abstand der beiden Punkte mit h, die Projektion des durchlaufenen Weges auf eine Horizontalebene mit p, so gehen die Gleichungen über in:

$$192\text{b)}\left\{\begin{aligned} &L\ (\text{Leistung}) = G\,.\,(h - \mu p) \\ &h = \frac{v'^2 - v''^2}{2g} + \mu p \\ &v' = \sqrt{\left\{2g\,.\,(h - \mu p) + v''^2\right\}}. \end{aligned}\right.$$

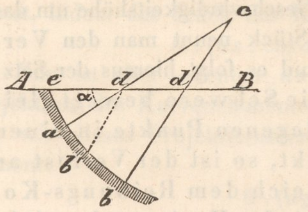
Wenn dagegen ein festes System der Schwere entgegen sich mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit v'' aufwärts bewegt, so ergiebt sich leicht die Steighöhe:

$$192\text{c)}\left\{\begin{aligned} &h = \frac{v''^2 - v'^2}{2g} - \mu p \\ &\text{und die Geschwindigkeit in einer gewissen Höhe} \\ &v' = \sqrt{\left\{v''^2 - 2g\,.\,(h + \mu p)\right\}}. \end{aligned}\right.$$

Reibungswiderstände beim Gleiten eines festen Systems auf einer Kurve, wenn dasselbe mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit sich bewegt, und sonst keine bewegenden Kräfte auf dasselbe einwirken.

§ 105. Gestalten wir nunmehr die Aufgabe anders: Es bewege sich ein festes System ohne Einwirkung der Schwere auf einer beliebigen Kurve, indem es in irgend einem Punkte der Kurve die Tangentialgeschwindigkeit c hat: welchen Einfluſs hat die Reibung auf die Aenderung der Geschwindigkeit c, wenn auch sonst keine bewegenden Kräfte auf das System einwirken?

Es sei in nebenstehender Figur $ds = ab$ ein beliebiges Element der Kurve; ac und bc seien Normalen im Anfangs- und Endpunkte dieses unendlich kleinen Elementes, so ist der Durchschnittspunkt dieser beiden Normalen der Mittelpunkt des Krümmungskreises des Elementes; den veränderlichen Winkel, welchen die Normalen zur Kurve mit einer beliebigen Axe z. B. AB bilden, nennen wir α, dann ist Winkel $ed'b = edb' = \alpha + d\alpha$, da ad und bd zwei unendlich nahe liegende Normalen sind: mithin ist Winkel $adb' = acb = d\alpha$. Nun können wir die Bewegung in dem Kurvenelement hervorgebracht denken durch eine Normalkraft, welche das gleitende Stück gegen die Kurve preſst, durch den Widerstand derselben aufgehoben



wird, folglich Reibung erzeugt, und durch eine Tangentialkraft. Die Normalkraft ist $\frac{M.c^2}{r}$ folglich die Reibung $= \frac{\mu M.c^2}{r}$, wenn r den Krümmungshalbmesser der Kurve bezeichnet. Dieser Reibungswerth ist als eine, normal zum Krümmungshalbmesser, also tangential wirkende, und die Geschwindigkeit c im Kurvenelement verzögernde Kraft zu denken, das Aenderungsmaaſs der Geschwindigkeit, welches diese Kraft bedingt, ist daher in Bezug auf die Geschwindigkeit c negativ zu nehmen, und es ist also

$$f = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = -\frac{\mu.c^2}{r}.$$

Nun ist aber das Element der Geschwindigkeitsänderung auch gleich $f.dt$, und folglich haben wir

$$dc = f.dt = -\frac{\mu.c^2}{r}.dt,$$

da aber $dt = \frac{ds}{c}$, ferner $ds = r.d\alpha$ ist, so ergiebt sich, durch Einsetzung und nach gehöriger Umformung:

$$\frac{dc}{c} = -\mu.d\alpha,$$

und indem wir auf beiden Seiten integriren, ergiebt sich:

$$\int\frac{dc}{c} = -\mu\int d\alpha.$$

Nehmen wir das Integral rechts zwischen bestimmten Grenzen, so muſs auch das Integral links zwischen entsprechenden Grenzen gelten.

