Von der gemeinschaftlichen Bewegung fester Systeme.

d'Alembert'sches Prinzip und Beispiele für die Anwendung desselben.

§ 107. Denken wir verschiedene feste Systeme, die auf irgend eine Weise mit einander zusammenhängen, so, dafs sie sich gemeinschaftlich bewegen müssen, ohne dafs wir gerade die Bedingung stellen, dafs sie fest verbunden seien. Wir betrachten die Bewegung eines dieser Systeme, und bemerken, dafs der Zusammenhang mit den andern Systemen von Einflufs auf die Bewegung dieses Systems ist; wir wollen die Kräfte, welche den Einflufs dieses Zusammenhanges darstellen mit $Q_{,}, Q_{,,}, Q_{,,,}\dots$ und die auf das betrachtete System aufserdem angebrachten bewegenden Kräfte mit $K_{,}, K_{,,}, K_{,,,}$ bezeichnen. Die Kräfte $K_{,}, K_{,,}\dots$ und $Q_{,}, Q_{,,}\dots$ geben eine Resultirende, und die Gröfse und Richtung dieser Resultirenden ist maafsgebend für die Bewegung des betrachteten Systems. Es sei P die Resultirende aus sämmtlichen auf das betrachtete System angebrachten und aus sämmtlichen durch die Einwirkung der verbundenen Systeme herrührenden Kräften, es sei ferner Q die Resultirende aus sämmtlichen durch die Einflüsse der verbundenen Systeme herrührenden Kräften, und K die Resultirende aus sämmtlichen auf das betrachtete System angebrachten bewegenden Kräften.

Nun denken wir K zerlegt in zwei Komponenten, von denen die eine der Gröfse und Richtung nach gleich P, die andere normal zu P ist, und mit V bezeichnet werden mag; hierdurch haben wir die sämmtlichen auf die Bewegung des betrachteten Systems Einflufs habenden Kräfte auf drei Kräfte gebracht, nämlich 1) die Komponente P, 2) die Komponente V und 3) die Resultirende aus den Einflüssen der verbundenen Systeme Q. Diese drei Kräfte erzeugen vereinigt dieselbe Bewegung, welche auch die Kraft P, die der Richtung und Gröfse nach gleich der Resultirenden aus allen Kräften ist, dem System ertheilen würde, folglich müssen die Kräfte V und Q im Gleichgewicht sein, d. h. es mufs sein:

$$194)\quad V + Q = 0;\; V = -Q.$$

Zerlegen wir diese Kräfte nach drei zu einander normalen Koordinatenaxen und bezeichnen wir die Komponenten mit entsprechenden Marken, so mufs sein:

$$V_I + Q_I = 0;\; V_{II} + Q_{II} = 0;\; V_{III} + Q_{III} = 0.$$

Da aber P die Resultirende aus den Kräften K und Q ist, so ist auch:

$$P_I = K_I + Q_I;\ P_{II} = K_{II} + Q_{II};\ P_{III} = K_{III} + Q_{III}$$

und durch Kombination dieser beiden Gruppen von Gleichungen ergiebt sich:

$$194\,a)\quad V_I = -Q_I = K_I - P_I;\ V_{II} = -Q_{II} = K_{II} - P_{II};$$
$$V_{III} = -Q_{III} = K_{III} - P_{III}.$$

Die Kräfte V_I, V_{II}, V_{III} nennt man die verlornen Kräfte des Systems, sie werden erhalten, wenn man die auf das System angebrachten bewegenden Kräfte K_I, K_{II}... zerlegt nach der Richtung, in welcher das System sich wirklich bewegt und normal dazu. Die Kräfte P_I, P_{II}, P_{III} nennt man die reservirten Kräfte des betrachteten Systems, und es folgt aus dieser Darstellung folgendes Gesetz:

1) Die verlornen Kräfte eines festen Systems, welches sich gemeinschaftlich mit andern verbundenen Systemen bewegt, sind in jedem Augenblick mit den Kräften, die durch den Einflufs der verbundenen Systeme bedingt werden, im Gleichgewicht.

2) Die Komponenten der verlornen Kräfte für drei beliebige Koordinatenaxen sind in jedem Augenblick gleich der Differenz der Komponenten der auf das betrachtete System angebrachten und der reservirten Kräfte auf dieselben Axen bezogen.

Diese Gesetze pflegt man das d'Alembert'sche Prinzip zu nennen.

Als Beispiel für die Anwendung des d'Alembert'schen Prinzips wollen wir die Aufgabe in § 103 benutzen, indem wir die Figur und die Bezeichnungen vollständig beibehalten, und annehmen, dafs die Räder des Wagens sämmtlich gleich grofs sind, gleiche Zapfenhalbmesser haben, gleiche Belastungen tragen und gleiche Trägheitsmomente haben. Für den Grenzzustand des Gleichgewichts gegen Bewegung im Sinne des Druckes P gilt die Bedingungs-Gleichung 190):

$$P = kQ,$$

wenn wir mit k die rechte Seite jener Gleichung bezeichnen. Sobald P gröfser wird, etwa den Werth $P + P' = kQ + P' = K$ bekommt, ist die bewegende Kraft, welche auf das gleitende System einwirkt offenbar:

$$P' \,.\, (\sin\beta + \mu \,.\, \cos\beta) = (K - kQ) \,.\, (\sin\beta + \mu \,.\, \cos\beta).$$

