

## Von der gemeinschaftlichen Bewegung fester Systeme.

d'Alembert'sches Prinzip und Beispiele für die Anwendung desselben.

§ 107. Denken wir verschiedene feste Systeme, die auf irgend eine Weise mit einander zusammenhängen, so, daß sie sich gemeinschaftlich bewegen müssen, ohne daß wir gerade die Bedingung stellen, daß sie fest verbunden seien. Wir betrachten die Bewegung eines dieser Systeme, und bemerken, daß der Zusammenhang mit den andern Systemen von Einfluß auf die Bewegung dieses Systems ist; wir wollen die Kräfte, welche den Einfluß dieses Zusammenhanges darstellen mit  $Q_I, Q_{II}, Q_{III} \dots$  und die auf das betrachtete System außerdem angebrachten bewegenden Kräfte mit  $K_I, K_{II}, K_{III}$  bezeichnen. Die Kräfte  $K_I, K_{II} \dots$  und  $Q_I, Q_{II} \dots$  geben eine Resultirende, und die GröÙe und Richtung dieser Resultirenden ist maassgebend für die Bewegung des betrachteten Systems. Es sei  $P$  die Resultirende aus sämtlichen auf das betrachtete System angebrachten und aus sämtlichen durch die Einwirkung der verbundenen Systeme herrührenden Kräften, es sei ferner  $Q$  die Resultirende aus sämtlichen durch die Einflüsse der verbundenen Systeme herrührenden Kräften, und  $K$  die Resultirende aus sämtlichen auf das betrachtete System angebrachten bewegenden Kräften.

Nun denken wir  $K$  zerlegt in zwei Komponenten, von denen die eine der GröÙe und Richtung nach gleich  $P$ , die andere normal zu  $P$  ist, und mit  $V$  bezeichnet werden mag; hierdurch haben wir die sämtlichen auf die Bewegung des betrachteten Systems Einfluß habenden Kräfte auf drei Kräfte gebracht, nämlich 1) die Komponente  $P$ , 2) die Komponente  $V$  und 3) die Resultirende aus den Einflüssen der verbundenen Systeme  $Q$ . Diese drei Kräfte erzeugen vereinigt dieselbe Bewegung, welche auch die Kraft  $P$ , die der Richtung und GröÙe nach gleich der Resultirenden aus allen Kräften ist, dem System ertheilen würde, folglich müssen die Kräfte  $V$  und  $Q$  im Gleichgewicht sein, d. h. es muß sein:

$$194) \quad V + Q = 0; \quad V = -Q.$$

Zerlegen wir diese Kräfte nach drei zu einander normalen Koordinatenaxen und bezeichnen wir die Komponenten mit entsprechenden Marken, so muß sein:

$$V_I + Q_I = 0; \quad V_{II} + Q_{II} = 0; \quad V_{III} + Q_{III} = 0.$$

Da aber  $P$  die Resultirende aus den Kräften  $K$  und  $Q$  ist, so ist auch:

$$P_I = K_I + Q_I; P_{II} = K_{II} + Q_{II}; P_{III} = K_{III} + Q_{III}$$

und durch Kombination dieser beiden Gruppen von Gleichungen ergibt sich:

$$194a) \quad V_I = -Q_I = K_I - P_I; \quad V_{II} = -Q_{II} = K_{II} - P_{II}; \\ V_{III} = -Q_{III} = K_{III} - P_{III}.$$

Die Kräfte  $V_I, V_{II}, V_{III}$  nennt man die verlorenen Kräfte des Systems, sie werden erhalten, wenn man die auf das System angebrachten bewegenden Kräfte  $K_I, K_{II}, \dots$  zerlegt nach der Richtung, in welcher das System sich wirklich bewegt und normal dazu. Die Kräfte  $P_I, P_{II}, P_{III}$  nennt man die reservirten Kräfte des betrachteten Systems, und es folgt aus dieser Darstellung folgendes Gesetz:

- 1) Die verlorenen Kräfte eines festen Systems, welches sich gemeinschaftlich mit andern verbundenen Systemen bewegt, sind in jedem Augenblick mit den Kräften, die durch den Einfluß der verbundenen Systeme bedingt werden, im Gleichgewicht.
- 2) Die Komponenten der verlorenen Kräfte für drei beliebige Koordinatenachsen sind in jedem Augenblick gleich der Differenz der Komponenten der auf das betrachtete System angebrachten und der reservirten Kräfte auf dieselben Axen bezogen.

Diese Gesetze pflegt man das d'Alembert'sche Prinzip zu nennen.

