhanden sein, welche mit den in den einzelnen Massenelementen thätigen Kräfte jene Gleichheit herstellen. Diese Kräfte erscheinen als Wirkungen des Stofses auf die Drehaxe.

Wir wollen die Drucksumme dieser Stofswirkung nach der Richtung der ersten Axe mit $Q_{\prime}$ und nach der Richtung der zweiten Axe mit $Q_{\prime\prime}$ bezeichnen, während wir die Momente der Kräftepaare dieser Wirkungen für Drehung in einer Ebene, die normal zur ersten Axe ist mit $(Ka)'$ und für die Drehung in einer Ebene, die normal zur zweiten Axe ist, mit $(Ka)''$ bezeichnen. Nun haben wir zufolge der Bedingung, dafs die auf das feste System angebrachten Kräfte mit den in dem System thätigen Kräften im Gleichgewicht sein müsssn (§§ 66. und 86.) folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$
203)\quad\left\{\begin{aligned}
&P\,.\,\frac{y_{\prime}}{r_{\prime}} = f_{\prime}\,.\,M\,.\,Y + Q_{\prime}\\
&P\,.\,\frac{x_{\prime}}{r_{\prime}} = f_{\prime}\,.\,M\,.\,X + Q_{\prime\prime}\\
&P\,.\,\frac{x_{\prime}\,.\,z_{\prime}}{r_{\prime}} = f_{\prime}\,.\,\Sigma(dm\,.\,x\,.\,z) + (Ka)'\\
&P\,.\,\frac{y_{\prime}\,.\,z_{\prime}}{r_{\prime}} = f_{\prime}\,.\,\Sigma(dm\,.\,y\,.\,z) + (Ka)''.
\end{aligned}\right.
$$

Setzen wir für $f_{\prime}$ den Werth der Gleichung 202a), so lassen sich die Werthe von $Q_{\prime}$, $Q_{\prime\prime}$, $(Ka)'$ und $(Ka)''$ entwickeln, nämlich:

$$
203\text{a})\quad\left\{\begin{aligned}
&Q_{\prime} = P\,.\,r_{\prime}\,.\left(\frac{y_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} - \frac{M\,.\,Y}{J_{\prime}}\right)\\
&Q_{\prime\prime} = P\,.\,r_{\prime}\,.\left(\frac{x_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} - \frac{M\,.\,X}{J_{\prime}}\right)\\
&(Ka)' = P\,.\,r_{\prime}\,.\left(\frac{x_{\prime}\,.\,z_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} - \frac{\Sigma(dm\,.\,x\,.\,z)}{J_{\prime}}\right)\\
&(Ka)'' = P\,.\,r_{\prime}\,.\left(\frac{y_{\prime}\,.\,z_{\prime}}{r_{\prime}^{2}} - \frac{\Sigma(dm\,.\,y\,.\,z)}{J_{\prime}}\right).
\end{aligned}\right.
$$

Setzen wir in diese Gleichungen den Werth von P aus Gleichung 202a) und multipliziren wir auf beiden Seiten mit τ, so ergeben sich links die Maafse für die Stofswirkungen auf die Axe, nämlich:

$$203\text{b)}\quad\begin{cases} Q_{,}.\tau = (w' - w).J_{,}.\left(\dfrac{y_{,}}{r_{,}^{2}} - \dfrac{M.Y}{J_{,}}\right) \\ Q_{,,}.\tau = (w' - w).J_{,}.\left(\dfrac{x_{,}}{r_{,}^{2}} - \dfrac{M.X}{J_{,}}\right) \\ (Ka)'.\tau = (w' - w).J_{,}.\left(\dfrac{x_{,}.z_{,}}{r_{,}^{2}} - \dfrac{\Sigma(dm.x.z)}{J_{,}}\right) \\ (Ka)''.\tau = (w' - w).J_{,}.\left(\dfrac{y_{,}.z_{,}}{r_{,}^{2}} - \dfrac{\Sigma(dm.y.z)}{J_{,}}\right). \end{cases}$$

Bedingungen, unter welchen die Stofswirkungen auf die Axe gleich Null sind. — Mittelpunkt des Stofses.