Wenn nun in irgend einem Punkte der Kurve, dessen Normale mit einer beliebig angenommenen Linie den Winkel α' bildet, die Geschwindigkeit des beweglichen Systems c' ist, und in irgend einem andern Punkte der Kurve bilde die Normale mit derselben Linie den Winkel α'', so findet sich die in diesem Punkte statt findende Geschwindigkeit durch die Gleichung:

$$\int_{c=c''}^{c=c'}\frac{dc}{c} = -\mu\int_{\alpha=\alpha''}^{\alpha=\alpha'} da$$

$$\log \text{nat}\, c'' - \log \text{nat}\, c' = -\mu.(\alpha'' - \alpha')$$

$$193)\ \left\{\begin{aligned} &\log \text{nat} \frac{c'}{c''} = \mu.(\alpha'' - \alpha') \\ &\frac{c'}{c''} = e^{\mu.(\alpha''-\alpha')} \\ &c'' = \frac{c'}{e^{\mu.(\alpha''-\alpha')}} \end{aligned}\right.$$

In diesen Gleichungen bezeichnet c' die Geschwindigkeit in der Tangente zur Kurve in einem Punkte dessen Normale den Winkel α' mit einer beliebigen Linie macht; c'' die Geschwindigkeit, welche das gleitende System in einem andern Punkte besitzt, dessen Normale mit derselben Linie den Winkel α'' macht, wenn die Geschwindigkeitsänderung lediglich durch die Reibung bewirkt worden ist; e die Basis der natürlichen Logarithmen.

Ist die Kurve eine ebene Kurve, und nimmt man die Linie von welcher aus die Winkel α' und α'' gemessen sind in derselben Ebene, so ist $\alpha'' - \alpha'$ der Winkel, welchen die beiden Normalen zur Kurve am Anfange und am Ende des betrachteten Weges mit einander bilden.

Die Arbeit der Reibung drückt sich offenbar aus durch

193a) $$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}M.(c''^2 - c'^2) = -\frac{1}{2}M.(c'^2 - c''^2) \\ \text{und indem wir für } c'' \text{ den oben gefundenen Werth setzen} \\ = -\frac{1}{2}M.c'^2.\left(1 - \frac{1}{e^{2\mu.(\alpha''-\alpha')}}\right) = -\frac{1}{2}M.c'^2.\frac{e^{2\mu.(\alpha''-\alpha')} - 1}{e^{2\mu.(\alpha''-\alpha')}}. \end{array}\right.$$

Hierin liegt folgendes Gesetz:

Wenn ein festes System in einer Kurve gleitet, ohne dafs bewegende Kräfte auf dasselbe ferner einwirken, so ist die durch die Reibung konsumirte Arbeit, indem das System einen gegebenen Bogen der Kurve durchläuft proportional der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit zu Anfang dieses Bogens und aufserdem eine logarithmische Funktion des Produkts aus dem Reibungs-Koeffizienten und der Differenz der Winkel, welche die Normalen im Anfangs- und im Endpunkt des Bogens mit einer gegebenen Linie bilden; im Uebrigen aber unabhängig von der Form der Kurve.

Aus der Gleichung $\frac{c'}{c''} = e^{\mu.(\alpha''-\alpha')}$

folgt auch, dafs bei einer gegebenen Kurve das Verhältnifs der Anfangsgeschwindigkeit zur Endgeschwindigkeit ein konstanter Werth ist, unabhängig von dem Werthe der Geschwindigkeiten, und nur abhängig von den Winkeln, welche die erste und letzte Normale mit einer gegebenen Linie bilden. Sind diese Normalen der Lage nach gegeben, so ist für alle äquidistanten Kurven zwischen denselben Krümmungsradien dies Verhältnifs constant.