Als Beispiel für die Anwendung des d'Alembert'schen Prinzips wollen wir die Aufgabe in § 103 benutzen, indem wir die Figur und die Bezeichnungen vollständig beibehalten, und annehmen, daß die Räder des Wagens sämtlich gleich groß sind, gleiche Zapfenhalbmesser haben, gleiche Belastungen tragen und gleiche Trägheitsmomente haben. Für den Grenzzustand des Gleichgewichts gegen Bewegung im Sinne des Druckes  $P$  gilt die Bedingungs-Gleichung 190):

$$P = kQ,$$

wenn wir mit  $k$  die rechte Seite jener Gleichung bezeichnen. Sobald  $P$  größer wird, etwa den Werth  $P + P' = kQ + P' = K$  bekommt, ist die bewegende Kraft, welche auf das gleitende System einwirkt offenbar:

$$P' \cdot (\sin\beta + \mu \cdot \cos\beta) = (K - kQ) \cdot (\sin\beta + \mu \cdot \cos\beta).$$

Bewegt sich das System, dessen Gewicht nun  $K$  ist mit einer Ge-

schwindigkeit, deren Aenderungsmaafs gleich  $f$  ist, so ist die reservirte Kraft offenbar  $Mf$  und folglich die verlorene Kraft:

$$195) V = (K - kQ) \cdot (\sin \beta + \mu \cdot \cos \beta) - Mf.$$

Diese verlorene Kraft mufs gleich und entgegengesetzt sein den Kräften, welche durch den Einfluß der beiden andern beweglichen Systeme, nämlich der Rolle und des Wagens entstehen, und welche durch das Seil auf das betrachtete System übertragen werden. Ist das Trägheitsmoment der Rolle  $J_i$ , so ist die Kraft, welche am Umfange der Rolle wirksam sein mufs, um derselben ein Aenderungsmaafs der Peripheriegeschwindigkeit gleich  $f$  oder ein solches der Winkelgeschwindigkeit  $= \frac{f}{R}$  zu ertheilen gleich  $\frac{J_i \cdot f}{R^2}$ , und da diese Kraft offenbar der Bewegung des Systems  $K$  entgegenwirkt, so ist der Einfluß der Rolle auf die Bewegung dieses Systems:

$$\frac{-J_i}{R^2} \cdot f.$$

Die Masse des Wagens  $M'$  bewegt sich mit demselben Aenderungsmaafs  $f$  aufwärts. Der Druck, welcher dieses Aenderungsmaafs in der Masse bewirkt, und welcher parallel mit der geneigten Ebene durch den Mittelpunkt der Räder zu denken ist, findet sich durch Gleichung 177):

$$Q_{(c)} = \frac{f \cdot (J_u + M_u \cdot a^2)}{a^2},$$

wenn  $J_u$  das Trägheitsmoment der Räder,  $M_u$  die Masse des ganzen Wagens, und  $a$  den Halbmesser der Räder bezeichnet. Dieser Druck wirkt, mit Berücksichtigung der Steifheit des Seiles an dem Hebelsarm  $R + x$  (Gleichung 185 a) und entspricht, auf den Hebelsarm  $R$  reduziert, einen Druck  $Q_{(c)} \cdot \frac{R + x}{R}$ , welcher der Bewegung des Systems  $K$  entgegenwirkt, und dessen Einfluß auf dieses System also durch:

$$195 a) -f \cdot \frac{(J_u + M_u \cdot a^2)}{a^2} \cdot \frac{R + x}{R}$$

auszudrücken ist.

Demnach sind die Einflüsse der beiden andern beweglichen Systeme auf das betrachtete System zusammen:

$$195 b) -f \cdot \left\{ \frac{J_i}{R^2} + \frac{J_u + M_u \cdot a^2}{a^2} \cdot \frac{R + x}{R} \right\}$$

und wir haben folglich nach No. 1 des oben entwickelten Gesetzes:

$$195 c) V - f \cdot \left\{ \frac{J_i}{R^2} + \frac{J_u + M_u \cdot a^2}{a^2} \cdot \frac{R + x}{R} \right\} = 0,$$

und indem wir für  $V$  den oben bezeichneten Werth setzen und entwickeln:

$$195d) f = \frac{(K - kQ) \cdot (\sin \beta + \mu \cdot \cos \beta)}{M + \frac{J_1}{R^2} + \left(M_{II} + \frac{J_{II}}{a^2}\right) \cdot \frac{R + x}{R}}.$$

worin  $f$  das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit ist, mit welcher das System  $K$  abwärts gleitet;

$K = Mg$  das Gewicht dieses Systems;

$Q = M_{II}g$  das Gewicht des Wagens mit den Rädern;

$J_1$  das Trägheitsmoment,  $R$  der Halbmesser der Rolle;

$J_{II}$  das Trägheitsmoment,  $a$  der Halbmesser der Wagenräder;

$\beta$  der stumpfe Winkel, welchen die geneigte Ebene auf der  $K$  gleitet, mit der Horizontalen macht;

$k$  das Verhältniß des Gewichtes, welches auf der Seite von  $K$  wirksam sein muß, um das ganze System in den Grenzzustand des Gleitens nach  $K$  hin zu bringen, zu dem Gewicht des Wagens  $Q$  (Gleichung 190), endlich

$x$  die Vergrößerung des Hebelsarms der Last vermöge der Steifheit des Seils (Gleichung 185a).