§ 113. Nach dem vorigen Paragraphen hat die fixe Axe eines rotirenden Systems, auf welches ein anderes in einer gegebenen Richtung stöfst, zweierlei Stofswirkungen zu erleiden. Die eine Gruppe dieser Stofswirkungen rührt davon her, dafs bestimmte Komponenten der Geschwindigkeit des stofsenden Systems durch das rotirende System, welches gezwungen ist, nur um die gegebene Axe sich zu drehen, aufgehoben werden; die andere Gruppe von Stofswirkungen ist dadurch bedingt, dafs die Massenelemente des rotirenden Systems ihre Geschwindigkeit plötzlich ändern, dafs dieser Geschwindigkeitsänderung die Massenwiderstände der einzelnen Elemente entgegenwirken, und dafs diese Massenwiderstände im Allgemeinen nicht im Stande sind, die durch den Stofs auf das rotirende System angebrachten Kräfte vollständig zu consumiren.

Die erste Gruppe enthält folgende beiden Stofswirkungen:

1) Eine Stofswirkung in der Richtung der Axe, welche sich ausdrückt nach Gleichung 201a) durch:
$$W^{I} = M^{II}.v.\cos\gamma;$$
2) Eine Stofswirkung in einer Richtung, die in dem getroffenen Punkt radial ist, und welche sich ausdrückt nach Gleichung 201d) durch:
$$W^{II} = \pm M^{II}.\frac{v}{r_{,}}.(\cos\alpha.x_{,} - \cos\beta.y_{,}).$$

Die erstgenannte Wirkung ist auf Verschieben der Axe gerichtet, die zweite wirkt auf Durchbiegen der Axe in einer Richtung, die in dem getroffenen Punkte radial ist.

Die andere Gruppe der auf die Axe erfolgenden Stofswirkungen ist durch die Gleichungen 203b) zu bestimmen.

Wir wollen nunmehr untersuchen, unter welchen Bedingungen alle diese Stofswirkungen Null werden.

Damit die Stofswirkung W^I gleich Null werde, mufs $\cos\gamma = 0$ sein; d. h. die Richtung der Geschwindigkeit des stofsenden Systems mufs in eine Ebene fallen, die normal zur Drehaxe ist.

Damit die Stofswirkung W^{II} gleich Null werde, ist die Bedingung zu erfüllen:

$$\cos\alpha \,.\, x_{\prime} = \cos\beta \,.\, y_{\prime}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{y_{\prime}}{x_{\prime}}.$$

Nun ist $\frac{y_{\prime}}{x_{\prime}}$ die Cotangente des Winkels, welchen die Peripheriegeschwindigkeit des getroffenen Punktes im Augenblick des Stofses mit der Axe der X macht, und wenn wir setzen

$$\operatorname{cotang}\alpha_{\prime} = \frac{\cos\alpha_{\prime}}{\sin\alpha_{\prime}} = \frac{\cos\alpha_{\prime}}{\cos\beta_{\prime}},$$

so folgt als Bedingungs-Gleichung:

$$204)\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha_{\prime}}{\cos\beta_{\prime}} = \operatorname{cotang}\alpha_{\prime},$$

das heifst:

Wenn in dem rotirenden System keine Stofswirkung radial in dem getroffenen Punkte wirksam sein soll, so müssen sich die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit des stofsenden Systems mit zwei zur Drehaxe normalen Koordinatenaxen bildet, verhalten, wie die Cosinus der Winkel, welche die Peripheriegeschwindigkeit des rotirenden Systems im Augenblicke des Stofses mit denselben Koordinatenaxen bildet.

Diese Bedingung wird immer erfüllt, wenn die Geschwindigkeit des stofsenden Systems in einer Ebene liegt, welche das im Augenblick des Stofses von dem getroffenen Punkte beschriebene Bogenelement berührt, oder welche normal ist zum kürzesten Abstande des getroffenen Punktes von der Drehaxe.