Es versteht sich übrigens ganz von selbst, dafs diese Betrachtungen nur Giltigkeit haben können für solche Kurvenstücke, für welche die Integrationen zulässig sind, und dafs sie daher **nicht gelten können, wenn innerhalb des betrachteten Bogenstücks ein Wendepunkt der Kurve liegt.**

Die Untersuchungen der §§ **104** u. **105**, welche, soviel dem Verfasser bekannt ist, zwei bisher noch nicht aufgestellte Gesetze ergeben haben, dürften geeignet sein, auf die Theorie der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen, namentlich in gekrümmten Röhren Anwendung zu finden.

Tabellen über die Reibungs-Koeffizienten.

§ 106. I. Reibung ebener Flächen, nachdem sie einige Zeit mit einander in Berührung gewesen sind.

Berührungsflächen.	Lage der Fasern.	Zustand der Flächen.	Reibungs-Koeffizient μ.	Reibungswinkel ϑ.
Versuche von Morin.				
Eichenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,62	31° 48′
	parallel	mit trockener Seife abgerieben . .	0,44	23 45
	rechtwinklig . .	trocken	0,54	28 22
	rechtwinklig . .	mit Wasser benetzt	0,71	35 23
	Hirnholz des einen auf dem Längenholze des anderen	trocken	0,43	23 16
Eichenholz auf Ulmenholz . .	parallel	trocken	0,38	20 49
Ulmenholz auf Eichenholz . .	parallel	trocken	0,69	34 37
	parallel	mit trockener Seife abgerieben . .	0,41	22 18
	rechtwinklig . .	trocken	0,57	29 41
Eschen-, Tannen-, Buchen- und Ebereschenholz auf Eichenholz	parallel	trocken	0,53	27 56
Lohgares Leder auf Eichenholz	das Leder platt .	trocken	0,61	31 23
	das Leder auf der hohen Kante	trocken	0,43	23 16
		mit Wasser benetzt	0,79	38 19
Schwarzes Riemenleder auf einer ebenen Fläche von Eichenholz .	parallel	trocken	0,74	36 30
Schwarzes Riemenleder auf einer Trommel von Eichenholz	rechtwinklig . .	trocken	0,47	25 11
Geflochtener Hanf auf Eichenholz	parallel	trocken	0,50	26 34
	parallel	mit Wasser benetzt	0,87	41 2
Hanfne Seile auf Eichenholz .	parallel	trocken	0,80	38 40
Schmiedeeisen auf Eichenholz .	parallel	trocken	0,62	31 48
	parallel	mit Wasser benetzt	0,65	33 2
Gufseisen auf Eichenholz . . .	parallel	mit Wasser benetzt	0,65	33 2
Messing auf Eichenholz . . .	parallel	trocken	0,62	31 48
Liderung eines Kolbens von Rindleder auf Gufseisen	platt oder auf der hohen Kante	mit Wasser benetzt	0,62	31 48
		mit Oel, Talg oder Schweinefett .	0,12	6 51
Schwarzes Riemenleder auf einer gufseisernen Rolle	platt	trocken	0,28	15 39
		mit Wasser benetzt	0,38	20 49
Gufseisen auf Gufseisen . . .	. . . .	trocken	0,16 *	9 6
Schmiedeeisen auf Gufseisen .	. . . .	trocken	0,19	10 46
Eichenholz, Ulmenholz, Hainbuchenholz, Schmiedeeisen, Gufseisen und Bronze, je zwei aufeinander.	. . . .	mit Talg . . .	0,10 **	5 43
		mit Oel oder Schweinefett .	0,15 †	8 32

*) Die Flächen blieben etwas fettig.
**) Wenn die Berührung nicht lange genug gedauert hatte, um das Fett auszupressen.
†) Wenn die Berührung so lange gedauert hatte, dafs das Fett ausgeprefst war.