Bewegt sich das System, dessen Gewicht nun K ist mit einer Geschwindigkeit, deren Aenderungsmaafs gleich f ist, so ist die reservirte Kraft offenbar Mf und folglich die verlorene Kraft:

$$195)\quad V = (K - kQ) \,.\, (\sin\beta + \mu \,.\, \cos\beta) - Mf.$$

Diese verlorene Kraft mufs gleich und entgegengesetzt sein den Kräften, welche durch den Einflufs der beiden andern beweglichen Systeme, nämlich der Rolle und des Wagens entstehen, und welche durch das Seil auf das betrachtete System übertragen werden. Ist das Trägheitsmoment der Rolle $J_{\prime}$, so ist die Kraft, welche am Umfange der Rolle wirksam sein mufs, um derselben ein Aenderungsmaafs der Peripheriegeschwindigkeit gleich f oder ein solches der Winkelgeschwindigkeit $= \frac{f}{R}$ zu ertheilen gleich $\frac{J_{\prime} . f}{R^2}$, und da diese Kraft offenbar der Bewegung des Systems K entgegenwirkt, so ist der Einflufs der Rolle auf die Bewegung dieses Systems:

$$\frac{-J_{\prime}}{R^2} . f.$$

Die Masse des Wagens M' bewegt sich mit demselben Aenderungsmaafs f aufwärts. Der Druck, welcher dieses Aenderungsmaafs in der Masse bewirkt, und welcher parallel mit der geneigten Ebene durch den Mittelpunkt der Räder zu denken ist, findet sich durch Gleichung 177):

$$Q_{(e)} = \frac{f . (J_{\prime\prime} + M_{\prime\prime} . a^2)}{a^2},$$

wenn $J_{\prime\prime}$ das Trägheitsmoment der Räder, $M_{\prime\prime}$ die Masse des ganzen Wagens, und a den Halbmesser der Räder bezeichnet. Dieser Druck wirkt, mit Berücksichtigung der Steifheit des Seiles an dem Hebelsarm $R + x$ (Gleichung 185 a) und entspricht, auf den Hebelsarm R reduzirt, einen Druck $Q_{(e)} . \frac{R + x}{R}$, welcher der Bewegung des Systems K entgegenwirkt, und dessen Einflufs auf dieses System also durch:

$$195\,\mathrm{a})\quad -f . \frac{(J_{\prime\prime} + M_{\prime\prime} . a^2)}{a^2} . \frac{R + x}{R}$$

auszudrücken ist.

Demnach sind die Einflüsse der beiden andern beweglichen Systeme auf das betrachtete System zusammen:

$$195\,\mathrm{b})\quad -f . \left\{ \frac{J_{\prime}}{R^2} + \frac{J_{\prime\prime} + M_{\prime\prime} . a^2}{a^2} . \frac{R + x}{R} \right\}$$

und wir haben folglich nach No. 1 des oben entwickelten Gesetzes:

$$195\,\mathrm{c})\quad V - f . \left\{ \frac{J_{\prime}}{R^2} + \frac{J_{\prime\prime} + M_{\prime\prime} . a^2}{a^2} . \frac{R + x}{R} \right\} = 0,$$

und indem wir für V den oben bezeichneten Werth setzen und entwickeln:

$$195\text{d})\quad f = \frac{(K - kQ).(\sin\beta + \mu . \cos\beta)}{M + \frac{J_{\prime}}{R^2} + \left(M_{\prime\prime} + \frac{J_{\prime\prime}}{a^2}\right) . \frac{R+x}{R}} .$$

worin f das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit ist, mit welcher das System K abwärts gleitet;

$K = Mg$ das Gewicht dieses Systems;

$Q = M_{\prime\prime}g$ das Gewicht des Wagens mit den Rädern;

$J_{\prime}$ das Trägheitsmoment, R der Halbmesser der Rolle;

$J_{\prime\prime}$ das Trägheitsmoment, a der Halbmesser der Wagenräder;

β der stumpfe Winkel, welchen die geneigte Ebene auf der K gleitet, mit der Horizontalen macht;

k das Verhältnifs des Gewichtes, welches auf der Seite von K wirksam sein mufs, um das ganze System in den Grenzzustand des Gleitens nach K hin zu bringen, zu dem Gewicht des Wagens Q (Gleichung 190), endlich

x die Vergröfserung des Hebelsarms der Last vermöge der Steifheit des Seils (Gleichung 185a).

Prinzip der Uebertragung der Arbeit.

§ 108. Kehren wir zu den Betrachtungen des § 92 zurück. Wir denken wiederum zwei feste Systeme, welche wir mit I und II bezeichnen wollen. Das System I kann auf dem System II sich verschieben, aber das System II bewegt sich dabei gleichzeitig nach irgend einer gegebenen Richtung. Wir haben gesehen, dafs dann nach dieser Richtung das erste System auf das zweite einen Druck ausübt, welcher durch Gleichung 162):

$$K = M^{I} . (f^{I} - f^{II})$$

zu bestimmen ist, wenn M^{I} die Masse des ersten (gleitenden) Systems, f^{I} das Aenderungsmaafs des auf dieses System einwirkenden Drucks für die Richtung der gemeinschaftlichen Bewegung, und f^{II} das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit des zweiten (ausweichenden) Systems bezeichnen. Wenn während der gemeinschaftlichen Bewegung in der Richtung dieser Bewegung das Wegelement da durchlaufen wird, so ist die Leistung dieses Druckes

$$K . da = M^{I} . (f^{I} - f^{II}) . da.$$

Wenn das ausweichende System sich allein bewegte, ohne dafs eine Einwirkung des gleitenden Systems statt fände, so würde bei Durchlaufung des Wegelementes da nun die Leistung $da . K^{II}$ verrichtet worden sein, durch die Einwirkung des gleitenden Systems