Man sieht, dafs die Bedingungen, unter welchen die Stofswirkungen W^I und W^{II} gleich Null werden, lediglich von der Richtung der Geschwindigkeit des stofsenden Systems abhängig sind. Aus der Form der Gleichungen 203b) ergiebt sich dagegen sofort, dafs die Bedingungen, unter welchen diejenigen Stofswirkungen, welche aus den in dem gestofsenen System thätigen Kräften hervorgehen, gleich Null werden, ganz allein von der Gruppirung der

Massenelemente und von der Lage des getroffenen Punktes gegen die Drehaxe abhängig sind.

Damit nämlich die Gleichungen 203 b) einzeln gleich Null werden, mufs sein:

$$204\text{a)} \begin{cases} \dfrac{y_{\prime}}{r_{\prime}^2} = \dfrac{M \cdot Y}{J_{\prime}}; & \dfrac{x_{\prime}}{r_{\prime}^2} = \dfrac{M \cdot X}{J_{\prime}} \\[2ex] \dfrac{x_{\prime} \cdot z_{\prime}}{r_{\prime}^2} = \dfrac{\Sigma(dm \cdot x \cdot z)}{J_{\prime}}; & \dfrac{y_{\prime} \cdot z_{\prime}}{r_{\prime}^2} = \dfrac{\Sigma(dm \cdot y \cdot z)}{J_{\prime}}. \end{cases}$$

Indem wir aus den beiden ersten Gleichungen den Werth von $r_{\prime}^2$ eliminiren, ergiebt sich:

$$204\text{b)} \quad \frac{x_{\prime}}{y_{\prime}} = \frac{X}{Y},$$

da nun $\frac{x_{\prime}}{y_{\prime}}$ die Tangente des Winkels ist, welchen der kürzeste Abstand des getroffenen Punktes mit der Axe der X bildet, und $\frac{X}{Y}$ die Tangente des Winkels ist, welchen der kürzeste Abstand des Schwerpunktes mit derselben Axe bildet, so ergiebt sich als erste Bedingung, unter welcher die Wirkung der Massenwiderstände auf die Axe gleich Null ist, dafs diese beiden Abstände parallel sein müssen, oder mit andern Worten, dafs der getroffene Punkt in einer Ebene liegen müsse, die durch den Schwerpunkt und durch die Drehaxe geht.

Indem wir die Gleichungen

$$\frac{x_{\prime}}{r_{\prime}^2} = \frac{M \cdot X}{J_{\prime}} \text{ und } \frac{y_{\prime}}{r_{\prime}^2} = \frac{M \cdot Y}{J_{\prime}}$$

quadriren, addiren und beachten, dafs $x_{\prime}^2 + y_{\prime}^2 = r_{\prime}^2$ und $X^2 + Y^2 = R^2$ ist, wenn wir unter R den kürzesten Abstand des Schwerpunktes von der Drehaxe verstehen, ergiebt sich:

$$204\text{c)} \quad r_{\prime} = \frac{J_{\prime}}{M \cdot R}.$$

Nun ist $M.R$ offenbar das statische Moment des rotirenden Systems in Bezug auf die Drehaxe, und folglich ist nach Gleichung 158 a) der Quotient:

$\dfrac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}$ gleich dem Abstand des Schwingungspunktes.

Hiernach ergiebt sich als zweite Bedingung, unter welcher die Wirkung der Massenwiderstände auf die Drehaxe gleich Null ist,

> dafs der getroffene Punkt einen Abstand von der Drehaxe haben müsse, welcher gleich dem Abstand des Schwingungspunktes des rotirenden Systems von derselben Axe ist.

Es folgt hieraus ferner, dafs wenn die Drehaxe durch den

Schwerpunkt geht, unter allen Umständen eine Einwirkung der Massenwiderstände auf die Axe ausgeübt wird.