#### Prinzip der Uebertragung der Arbeit.

§ 108. Kehren wir zu den Betrachtungen des § 92 zurück. Wir denken wiederum zwei feste Systeme, welche wir mit I und II bezeichnen wollen. Das System I kann auf dem System II sich verschieben, aber das System II bewegt sich dabei gleichzeitig nach irgend einer gegebenen Richtung. Wir haben gesehen, daß dann nach dieser Richtung das erste System auf das zweite einen Druck ausübt, welcher durch Gleichung 162):

$$K = M^I \cdot (f^I - f^{II})$$

zu bestimmen ist, wenn  $M^I$  die Masse des ersten (gleitenden) Systems,  $f^I$  das Aenderungsmaafs des auf dieses System einwirkenden Drucks für die Richtung der gemeinschaftlichen Bewegung, und  $f^{II}$  das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit des zweiten (ausweichenden) Systems bezeichnen. Wenn während der gemeinschaftlichen Bewegung in der Richtung dieser Bewegung das Wegelement  $da$  durchlaufen wird, so ist die Leistung dieses Druckes

$$K \cdot da = M^I \cdot (f^I - f^{II}) \cdot da.$$

Wenn das ausweichende System sich allein bewegte, ohne daß eine Einwirkung des gleitenden Systems statt fände, so würde bei Durchlaufung des Wegelementes  $da$  nun die Leistung  $da \cdot K^{II}$  verrichtet worden sein, durch die Einwirkung des gleitenden Systems

aber ist nach dieser Richtung noch die Arbeit  $K.da$  hinzugekommen, und wir nennen diese Arbeit  $K.da$ , daher die von dem gleitenden System auf das ausweichende System **übertragene Arbeit**.

Es bezeichne  $U$  die übertragene Arbeit, so besteht die Gleichung:

$$196) \quad dU = M^I \cdot (f^I - f^{II}) \cdot da = K \cdot da.$$

Die übertragene Arbeit ist gleich Null, entweder wenn  $da$  gleich Null ist, oder wenn  $f^I - f^{II} = 0$  ist, der erste Fall setzt voraus, daß überhaupt kein Wegelement von beiden Systemen gemeinschaftlich durchlaufen wird, daß folglich das System II ein fixes System sei, der andere Fall setzt voraus, daß das ausweichende System mit derselben Geschwindigkeit ausweicht, welche auch durch den Druck der auf das gleitende System wirkenden Kräfte nach dieser Richtung bedingt werden würde. Zwischen diesen beiden Grenzen kann es Werthe von  $f^{II}$  und  $da$  geben, welche die übertragene Arbeit zu einem Maximum machen; die Bestimmung dieser Werthe ist von der Natur des vorliegenden Falles abhängig.

Die Gleichung für  $U$  kann auch so geschrieben werden:

$$dU = (M^I f^I - M^I f^{II}) \cdot da.$$

Nun ist aber  $M^I f^I$  die Komponente der Resultirenden aller auf das System angebrachten Kräfte für die Richtung der Bewegung,  $f^{II}$  dagegen das Aenderungsmaafs der Geschwindigkeit, mit welcher das System sich nach dieser Richtung wirklich bewegt, folglich  $M^I f^{II}$  die Komponente des Druckes, welcher die Bewegung des Systems wirklich bedingt, d. i. nach dem vorigen Paragraphen die Komponente der reservirten Kraft für diese Richtung, daher ist  $M^I f^I - M^I f^{II}$  nichts anderes als die Komponente der verlorenen Kraft des beweglichen Systems, und daher  $dU = (M^I f^I - M^I f^{II}) \cdot da$  nichts anderes, als die Arbeit der verlorenen Kraft. Hierin liegt der Satz:

Wenn zwei materielle Systeme sich bewegen, so daß das eine auf dem andern sich verschiebt, so ist die Arbeit der verlorenen Kraft des einen Systems für die Richtung der gemeinschaftlichen Bewegung gleich der an das andere System übertragenen Arbeit.

### Von der absoluten Bewegung.

Verzeichnung des absoluten Weges.

§ 109. Wenn zwei feste Systeme sich gemeinschaftlich bewegen, während das eine sich auf dem andern verschiebt, so ist die