Damit nun endlich die Kräftepaare gleich Null werden, ist zufolge der Gleichung 204a) noch zu setzen:

$$204\,d) \left\{ \begin{array}{l} z_{,} = \dfrac{r_{,}^2}{x_{,}} \cdot \dfrac{\Sigma(dm \,.\, x \,.\, z)}{J_{,}} \text{ und auch} \\ z_{,} = \dfrac{r_{,}^2}{y_{,}} \cdot \dfrac{\Sigma(dm \,.\, y \,.\, z)}{J_{,}}. \end{array} \right.$$

Diese beiden Bedingungen für $z_{,}$ müssen gleichzeitig erfüllt werden; es ist aber nicht unter allen Umständen möglich, sie gleichzeitig zu erfüllen; die Möglichkeit der Erfüllung beider Bedingungen, und folglich die Möglichkeit, daſs die Kräftepaare, welche durch die Massenwiderstände sich bilden, und welche auf Kippen der fixen Axe wirken, gleich Null seien, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{x_{,}}{y_{,}} = \frac{\Sigma(dm.x.z)}{\Sigma(dm.y.z)}.$$

Diese Bedingung findet unter andern statt:

1) wenn $x_{,} = y_{,}$ und $\Sigma(dm.x.z) = \Sigma(dm.y.z)$ ist; und dies wird erfüllt, wenn das rotirende System zwei Ebenen der Symmetrie hat, welche sich in der Drehaxe schneiden, und so liegen, daſs der getroffene Punkt gleich weit von beiden entfernt ist. z ist für diesen Fall unbestimmt.

2) wenn $\Sigma(dm.x.z) = 0$ und $\Sigma(dm.y.z) = 0$ ist; in diesem Falle ist z gleich Null, d. h. der getroffene Punkt muſs in der Ebene liegen, in welcher die Koordinatenaxen liegen, für welchen die eben genannten Werthe gleich Null sind. Dieser Fall findet statt, wenn die Drehungsaxe eine Hauptaxe des Systems ist (§ 88. S. 175), und wenn der getroffene Punkt in derjengen zur Drehaxe normalen Ebene liegt, in welcher auch der Schwerpunkt liegt. Denn nehmen wir den Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der Drehungsaxe als Anfangspunkt der Koordinaten, so ist $z_{,} = 0$ und nach § 88. S. 174 auch

$$\Sigma(dm.x.z) = 0 \text{ und } (\Sigma dm.y.z) = 0.$$

Derjenige Punkt eines rotirenden Systems, welcher, wenn er von einem stoſsenden System getroffen wird, keine Stoſswirkungen durch die Massenwiderstände auf die Drehaxe bedingt, heiſst der Mittelpunkt des Stoſses.

Damit ein Mittelpunkt des Stoſses vorhanden sei, müssen die

Bedingungen der Gleichung 204 d) gleichzeitig erfüllt werden; außerdem gilt für die Lage des Mittelpunktes des Stoßes Folgendes:

1) derselbe liegt in einer Ebene, die durch die Drehaxe und durch den Schwerpunkt gelegt werden kann (Gleichung 204 b);
2) in dieser Ebene hat er von der Drehaxe denselben Abstand, welchen der Schwingungsmittelpunkt des Systems besitzt (Gleichung 204 c);
3) ist die Drehungsaxe eine Hauptaxe, so fällt der Mittelpunkt des Stoßes mit dem Schwingungsmittelpunkt zusammen, d. h. er liegt in der kürzesten Entfernung des Schwerpunktes von der Drehungsaxe (Gleichung 204 d).

Damit überhaupt keine Stoßwirkung auf die Drehaxe erfolge, müssen für die Richtung der Geschwindigkeit des stoßenden Systems folgende Bedingungen erfüllt werden:

1) die Richtung der Geschwindigkeit muß durch den Mittelpunkt des Stoßes gehen;
2) dieselbe muß normal sein zu der Ebene, welche durch die Drehaxe und durch den Schwerpunkt gelegt werden kann. Dies folgt aus den Gesetzen, welche wir für die Bedingungen hergeleitet haben, unter welchen W^{I} und W^{II} gleich Null werden (S. 268).